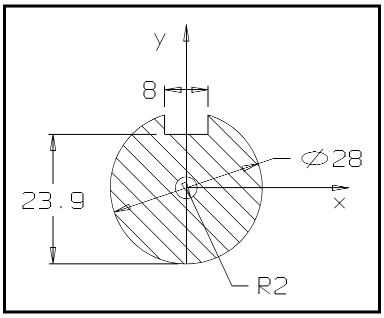
# EXERCICES :
# CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DES SECTIONS PLANES

*(Version du 5 avril 2007 (21h30))*

## 1. Exercices résolus

***Mi.R1.*** L'arbre de machine ci-contre est déforcé par une rainure de cale et par un trou de graissage axial. Calculer le moment d'inertie polaire "$I_o$" de la section de ⌀ 28 pleine et celui de la section déforcée, en négligeant le déplacement du centre de gravité.




**Solution :**

*Arbre plein* :

$$I_0 = \frac{\pi\, d^4}{32} = \frac{\pi \times 28^4}{32} = 60\,344\ mm^4$$

*Trou de graissage* :

$$I_0 = \frac{\pi\, d^4}{32} = \frac{\pi \times 4^4}{32} = 25.1\ mm^4$$

*Arbre avec rainure* :

$$I_0 = \frac{\pi\, d^4}{32} - \frac{a\, t\,(d-t)^2}{4}$$

$$= \frac{\pi \times 28^4}{32} - \frac{8 \times 4.1 \times (28 - 4.1)^2}{4} = 55\,660\ mm^4$$

*Arbre de machine* :

$$I_{t\ arbre\ avec\ rainure} - I_{0\ trou\ de\ graissage} = 55\,660 - 25.1 = 55\,635\ mm^4$$

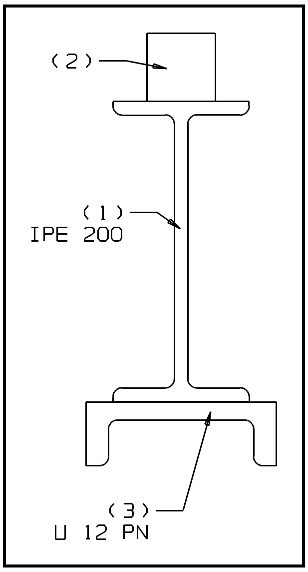
---

***Mi.R2.*** Rechercher la position du centre de gravité (G) de la poutre composée ci-contre. Rechercher ensuite le moment d'inertie maximum par rapport à ce centre de gravité.
Les données du catalogue sont les suivantes :

(1) IPE 200 — 200 x 100 x 5,6 x 8,5 mm
$A = 28.5\ cm^2$
$I_x = 1943\ cm^4$ — $I_y = 142.4\ cm^4$

(2) Carré de 50

(3) U 12 PN — 120 x 55 x 7 x 8.72 mm
$A = 17\ cm^2$
$I_x = 364\ cm^4$ — $I_y = 43.2\ cm^4$ — $y_A = 1.61$ cm




**Solution :**

a) *Recherche du centre de gravité (G)*

Prenons comme référence pour calculer la position du centre de gravité (G), le centre de gravité du "I".

| | $y_i$ [cm] | $A_i$ [cm²] | $S_x = y_i\ A_i$ [cm³] |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 28.5 | 0.00 |
| 2 | 2.5 + 10.0 = 12.50 | 5 × 5 = 25.0 | 312.50 |
| 3 | −1.61 − 10.0 = −11.61 | 17.0 | −197.37 |
| $\sum$ | | 70.5 | 115.13 |

$$y_G = \frac{\sum y_i\ A_i}{\sum A_i} = \frac{115.13}{70.5} = 1.63\ cm$$

Cela revient à dire que le centre de gravité (G) de la poutrelle composée, si on prend comme référence le centre de gravité du "I", "monte" **de 16.3 mm**.

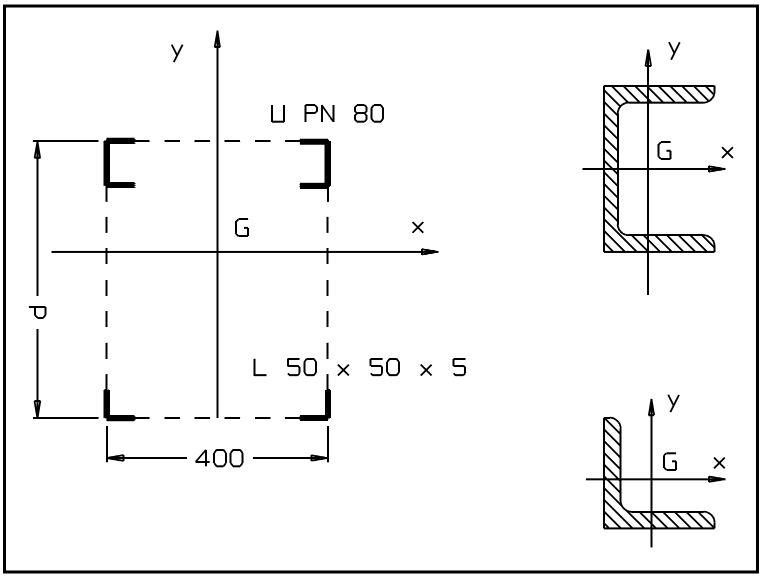
b) *Recherche du moment d'inertie ($I_x$)*

| | $I_{x\,G}$ [cm⁴] | y [cm] | $A_i\ y_i^{\ 2}$ [cm⁴] |
|---|---|---|---|
| 1 | 1943.00 | 1.63 | $28.48 \times 1.63^2 = 75.67$ |
| 2 | $\frac{h^4}{12} = 52.08$ | 10.87 | $25 \times 10.87^2 = 2953.92$ |
| 3 | 43.20 | 1.6 + 10 + 1.6 = 13.20 | $17 \times 13.2^2 = 2962.00$ |
| $\sum$ | 2038.28 | | 5991.59 |

<u>Inertie totale</u> = 2038.28 + 5991.59 = **8029.87** $cm^4$

---

***Mi.R3.*** Un mat de monte-charge est réalisé à l'aide de 4 montants ayant les caractéristiques suivantes :
*2 profilés "U" PN 80* 80x45x6x8
$A = 11\ cm^2$
$I_x = 106\ cm^4$ $I_y = 19.4\ cm^4$
$d_{G\,X} = 14.5\ mm$
*2 profilés "L"* 50x50x5
$A = 4.75\ cm^2$
$I_x = 11.25\ cm^4$ $d_{G\,X} = 14.3\ mm$
Calculez la distance (d) pour que, pour l'ensemble, $I_x = I_y$.




**Solution :**

*Recherchons d'abord la position du centre de gravité suivant (y). Soit ($d_G$) distance par rapport aux "L"*

$$d_G = \frac{\sum y_i\ A_i}{\sum A_i} = \frac{2 \times 4.75 \times 1.43 + 2 \times 11 \times (d-4)}{2 \times 4.75 + 2 \times 11} = 0.698\, d - 2.362$$

*Recherche de l'inertie suivant (y) :*

$$\frac{I_y}{2} = \sum\left(I'_y + A\, d^2\right) = 1\ fer\ "U" + 1\ fer\ "L"$$
$$= 19.4 + 11 \times (20 - 1.45)^2 + 11.25 + 4.75 \times (20 - 1.43)^2$$
$$= 5453.8\ mm^2$$

*Recherche de l'inertie suivant (x) (dépend de (d) et de ($d_G$) ! :*

$$\frac{I_x}{2} = \sum\left(I'_x + A\, d^2\right) = 1\ fer\ "U" + 1\ fer\ "L"$$
$$= 106 + 11 \times (0.302\, d - 1.638)^2 + 11.25 + 4.75 \times (0.698\, d - 3.792)^2$$
$$= \frac{I_y}{2} = 5453.8\ mm^2$$

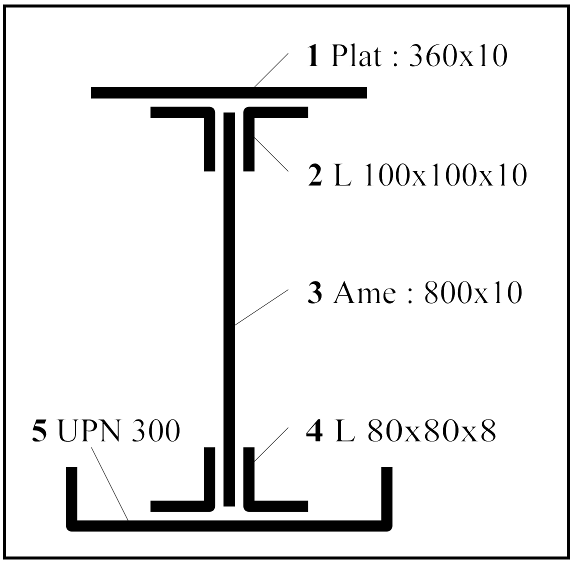
*D'où :* $3.317\, d^2 - 36.028\, d - 5238.64 = 0$

*et donc :* d = 45.54 cm *ou* d = – 34.68 cm
(les "U" sont rejetés en dessous des "L" )

*Remarque :* $d_G = 0.698\, d - 2.362 = 29.43\ cm$

---

***Mi.R4.*** Déterminer la position du centre de gravité "G" et calculer ($I_x$) et ($I_y$) de la poutre composée ci-dessous.




**Solution :**

a) *Recherche du centre de gravité (G)*

Prenons comme référence pour calculer la position du centre de gravité (G), la face inférieure du "U".

| | $y_i$ [cm] | $A_i$ [cm$^2$] | $S_x = y_i\ A_i$ [cm$^3$] |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 + 80 + 0.5 = 81.50 | 36.00 | 2934.00 |
| 2 | 1 + 80 − 2.82 = 78.18 | 2 x 19.15 = 38.30 | 2994.29 |
| 3 | 1 + 40 = 41.00 | 80.00 | 3280.00 |
| 4 | 1 + 2.26 = 3.26 | 2 x 12.27 = 24.54 | 80.00 |
| 5 | 2.70 | 58.80 | 158.76 |
| $\sum$ | | 237.64 | 9447.05 |

$$y_G = \frac{\sum y_i\ A_i}{\sum A_i} = \frac{9\,447.05}{237.64} = 39.75\,cm$$

La position du centre de gravité ce situe à 1.25 cm *en dessous* du centre de gravité de l'âme.

b) *Recherche des moments d'inertie ($I_x$) et ($I_y$)*

| | $I_{x\,G}$ [cm⁴] | $I_{y\,G}$ [cm⁴] | $A_i\, y_i^{\,2}$ [cm⁴] | $A_i\, x_i^{\,2}$ [cm⁴] |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{b\,h^3}{12} = 3.0$ | $\frac{b\,h^3}{12} =$ 3888.00 | 36 x $(40.5 + 1.25)^2 =$ 62750.25 | 0.00 |
| 2 | 2 x 176.7 = 353.4 | 2 x 176.7 = 353.40 | 38.3 x $(40-2.82+1.25)^2 =$ 56563.90 | 38.3 x $(2.82 + 05)^2 =$ 422.15 |
| 3 | $\frac{b\,h^3}{12} =$ 42666.7 | $\frac{80 \times 1^3}{12} =$ 6.67 | 80 x $1.25^2 = 125.00$ | 0.00 |
| 4 | 2 x 72.3 = 144.6 | 2 x 72.3 = 144.60 | 24.54 x $(40-2.26-1.25)^2$ = 32675.50 | 24.54 x $(2.26 + 05)^2 =$ 187.39 |
| 5 | 495.0 | 8030.00 | 58.8 x $(41-2.7-1.25)^2$ = 80714.90 | 0.00 |
| ∑ | 43662.7 | 12422.67 | 232829.60 | 609.50 |

L'inertie suivant (x) est égal à : $I_x = 276492{,}3$ cm⁴
L'inertie suivant (y) est égal à : $I_y = 13031.9$ cm⁴

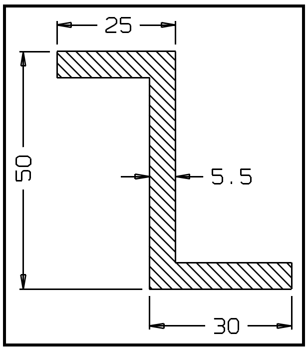
Si on prend l'inertie par rapport au centre de gravité du plat n°3 (de 800 x 10) on trouve l'inertie suivant (x) égal à : $I_x = 276947$ cm⁴, soit une erreur de :

$$\frac{276947 - 276492.3}{276492.3} \times 100 = 0.16\,\%\,!$$

---

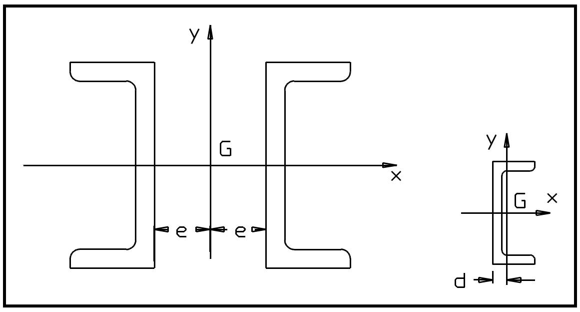
## 2. Exercices supplémentaires

***Mi.1.*** Déterminer la position du centre de gravité (G) du profilé ci-contre. Vérifier le résultat par la méthode de Guldin.




*Réponses* : Les coordonnées sont données par rapport au coin inférieur gauche de la cornière.
$x_G = 4.07$ mm $y_G = 23.82$ mm

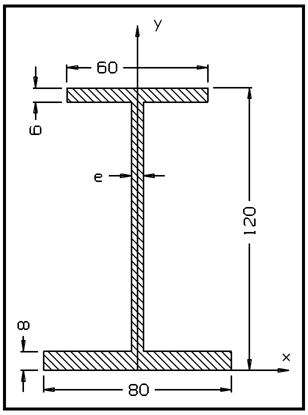
***Mi.2.*** A quel écartement (2e) faut-il placer 2 fers U pour que l'ensemble donne $I_x = I_y$ ?




Fer UPN 240 de caractéristiques suivantes :
$A = 42{,}3$ cm$^2$
$d = 2{,}23$ cm
$I_x = 3600$ cm$^4$
$I_y = 248$ cm$^4$

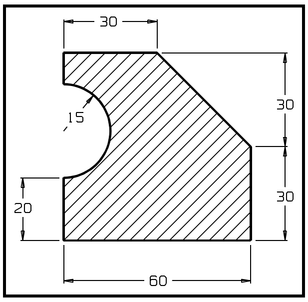
*Réponses* : $e_1 = 6.66$ cm; $e_2 = -11.14$ cm

***Mi.3.*** Pour ce profilé en "I", on souhaite que le centre de gravité (G) se trouve à une hauteur de 51 mm, mesurée à partir de la face inférieure de la semelle de 80 mm. Que doit dès lors valoir l'épaisseur (e) de l'âme de ce profilé ?
Rechercher aussi la valeur du rapport : $K = I_x/I_y$




*Réponses* : $e = 5.96$ mm $\approx 6$ mm $K = I_x/I_y = 17.48$

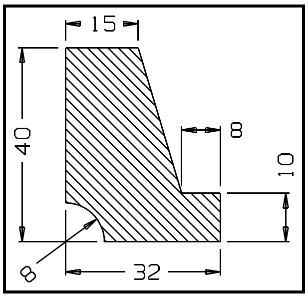
***Mi.4.*** Rechercher le centre de gravité de la surface ci-contre (dimensions en mm) :
- par décomposition en surfaces simples;
- par application du théorème de Guldin.




*Réponses* : Les coordonnées sont données par rapport au coin inférieur gauche de la cornière.
$x_G = 29.76$ mm $y_G = 26.15$ mm

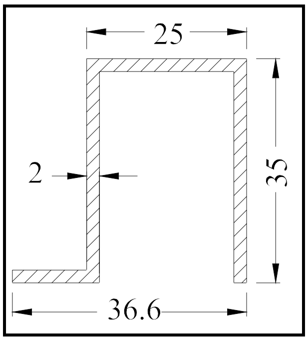
**_Mi.5._** Déterminer la position du centre de gravité de la surface ci-contre :

- par décomposition en surfaces simples;
- par application du théorème de Guldin.



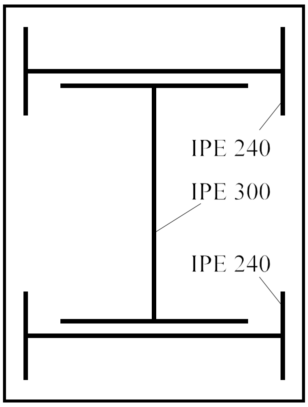

_Réponses_ : Les coordonnées sont données par rapport au centre du quart de cercle.
$x_G = 12.58$ mm $y_G = 18$ mm

**_Mi.6._** Rechercher le centre de masse du profil type 414A ci-contre, utilisé en carrosserie. Déterminer les moments d'inertie par rapport aux axes (x, y) (horizontal et vertical) passant par ce centre de gravité.



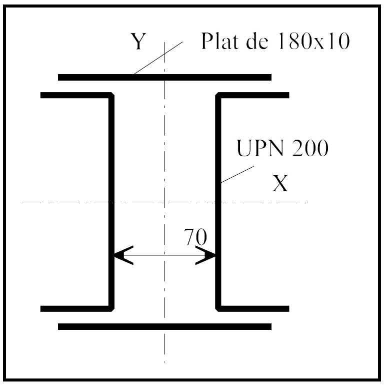

_Réponses_ : $x_G = 22.03$ mm $y_G = 19.01$ mm
Coordonnées par rapport au coin inférieur gauche
$I_{x\,G} = 31595$ mm$^2$ $I_{y\,G} = 27256$ mm$^2$

**_Mi.7._** La section droite d'un colonne métallique est composée de trois IPE solidaires, soudées l'un à l'autre. Rechercher les moments d'inertie maximum et minimum.



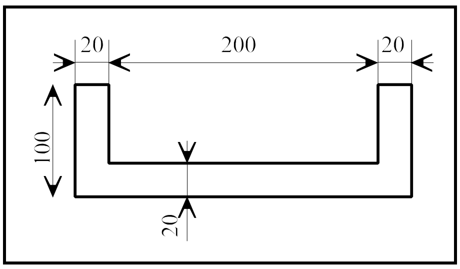

_Réponses_ : $I_{max} = 27258$ cm$^4$ et $I_{min} = 8384$ cm$^4$

**_Mi.8._** La section droite d'une poutre de pont roulant est composée de 2 IPN 200 et de 2 plats de 180 x 10, soudées l'un à l'autre. Rechercher les moments d'inertie maximum et minimum.



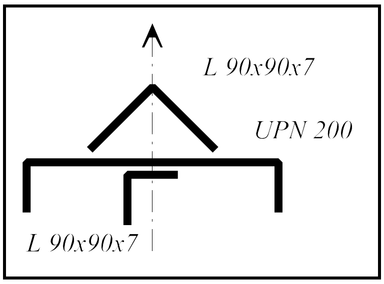

_Réponses_ : $I_y = 3223$ cm$^4$ et $I_x = 7792$ cm$^4$

**_Mi.9._** Calculer les moments d'inertie, par rapport à son centre de gravité, et les rayons de giration de la figure ci-contre.



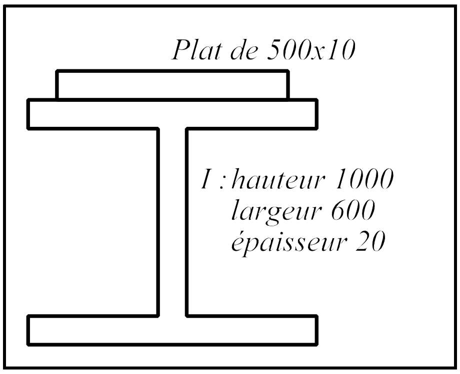

_Réponses_ : $I_{x\,G} = 667$ cm$^4$ et $I_{y\,G} = 6190$ cm$^4$
$i_{g\,x} = 2.89$ cm et $i_{gyx} = 8.8$ cm

***Mi.10.*** Recherchez la position du centre de gravité de la poutre ci-contre. Calculez ensuite le moment d'inertie par rapport à un axe horizontal passant par le centre de gravité.



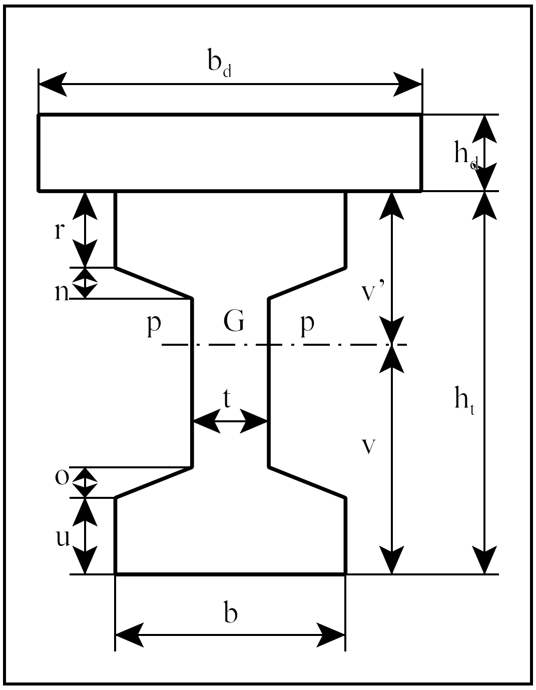

<u>*Réponses*</u> : $y_G = -1.17$ cm (par rapport à la base de la semelle du UPN)
$I_x = 586.3$ cm$^4$

***Mi.11.*** Soit un profilé métallique renforcé par un plat soudé d'épaisseur 10 mm sur la semelle supérieure.
On demande l'inertie du profil par rapport à l'axe horizontal passant par son centre de gravité.




<u>*Réponses*</u> : $y_G = 55.24$ cm $I_x = 838065$ cm$^4$

***Mi.12.*** Soit une poutre en béton précontraint dont on donne toutes les caractéristiques géométriques; cette poutre est solidarisée en phase ultime avec une dalle de béton armé de 15 cm d'épaisseur. La largeur collaborante de la dalle est estimée à 2 m.
On demande de déterminer le centre de gravité et l'inertie de la poutre composite. (Il s'agit de l'inertie par rapport à l'axe horizontal passant par le centre de gravité).

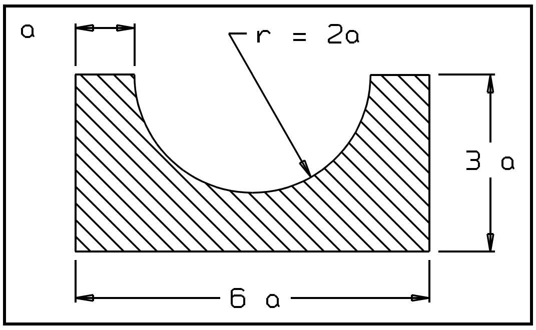



Données :
Dalle : $h_d = 15$ cm $b_d = 200$ cm
Poutre Ergon 70/30
$h_t = 70$ cm $b = 29$ cm
$r = 14$ cm $t = 8$ cm $n = 9$ cm
$u = 9$ cm $o = 11$ cm
$A = 1269$ cm$^2$ $I_{pp} = 762602$ cm$^4$
$v' = 34.83$ cm $I/v' = 21893$ cm$^3$
$v = 35.17$ cm $I/v = 21684$ cm$^3$

<u>*Réponses*</u> : $d_G = 64.92$ cm (par rapport à la semelle) $I_G = 2416765$ cm$^4$

***Mi.13.*** a) Enoncer, sans les démontrer, les deux théorèmes de Guldin.

b) Pour la pièce ci-contre, pour laquelle (a) vaut 10 mm, on demande de trouver la position du centre de gravité. Calculer le moment d'inertie par rapport à un axe horizontal passant par le centre de gravité.

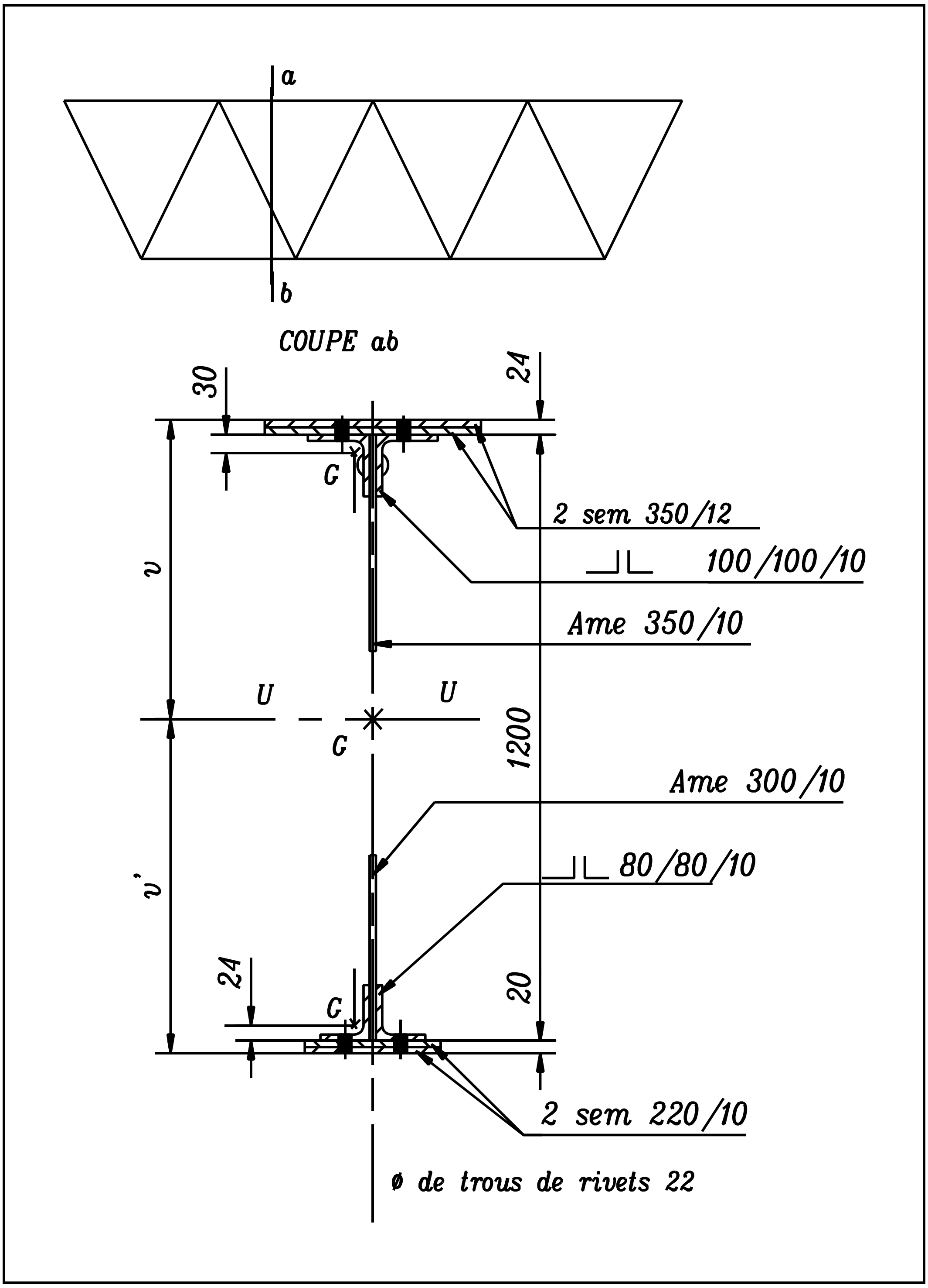



*Réponses* : $y_G = 11.5$ mm (par rapport à la base)

$I_G = 47.7\ cm^4$

## 3. Exercices de projets

***Pr.Mi.1.*** Une poutre en treillis est composée par un assemblage de divers profilés. Calculez la section (A), l'inertie suivant l'axe (UU), les distances v et v' ainsi que les modules de résistance à la flexion correspondants. Remarque : pour le calcul de la surface ne pas décompter les trous de rivets car ils sont négligeables.




*Réponses* : $A = 261.6\ cm^3$; $v = 50{,}6\ cm$; $v' = 73{,}8\ cm$; $I_{UU} = 795657\ cm^4$
$I/v = 15724\ cm^3$; $I/v' = 10781\ cm^3$