

Faculté Polytechnique de Mons
Service de Mécanique des Matériaux
et des Structures

Résistance des Matériaux

Exercices

Dr Sélim Datoussaid et Prof Guy Guerlement

Boulevard Dolez 31
7000 MONS
BELGIQUE
Tél. : 32.65.37.45.26
Fax. : 32.65.37.45.28
Email : selim.datoussaid@fpms.ac.be

Formulaire de Résistance des Matériaux

Rue du Joncquois 53, 7000, MONS, BELGIQUE
Tél. : 32.65.37.45.26 Fax. : 32.65.37.45.28 Email : selim.datoussaid@fpms.ac.be

Notation

E	module de Young ou module d'élasticité [N/mm^2]	t	épaisseur [m]
ν	coefficient de Poisson $0 \leq \nu \leq 0.5$	A	section [m^2]
G	module de cisaillement $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ [N/mm^2]	P	périmètre [m]
ϵ_i	déformation normale $i = x, y, z$	\bar{A}	section moyenne [m^2]
γ_{ij}	déformation de cisaillement $ij = xy, xz, yz$	I	inertie géométrique de la section [m^4]
N	effort normal de traction et de compression [N]	I/ν	module de la section [m^3]
T	effort tranchant [N]	I_p	inertie polaire de la section [m^4]
M	moment fléchissant [Nm]	\mathcal{H}	moment d'aire [m^3]
M_t	moment de torsion [Nm]		
$E_{acier} = 21000 daN/mm^2$			$\nu_{acier} = 0.3$
$E_{aluminium} = 7000 daN/mm^2$			$\nu_{aluminium} = 0.3$
$E_{béton} = 1050 daN/mm^2$			$\nu_{béton} = 0.3$

Formulaire

– Convention de signes pour la représentation des efforts internes

– Déplacement d'un point sous charge

$$\delta = \int_{structure} \frac{1}{EI} M_{\Sigma P} M_{s1} ds + \int_{structure} \frac{1}{EA} N_{\Sigma P} N_{s1} ds + \int_{structure} \frac{1}{GA'} T_{\Sigma P} T_{s1} ds + \int_{structure} \frac{1}{GI_p} M_{t\Sigma P} M_{t_{s1}} ds$$

– Traction-compression

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \epsilon = \frac{N}{EA} \quad \sigma = E\epsilon$$

Cylindre fermé à parois mince sous pression

$$\sigma_\theta = \frac{Pr}{t} \quad \sigma_x = \frac{Pr}{2t}$$

– Flexion pure

$$\text{rectangle plein } I = \frac{bh^3}{12} \quad v = \frac{h}{2}$$

$$\text{rectangle creux } I = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} \quad v = \frac{H}{2}$$

$$\text{disque plein } I = \frac{\pi d^4}{64} \quad v = \frac{d}{2}$$

$$\text{disque creux } I = \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4) \approx \pi r_m^3 t \quad v = \frac{d_e}{2}$$

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

$$\sigma_{max} = -\frac{M}{I/\nu}$$

– Torsion

$$\begin{aligned} \text{profil fermé } I_\theta &= \frac{4\bar{A}^2 t}{P} & \tau_{xs} &= \frac{M_t}{2At} \\ \text{profil ouvert } I_\theta &= \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3 & \tau_{xs} &= \frac{M_t t_i}{I_\theta} \\ \text{disque plein } I_\theta &= \frac{\pi d^4}{32} & \tau_{x\theta} &= \frac{M_t r}{I_\theta} \\ \text{disque creux } I_\theta &= \frac{\pi}{32} (d_e^4 - d_i^4) & \tau_{x\theta} &= \frac{M_t r_e}{I_\theta} \end{aligned}$$

– Flexion-cisaillement

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{T \mathcal{H}}{I t} \\ \mathcal{H} &= \int y dA \end{aligned}$$

- dans les parois verticale, τ_{xy} agit dans le même sens que T ;
 - dans les parois horizontale, τ_{xz} opère *dans le sens* de τ_{xy} verticale ;
 - $\tau_{xy} = 0$ aux points de symétrie ;
 - $\tau_{xy} = 0$ aux extrémités libres.
- Critère de cisaillement maximal de Tresca

$$\tau_{max} = \left| \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \right| \leq \frac{\sigma_{adm}}{2}$$

$$(\sigma_{max}, \sigma_{min}) \in (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad \text{convention : } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\text{En cas plan de contrainte : } \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

- Critère de l'énergie de distorsion maximale de Von Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \leq \sigma_{adm}$$

$$\text{convention : } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\text{En cas plan de contrainte : } \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Table des matières

1	Notations et formules importantes	5
1.1	Notation	5
1.2	Formulaire	5
2	Systèmes isostatiques	7
2.1	Exercice	7
2.1.1	Solution.	7
2.2	Exercice	9
2.2.1	Solution.	10
2.3	Exercice	13
2.3.1	Solution.	14
2.4	Exercice	15
2.4.1	Solution.	16
2.5	Exercice	17
2.5.1	Solution.	18
3	Systèmes hyperstatiques	19
3.1	Exercice	19
3.1.1	Solution.	19
3.2	Exercice	28
3.2.1	Solution.	28
3.3	Exercice	33
3.3.1	Réponse.	33
3.4	Exercice.	34
3.4.1	Réponse.	34
3.5	Exercice.	35
4	Traction et compression pure	38
4.1	Exercice	38
4.1.1	Solution	38
4.2	Exercice	39
4.2.1	Réponse	39
4.3	Exercice	39
4.3.1	Solution.	40
4.4	Exercice	40
4.4.1	Réponse	40
4.5	Exercice	40
4.5.1	Solution	41
4.6	Exercice	43
4.6.1	Réponse	43
4.7	Exercice	43
4.7.1	Réponse	43
4.8	Exercice	43
4.8.1	Réponse	44

4.9	Exercice	44
4.9.1	Solution	44
4.10	Exercice	45
4.10.1	Solution	45
5	Flexion pure	46
5.1	Exercice	46
5.1.1	Solution	46
5.2	Exercice	47
5.2.1	Solution	47
5.3	Exercice	48
5.3.1	Solution	48
6	Torsion pure	50
6.1	Exercice	50
6.1.1	Solution	50
6.2	Exercice	50
6.2.1	Réponse	51
6.3	Exercice	51
6.3.1	Solution	51
6.4	Exercice	52
6.4.1	Réponse	53
6.5	Exercice	53
6.5.1	Réponse	53
6.6	Exercice	53
6.6.1	Réponse	54
7	Flexion et cisaillement	55
7.1	Exercice	55
7.1.1	Solution	55
7.2	Exercice	58
7.2.1	Solution	59
8	Examen écrit de Résistance des Matériaux - 5 janvier 2001	61
8.1	Exercice	61
8.1.1	Réponse	61
8.2	Exercice	62
8.2.1	Réponse	63
8.3	Exercice	64
8.3.1	Réponse	64
9	Examen écrit de Résistance des Matériaux - 27 août 2001	65
9.1	Exercice	65
9.1.1	Réponse	65
9.2	Exercice	66
9.2.1	Réponse	67
9.3	Exercice	67
9.3.1	Réponse	68

Chapitre 1

Notations et formules importantes

1.1 Notation

E	module de Young ou module d'élasticité [N/mm^2]
ν	coefficient de Poisson $0 \leq \nu \leq 0.5$
G	module de cisaillement $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ [N/mm^2]
ϵ_i	déformation normale $i = x, y, z$
γ_{ij}	déformation de cisaillement $ij = xy, xz, yz$
N	effort normal de traction et de compression [N]
T	effort tranchant [N]
M	moment fléchissant [Nm]
M_t	moment de torsion [Nm]
t	épaisseur [m]
A	section [m^2]
P	périmètre [m]
\bar{A}	section moyenne [m^2]
I	inertie géométrique de la section [m^4]
$\frac{I}{v}$	module de la section [m^3]
I_p	inertie polaire de la section [m^4]

1.2 Formulaire

– Convention de signes pour la représentation des efforts internes

– Déplacement d'un point sous charge

$$\delta = \int_{structure} \frac{1}{EI} M_{\Sigma P} M_{s1} ds + \int_{structure} \frac{1}{EA} N_{\Sigma P} N_{s1} ds + \int_{structure} \frac{1}{GA'} T_{\Sigma P} T_{s1} ds + \int_{structure} \frac{1}{GI_p} M_{t\Sigma P} M_{t_{s1}} ds$$

– Traction-compression

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \epsilon = \frac{N}{EA}$$

– Flexion pure

$$\begin{aligned} \text{rectangle plein } I &= \frac{bh^3}{12} & v &= \frac{h}{2} \\ \text{rectangle creux } I &= \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} & v &= \frac{H}{2} \\ \text{disque plein } I &= \frac{\pi}{64}d^4 & v &= \frac{d}{2} \\ \text{disque creux } I &= \frac{\pi}{64}(d_e^4 - d_i^4) \approx \pi r_m^3 t & v &= \frac{d_e}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{My}{I} \\ \sigma_{max} &= -\frac{M}{I/v} \end{aligned}$$

– Torsion

$$\begin{aligned} \text{profil fermé } I_\theta &= \frac{4\bar{A}^2 t}{P} & \tau_{xs} &= \frac{M_t}{2At} \\ \text{profil ouvert } I_\theta &= \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3 & \tau_{xs} &= \frac{M_t t_i}{I_\theta} \\ \text{disque plein } I_\theta &= \frac{\pi}{32}d^4 & \tau_{x\theta} &= \frac{M_t r}{I_\theta} \\ \text{disque creux } I_\theta &= \frac{\pi}{32}(d_e^4 - d_i^4) & \tau_{x\theta} &= \frac{M_t r_e}{I_\theta} \end{aligned}$$

– Flexion-cisaillement

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{TQ}{It} \\ Q &= \int ydA \end{aligned}$$

- dans les parois verticale, τ_{xy} agit dans le même sens que T ;
- dans les parois horizontale, τ_{xz} opère *dans le sens* de τ_{xy} verticale ;
- $\tau_{xy} = 0$ aux points de symétrie ;
- $\tau_{xy} = 0$ aux extrémités libres.

Chapitre 2

Systèmes isostatiques

2.1 Exercice

Tracer et coter les diagrammes M, N, T pour le système isostatique ci-dessous.
Toutes les dimensions sont données en m .

2.1.1 Solution.

Choix du système : la poutre

On adopte le repère XYZ de la figure ci-dessous pour la projection des équations d'équilibre

Inventaire des efforts : – (F_{Ax}, F_{Ay}) en A

– $(0, -20) kN$ en C

– $(0, -20) kN$ en D

– $(0, F_B)$ en B

– charge répartie $(0, -5) kN/m$ de B à E

Equations d'équilibre de translation

$$F_{Ax} = 0 \tag{2.1}$$

$$F_{Ay} - 20 - 10 - 5 \cdot 2 + F_b = 0 \tag{2.2}$$

Equation d'équilibre de rotation en A

$$-2 \cdot 20 - 4 \cdot 10 + 6F_B - (5 \cdot 2) \cdot 7 = 0 \Rightarrow F_B = 25kN \quad (2.3)$$

En remplaçant dans (2.2), on obtient :

$$F_{Ay} = 15kN \quad (2.4)$$

Vérification : équation d'équilibre de rotation en B :

$$-15 \cdot 6 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 2 - (5 \cdot 2) \cdot 1 = 0 \quad (2.5)$$

Diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant :

Il n'y a évidemment pas d'effort normal.

tronçon	système considéré		
$A - C^g$	<p style="text-align: center;">N T M</p> <p style="text-align: center;">15 kN</p> $15 - T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = 15kN$ $-15x + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = 15xkNm$		
$C^d - D^g$	<p style="text-align: center;">20 kN</p> <p style="text-align: center;">N T M</p> <p style="text-align: center;">15 kN</p> $15 - 20 - T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = -5kN$ $-15x + 20(x - 2) + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = -5x + 40kNm$		
$D^d - B^g$	<p style="text-align: center;">20 kN 10 kN</p> <p style="text-align: center;">N T M</p> <p style="text-align: center;">15 kN</p> $15 - 20 - 10 - T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = -15kN$ $-15x + 20(x - 2) + 10(x - 4) + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = -15x + 80kNm$		
$B^d - E^g$	<p style="text-align: center;">20 kN 10 kN</p> <p style="text-align: center;">5 kN/m</p> <p style="text-align: center;">N T M</p> <p style="text-align: center;">15 kN 25 kN</p> $15 - 20 - 10 + 25 - 5(x - 6) - T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = -5x + 40kN$ $-15x + 20(x - 2) + 10(x - 4) - 25(x - 6) - \frac{5}{2}(x - 6)^2 + M(x) = 0$ $\Rightarrow M(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 40x - 160kNm$		

Pour le tronçon $B^d - E^g$, il aurait été plus facile d'exprimer l'équilibre de la partie droite plutôt que celle de la partie gauche :

$$\begin{array}{l} \text{M} \quad \text{T} \quad \text{N} \end{array} \quad \begin{array}{l} 5 \text{ kN/m} \\ T(y) - 5y = 0 \Rightarrow T(x) = 5y \text{ kN} \\ -M(y) + \frac{5}{2}y^2 = 0 \Rightarrow M(x) = -\frac{5}{2}y^2 \text{ kNm} \end{array} \quad \text{avec } y = 8 - x$$

La figure ci-dessous reprend graphiquement l'évolution des efforts dans la poutre :

2.2 Exercice

Tracer et coter les diagrammes M, N, T pour le système isostatique ci-dessous. Toutes les dimensions sont données en m .

2.2.1 Solution.

Choix du système : la poutre

On adopte le repère XYZ de la figure ci-dessous pour la projection des équations d'équilibre

Inventaire des efforts : – (F_{Ax}, F_{Ay}) en A

- M_A en A
- $(10, 0) \text{ kN}$ en D
- $(0, -20) \text{ kN}$ en C
- 10 kNm en C

Equations d'équilibre de translation

$$F_{Ax} + 10 = 0 \Rightarrow F_{Ax} = -10 \text{ kN} \quad (2.6)$$

$$F_{Ay} - 20 = 0 \Rightarrow F_{Ay} = 20 \text{ kN} \quad (2.7)$$

Equation d'équilibre de rotation en A

$$M_A - 10 \cdot 3 - 20 \cdot 3 + 10 = 0 \Rightarrow M_A = 80 \text{ kNm} \quad (2.8)$$

Vérification : équation d'équilibre de rotation en C :

$$10 + 10 \cdot 3 - 10 \cdot 6 - 20 \cdot 3 + 80 = 0 \quad (2.9)$$

Diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant :

On adoptera l'abscisse curviligne s pour décrire l'évolution des efforts dans la poutre.

tronçon	système considéré
$A - D^-$	M
	N
	T
	<p>10 kN 20 kN 80 kNm</p> $20 + N(s) = 0 \quad \Rightarrow N(s) = -20 \text{ kN}$ $-10 + T(s) = 0 \quad \Rightarrow T(s) = 10 \text{ kN}$ $80 - 10s + M(x) = 0 \quad \Rightarrow M(x) = 10s - 80 \text{ kNm}$
$D^+ - B^-$	M
	N
	T
	<p>10 kN</p> <p>10 kN 20 kN 80 kNm</p> $20 + N(x) = 0 \quad \Rightarrow N(s) = -20 \text{ kN}$ $-10 + 10 + T(s) = 0 \quad \Rightarrow T(s) = 0 \text{ kN}$ $80 - 10s + 10(s - 3) + M(s) = 0 \quad \Rightarrow M(s) = -50 \text{ kNm}$
$B^+ - C$	N T M
	10 kN
	10 kN 20 kN 80 kNm
	$-10 + 10 + N(s) = 0 \quad \Rightarrow N(s) = 0 \text{ kN}$ $20 - T(s) = 0 \quad \Rightarrow T(s) = 20 \text{ kN}$ $80 + 10 \cdot 6 - 20(s - 6) + 10 \cdot 3 + M(s) = 0 \quad \Rightarrow M(s) = 20s - 170 \text{ kNm}$

Pour le tronçon $B^+ - C$, il aurait été plus facile d'exprimer l'équilibre de la partie droite plutôt que celle de la partie gauche :

$$\begin{array}{l}
 \text{M} \quad \text{T} \quad \text{N} \quad \quad 10 \text{ kNm} \quad \quad T(u) - 20 = 0 \Rightarrow T(u) = 20 \text{ kN} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -M(u) - 20u = 0 \Rightarrow M(u) = -20u \text{ kNm} \quad \text{avec } u = 9 - u
 \end{array}$$

La figure ci-dessous reprend graphiquement l'évolution des efforts dans la poutre :

2.3 Exercice

Tracer et coter les diagrammes M, N, T pour les systèmes isostatiques ci-dessous. Toutes les dimensions sont données en m .

exercice 2.3.1

exercice 2.3.2

exercice 2.3.3

exercice 2.3.4

FIG. 2.1 – poutres isostatiques

2.3.1 Solution.

Dans les solutions ci-dessous, les réactions d'appui sont fournies de gauche à droite. La flèche indique le sens positif de l'effort.

exercice 2.3.1 $\uparrow 32.5\text{ kN} \uparrow 17.5\text{ kN}$	exercice 2.3.2 $\uparrow 5\text{ kN} \uparrow 15\text{ kN} \uparrow 15\text{ kN} \uparrow 5\text{ kN}$
exercice 2.3.3 $\uparrow 15\text{ kN} \uparrow 45\text{ kN} \uparrow 45\text{ kN} \uparrow 15\text{ kN}$	exercice 2.3.4 $\uparrow 10\text{ kN} \uparrow 40\text{ kN} \uparrow 40\text{ kN} \uparrow 10\text{ kN}$

2.4 Exercice

Tracer et coter les diagrammes M, N, T pour les systèmes isostatiques ci-dessous. Toutes les dimensions sont données en m .

exercice 2.4.1

exercice 2.4.2

exercice 2.4.3

FIG. 2.2 – systèmes isostatiques

2.4.1 Solution.

Dans les solutions ci-dessous, les réactions d'appui sont fournies de gauche à droite. La flèche indique le sens positif de l'effort

exercice 2.4.1 $\uparrow 12.8125 \text{ kN} \leftarrow 19 \text{ kN} \uparrow 7.1875 \text{ kN} \leftarrow 6 \text{ kN}$	exercice 2.4.2 $\uparrow 2.5 \text{ kN} \rightarrow 0 \text{ kN} \uparrow 7.5 \text{ kN} \leftarrow 20 \text{ kN}$
exercice 2.4.3 $\uparrow 2.985 \text{ kN} \leftarrow 3.333 \text{ kN} \downarrow 2.985 \text{ kN} \rightarrow 3.333 \text{ kN}$	

2.5 Exercice

Tracer et coter les diagrammes M, N, T pour les systèmes isostatiques ci-dessous. Toutes les dimensions sont données en m .

exercice 2.5.1

exercice 2.5.2

exercice 2.5.3

FIG. 2.3 – systèmes isostatiques

2.5.1 Solution.

Dans les solutions ci-dessous, les réactions d'appui sont fournies de gauche à droite. La flèche indique le sens positif de l'effort

exercice 2.5.1 $\uparrow 37.5 \text{ kN} \rightarrow 7.5 \text{ kN} \uparrow 12.5 \text{ kN} \leftarrow 7.5 \text{ kN}$	exercice 2.5.2 $\uparrow 73.32 \text{ kN} \uparrow 86.68 \text{ kN}$
exercice 2.5.3 $\downarrow 1.5 \text{ kN} \leftarrow 10 \text{ kN} \uparrow 6.5 \text{ kN} \rightarrow 0 \text{ kN}$	

Chapitre 3

Systèmes hyperstatiques

3.1 Exercice

On considère la poutre en acier ($E = 210.000 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0.3$) de la figure ci-dessous. Déterminez son module de flexion (I/v en cm^3) de façon à ce que la contrainte maximale de flexion ne dépasse pas 160 N/mm^2 .

NB : on néglige les contraintes créées par l'effort tranchant.

3.1.1 Solution.

Le système est une fois hyperstatique. Pour le rendre isostatique, une rotule peut être introduite entre les noeuds B et F . Elle ne peut en aucun cas être placée entre A et B inclure car le système deviendrait un mécanisme.

Système isostatique de référence en introduisant une rotule en D .

Résolution du système isostatique chargé

– Equilibre de rotation en D (partie gauche) :

$$4.5 \cdot 15 - F_B \cdot 3 + 60 \cdot 1 = 0 \Rightarrow F_B = 42.5 \text{ kN} \quad (3.1)$$

- Equilibre de rotation en E (partie gauche) :

$$15 \cdot 6.5 - 42.5 \cdot 5 + 60 \cdot 3 - F_D \cdot 2 = 0 \Rightarrow F_D = 32.5 \text{ kN} \quad (3.2)$$

- Equilibre vertical de l'ensemble

$$15 + 60 - 42.5 - 32.5 - F_F = 0 \Rightarrow F_F = 25 \text{ kN} \quad (3.3)$$

- Equilibre de rotation en E (partie droite) :

$$25 \cdot 2 + M_F = 0 \Rightarrow M_F = -50 \text{ kNm} \quad (3.4)$$

- Vérification : équilibre de rotation en A :

$$42.5 \cdot 1.5 - 60 \cdot 3.5 + 32.5 \cdot 4.5 - 25 \cdot 6.5 + 25 \cdot 8.5 - 50 = 0 \quad (3.5)$$

- Diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant :

Résolution du système isostatique sous un effort unitaire à la coupure

- Equilibre de rotation en D (partie gauche) :

$$-3 \cdot F_B + 1 = 0 \Rightarrow F_B = \frac{1}{3} \quad (3.6)$$

- Equilibre de rotation en D (partie droite) :

$$-1 + 4 \cdot F_F + M_F = 0 \quad (3.7)$$

- Equilibre de rotation en E (partie droite) :

$$2 \cdot F_F + M_F = 0 \quad (3.8)$$

De (3.7) et (3.8), on détermine aisément :

$$F_F = \frac{1}{2} \quad (3.9)$$

$$M_F = -1 \quad (3.10)$$

- Equilibre vertical de l'ensemble :

$$\frac{1}{3} + F_D + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow F_D = -\frac{5}{6} \quad (3.11)$$

- Diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant :

Calcul de l'inconnue hyperstatique

Au droit de la coupure, la rotation due à la coupure est annulée par le couple X_1 :

$$\delta_1 \sum P + \delta_{11} = 0 \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow \delta_1 \sum P + (11)X_1 = 0 \quad (3.13)$$

Calcul du déplacement unitaire (11)

$$(11) = \frac{1}{EI} \int_{poutre} M_1 \cdot M_1 ds \quad (3.14)$$

$$= \frac{1}{EI} \int ds \quad (3.15)$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\int 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad ds + \int 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad ds + \int 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad ds \right) \quad (3.16)$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\int 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad ds + 2 \int 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad ds \right) \quad (3.17)$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \right) \quad (3.18)$$

$$= \frac{1}{EI} \frac{7}{3} \quad (3.19)$$

Calcul du déplacement dû au chargement $\delta_{1\Sigma P}$

$$\delta_{1\Sigma P} = \frac{1}{EI} \int_{poutre} M_{s1} \cdot M_1 ds \quad (3.20)$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\int 0 \quad 32.5 \quad 0 \quad 2/3 \quad ds + \int 0 \quad 1 \quad 2/3 \quad 1 \quad ds \right) \quad (3.21)$$

$$+ \int 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad ds \quad (3.22)$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} \frac{2}{3} (2 \cdot 32.5 - 22.5) 2 + \frac{1}{6} 32.5 \left(\frac{4}{3} + 1 \right) 1 + \frac{1}{6} (-1) (-2 \cdot 50) 2 \right) \quad (3.22)$$

$$= \frac{1}{EI} (9.444 + 12.639 + 33.333) \quad (3.23)$$

$$= \frac{1}{EI} 55.416 \quad (3.24)$$

Résolution de l'équation (3.13)

$$\delta_{1\Sigma P} + X_1 = \frac{-\delta_{1\Sigma P}}{(11)} = \frac{-55.416}{7/3} = -23.75 \text{ kNm} \quad (3.25)$$

Diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant du système hyperstatique

Il suffit d'additionner les deux diagrammes précédents en tenant compte de la valeur de l'inconnue hyperstatique

Effort aux appuis – Equilibre de rotation en C (partie gauche) :

$$15 \cdot 3.5 - F_B \cdot 2 + 16.667 = 0 \Rightarrow F_B = 34.583 \text{ kN} \quad (3.26)$$

– Equilibre de rotation en E (partie droite) :

$$-26.25 + F_F \cdot 2 = 0 \Rightarrow F_F = 13.125 \text{ kN} \quad (3.27)$$

– Equilibre vertical de l'ensemble :

$$-15 + 34.584 - 60 + F_D - 25 + 13.125 = 0 \Rightarrow F_D = 52.291 \text{ kN} \quad (3.28)$$

Calcul du module de flexion Le moment fléchissant étant maximal à l'encastrement, c'est dans cette section que la contrainte est maximale :

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I/v} \quad (3.29)$$

$$\Rightarrow I/v_{min} = \frac{M}{\sigma_{adm}} = \frac{26.25 \cdot 10^6}{160} = 164062 \text{ mm}^3 = 164 \text{ cm}^3 \quad (3.30)$$

Un profil IPE 200 ou HEA 160 conviendrait parfaitement.

Système isostatique de référence en introduisant une rotule en F .

– Equilibre de rotation en E (partie droite) :

$$F_F = 0 \text{ kN} \quad (3.31)$$

Résolution du système isostatique chargé

- Equilibre de rotation en E (partie gauche) :

$$15 \cdot 6.5 - F_B \cdot 5 + 60 \cdot 3 - F_D \cdot 2 = 0 \quad (3.32)$$

- Equilibre vertical de l'ensemble

$$-15 - 60 + F_B + F_D - 325 = 0 \quad (3.33)$$

De (3.32) et (3.33), on déduit aisément :

$$F_B = 25.83 \text{ kN} \quad F_D = 74.17 \text{ kN} \quad (3.34)$$

- Vérification : équilibre de rotation en A :

$$25.83 \cdot 1.5 - 60 \cdot 3.5 + 74.17 \cdot 4.5 - 25 \cdot 6.5 = 0 \quad (3.35)$$

- Diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant :

- Equilibre de rotation en E (partie droite) :

$$2 \cdot F_F + 1 = 0 \Rightarrow F_F = -\frac{1}{2} \quad (3.36)$$

Résolution du système isostatique sous un effort unitaire à la coupure

- Equilibre de rotation en E (partie gauche) :

$$5 \cdot F_B + 2 \cdot F_D = 0 \quad (3.37)$$

- Equilibre vertical de l'ensemble :

$$F_B + F_D + \frac{1}{2} = 0 \quad (3.38)$$

De (3.37) et (3.38), on détermine aisément :

$$F_B = -\frac{1}{3} \quad F_D = \frac{5}{6} \quad (3.39)$$

- Vérification : équilibre de rotation en F :

$$7\frac{1}{3} - 4\frac{5}{6} + 1 = 0 \quad (3.40)$$

- Diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant :

Calcul de l'inconnue hyperstatique

Au droit de la coupure, la rotation due à la coupure est annulée par le couple X_1 :

$$\delta_1 \sum P + \delta_{11} = 0 \quad (3.41)$$

$$\Rightarrow \delta_1 \sum P + (11)X_1 = 0 \quad (3.42)$$

Calcul du déplacement unitaire (11)

$$(11) = \frac{1}{EI} \int_{poutre} M_1 \cdot M_1 ds \quad (3.43)$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\int 0 \quad 5 \quad 0 \quad 5 \quad ds + \int 0 \quad 1 \quad 2 \quad + \int 0 \quad 1 \quad 2 \quad ds \right) \quad (3.44)$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6}(-1)(-1) \left(2 - \frac{(2-2)^2}{2 \cdot 3} \right) \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (0 + 2 \cdot 1) \cdot 2 \right) \quad (3.45)$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3} \right) \quad (3.46)$$

$$= \frac{1}{EI} \frac{7}{3} \quad (3.47)$$

Calcul du déplacement dû au chargement $\delta_{1\Sigma P}$

$$\delta_{1\Sigma P} = \frac{1}{EI} \int_{poutre} M_{s1} \cdot M_1 ds \quad (3.48)$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\int 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad ds + \int 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad ds \right. \\ \left. + \int 0 \quad -1 \quad 0 \quad -50 \quad ds \right) \quad (3.49)$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{1-2}{6 \cdot 3} (22.5 - 2 \cdot 0.84) \cdot 2 + \frac{1}{6} \left[\frac{-2}{3} (-2 \cdot 0.84 - 50) - 1(0.84 - 2 \cdot 50) \right] \cdot 1 \right. \\ \left. + \frac{1}{6} (-1)(-2 \cdot 50) \cdot 2 \right) \quad (3.50)$$

$$= \frac{1}{EI} (5.3733 + 22.5533 + 33.34) \quad (3.51)$$

$$= \frac{1}{EI} 61.267 \quad (3.52)$$

Résolution de l'équation (3.42)

$$\delta_{1\Sigma P} + X_1 = \frac{-\delta_{1\Sigma P}}{(11)} = \frac{-61.267}{7/3} = -26.26 \text{ kNm} \quad (3.53)$$

Diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant du système hyperstatique

Il suffit d'additionner les deux diagrammes précédents en tenant compte de la valeur de l'inconnue hyperstatique

On retrouve évidemment un diagramme identique.

3.2 Exercice

On considère la poutre en acier ($E = 210.000 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0.3$) de la figure ci-dessous. Déterminez son module de flexion (I/ν en cm^3) de façon à ce que la contrainte maximale de flexion ne dépasse pas 160 N/mm^2 .

NB : on néglige les contraintes créées par l'effort tranchant.

3.2.1 Solution.

Le système est une fois hyperstatique. Pour le rendre isostatique, une rotule peut être introduite au noeud E .

Résolution du système isostatique chargé

- Equilibre de rotation en E (partie droite) :

$$4 \cdot F_F - (50 \cdot 4) \cdot 2 = 0 \Rightarrow F_F = 100 \text{ kN} \quad (3.54)$$

- Equilibre de rotation en C (partie gauche) :

$$30 \cdot 2 - F_A \cdot 4 = 0 \Rightarrow F_A = 15 \text{ kN} \quad (3.55)$$

- Equilibre de rotation en C (partie droite) :

$$-30 \cdot 2 + F_E \cdot 4 - (50 \cdot 4) \cdot 6 + 100 \cdot 8 = 0 \Rightarrow F_E = 115 \text{ kN} \quad (3.56)$$

- Equilibre vertical de l'ensemble

$$15 - 30 + F_C - 30 + 115 - (50 \cdot 4) + 100 = 0 \Rightarrow F_C = 30 \text{ kN} \quad (3.57)$$

- Vérification : équilibre de rotation en A :

$$-30 \cdot 2 + 30 \cdot 4 - 30 \cdot 6 + 115 \cdot 8 - (50 \cdot 4) \cdot 10 + 100 \cdot 12 = 0 \quad (3.58)$$

- Diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant :

Résolution du système isostatique sous un effort unitaire à la coupure

- Equilibre de rotation en C (partie gauche) :

$$-4 \cdot F_A = 0 \Rightarrow F_A = 0 \quad (3.59)$$

- Equilibre de rotation en E (partie droite) :

$$-1 + 4 \cdot F_F = 0 \Rightarrow F_F = \frac{1}{4} \quad (3.60)$$

- Equilibre de rotation en E (partie gauche) :

$$1 - 4 \cdot F_C = 0 \Rightarrow F_C = \frac{1}{4} \quad (3.61)$$

- Equilibre vertical de l'ensemble :

$$\frac{1}{4} + F_E + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow F_E = -\frac{1}{2} \quad (3.62)$$

- Diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant :

Calcul de l'inconnue hyperstatique

Au droit de la coupure, la rotation due à la coupure est annulée le couple X_1 :

$$\delta_1 \Sigma P + \delta_{11} = 0 \quad (3.63)$$

$$\Rightarrow \delta_1 \Sigma P + (11)X_1 = 0 \quad (3.64)$$

Calcul du déplacement unitaire (11)

$$(11) = \frac{1}{EI} \int_{poutre} M_1 \cdot M_1 ds \quad (3.65)$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^1 \left(\frac{1}{8} s \right) \left(\frac{1}{8} s \right) ds \quad (3.66)$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^1 \frac{1}{64} s^2 ds \quad (3.67)$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{192} s^3 \right]_0^1 \quad (3.68)$$

$$= \frac{1}{EI} \frac{1}{192} \quad (3.69)$$

Calcul du déplacement dû au chargement $\delta_{1\Sigma P}$

$$\delta_{1\Sigma P} = \frac{1}{EI} \int_{poutre} M_{s1} \cdot M_1 ds \quad (3.70)$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\int_0^3 0 \cdot 4 \cdot 0 \cdot ds + \int_3^4 1 \cdot 4 \cdot 0 \cdot ds + \int_4^6 100 \cdot 4 \cdot ds \right) \quad (3.71)$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} \left(1 + \frac{2}{4}\right) \cdot 4 \cdot 30 + \frac{1}{3} 100(0 + 1)4 \right) \quad (3.72)$$

$$= \frac{1}{EI} \frac{490}{3} \quad (3.73)$$

$$(3.74)$$

Résolution de l'équation (3.64)

$$\delta_{1\Sigma P} + X_1 = \frac{-\delta_{1\Sigma P}}{(11)} = \frac{-490}{3} \frac{3}{8} = -61.25 \text{ kNm} \quad (3.75)$$

Diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant du système hyperstatique

Il suffit d'additionner les deux diagrammes précédents en tenant compte de la valeur de l'inconnue hyperstatique

Effort aux appuis – F_A reste inchangé

– Equilibre de rotation en D (partie gauche) :

$$15 \cdot 6 - 30 \cdot 4 + F_C \cdot 2 + 0.625 = 0 \Rightarrow F_C = 14.688 \text{ kN} \quad (3.76)$$

– Equilibre de rotation en E (partie droite) :

$$61.25 - (50 \cdot 4)2 + F_F \cdot 4 = 0 \Rightarrow F_F = 84.688 \text{ kN} \quad (3.77)$$

– Equilibre vertical de l'ensemble :

$$15 - 30 + 14.688 - 30 + F_E - (50 \cdot 4) + 84.688 = 0 \Rightarrow F_E = 145.624 \text{ kN} \quad (3.78)$$

Calcul du module de flexion

Le moment fléchissant étant maximal à l'encastrement, c'est dans cette section que la contrainte est maximale :

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I/v} \quad (3.79)$$

$$\Rightarrow I/v_{min} = \frac{M}{\sigma_{adm}} = \frac{69.375 \cdot 10^6}{160} = 433600 \text{ mm}^3 = 433.6 \text{ cm}^3 \quad (3.80)$$

Un profil IPE 300 ou HEA 220 conviendrait parfaitement.

3.3 Exercice

On considère le système de barres ci-dessous soumis à une charge P . Les trois barres sont identiques de longueur l , d'aire A et de masse négligeable. Les rotules sont parfaites.

On demande :

1. les efforts dans chacune des barres en fonction de P , A et l ;
2. le déplacement δ du point d'application D de P .

3.3.1 Réponse.

Première méthode : coupure de la barre BD

$$N_{AD \text{ iso } \Sigma P} = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

$$N_{BD \text{ iso } \Sigma P} = 0$$

$$N_{CD \text{ iso } \Sigma P} = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

$$N_{AD \text{ iso } 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$N_{BD \text{ iso } 1} = 1$$

$$N_{CD \text{ iso } 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$X_1 = \frac{P}{2}$$

$$N_{AD \text{ hyper}} = \frac{P}{2\sqrt{2}}$$

$$N_{BD \text{ hyper}} = \frac{P}{2}$$

$$N_{CD \text{ hyper}} = \frac{P}{2\sqrt{2}}$$

$$\delta = \frac{Pl}{2EA}$$

Seconde méthode : procéder à une coupure symétrique pour conserver la symétrie du système : coupure des barres AD et CD

$$\begin{aligned}
N_{AD \text{ iso } \Sigma} P &= 0 \\
N_{BD \text{ iso } \Sigma} P &= P \\
N_{CD \text{ iso } \Sigma} P &= 0 \\
N_{AD \text{ iso } 1} &= 1 \\
N_{BD \text{ iso } \Sigma} P &= -\sqrt{2} \\
N_{CD \text{ iso } 1} &= 1 \\
X_1 &= \frac{P\sqrt{2}}{4} \\
N_{AD \text{ hyper}} &= \frac{P}{2\sqrt{2}} \\
N_{BD \text{ hyper}} &= \frac{P}{2} \\
N_{CD \text{ hyper}} &= \frac{P}{2\sqrt{2}} \\
\delta &= \frac{Pl}{2EA}
\end{aligned}$$

3.4 Exercice.

Le système articulé ci-dessous est composé à partir de barres de même section A en acier ($E = 21000 \text{ daN/mm}^2$) dont la contrainte normale admissible vaut 240 N/mm^2 .

On demande :

1. les efforts dans chacune des barres ;
2. la valeur de la section A qui satisfait la contrainte admissible.

3.4.1 Réponse.

Le système est une fois hyperstatique. On choisit de couper la barre CD de façon à conserver la symétrie du système.

$$EA\delta_{\Sigma P} = -707$$

$$EA\delta_{11} = 20.73$$

$$X = -\frac{-707}{20.73} = 34.1 \text{ kN}$$

On en déduit les efforts dans toutes les barres

$$N_{AD} = 46.59 \text{ kN}$$

$$N_{CD} = 34.1 \text{ kN}$$

$$N_{AC} = N_{BC} = 34.1 \text{ kN}$$

La section minimale est calculée à partir de N_{AD}

$$A = 2.912 \text{ cm}^2$$

3.5 Exercice.

Tracer les diagrammes M, N, T dans le portique biencastré ci-contre. Le moment d'inertie de la travée I_2 vaut deux fois le moment d'inertie des colonnes I_1 . Pour le calcul des inconnues hyperstatiques, seul le moment fléchissant sera pris en compte.

Réponse.

Le portique étant 3 fois hyperstatiques, on y pratique 3 coupures simples de façon à obtenir le système isostatique de référence. Les diagrammes M, N, T sont obtenus en imposant un moment unitaire au droit de chaque coupure.

Le moment d'inertie de la travée valant deux fois celui des colonnes, on choisit le moment d'inertie des colonnes comme référence $I_0 = I_1$. Dès lors, $I_2 = 2I_0$, et dans les expressions des coefficients d'influence,

les termes correspondant à la travée devront être divisés par 2.

On calcule :

$$\begin{array}{llll} \delta_{11} & = 5.333 & \delta_{12} & = -1.333 & \delta_{1\Sigma P} & = 34.666 \\ \delta_{22} & = 4 & \delta_{23} & = -0.666 & \delta_{2\Sigma P} & = 48 \\ \delta_{33} & = 2.666 & \delta_{13} & = 2 & \delta_{3\Sigma P} & = -5.333 \end{array}$$

Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} 5.333X_1 - 1.333X_2 + 2X_3 + 34.666 & = 0 \\ -1.333X_1 + 4X_2 - 0.666X_3 + 48 & = 0 \\ 2X_1 - 0.666X_2 + 2.666X_3 & = 5.333 \end{cases}$$

Après résolution, on a :

$$X_1 = -13.361kNm \quad X_2 = -15.077kNm \quad X_3 = 8.254kNm$$

Les diagrammes M, N, T est obtenu par superposition des diagrammes précédents :

$$\begin{aligned} M_{hyper} &= M_{\Sigma P} + X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2 + X_3 \cdot M_3 \\ T_{hyper} &= T_{\Sigma P} + X_1 \cdot T_1 + X_2 \cdot T_2 + X_3 \cdot T_3 \\ N_{hyper} &= N_{\Sigma P} + X_1 \cdot N_1 + X_2 \cdot N_2 + X_3 \cdot N_3 \end{aligned}$$

Chapitre 4

Traction et compression pure

4.1 Exercice

Un câble de mine en acier de 400 m de longueur supporte un ascenseur de 50 kN . Le poids du câble est de 15.6 daN/m . La masse spécifique de l'acier $\rho = 7951\text{ kg/m}^3$ et son module d'élasticité $E = 21000\text{ daN/mm}^2$.

On demande :

1. l'allongement total du câble et la contrainte normale dans la section la plus dangereuse.
2. la longueur maximale que peut avoir le câble pour que, sous l'effet de son *seul poids propre*, la contrainte dans la section la plus dangereuse ne dépasse pas la contrainte admissible $R = 16\text{ daN/mm}^2$.

4.1.1 Solution

Contrainte normale dans le câble.

Effectuons une coupure dans le câble à une profondeur y . L'équilibre de la partie inférieure fournit :

$$50 + \rho g(l - y) - N = 0 \Rightarrow N = 50 + 15.6(l - y) > 0 \quad (4.1)$$

L'effort de traction est maximum en $y = 0$ c'est-à-dire au niveau de la surface. Pour un puits de $l = 400\text{ m}$, on a en effectuant les changement d'unité *ad hoc* :

$$N_{max} = 5000 + 15.6l \quad (4.2)$$

$$= 5000 + 15.6 \cdot 400 \quad (4.3)$$

$$= 11240\text{ daN} \quad (4.4)$$

La section du câble est aisément calculée à partir de sa masse spécifique et de son poids au mètre courant :

$$156 = \rho g A \Rightarrow A = \frac{156}{7951 \cdot 9.81} = 0.002 \text{ m}^2 \quad (4.5)$$

L'allongement du câble est fournie par :

$$\delta = \frac{1}{EA} \int N_{\Sigma P} \cdot N_{s1} ds \quad (4.6)$$

$$= \frac{1}{EA} \int_0^1 \begin{matrix} 112400\text{N} \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} 50000\text{N} \\ 400\text{m} \end{matrix} ds \quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{EA} \frac{1}{2} (50000 + 112400) 400 \cdot 1 \quad (4.8)$$

$$= 0.0773 \text{ m} = 77.3 \text{ mm} \quad (4.9)$$

La contrainte normale maximale correspond à :

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \quad (4.10)$$

$$= \frac{50000 + 112400}{0.002} \quad (4.11)$$

$$= 8.21 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2 = 82.1 \text{ N/mm}^2 \quad (4.12)$$

Longueur maximale du câble

La traction maximale dans le câble vaut :

$$N_{max} = R \cdot A = 160 \cdot 10^6 \cdot 0.002 = 320000 \text{ N} \quad (4.13)$$

Ce qui correspond à la longueur du câble (sans ascenseur) :

$$N_{max} = 156 l_{max} \Rightarrow l_{max} = \frac{320000}{156} = 2051.3 \text{ m} \quad (4.14)$$

4.2 Exercice

Un piston de moteur a un diamètre de 400 mm tandis que le diamètre de la tige de piston est de 56 mm. La pression dans le cylindre est de 10 bar.

Calculer la contrainte maximale dans la tige du piston et son allongement durant le fonctionnement. la longueur de la tige est de 750 mm, le matériau est de l'acier ($E = 21000 \text{ daN/mm}^2$).

4.2.1 Réponse

$$\begin{aligned} A_{piston} &= 0.1232 \text{ m}^2 & A_{tige} &= 0.002463 \text{ m}^2 \\ N_{tige} &= 1.232 \cdot 10^5 \text{ N} & \sigma_{max} &= 50 \text{ N/mm}^2 \\ \delta &= 0.179 \text{ mm} \end{aligned}$$

4.3 Exercice

Deux fils verticaux très voisins et d'égale longueur, l'un en acier de 1.6 mm et l'autre en cuivre de 2 mm de diamètre, supportent ensemble un poids de $P = 50 \text{ daN}$.

Déterminer les efforts dans chacun des fils, sachant que :

$$E_{acier} = 21000 \text{ daN/mm}^2$$

$$E_{cuivre} = 12000 \text{ daN/mm}^2$$

Calculer le déplacement vertical de la charge P sachant que la longueur des fils est de 1 m.

4.3.1 Solution.

Les deux fils étant proches l'un de l'autre, leur allongement est identique. Dans ce cas, on a :

$$\delta_{acier} = \delta_{cuivre} \quad (4.15)$$

$$\epsilon_{acier} l_{acier} = \epsilon_{cuivre} l_{cuivre} \quad (4.16)$$

$$\frac{N_{acier}}{A_{acier} E_{acier}} = \frac{N_{cuivre}}{A_{cuivre} E_{cuivre}} \quad (4.17)$$

où : $l_{acier} = l_{cuivre} = l = 1 \text{ m}$

L'effort de traction n'est pas identique dans les deux fils car leur module de Young et leur diamètre différent.

L'équilibre de la charge fournit :

$$N_{acier} + N_{cuivre} = P \quad (4.18)$$

De (4.17) et (4.18), on tire aisément :

$$N_{acier} = \frac{A_{acier} E_{acier}}{A_{acier} E_{acier} + A_{cuivre} E_{cuivre}} \quad (4.19)$$

$$= 26.415 \text{ daN} \quad (4.20)$$

$$N_{cuivre} = 23.585 \text{ daN} \quad (4.21)$$

L'allongement des fils s'obtient grâce au diagramme de l'effort normal :

$$\delta = \delta_{acier} = \frac{1}{E_{acier} A_{acier}} \int N_{\Sigma P} \cdot N_{s1} ds \quad (4.22)$$

$$= \frac{1}{E_{acier} A_{acier}} \int_0^1 \begin{matrix} 26.415 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} ds \quad (4.23)$$

$$= \frac{1}{E_{acier} A_{acier}} 26.415 \cdot 1 \cdot 1 \quad (4.24)$$

$$= 0.626 \text{ mm} \quad (4.25)$$

4.4 Exercice

Une colonne de béton de section carrée $20 \times 20 \text{ cm}$ est armée de quatre barres d'acier de 20 mm de diamètre. La hauteur de la colonne est de 5 m .

Calculer le raccourcissement de cette colonne sous l'effet d'une charge de compression de 800 kN .

Calculer les contraintes normales dans l'acier et dans le béton. On donne :

$$E_{acier} = 2.1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$$

$$E_{béton} = 2.5 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2$$

4.4.1 Réponse

$$\begin{aligned} A_{acier} &= 1.2566 \text{ m}^2 & A_{béton} &= 0.03874 \text{ m}^2 \\ N_{acier} &= 171.3 \text{ kN} & N_{béton} &= 628.7 \text{ kN} & \delta &= 3.24 \text{ mm} \\ \sigma_{acier} &= 13.6 \text{ daN/mm}^2 & \sigma_{béton} &= 1.62 \text{ daN/mm}^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.5 Exercice

Une pile de viaduc en maçonnerie haute de 60 m supporte en son sommet une charge de 6000 kN . La pile est constituée de deux tronçons AB et BC , chacun de section constante carrée.

On donne :

1. le poids spécifique de la maçonnerie $\gamma = 2000 \text{ daN/m}^3$
2. la contrainte admissible en compression du béton $R = 16 \text{ daN/cm}^2$
3. le module d'élasticité du béton $E = 105000 \text{ daN/cm}^2$

On demande :

1. de dimensionner rationnellement les sections carrées des tronçons AB et BC ;
2. de tracer le diagramme des efforts normaux dans la pile ;
3. de calculer le raccourcissement du tronçon BC

4.5.1 Solution

Soient A_{AB} et A_{BC} la section des tronçons AB et BC respectivement. L'effort de compression est extériorisé en procédant à une coupure à une hauteur x du sommet de la pile.

L'équilibre vertical de la partie supérieure fournit, en tenant compte des unités :

$$0 \leq x \leq 20 \quad N(x) + 6000 + 20A_{AB}x = 0 \Rightarrow N(x) = -6000 - 20A_{AB}x \text{ kN} \quad (4.27)$$

$$20 \leq x \leq 40 \quad N(x) + 6000 + 20A_{AB} + 20A_{BC}(x - 20) = 0 \Rightarrow N(x) = -6000 - 20((A_{AB} - A_{BC})20 + A_{BC}x) \text{ kN} \quad (4.28)$$

Dans le tronçon AB , l'effort de compression est maximum en $x = 20 \text{ m}$ et vaut à partir de (4.27) :

$$N(x) = -6000 - 400A_{AB} \quad (4.29)$$

On dimensionne la section A_{AB} de façon à ce que la contrainte normale maximale ne dépasse pas la contrainte admissible :

$$\sigma_{AB_{max}} \leq R \quad (4.30)$$

$$\frac{-6000 - 400A_{AB}}{A_{AB}} \leq 1600 \text{ kN/m}^2 \quad (4.31)$$

$$\Rightarrow A_{AB} \geq 5 \text{ m}^2 \quad (4.32)$$

Dans le tronçon BC , l'effort de compression est maximum en $x = 60 \text{ m}$ et vaut à partir de (4.28) :

$$N(x) = -8000 - 800A_{BC} \quad (4.33)$$

On dimensionne la section A_{BC} de façon à ce que la contrainte normale maximale ne dépasse pas la contrainte admissible :

$$\sigma_{BC_{max}} \leq R \quad (4.34)$$

$$\frac{-8000 - 800A_{BC}}{A_{BC}} \leq 1600 \text{ kN/m}^2 \quad (4.35)$$

$$\Rightarrow A_{BC} \geq 10 \text{ m}^2 \quad (4.36)$$

En remplaçant les sections par leur valeur dans (4.27) et (4.28), on obtient l'évolution de l'effort de compression dans la pile :

$$0 \leq x \leq 20 \quad N(x) = -6000 - 100x \text{ kN} \quad (4.37)$$

$$20 \leq x \leq 40 \quad N(x) = -4000 - 200x \text{ kN} \quad (4.38)$$

L'écrasement du tronçon BC est calculé à partir des diagrammes des efforts normaux pour le cas de charge réel et une charge unitaire appliquée au bas de la pile.

$$\delta = \frac{1}{EA_{BC}} \int_{BC} N_{\Sigma P} N_{s1} ds \quad (4.39)$$

$$= \frac{1}{EA_{BC}} \int_{-8000}^0 \begin{matrix} 40 & 0 & 40 \\ 0 & 40 & 0 \end{matrix} ds \quad (4.40)$$

$$-16000 \quad (4.41)$$

$$= \frac{1}{1.05 \cdot 10^7 \cdot 10^2} \frac{1}{2} (-8000 - 16000) 40 \cdot 1 \quad (4.42)$$

$$= 0.00457 \text{ m} = 4.57 \text{ mm} \quad (4.43)$$

L'écrasement de la pile est calculé à partir des diagrammes des efforts normaux pour le cas de charge réel et une charge unitaire appliquée au bas de la pile.

$$\delta = \frac{1}{EA_{AB}} \int_{AB} N_{\Sigma P} N_{s1} ds + \frac{1}{EA_{BC}} \int_{BC} N_{\Sigma P} N_{s1} ds \quad (4.44)$$

$$= \frac{1}{EA_{AB}} \int_{-6000}^0 \begin{matrix} 20 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \end{matrix} ds + \frac{1}{EA_{BC}} \int_{-8000}^0 \begin{matrix} 40 & 0 & 40 \\ 0 & 40 & 0 \end{matrix} ds \quad (4.45)$$

$$-8000 \quad -16000 \quad (4.46)$$

$$= \frac{1}{1.05 \cdot 10^7 \cdot 5^2} \frac{1}{2} (-6000 - 8000) 20 \cdot 1 + \frac{1}{1.05 \cdot 10^7 \cdot 10^2} \frac{1}{2} (-8000 - 16000) 40 \cdot 1 \quad (4.47)$$

$$= 0.00267 + 0.00457 \quad (4.48)$$

$$= 0.00724 \text{ m} = 7.14 \text{ mm} \quad (4.49)$$

4.6 Exercice

Le treillis ci-dessous est soumis à une charge P de 60 kN . Les barres AC et BC sont respectivement en acier et en bois. Les contraintes admissibles sont de 1600 daN/cm^2 et 40 daN/cm^2 respectivement dans l'acier et le bois.

On demande :

1. de choisir rationnellement le diamètre de la barre d'acier et le coté de la section carrée de la barre en bois ;
2. de déterminer le déplacement vertical et horizontal du point C .

On donne :

$$E_{acier} = 2.1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$$

$$E_{bois} = 10^5 \text{ daN/cm}^2$$

4.6.1 Réponse

$$\begin{aligned} \text{diamètre} &= 26.7 \text{ mm} & \text{coté} &= 164 \text{ mm} \\ \text{déplacement vertical} &= 6.2 \text{ mm} & \text{déplacement horizontal} &= 2.4 \text{ mm} \end{aligned} \quad (4.50)$$

4.7 Exercice

On dispose de barreaux d'acier ($\sigma_{adm} = 16\text{ daN/mm}^2$) de diamètres égaux à 8,10, 12, 15, 18, 20, 22, 25, 27. Parmi ce lot, on demande de choisir les barres de la structure ci-dessous. Ceci fait, calculer le déplacement vertical du point C .

4.7.1 Réponse

$$\text{diamètre}_{AC} = 27 \text{ mm} \quad \text{diamètre}_{BC} = 25 \text{ mm} \quad \text{déplacement vertical} = 3.87 \text{ mm} \quad (4.51)$$

4.8 Exercice

Une barre prismatique verticale a ses extrémités fixées rigidement et supporte un poids de 50 kN au point B . Calculer l'effort dans les deux tronçons AB et CD de la barre.

4.8.1 Réponse

$$N_{AB} = 30 \text{ kN} \quad N_{AB} = -20 \text{ kN} \quad (4.52)$$

4.9 Exercice

La pile de béton ci-dessous supporte une charge de 20 kN en son sommet. Calculer son écrasement. On donne :

$$E = 105000 \text{ daN/cm}^2$$

4.9.1 Solution

La section de la pile varie linéairement en fonction de la coordonnée y :

$$A(y) = 0.1(0.2 - 0.1\frac{y}{3}) \text{ m}^2 \quad (4.53)$$

L'effort normal est constant et vaut -20 kN . Le diagramme des efforts normaux $N_{\Sigma P}$ correspond à un rectangle de longueur 3 m et de largeur 20 kN . L'effort normal unitaire appliqué à la base de la pile conduit à un diagramme unitaire. Le déplacement de la base est fourni par la relation suivante :

$$\delta = \int_{pile} \frac{1}{EA} N_{\Sigma P} N_{s1} ds \quad (4.54)$$

$$= \frac{1}{E} \int_0^3 \frac{1}{0.1(0.2 - 0.1\frac{y}{3})} (-20000) \cdot 1 dy \quad (4.55)$$

$$= \frac{-20000}{1.05 \cdot 10^{10} \cdot 0.1} \int_0^3 \frac{1}{0.2 - 0.1\frac{y}{3}} dy \quad (4.56)$$

$$= \frac{-20000}{1.05 \cdot 10^{10} \cdot 0.1} \frac{3}{-0.1} \ln(0.2 - 0.1\frac{y}{3}) \Big|_0^3 \quad (4.57)$$

$$= 0.000396\text{ m} \approx 0.4\text{ mm} \quad (4.58)$$

4.10 Exercice

Une barre infiniment rigide AB est suspendue par trois barres d'acier de sections droites identiques et d'aires égales à 10 cm^2 chacune. Déterminer les contraintes dans les barres ainsi que l'inclinaison que prendra la barre AB . Le module d'élasticité de l'acier est pris égal à 20000 daN/mm^2 .

4.10.1 Solution

$$\sigma_{EB} = 4.24\text{ daN/mm}^2 \quad \sigma_{AD} = -8.48\text{ daN/mm}^2 \quad \sigma_{AC} = 15.3\text{ daN/mm}^2 \quad \beta = 0.477 \cdot 10^{-3}\text{ rad} \quad (4.59)$$

Chapitre 5

Flexion pure

5.1 Exercice

Calculer les contraintes maximales en tension et en compression de la travée centrale de la poutre ci-dessous en aluminium dont la section transversale est illustrée et cotée. On donne :

$$E = 7000 \text{ daN/mm}^2$$

5.1.1 Solution

La symétrie du chargement permet de calculer les réactions aux appuis à partir de l'équilibre vertical de la poutre :

$$F_A = F_B = 2 \text{ kN} \quad (5.1)$$

On en déduit les diagrammes des efforts tranchants et du moment fléchissant. Dans la travée AB , le moment est constant et l'effort tranchant est nul ; il s'agit donc d'une *flexion pure* où $M = -1 \text{ kNm}$.

La section de la poutre n'étant pas symétrique par rapport à l'axe de flexion, il faut d'abord localiser son centroïde avant de calculer son inertie. On choisit de décomposer la section en deux rectangles et de mesurer les distance par rapport à la fibre inférieure de la poutre. Dans ce cas, le centroïde est fournit par :

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{(50 \cdot 10) \cdot 5 + (10 \cdot 50) \cdot 35}{(50 \cdot 10) + (10 \cdot 50)} = 20 \text{ mm} \quad (5.2)$$

Par rapport au centroïde, l'inertie géométrique de section vaut :

$$I = \sum \left[\frac{b_i h_i^3}{12} + A_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \right] \quad (5.3)$$

$$= \frac{50 \cdot 10^3}{12} + \frac{10 \cdot 50^3}{12} + (50 \cdot 10)(5 - 20)^2 + (10 \cdot 50)(35 - 20)^2 \quad (5.4)$$

$$= 0.333 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = 0.333 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (5.5)$$

A partir du centroïde, la contrainte normale vaut :

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} = -\frac{-1000y}{0.333 \cdot 10^{-6}} = 3 \cdot 10^9 y \text{ N/m}^2 \quad (5.6)$$

Elle vaut donc :

- 120 N/mm^2 en $y = 0.04 \text{ m}$ sur la fibre supérieure qui est en traction ;
- -60 N/mm^2 en $y = -0.02 \text{ m}$ sur la fibre inférieure qui est en compression.

5.2 Exercice

Soit une poutre encastree de section rectangulaire ab où $b = 1.5a$. Cette poutre est soumise à un moment de flexion M à son extrémité libre.

Si la contrainte normale admissible vaut σ_{adm} , on demande de calculer le rapport des capacités de résistance à la flexion de la poutre selon les deux directions de flexion représentées sur la figure ci-dessous.

5.2.1 Solution

Le moment étant uniforme le long de la poutre, on calcule le moment nécessaire pour atteindre la contrainte admissible σ_{adm} :

cas A	cas B
$I_z = \frac{a(1.5a)^3}{12} = 0.2813a^4$	$I_y = \frac{1.5a \cdot a^3}{12} = 0.125a^4$
$v_z = 0.75a$	$v_y = 0.5a$
$ \sigma_{adm} = \frac{M_z}{0.2813a^4/0.75a}$	$ \sigma_{adm} = \frac{M_y}{0.125a^4/0.5a}$
$\Rightarrow M_z = 0.375a^3 \sigma_{adm}$	$\Rightarrow M_y = 0.25a^3 \sigma_{adm}$

Le rapport des capacités de résistance à la flexion des deux orientations vaut donc :

$$\frac{M_z}{M_y} = 1.5 \quad (5.8)$$

La poutre orientée comme dans le cas A est la plus rigide à la flexion.

5.3 Exercice

On considère une poutre sur deux appuis sollicités par deux charges concentrées P . La section droite de la poutre est un caisson rectangulaire d'épaisseur constante. La limite élastique du matériau vaut $R_e = 24 \text{ daN/mm}^2$.

On demande de calculer :

1. le module de flexion de la section droite pour une flexion autour de l'axe OZ ;
2. la valeur P_e des charges que peut supporter la poutre en régime élastique ;
3. la valeur P_l des charges à l'état limite plastique ;
4. le coefficient de forme de la section.

5.3.1 Solution

L'inertie géométrique est calculée en considérant deux rectangles pleins :

$$I_z = \frac{200 \cdot 190^3}{12} - \frac{188 \cdot 178^3}{12} = 2.596 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \quad (5.9)$$

$$v = \frac{190}{2} = 95 \text{ mm} \quad (5.10)$$

$$I_z/v = 273.3 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 273.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \quad (5.11)$$

Par symétrie, on trouve aisément à partir de l'équilibre vertical de la poutre, que :

$$F_A = F_B = P \quad (5.12)$$

Les diagrammes des efforts tranchants et du moment fléchissant sont repris sur la figure ci-dessous.

Le moment maximum vaut $2P$, dès lors :

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{I_z/v} \leq R_e \quad (5.13)$$

$$\Rightarrow P_e = \frac{1}{2} R_e I_z/v = \frac{1}{2} 24 \cdot 10^7 \cdot 273 \cdot 10^{-6} \quad (5.14)$$

$$= 32760 \text{ N} = 3276 \text{ daN} \quad (5.15)$$

La charge P_l limite conduit à la plastification totale de la section. Dans ce cas, le profil des contraintes normales correspond à celui illustré sur la figure. Le moment plastique vaut :

$$\begin{aligned} M_l &= \int_{section} \sigma y dA = R_e \int_{section} y dA & (5.16) \\ &= 2R_e \left(\frac{190-12}{2} 200 \cdot 6 + 2 \int_0^{95} 6y dy \right) = 2R_e(106800 + 54150) = 7725600 \text{ daNmm} \approx 7726 \text{ daNm} & (5.17) \end{aligned}$$

$$P_l = \frac{M_l}{2} \quad (5.18)$$

$$= 3863 \text{ daN} \quad (5.19)$$

Le facteur de forme est obtenu à partir du moment maximum élastique et du moment de ruine :

$$\frac{M_l}{M_e} = \frac{P_l}{P_e} = \frac{3863}{3276} = 1.18 \quad (5.20)$$

Chapitre 6

Torsion pure

6.1 Exercice

Pour les profils suivants dont les dimensions sont données en mm , calculer

1. l'inertie polaire
2. le moment de torsion maximum admissible

On donne $\tau_{adm} = 9 \text{ daN/mm}^2$

6.1.1 Solution

profil fermé	profil ouvert
$I_{\theta} = \frac{4\bar{A}^2 t}{P}$	$I_{\theta} = \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3$
$I_{\theta} = \frac{4 \cdot 40^4 \cdot 2.6}{4 \cdot 40} = 166400 \text{ mm}^4$	$I_{\theta} = \frac{1}{3} 2.6^3 \cdot 4 \cdot 42.6 = 998 \text{ mm}^4$
$M_{t_{max}} = \tau_{adm} 2\bar{A}t$	$M_{t_{max}} = \frac{\tau_{adm}}{t_i} I_{\theta}$
$M_{t_{max}} = 90 \cdot 2 \cdot 40^2 \cdot 2.6 = 2995.2 \text{ Nm}$	$M_{t_{max}} = \frac{90}{2.6} 998 = 34.55 \text{ Nm}$

6.2 Exercice

Pour les profils suivants dont les dimensions sont données en mm , calculer

1. l'inertie polaire
2. le moment de torsion maximum admissible

On donne $\tau_{adm} = 9 \text{ daN/mm}^2$

6.2.1 Réponse

- Profil fermé : $J_\theta = 131242 \text{ mm}^4$, $M_{t_{max}} = 591 \text{ Nm}$
- Profil ouvert : $J_\theta = 760 \text{ mm}^4$, $M_{t_{max}} = 26.3 \text{ Nm}$

6.3 Exercice

Une poutre de section tubulaire est encastree à son extrémité supérieure et est soumise, à son extrémité inférieure, à un couple de torsion. La poutre est constituée de deux tronçons, l'un en laiton, l'autre en alliage d'aluminium, de 600 mm de longueur chacun. Chaque tronçon a un diamètre extérieur de 60 mm et une épaisseur de 3 mm . La contrainte tangentielle limite élastique (τ_e) vaut pour le laiton 10.5 daN/mm^2 et pour l'alliage d'aluminium 15 daN/mm^2 . On appliquera un coefficient de sécurité $s = 2$ à chacune de ces contraintes. Sachant que l'angle de torsion de l'extrémité inférieure ne doit pas dépasser 1° , quel est le moment de torsion maximum que la pièce peut supporter ? On donne :

- pour le laiton $G = 3500 \text{ daN/mm}^2$
- pour l'alliage d'aluminium $G = 2800 \text{ daN/mm}^2$

6.3.1 Solution

Le moment de torsion est constant le long de la poutre. Dans ce cas, la déformation angulaire des deux tronçons vaut :

$$\Delta\varphi_{alu} = \frac{1}{G_{alu}I_\theta} \int_0^{0.6} M \, ds \quad (6.1)$$

$$= \frac{1}{G_{alu}I_\theta} M_t 0.6 \quad (6.2)$$

$$\Delta\varphi_{lait} = \frac{1}{G_{lait}I_\theta} \int_0^{0.6} M \, ds \quad (6.3)$$

$$= \frac{1}{G_{lait}I_\theta} M_t 0.6 \quad (6.4)$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi_{alu} G_{alu} = \Delta\varphi_{lait} G_{lait} = \frac{M_t 0.6}{I_\theta} \quad (6.5)$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi_{lait} = \Delta\varphi_{alu} \frac{G_{alu}}{G_{lait}} \quad (6.6)$$

La déformation maximale valant $\Delta\varphi_{lait} + \Delta\varphi_{alu} = 1^0$, on détermine aisément :

$$\Delta\varphi_{alu} = \Delta\varphi_{total} \frac{1}{1 + \frac{G_{alu}}{G_{lait}}} \quad (6.7)$$

$$= 1 \frac{1}{1 + \frac{2800}{2500}} \quad (6.8)$$

$$= 0.556^0 \quad (6.9)$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi_{lait} = 0.444^0 \quad (6.10)$$

De (6.5), on calcule le moment de torsion maximum :

$$I_{\theta} = \frac{\pi}{32}(d_e^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32}(60^4 - 54^4) = 437559 \text{ mm}^4 \quad (6.11)$$

$$M_t = \frac{\Delta\varphi_{lait} G_{lait} I_{\theta}}{0.6} \quad (6.12)$$

$$= \frac{0.444 \frac{\pi}{180} 3500 \cdot 437559}{600} = 19779.4 \text{ daNmm} = 197.8 \text{ Nm} \quad (6.13)$$

La contrainte maximale dans la section vaut :

$$\tau_{x\theta} = \frac{M_t r_e}{I_{\theta}} = \frac{197800 \cdot 28.5}{437559} \quad (6.14)$$

$$= 12.88 \text{ N/mm}^2 = 1.3 \text{ daN/mm}^2 \quad (6.15)$$

Ce qui est bien en dessous des valeurs admissibles, à savoir

- 7.5 daN/mm² pour l'alliage d'aluminium
- 5.25 daN/mm² pour le laiton

6.4 Exercice

Soit une poutre droite de 6 m de long constituée d'un profil HE 200 B. Calculer :

1. le moment de torsion maximum que peut supporter cette poutre ;
2. la rigidité de torsion ;
3. la rotation relative des sections d'extrémités.

Rechercher ensuite une poutre de section creuse circulaire à paroi mince qui puisse supporter le même moment de torsion que la poutre HE 200 B. Comparer et tirer des conclusions. On choisira une poutre de section tubulaire caractérisée par $\frac{D}{e} = 15$ où D est le diamètre extérieur et e l'épaisseur. On donne $\tau_{adm} = 9 \text{ daN/mm}^2$ et $G = 8000 \text{ daN/mm}^2$.

6.4.1 Réponse

$$\begin{aligned}
 M_t &= 294.8 \text{ daNm} & I_\theta &= 491310 \text{ mm}^4 \\
 \Delta\varphi &= 0.45 \text{ rad} = 25.8^\circ \\
 K_t &= 6551 \text{ Nm/rad} \\
 \text{tube équivalent en torsion avec } \frac{D}{e} &= \frac{2r_m + e}{e} = 15 \\
 D &= 71.1 \text{ mm} & e &= 4.7 \text{ mm} & r_m &= 33.2 \text{ mm} \\
 I_{\theta, \text{tube}} &= 1.080667 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\
 \Delta\varphi_{\text{tube}} &= 0.2 \text{ rad} = 11.4^\circ \\
 K_{t, \text{tube}} &= 14409 \text{ Nm/rad}
 \end{aligned}$$

6.5 Exercice

Un tube d'acier est utilisé pour supporter un signal routier comme indiqué sur la figure ci-dessous. La pression maximum due au vent est égale à 2 kN/m^2 et on suppose qu'elle s'exerce uniquement sur la surface hachurée de la figure. Le panneau est attaché au tube **uniquement** en A et en B par des barres indéformables.

L'angle de rotation du tube au niveau de l'attache inférieure du signal ne doit pas dépasser 6° . La contrainte tangentielle due à la torsion doit être limitée à 350 daN/cm^2 . Déterminer le diamètre moyen du tube si son épaisseur est de 3 mm .

6.5.1 Réponse

$$\begin{aligned}
 M_t &= 2160 \text{ Nm de A à B} \\
 M_t &= 4320 \text{ Nm de B à C} \\
 r_m &= 81 \text{ mm} \\
 \Delta\varphi &= 0.001485 \text{ rad} = 0.085^\circ
 \end{aligned}$$

6.6 Exercice

Calculer le diamètre du tube d'acier constituant la barre de torsion AC ci-dessous de façon que la déplacement de la charge $P = 250 \text{ kN}$ soit de 100 mm , le bras AB étant indéformable. La flexion de CA n'est pas prise en compte.

Si l'épaisseur du tube est de 2.5 mm , déterminer la valeur de la contrainte tangentielle maximum pour ce diamètre. On donne $G = 8000\text{ daN/mm}^2$.

6.6.1 Réponse

$$M_t = 100\text{ kNm}$$

$$\Delta\varphi = 14.48^\circ$$

$$I_\theta = 4.95 \cdot 10^6\text{ mm}^4$$

$$r_m = 68.05\text{ mm}$$

$$\tau_{max} = 142.6\text{ daN/mm}^2$$

Chapitre 7

Flexion et cisaillement

7.1 Exercice

Une poutre *HE 140 M* est soumise à une charge uniformément répartie de 40 kN/m sur toute sa longueur. On demande d'étudier la répartition des contraintes dans les zones critiques de cette poutre. On donne les caractéristiques du profil *HE 140 M* :

$$h = 160 \text{ mm} \quad b = 146 \text{ mm} \quad I = 3291 \text{ cm}^4 \quad I/v = 411 \text{ cm}^3$$

7.1.1 Solution

Par symétrie, les réactions d'appuis sont égales et valent 100 kN à chaque appui. Les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants sont repris ci-dessous.

A partir de ces diagrammes, on peut identifier les zones critiques suivantes :

1. aux appuis $T = \pm 60 \text{ kN}$, $M = -20 \text{ kNm}$
2. au centre de la travée où le moment est maximum $M = 25 \text{ kNm}$ et l'effort tranchant nul.

Contraintes au centre de la travée

C'est une flexion pure :

$$\sigma_x = -\frac{M}{I/v} \quad (7.1)$$

$$= -\frac{25000}{411 \cdot 10^{-6}} \quad (7.2)$$

$$= 6.083 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2 \approx 61 \text{ N/mm}^2 \quad (7.3)$$

La fibre inférieure de la poutre est tendue tandis que sa fibre supérieure est comprimée. Pour s'en convaincre, on peut appliquer la relation suivante :

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (7.4)$$

où

- y et M sont positifs pour la fibre supérieure
- $y < 0$ et $M > 0$ pour la fibre inférieure

Contraintes aux appuis

Contraintes normales : elles proviennent du moment de flexion :

$$\sigma_x = -\frac{M}{I/v} \quad (7.5)$$

$$= -\frac{-20000}{411 \cdot 10^{-6}} \quad (7.6)$$

$$= 4.866 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2 \approx 49 \text{ N/mm}^2 \quad (7.7)$$

La fibre inférieure de la poutre est comprimée tandis que sa fibre supérieure est tendue (cas A de la figure ci-dessus).

Contraintes tangentielles : elles proviennent de l'effort tranchant. Pour les estimer :

1. on considère uniquement la partie de la section au dessus de l'axe de flexion (axe OY);
2. on effectue une coupe dans la demi-section parallèlement à l'axe de flexion pour obtenir les contraintes de cisaillement *verticales*;
3. on effectue une coupe dans la demi-section perpendiculairement à l'axe de flexion pour obtenir les contraintes de cisaillement *horizontales*;

Dans les semelles (cas B), on a :

$$|\tau_{xz}| = \frac{TQ}{It} \quad (7.8)$$

où :

$$Q = A'\bar{y}' = (22 \cdot z) \cdot 69 = 1518z' \text{ mm}^3$$

$$I = 3291 \text{ cm}^4 = 3291 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$t = 22 \text{ mm}$$

$$T = 60 \text{ kN} = 60 \cdot 10^3 \text{ N}$$

En remplaçant dans (7.8), on obtient :

$$|\tau_{xz}| = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 1518z'}{3291 \cdot 10^4 \cdot 22} = 0.1258z' \text{ N/mm}^2 \quad (7.9)$$

Par conséquent, on a :

- à l'extrémité libre : $z' = 0 \Rightarrow |\tau_{xz}| = 0$
- au niveau l'âme : $z' = 73 \text{ mm} \Rightarrow |\tau_{xz}| = 9.2 \text{ N/mm}^2$

L'analyse de zone de rencontre de la semelle et de l'âme est complexe. Toutefois, sa section étant plus grande, les contraintes y sont nécessairement moindre.

Dans l'âme (cas C), on a :

$$|\tau_{xy}| = \frac{TQ}{It} \quad (7.10)$$

où :

$$\begin{aligned} Q &= A'_1 \bar{y}'_1 + A'_2 \bar{y}'_2 = (22 \cdot 146) \cdot 69 + 13(58 - y') \frac{58 + y'}{2} \\ &= 243494 - 7.5y'^2 \text{ mm}^3 \\ I &= 3291 \text{ cm}^4 = 3291 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \\ t &= 13 \text{ mm} \\ T &= 60 \text{ kN} = 60 \cdot 10^3 \text{ N} \end{aligned}$$

En remplaçant dans (7.10), on obtient :

$$|\tau_{xy}| = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot (243494 - 7.5y'^2)}{3291 \cdot 10^4 \cdot 13} = 34.15 - 0.00105y'^2 \text{ N/mm}^2 \quad (7.11)$$

Par conséquent, on a :

- à la jonction âme-semelle : $y' = \pm 58 \text{ mm} \Rightarrow |\tau_{xy}| = 30.62 \text{ N/mm}^2$
- au milieu l'âme : $y' = 0 \text{ mm} \Rightarrow |\tau_{xy}| = 34.15 \text{ N/mm}^2$

Le sens des contraintes dans l'âme est celui de T . Dans les semelles, il est tel que le flux de cisaillement soit continu.

7.2 Exercice

Le profilé tubulaire ci-dessous est soumis à un effort tranchant de 100 kN . On demande d'étudier la répartition des contraintes de cisaillement.

7.2.1 Solution

L'inertie géométrique de la section vaut :

$$I = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} \quad (7.12)$$

$$= \frac{100 \cdot 200^3}{12} - \frac{80 \cdot 180^3}{12} \quad (7.13)$$

$$= 27.8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = 27.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (7.14)$$

Contraintes de cisaillement dans les parois verticales : en effectuant une coupe perpendiculairement à la direction de l'effort tranchant, on fait apparaître 2 sections dans les parois verticale dans lesquelles on a (cas A) :

$$|\tau_{xy}| = \frac{TQ}{It} \quad (7.15)$$

où :

$$Q = A'_1 \bar{y}'_1 + A'_2 \bar{y}'_2 = (10 \cdot 95) \cdot 100 + 2 \cdot 10(90 - y) \frac{90 + y}{2}$$

$$= 176000 - 10y^2 \text{ mm}^3$$

$$I = 27.8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$t = 2 \cdot 10 \text{ mm}$$

$$T = 100 \text{ kN} = 100 \cdot 10^3 \text{ N}$$

En remplaçant dans (7.15), on obtient :

$$|\tau_{xy}| = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot (176000 - 10y^2)}{27.8 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10} = 31.65 - 0.0018y^2 \text{ N/mm}^2 \quad (7.16)$$

Par conséquent, on a :

– pour les fibres supérieure et inférieure : $y' = \pm 90 \text{ mm} \Rightarrow |\tau_{xy}| = 17.1 \text{ N/mm}^2$

– au milieu du profilé : $y' = 0 \text{ mm} \Rightarrow |\tau_{xy}| = 31.7 \text{ N/mm}^2$

Le sens des contraintes est celui de T .

Contraintes de cisaillement dans les parois horizontales : Il faut effectuer 2 coupes verticales symétriques de part et d'autre de l'axe OY . Le cisaillement agit sur les 2 coupes (cas B) :

$$|\tau_{xz}| = \frac{TQ}{It} \quad (7.17)$$

où :

$$\begin{aligned}Q &= A'\bar{y}' = 2(10 \cdot 95) \cdot z \\ &= 1900y \text{ mm}^3 \\ I &= 27.8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\ t &= 2 \cdot 10 \text{ mm} \\ T &= 100 \text{ kN} = 100 \cdot 10^3 \text{ N}\end{aligned}$$

En remplaçant dans (7.17), on obtient :

$$|\tau_{xy}| = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1900z}{27.8 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10} = 0.3417z \text{ N/mm}^2 \quad (7.18)$$

Par conséquent, on a :

- au centre du profil : $z' = 0 \Rightarrow |\tau_{xz}| = 0$
- à l'extrémité libre : $z' = 40 \text{ mm} \Rightarrow |\tau_{xz}| = 13.7 \text{ N/mm}^2$

Chapitre 8

Examen écrit de Résistance des Matériaux - 5 janvier 2001

8.1 Exercice

Le portique $ABCD$ est encastéré au sol en A et simplement appuyé en D par l'intermédiaire d'un appui rouleau. Il supporte une passerelle $E''GH''$, les poutres $E''G$ et GH'' sont parfaitement bi-rotulées. Les distances $E'E''$ et $H'H''$ sont négligeables. Deux forces, l'une horizontale et l'autre verticale de $F = 10 \text{ kN}$ agissent respectivement en I (milieu de AB) et en J (milieu de GH''). Toutes les poutres sont constituées à partir du profil HEA320 ($I = 22928 \text{ cm}^4$) en acier ($E = 21000 \text{ daN/mm}^2$). On néglige l'effet de la gravité.

On demande :

1. le degré d'hyperstaticité de la structure ;
2. les diagrammes MNT dans toutes les poutres (pour résoudre le système hyperstatique, seul le moment fléchissant est pris en compte) ;
3. le déplacement horizontal du noeud C ;

Conseils :

- remplacer les poutres $E''GH''$ par des efforts localisés en E' et H' ;
- coter les diagrammes MNT en employant un système cohérent d'unités.

8.1.1 Réponse

Le système dispose de 3 inconnues de liaison en A (encastrement) et de 1 inconnue de liaison en D . Il est 1 fois hyperstatique. Les coupures simples licites consistent à placer une rotule en A ou en B , ou supprimer l'appui en D .

Pour remplacer les poutres $E''GH''$ par des efforts localisés en E' et H' , il suffit d'écrire les équations

d'équilibre de $E'GH'$ pour obtenir les charges verticales de 5 kN localisées en E' et H' .
Soit une rotule en B :

Forces de liaison :

$$F_{Ax} = -10\text{ kN} \quad F_{Ay} = 2.5\text{ kN} \quad M_{Az} = 40\text{ kNm} \quad F_{Dy} = 7.5\text{ kN}$$

sens positif des efforts : $\uparrow \rightarrow \curvearrowright$

Inconnue hyperstatique :

$$\begin{aligned} \delta_{\Sigma P} &= \frac{1}{EI}(-48.75) \\ (11) &= \frac{1}{EI} \frac{34}{3} \\ \Rightarrow X_1 &= 4.3\text{ kNm} \end{aligned}$$

Déplacement en C : en plaçant une force horizontale unitaire en C , on obtient

$$F_{Ax} = -1 \quad F_{Ay} = 0 \quad M_{Az} = 8 \quad F_{Dy} = 0 \Rightarrow \delta_c = 8.2\text{ mm}$$

8.2 Exercice

La poutre $CDEG$ est constituée à partir d'un caisson fermé carré de coté $c = 100 \text{ mm}$ et d'épaisseur $t = 5 \text{ mm}$. Le tronçon CD est dirigé selon \vec{u}_y , DE selon $-\vec{u}_z$ et EG selon \vec{u}_x . En G agit une force $\vec{F} = 1 \vec{u}_y \text{ kN}$.

On demande :

1. de calculer l'état de contrainte pour le point I appartenant à la section $A - A$, milieu de CD ;
2. de calculer l'état de contrainte pour le point J appartenant à la section $B - B$, milieu de DE ;

Conseils :

- pour chaque effort pris séparément, schématiser la répartition de contrainte dans la section ;
- sommer algébriquement les contraintes de même nature ;
- employer un système cohérent d'unités.

8.2.1 Réponse

Réduction des efforts en A :

$$\underline{\mathbf{R}}_a = \begin{pmatrix} 0 \text{ kN} = T_x \text{ effort tranchant selon X} \\ 1 \text{ kN} = N_y \text{ effort normal selon Y} \\ 0 \text{ kN} = T_z \text{ effort tranchant selon Z} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{M}}_A = \underline{\mathbf{AG}} \times \underline{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 5 \text{ kNm} = M_{fx} \text{ moment de flexion selon X} \\ 0 \text{ kNm} = M_{ty} \text{ moment de torsion selon Y} \\ 5 \text{ kNm} = M_{fz} \text{ moment de flexion selon Z} \end{pmatrix}$$

Propriétés géométriques de la section :

$$I = 286.6 \text{ cm}^4 \quad \frac{I}{v} = 57.32 \text{ cm}^3 \quad A = 19 \text{ cm}^2$$

Contraintes normales dues aux efforts N , M_{fx} et M_{fz} en I :

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \sigma_y = 0.53 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{fx} &= \sigma_y = 87.2 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{fz} &= \sigma_y = 87.2 \text{ N/mm}^2 \\ \Rightarrow \sigma_{tot} &= \sigma_N + \sigma_{fx} + \sigma_{fz} = 174.93 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Réduction des efforts en B :

$$\underline{\mathbf{R}}_B = \begin{pmatrix} 0 \text{ kN} = T_x \text{ effort tranchant selon X} \\ 1 \text{ kN} = T_y \text{ effort tranchant selon Y} \\ 0 \text{ kN} = N_z \text{ effort normal selon Z} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{M}}_B = \underline{\mathbf{BG}} \times \underline{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 2.5 \text{ kNm} = M_{fx} \text{ moment de flexion selon X} \\ 0 \text{ kNm} = M_{fy} \text{ moment de flexion selon Y} \\ 5 \text{ kNm} = M_{tz} \text{ moment de torsion selon Z} \end{pmatrix}$$

Moment statique en J et section moyenne pour la torsion :

$$\mathcal{H} = 11875 \text{ mm}^3 \quad \bar{A} = 9025 \text{ mm}^2$$

Contraintes normales dues aux efforts T_y , M_{fx} et M_{tz} en J :

$$\begin{aligned} \tau_{M_t} &= \tau_{zx} = 55.4 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{T_y} &= \tau_{zx} = 0.41 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{fz} &= \sigma_z = -43.6 \text{ N/mm}^2 \\ \Rightarrow \sigma_{tot} &= \sigma_{fz} = -43.6 \text{ N/mm}^2 \\ \Rightarrow \tau_{tot} &= \tau_{M_t} + \tau_{T_y} = 55.81 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

8.3 Exercice

Un cylindre, dont la longueur vaut 2 m et dont le rayon vaut 0.5 m , est fermé par des plaques planes épaisses. Il renferme un gaz sous la pression uniforme de $p = 10\text{ bar}$ ($1\text{ bar} = 10^5\text{ Pa}$).

On demande de calculer son épaisseur minimale t qui garantit un coefficient de sécurité de 1.5 si on utilise un acier dont la contrainte admissible est égale à $\sigma_{adm} = 235\text{ N/mm}^2$ ($E = 21000\text{ daN/mm}^2$). Le critère de Tresca sera adopté.

8.3.1 Réponse

Soient :

$R = 0.5\text{ m}$: rayon du cylindre, $P = 10^6\text{ Pa}$: pression, $s = 1.5$: coefficient de sécurité

La contrainte est plus élevée sur la paroi intérieure du cylindre soumise à la pression P que sur la paroi externe soumise à la pression atmosphérique.

contrainte axiale : $\sigma_x = \frac{PR}{2t}$

contrainte radiale sur la paroi intérieure : $\sigma_R = -P$

contrainte circonférentielle : $\sigma_\theta = \frac{PR}{t}$

critère de Tresca :

$$\begin{aligned}\tau_{max} &= \left| \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \right| \leq \frac{\sigma_{adm}}{s2} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{PR}{t} + P \right) &\leq \frac{\sigma_{adm}}{s2} \\ \frac{R}{t} + 1 &\leq \frac{\sigma_{adm}}{sP} \\ \frac{R}{t} &\leq \frac{\sigma_{adm}}{sP} - 1 \\ &\leq 155.667 \\ &\Rightarrow t = 3.2\text{ mm}\end{aligned}$$

Chapitre 9

Examen écrit de Résistance des Matériaux - 27 août 2001

9.1 Exercice

On considère la poutre en acier ($E = 210.000 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0.3$) de la figure ci-dessous. En B , on considère une rotule parfaite. Un moment agit en D .

On demande :

1. Justifier le degré d'hyperstaticité du système ;
2. Tracer les diagrammes MT ;
3. Déterminer son module de flexion (I/v en cm^3) de façon à ce que la contrainte maximale de flexion ne dépasse pas 240 N/mm^2 avec un coefficient de sécurité de 1.5 ;
4. Expliquer comment calculer l'angle qui apparaîtra au niveau de l'appui C (il ne faut pas développer les calculs).

NB : on néglige les contraintes créées par l'effort tranchant.

9.1.1 Réponse

1. degré d'hyperstaticité :
inconnues de liaison : $4 \cdot 1$
équations d'équilibre : 2 (l'équation d'équilibre horizontal est triviale)
prise en compte de la rotule : 1
 \Rightarrow degré d'hyperstaticité : 1
Le système isostatique de référence est choisi en introduisant une rotule au niveau de l'appui C .

2. Diagrammes MT

3. Inconnue hypersatique

$$\delta_{1 \Sigma P} = \frac{1}{EI} \frac{23}{4} \quad (11) = \frac{1}{EI} \frac{4}{3} \quad X_1 = -4.3125 \text{ kNm}$$

4. Module de flexion

$$M_{max} = 6 \text{ kNm} \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{v} = \frac{M_{max}}{\sigma_0/1.5} = 37.5 \text{ cm}^3$$

5. Angle de rotation de l'appui en C

Application du théorème de Pasternak à partir des diagrammes du moment fléchissant $M_{\Sigma P}^h$ du système réel et M_{s1}^0 du système isostatique avec un moment unitaire appliqué sur les lèvres de la coupure en C .

$$\varphi_C = \delta_C = \int \frac{M_{\Sigma P}^h \cdot M_{s1}^0}{EI} ds$$

9.2 Exercice

On considère le profil en acier ($E = 210.000 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0.3$) de la figure ci-dessous. Il est soumis à un moment de flexion autour de l'axe OX de $M_x = 5 \text{ kNm}$ et à un effort tranchant selon OY de $T_y = 2 \text{ kN}$.

On demande :

- de calculer et de dessiner la répartition des contraintes σ et τ dans toute la section.

9.2.1 Réponse

9.3 Exercice

Pour les profils suivants, calculer :

1. l'inertie polaire ;
2. le moment de torsion maximum admissible

La contrainte de cisaillement admissible vaut $\tau_{adm} = 9 \text{ daN/mm}^2$.

9.3.1 Réponse

profil fermé

$$I_{\theta} = 1369599 \text{ mm}^4 \quad M_{max} = 3201 \text{ Nm}$$

profil ouvert

$$I_{\theta} = 2772 \text{ mm}^4 \quad M_{max} = 83.16 \text{ Nm}$$