



Département Mathématique, Informatique et Géomatique (MIG)

Elément de Module : Topographie

Chapitre 3 : Théorie des Erreurs

EL Hassan EL BRIRCHI

Plan du Chapitre

- ▶ Terminologie
- ▶ Objectif du Topographe (Géomètre)
- ▶ Erreurs en topométrie
 - ▶ Fautes
 - ▶ Erreurs systématiques
 - ▶ Erreurs accidentelles
- ▶ Modèle mathématique
 - ▶ Loi Normale
 - ▶ Propagation des erreurs
- ▶ Erreur Graphique

Terminologie

- ▶ **Valeur vraie** : valeur exacte et unique d'une grandeur mesurée (distance, angle,...).
- ▶ La valeur vraie est une valeur utopique qui ne peut être connue à partir d'un graphique, d'une mesure ou d'un calcul basé sur des mesures.
- ▶ **Valeur conventionnellement vraie d'une grandeur** : valeur approchée de la valeur vraie de cette grandeur. La différence entre ces deux valeurs peut être négligée.
- ▶ **Mesurage (mesure en topométrie)** : ensemble des opérations expérimentales ayant pour but de déterminer la valeur d'une grandeur.
- ▶ **Méthode de mesure** : mode de comparaison utilisé. On distingue :
 - ▶ Mesure direct : comparaison de la grandeur à mesurer avec un étalon.
 - ▶ Mesure indirecte : résultat de mesure d'une grandeur donné par l'intermédiaire d'une formule de calcul ou d'un graphique liant des mesures directes

▶ 127

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Terminologie

- ▶ **Erreur de mesure** : discordance entre la valeur de la grandeur (vraie ou bien conventionnellement vraie) et le résultat de la mesure (valeur mesurée).
- ▶ **Fautes** : erreurs grossières, non acceptables. Elles sont le résultat d'une exécution incorrecte du mesurage.
- ▶ **Principales sources des erreurs de mesure** :
 - ▶ Erreurs d'instrumentation
 - ▶ Erreurs d'observations liées à l'opérateur qui réalise les mesures
 - ▶ Erreurs liées aux conditions des observations : température, pression, humidité,...

▶ 128

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Terminologie – Types des erreurs

- ▶ **Erreurs systématiques** : inévitables, leurs causes sont connues et il est possible de les éliminer des résultats de mesure :
 - ▶ En utilisant un procédé ou une méthode particulière de mesurage
 - ▶ En les évaluant par des formules et des calculs
- ▶ **Erreurs accidentelles** : aléatoires, on ne peut pas les évaluer mais on peut les caractériser statistiquement.
- ▶ Les erreurs systématiques sont souvent liées aux conditions des observations et aux instruments de mesure.
- ▶ Les erreurs accidentelles par contre sont souvent liées aux observations faites par les opérateurs.

▶ 129

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Objectif du topographe (géomètre)

- ▶ Effectuer des mesures d'angles et de distances
- ▶ En déduire des déterminations de coordonnées planimétriques (X,Y) et altimétriques (Z)
- ▶ Tenir compte des erreurs systématiques dans les résultats de mesures définitifs
- ▶ Évaluer l'effet des erreurs accidentelles statistiquement et calculer la **PRECISION** des mesures obtenues
- ▶ Définir jusqu'à quelles valeurs ces erreurs sont admissibles : **TOLERABLES**
- ▶ Tenir compte des erreurs des mesures directes dans le calcul des mesures indirectes : **propagation des erreurs**

▶ 130

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Objectif du topographe (géomètre)

- ▶ Les cahiers de charges des travaux topométriques et topographiques fixent les tolérances acceptables pour le résultat final de mesure.
- ▶ Le choix des instruments et des modes opératoires devra être fait pour répondre à cet objectif selon les contraintes suivantes :
 - ▶ Minimiser le coût économique du projet
 - ▶ Utiliser le mode opératoire le plus simple possible
 - ▶ Fournir des résultats finaux dont l'incertitude est inférieure à la tolérance fixée dans le cahier des charges

▶ I 31

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Erreurs en topométrie

- ▶ Afin de remédier aux différents types d'erreurs qui entachent les mesures topométriques et afin de les réduire on peut jouer sur les éléments suivants :
 - ▶ Méthode de mesure
 - ▶ Instrument de mesure
 - ▶ Répétition des mesures
- ▶ Rappel : la valeur vraie n'est jamais atteinte en mesure
- ▶ La matérialisation exacte des concepts théoriques de géométrie (point, droite, cercle, ligne, angle, surface, volume, arc,...) est impossible
- ▶ On cherche à connaître les limites d'incertitude des mesures isolées pour un modèle d'instrument et un mode opératoire.
- ▶ On cherche à connaître aussi la composition de ces incertitudes au cours des calculs ou des tracées ainsi que leur influence sur le résultat final.

▶ I 32

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Erreurs en topométrie - Fautes

- ▶ Sources :
 - ▶ Négligences
 - ▶ Maladresse
 - ▶ Oubli
 - ▶ Manque de prudence
- ▶ Caractéristique : faciles à déceler
- ▶ Une faute doit obligatoirement être éliminée
- ▶ Fautes ou erreur ?
 - ▶ Une valeur de mesure est considérée comme une faute lorsqu'elle dépasse la tolérance donnée pour les observations ou lorsqu'elle est en dehors des limites de précision possibles par un instrument. Le résultat de mesure est ainsi considéré comme anormal
- ▶ Solutions : contrôle et vérification (par la méthode, par le calcul ou par l'instrument)
- ▶ Exemples : répéter la mesure, contrôler le calcul, fermetures, ...
- ▶ Un résultat non vérifié, susceptible de contenir une faute doit être rejeté.

▶ 133

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Erreurs en topométrie - Erreurs

- ▶ Sources :
 - ▶ Imperfection des instruments
 - ▶ Imperfection des sens des personnes
- ▶ Fautes ou erreur ?
 - ▶ Valeur de l'erreur inférieure à la tolérance contrairement aux fautes
 - ▶ Valeur dans les limites admises par l'instrument
- ▶ Problèmes :
 - ▶ La somme des erreurs peut être importante
 - ▶ La propagation des erreurs
- ▶ Solutions :
 - ▶ Contrôle (par la méthode ou par l'instrument)
 - ▶ Connaissances et formulation des erreurs systématiques
 - ▶ Évaluation statistique et compensation des erreurs accidentelles

▶ 134

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Erreurs en topométrie – Erreurs systématiques

- ▶ Se reproduisent de manière **identique** à chaque fois : elles sont constantes en grandeur et en signe
- ▶ **Effet d'accumulation** : Elles s'ajoutent systématiquement les unes aux autres dans les mesures enchainées
- ▶ Leur cause est **permanente** (connue ou pas), elle est généralement connue
- ▶ Leur ordre de grandeur est connu : Elles sont **possibles à corriger**
 - ▶ par le calcul
 - ▶ par le mode opératoire adopté : on cherche à exploiter des symétries dans la méthode d'observation de sorte à associer à chaque erreur systématique e une erreur $-e$
 - ▶ Par la **méthode des valeurs minimas** : on se place dans les meilleurs conditions pour effectuer des observations

▶ 135

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Erreurs en topométrie – Erreurs systématiques

- ▶ **Exemples : mesures d'angles**
 - ▶ Collimation horizontale
 - ▶ Collimation verticale
 - ▶ Tourillonnement
 - ▶ Excentricité de l'axe de l'alidade
 - ▶ Défauts de graduation des limbes horizontal et vertical
 - ▶ Réfraction (visée)
 - ▶ ...
- ▶ **Exemples : mesures de distances**
 - ▶ Étalonnage, température, pression, tension, chainette, alignement, défaut d'horizontalité,...

▶ 136

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Erreurs en topométrie – Erreurs accidentelles

- ▶ Ne présentent pas de caractère systématique :
 - ▶ Ne peuvent pas être calculées d'avance
 - ▶ Ne peuvent pas être éliminées par le mode opératoire
- ▶ Causes non analysable. On ne peut que les constater.
- ▶ Changent de valeur continuellement
- ▶ Change ou pas leur signe : leur signe n'est pas constant
- ▶ Exemples : mesures d'angles
 - ▶ Centrage, pointage, lecture, air, ...
- ▶ Exemples : mesures de distances
 - ▶ Centrage, pointage, lecture, air, matérialisation de portées, ...

▶ 137

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Erreurs en topométrie – Erreurs accidentelles

- ▶ Types des erreurs accidentelles :
 - ▶ Erreur Absolue : différence entre le résultat de mesure et la valeur de comparaison
 - ▶ Erreur absolue véritable : la valeur de comparaison est la valeur vraie
 - ▶ Erreur apparente : la valeur de comparaison est la valeur conventionnellement vraie (la moyenne des mesures en générale)
 - ▶ L'erreur apparente est appelée aussi
 - Écart probable : dans le cas des mesures directes
 - Résidu : dans le cas des mesures indirectes
 - ▶ Erreur relative : quotient de l'erreur absolue par la valeur vraie, exprimée en pourcentage

▶ 138

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Erreurs en topométrie – Erreurs accidentelles

- ▶ **Traitement des erreurs accidentelles :**
 - ▶ On ne peut pas calculer une correction à apporter aux mesures pour éliminer les erreurs accidentelles.
 - ▶ On peut par contre fixer les limites de l'erreur avec une probabilité donnée : ces erreurs obéissent à des lois quand les mesures sont répétées un très grand nombre de fois.
 - ▶ La théorie des erreurs accidentelles permet d'étudier et de fixer ces limites de variations.
- ▶ Certaines erreurs dont le signe est constant et le comportement ressemble aux erreurs accidentelles sont appelées erreurs accidentelles à caractère systématique

▶ I 39

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Erreurs en topométrie – Erreurs accidentelles

- ▶ **Conditions de traitement :**
 - ▶ Les mesures sont répétées dans les mêmes conditions un très grand nombre de fois
 - ▶ Les fautes ont été éliminées
 - ▶ Les erreurs systématiques ont été éliminées
 - ▶ Les erreurs accidentelles sont suffisamment petites pour pouvoir négliger leur carrés
- ▶ **Résultats de traitement :**
 - ▶ La valeur la plus probable à adopter pour une grandeur mesurée directement ou indirectement.
 - ▶ L'incertitude sur les mesures (observations) effectuées au départ.
 - ▶ L'incertitude sur le résultat adopté.

▶ I 40

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

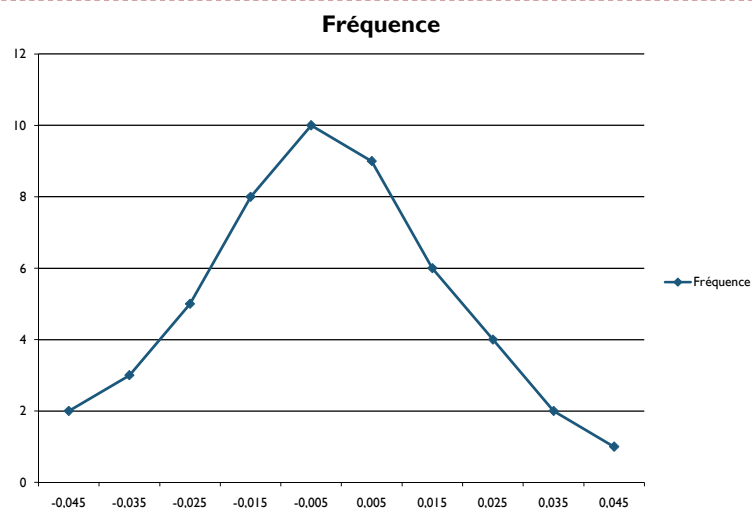
Modèle Mathématique : Exemple

	Mesure	Fréquence	Ecart Probable
	74,54	2	-0,045
	74,55	3	-0,035
	74,56	5	-0,025
	74,57	8	-0,015
	74,58	10	-0,005
	74,59	9	0,005
	74,6	6	0,015
	74,61	4	0,025
	74,62	2	0,035
	74,63	1	0,045
VCV	74,585	50	0

► I41

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique : Exemple



► I42

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique

- ▶ La répétition de cette expérience de mesure donne toujours les mêmes résultats à un facteur d'échelle près.
- ▶ La courbe des fréquences des écarts ou des mesures ainsi obtenue est appelée Courbe de GAUSS.
- ▶ Equation caractéristique de la loi de répartition des erreurs accidentelles (Loi Normale) :

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

▶ I43

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique

- ▶ x : valeur de mesure, variable aléatoire qui a comme loi de distribution la loi normale de paramètres :
- ▶ μ : valeur vraie ou conventionnellement vraie, espérance
- ▶ σ : écart type des mesures, Erreur moyenne quadratique

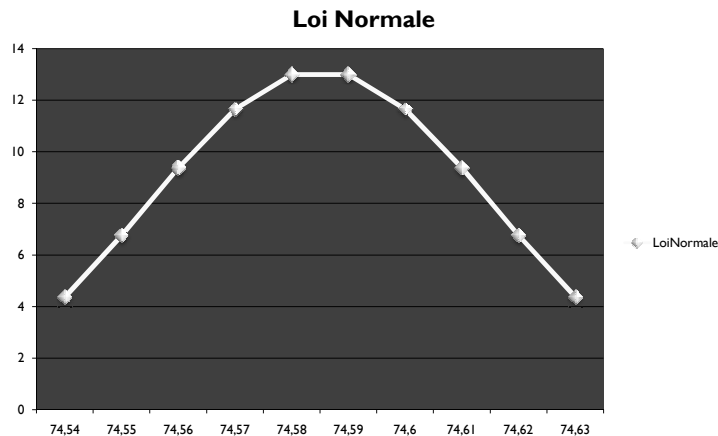
$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

▶ I44

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique

- Loi Normale appliquée à l'exemple précédent



► I45

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique

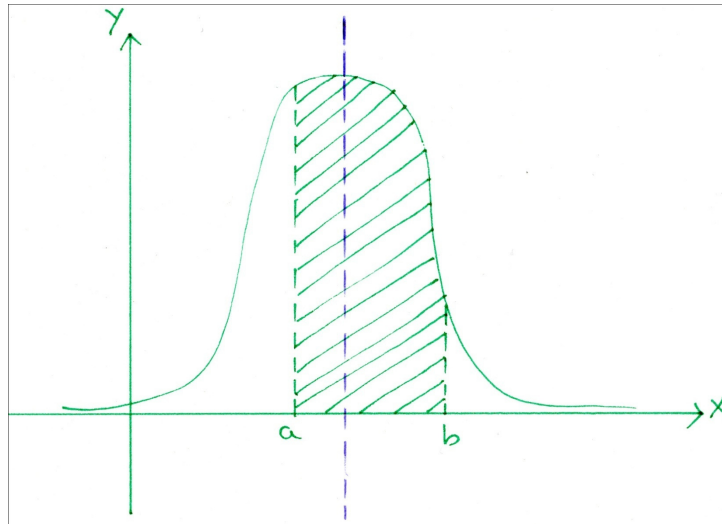
- La probabilité pour qu'une mesure X soit entre a et b est égale à la surface délimitée par la courbe de la loi de distribution normale, l'axe des abscisses et les droites d'équation $y=a$ et $y=b$.

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$

► I46

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique



► 147

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique : Ecart Type

- La courbe de Gauss est symétrique autour de la droite :

$$x = \mu$$

- Elle présente deux points d'inflexion d'abscisses respectifs : $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$.

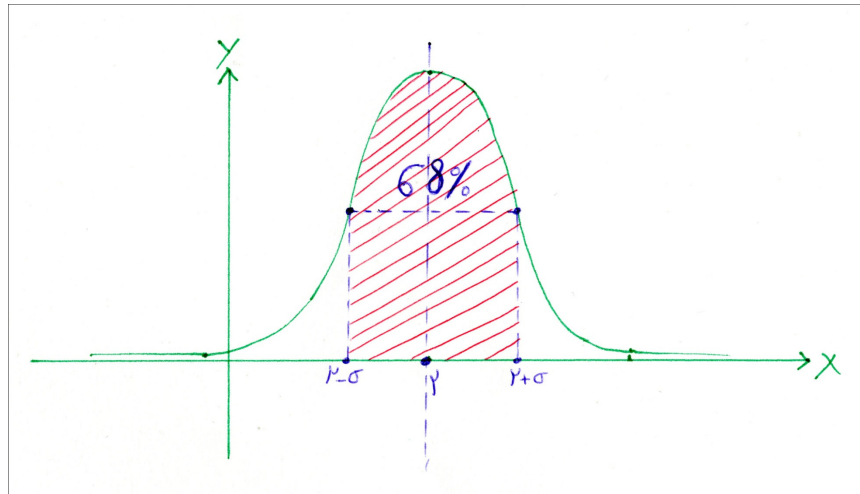
- On a aussi :

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.68$$

► 148

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique : Ecart Type



► 149

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique : Ecart Equiprobable

- C'est l'écart qui a une probabilité de 50% de ne pas être dépassé en valeur absolue.
- Autrement dit :

$$P(\mu - E_p < X < \mu + E_p) = 0.50$$

- On a aussi :

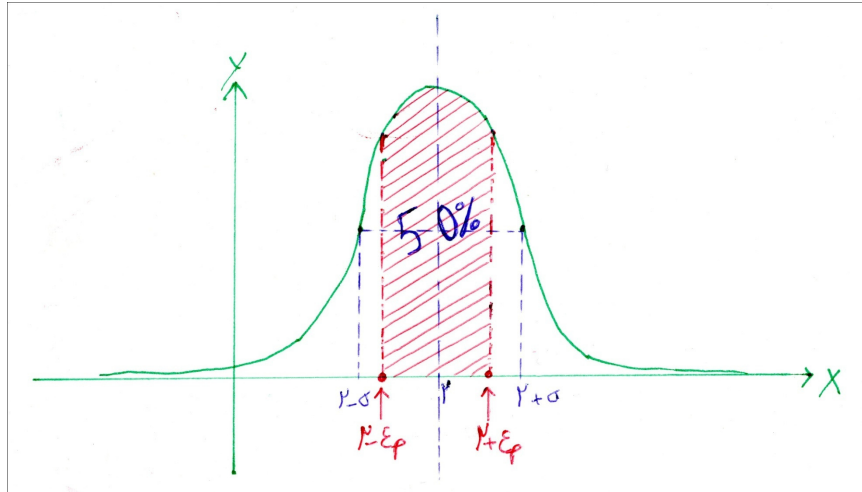
►

$$E_p = 0.68\sigma \approx \frac{2}{3}\sigma$$

► 150

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique : Ecart Equiprobable



► I51

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique : Ecart maximal

- C'est l'écart qui a une probabilité de 99% de ne pas être dépassé en valeur absolue.
- Autrement dit :

$$P(\mu - E_m < X < \mu + E_m) = 0.99$$

- On a aussi :

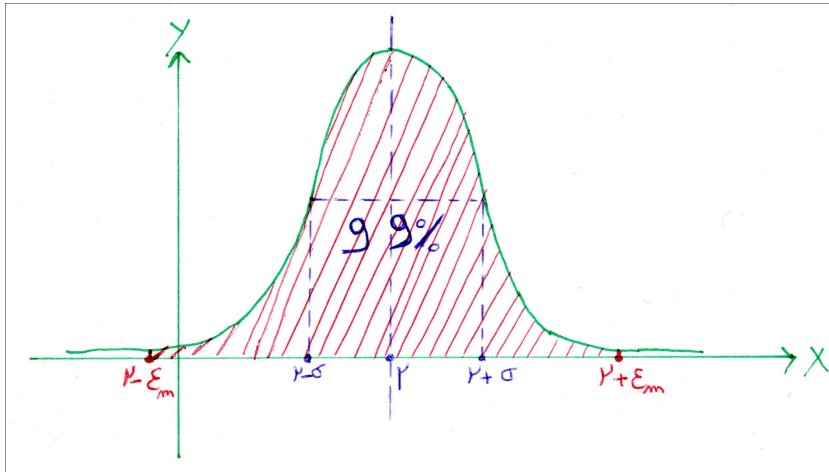
►

$$E_m = 4E_p \approx 2.66\sigma$$

► I52

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique : Ecart maximal



► 153

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique

- L'Ecart Type est appelé aussi la précision de mesure. Il est souvent fourni dans les notices d'utilisateurs des instruments de mesure (ECART TYPE CONSTRUCTEUR). (Ex : 5 mm, 3dmg, 2mg,...)
- Avec l'usage d'un instrument cette valeur peut changer. L'étalonnage des instruments permet de remédier à ce défaut. On peut aussi calculer l'ECART TYPE PRATIQUE de l'instrument.
- Exemple : pour un T2
 - Ecart type constructeur : ± 2.5 dmg
 - Ecart type admis usuellement : ± 5 à 6 dmg
- La précision de mesure d'un instrument est parfois fournie comme la somme d'une partie fixe et d'une partie relatif (Ex : 2mm + 2ppm)
- L'Ecart Maximal est appelé aussi TOLERANCE.
- C'est la limite entre erreur et faute.

► 154

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique : valeur conventionnellement vraie

- ▶ La meilleure estimation de μ est la moyenne arithmétique des mesures effectuées :

$$x_m = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

▶ 155

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique : écart type expérimental d'une mesure

- ▶ La meilleure estimation de μ est la moyenne arithmétique des mesures effectuées :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}}$$

▶ 156

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique : écart type de la moyenne (valeur conventionnellement vraie)

- ▶ Lorsque n augmente écart type de la moyenne diminue : la valeur conventionnellement vraie se rapproche de la valeur vraie.
- ▶ La multiplication du nombre de mesures améliore le résultat final.

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

▶ 157

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique : erreurs accidentelles des mesures indirectes.

- ▶ Les erreurs sont des infiniment petits de premier ordre.
- ▶ On néglige les éléments de deuxième ordre (carré, produit,...)
- ▶ Théorème :

L'erreur sur une fonction de plusieurs variables est la différentielle totale de la fonction, les différentielles des variables représentant les erreurs sur celles-ci.

- ▶ Par exemple :

$$\text{Soit : } F = f(X, Y, Z)$$

$$\text{on a : } dF \approx \frac{\partial F}{\partial X} . dX + \frac{\partial F}{\partial Y} . dY + \frac{\partial F}{\partial Z} . dZ$$

▶ 158

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique : Loi de composition des erreurs.

- ▶ Relation entre l'erreur d'une mesure indirecte et les erreurs des mesures directes entrant dans sa formulation.
- ▶ Par exemple:

$$\text{Soit : } F = f(X, Y, Z)$$

$$\text{on a : } \sigma_F^2 \approx \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^2 \cdot \sigma_X^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 \cdot \sigma_Y^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z} \right)^2 \cdot \sigma_Z^2$$

▶ 159

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique : Loi de composition des erreurs.

- ▶ Exemples:
 - ▶ $(X, Y) = F(D, A)$
 - ▶ Ecart type d'une somme algébrique
 - ▶ Ecart type d'une somme algébrique dont les termes ont la même précision
 - ▶ Ecart type d'un produit
 - ▶ ...

▶ 160

Cours de Topographie - E.H. ELBrirchi 08/03/2013

Modèle Mathématique : Erreur Graphique

- ▶ Pouvoir séparateur de l'œil humain
- ▶ Distance minimale à distinguer sur une carte ou un plan papier.
- ▶ Selon l'échelle demandé :

$$e_{\text{graphique}} = (2 E / 10) mm$$

- ▶ I/E : échelle considérée

Exemples :

- ▶ I/50000 : 10 m
- ▶ I/25000 : 5 m
- ▶ I/10000 : 2 m
- ▶ I/5000 : 1 m
- ▶ I/2000 : 40 cm
- ▶ I/1000 : 20 cm
- ▶ I/500 : 10 cm
- ▶ I/100 : 2 cm
- ▶ I/50 : 1 cm