FLEXION COMPOSEE

Après avoir étudié les diverses sollicitations simples et leurs effet dans les poutres, examinons comment superposer ces résultats lorsque le chargement de la poutre est quelconque.
Avant de passer au cas général, voyons le cas particulier de la flexion composée (superposition d'un effort normal à un moment de flexion).

1) Définition :

On dit qu'un élément de structure est sollicité en flexion composée lorsqu'il est soumis à la fois à un moment fléchissant Mf (Mfz ou Mfy) et un effort normal N passant par le centre de gravité de la section.

$$\Rightarrow \boxed{Mf \# 0 \; ; N \# 0 \; ; V \# 0 \; ; Mt = 0}$$

N.B

Dans le cas d'un effort de compression excentré N agissant sur une section à une distance « e_y » sur l'axe y, on peut le remplacer par un effort de compression équivalent N passant par le c.d.g de la section, plus un moment fléchissant M_f égal à : $M_f = N.e_y$ (voir Fig.1)

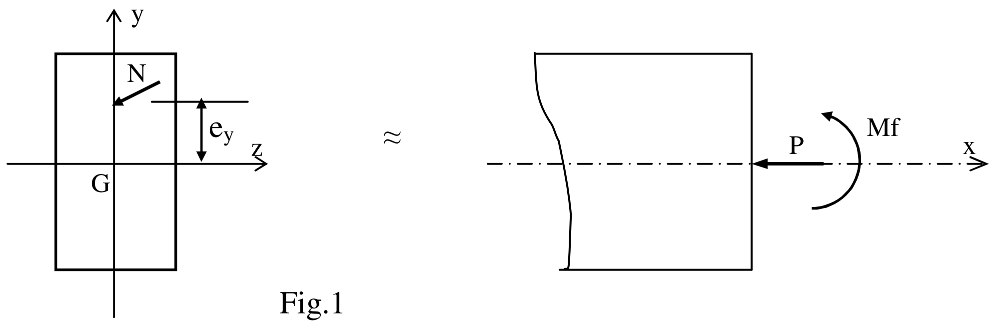


Fig.1

2) Etat de contrainte :

L'équation générale donnant la valeur de la contrainte à une fibre se trouvant à une distance y est donné par :

$$\boxed{\sigma_{(y)} = \pm \frac{N}{A} + \frac{M_f . y}{I}} \quad (1)$$

avec
- N : traction $\Rightarrow$ $\sigma_{(y)} = - \frac{N}{A} + \frac{M_f . y}{I}$
- N : compression $\Rightarrow$ $\sigma_{(y)} = \frac{N}{A} + \frac{M_f . y}{I}$

Cette équation découle de la superposition des résultats obtenus dans l'étude de la compression (ou de la traction) et de la flexion simple :

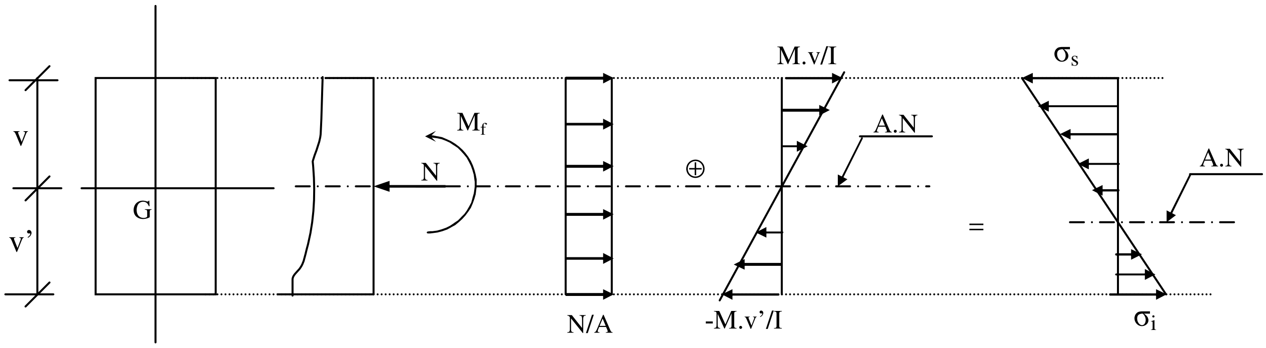


Fig.2 2a 2.b

Sur la figure 2.a, on montre les contraintes uniformes dues à un effort normal N de compression qui s'ajoutent algébriquement aux contraintes dues au moment fléchissant Mz agissant sur la section de l'élément.

II-a) Constatation :

Comme on le voit sur la figure 2.b, l'axe neutre (où $\sigma = 0$) est déplacé. Il est parallèle à la position de l'axe neutre lorsqu'il n'y a qu'une flexion simple, mais il ne passe pas par le centre de gravité de la section comme dans le cas de la flexion simple.

II-b) Position de l'axe neutre : (y_o)

- Cas d'une compression :

  soit N un effort normal de compression, on cherche à déterminer la position de l'axe neutre (A.N), on désigne par y_o la distance qui sépare l'A.N par rapport à l'axe passant par G (le c.d.g de la section).

  On a $\sigma(y_o) = 0$

  Avec $\sigma(y_o) = \dfrac{N}{A} + \dfrac{M_f.y_o}{I} = 0$

  $$\Rightarrow \qquad y_o = -\frac{N.I}{M_f.A}$$

  $$\Rightarrow \qquad \boxed{y_o = -\frac{N}{M_f}.i^2}$$ (avec i, le rayon de giration)

- Cas d'une traction :

  dans le cas ou N est un effort de traction :

$$\sigma(y_o) = -\frac{N}{A} + \frac{M_f . y_o}{I} = 0$$

$$\Rightarrow \; yo = \frac{N}{M_f} . i^2$$

3) Noyau central :

3-a) Définition :

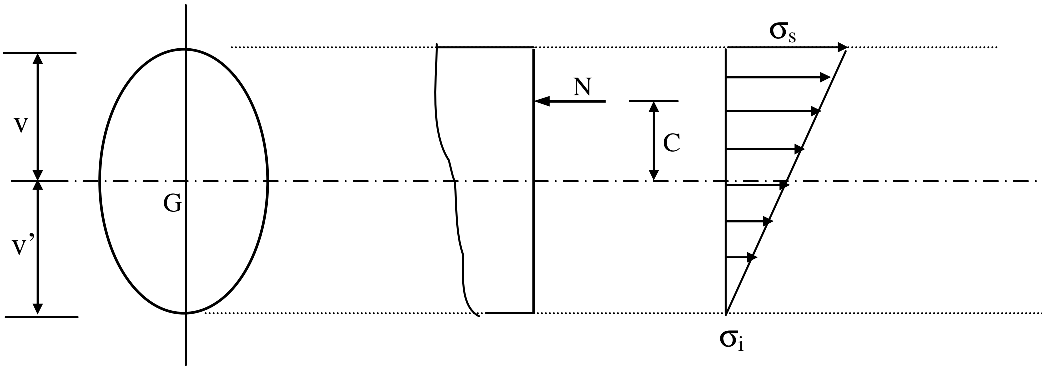
c'est la zone d'une section droite, lorsqu'on applique dans laquelle un effort normal, toutes les fibres seront tendues (ou comprimées).

3-b) Détermination du noyau central d'une section :

Soit N un effort de compression :

On cherche à déterminer les limites du noyau central (N.C), qu'on les désigne par c et c' :

La figure 3.a, nous donne la répartition des contraintes, lorsque N est appliqué au-dessus de la fibre moyenne.



v et v' désignent les positions des fibres extrêmes (inférieur et supérieur) par rapport au centre de gravité G de la section .

On a σ (-v') = σ_i

et σ (v) = σ_s

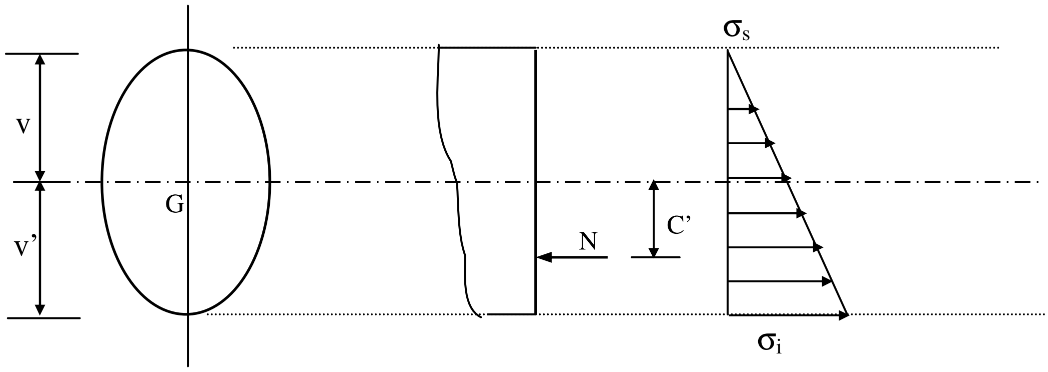
d'où $\sigma_i = 0 \Rightarrow \frac{N}{A} + \frac{(+N.C).(-v')}{I} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{(+C).(-v')}{I} = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{I}{A.v'} = \underbrace{\left(\frac{I}{A.v'.v}\right)}_{\rho}.v$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \rho \,.\, v}$$

Dans le cas ou N est appliqué au dessous de la fibre moyenne :



$$\sigma_s = 0 \quad \Rightarrow \frac{N}{A} + \frac{(-N.C').(v)}{I} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{(-C').(v)}{I} = 0$$

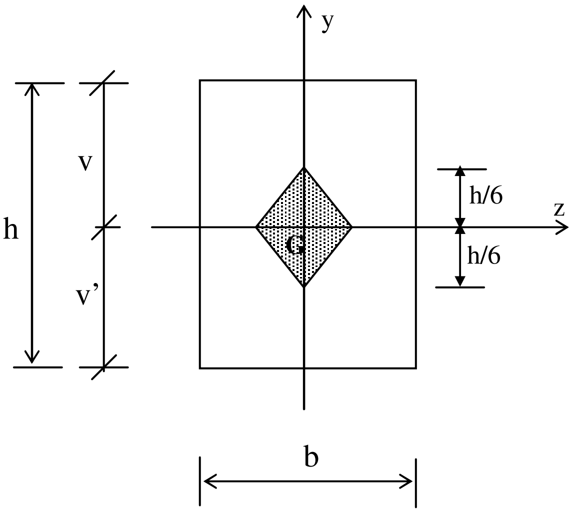
$$\Rightarrow C' = \frac{I}{A.v} = \underbrace{\left(\frac{I}{A.v'.v}\right)}_{\rho}.v'$$

$$\Rightarrow \boxed{C' = \rho \,.\, v'}$$

Le noyau central est tel que : $-c' \leq y \leq c$

3-c) ***Exemples :***

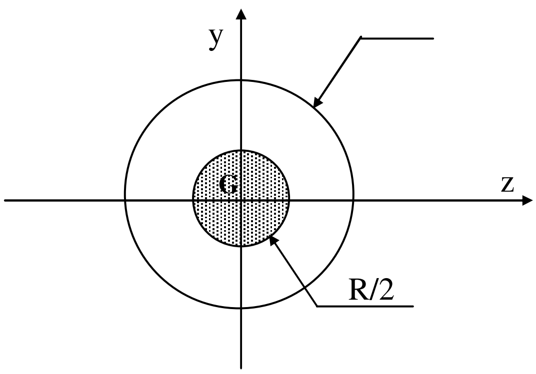
- cas d'une section rectangulaire :



$$I = \frac{b.h^3}{12}$$

$$\rho = \frac{I}{A.v.v'} = \frac{b.h^3}{12\,(bh.\frac{h^2}{4})} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{3}.\frac{h}{2} = \frac{h}{6} \\ c' = \frac{1}{3}.\frac{h}{2} = \frac{h}{6} \end{cases}$$

- Cas d'une section circulaire :



On a $I = \frac{\pi..D^4}{64}$

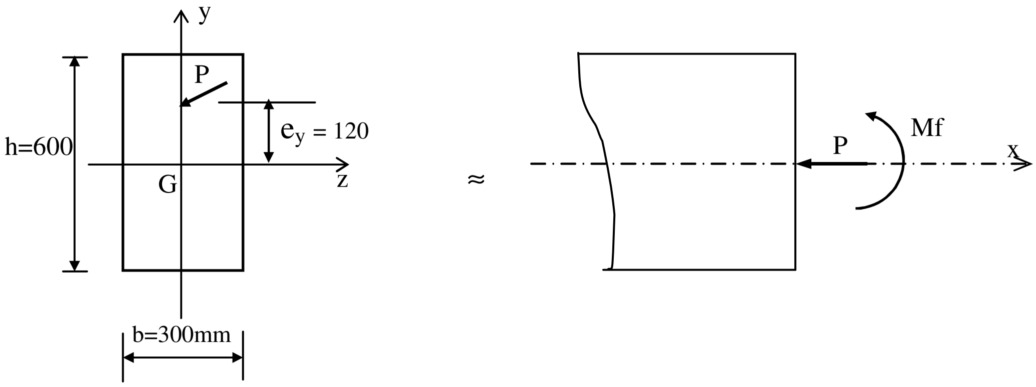
$v = v' = D/2 = R$

$$\Rightarrow \quad c = \rho.v = \frac{\pi.\frac{D^4}{64}}{\frac{\pi.D^2}{4}.\frac{D^2}{4}}.\frac{D}{2} = \frac{D}{8} = \frac{R}{4}$$

$$\Rightarrow \quad c' = \rho.v' = \frac{R}{4}$$

IV)-Application :

La section de la poutre rectangulaire montrée sur la figure ci après est soumise à un effort de compression excentré P = 2500 kN appliqué en un point de l'axe y à une distance ey = 120 mm de l'axe z.



a- déterminer les contraintes dans les fibres extrêmes supérieures et inférieures ;

b- déterminer la valeur minimale de e_y pour qu'il n'y ait pas de contraintes de traction agissant sur la section.

Solution :

a) de l'équation (1), dans la fibre supérieure extrême, on a une contrainte totale de compression σ_s égale à :

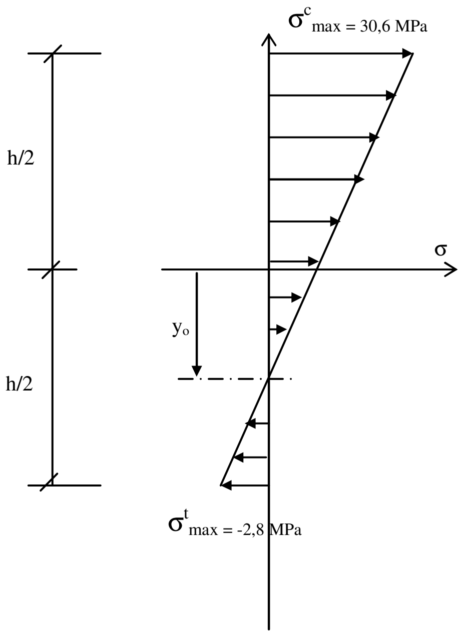
$$\sigma_s = \sigma_{\left(\frac{h}{2}\right)} = \frac{P}{A} + \frac{(P.e_y)}{I}.\frac{h}{2}$$

$$\sigma_s = \left[\left(\frac{2500.10^3}{300.600}\right).\left[1+\frac{6.120}{600}\right]\right] = 30{,}6\ \text{MPa} \quad (\sigma_{max}\ \text{compression})$$

et sur la fibre inférieure extrême σ_i égale à

$$\sigma_i = \sigma\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{P}{A} - \frac{P.e_y}{I}.\frac{h}{2}$$

$$\sigma_i = \left[\left(\frac{2500.10^3}{300.600}\right).\left[1-\frac{6.120}{600}\right]\right] = -2{,}8\ \text{MPa} \quad (\sigma_{max}\ \text{traction})$$



fibre neutre : $\sigma(yo) = 0 \rightarrow \; y_o = \dfrac{-\dfrac{P}{A}}{\dfrac{P.e_y}{I}} = \dfrac{-13,89}{\dfrac{3.10^8}{54.10^8}} = -250,02 \text{ mm}$

b) pour que la section ne soit pas soumise à des contraintes de traction, il faut que

$$\sigma_i = 0$$

et, par conséquent :

$$e_y = \frac{h}{6} = \frac{600}{6} = 100 \text{ mm}$$

→ il faut que l'excentricité de l'effort P ne dépasse pas 100 mm