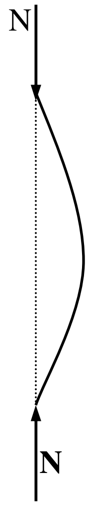
LE FLAMBEMENT

1) Description du phénomène :

Un élément élancé, c'est à dire ayant une grande dimension par rapport à au moins une des deux autres, soumis à un effort de compression axial, peut se déplacer transversalement de façon importante sous de faibles charges.

On peut se rendre compte facilement de ce phénomène avec une lame de scie à métaux tenue verticalement et chargée avec la main appuyée en tête.

On constate qu'à partir d'une charge de l'ordre de 20 N ($\approx$ 2 Kg), le déplacement latéral commence et que pour 25 N, on transforme la lame de scie en boucle en se faisant rejoindre les deux extrémités.



Ce phénomène d'instabilité est appelé *flambement* ou, quelquefois, *flambage*.

On distingue :

-le flambement simple qui affecte les barres simplement comprimées ;

-le flambement-flexion qui affecte les barres comprimées et fléchies.

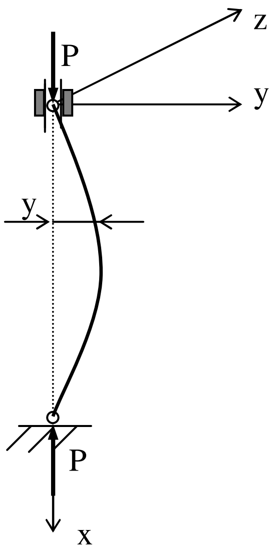
2) Effort critique de flambement :

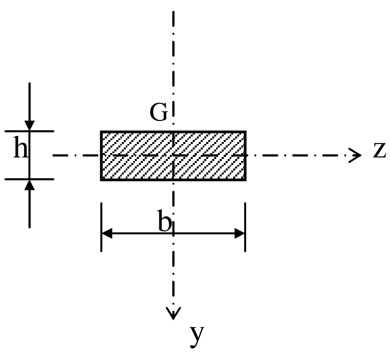
L'effort limite à partir duquel se manifeste les grandes déformations allant jusqu'à l'instabilité est appelé effort critique de flambement, noté Pc.

L'étude du flambement est due à EULER. La théorie d'EULER est fondée :

- sur une poutre droite, bi-articulée à ses extrémités ;

-soumis à un effort normal de compression centré P (suivant Gx).





Lorsque P croit, à partir de zéro, l'état d'équilibre rectiligne initial évolue vers un état curviligne fléchie.

D'après la loi fondamentale de la flexion on a :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E.I}$$

or $\quad M = -P.y$

donc $\quad EI.\frac{d^2y}{dx^2} + P.y = 0$

$$\Rightarrow \quad y'' + \frac{P}{EI}.y = 0$$

en posant : $\quad \omega = \sqrt{\frac{P}{EI}}$,

on obtient : $\quad y'' + \omega^2.y = 0$

C'est une équation différentielle du second ordre, dont la solution générale est de la forme :

$$y(x) = A.\cos(\omega x) + B \sin(\omega y)$$

la résolution de cette équation s'opère grâce aux conditions aux limites :

- pour $x = 0$, $\quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A=0$;
- pour $x = l_0$, $\quad y(l_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B.\sin\omega l_0 = 0$

deux cas sont alors possibles :

- si $\quad \sin(\omega l_0) \neq 0 \quad \rightarrow \quad B = 0$ et $\quad y(x) = 0, \quad \forall x$ (pas de flambement dans ce cas) ;
- si $\quad \sin(\omega l_0) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega.l_0 = k.\pi$

soit $\quad \omega = \frac{k\pi}{l_0} = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad$ d'où $\quad P = \frac{k^2.\pi^2.EI.}{l_0^2}$

pour k=0 $\rightarrow$ P = 0 : la poutre est rectiligne

pour que la poutre reste fléchie, il faut que k soit au moins égal à 1, ce qui conduit à la valeur minimale de P qui vaut :

$$\boxed{P = \frac{\pi^2.EI}{l_0^2}}$$

Pc est appelé force critique d'Euler.

3) Contrainte critique d'Euler :

A la force critique d'Euler Pc correspond une contrainte critique : $\sigma_c = \frac{Pc}{A}$

avec A : la section droite de la poutre ;

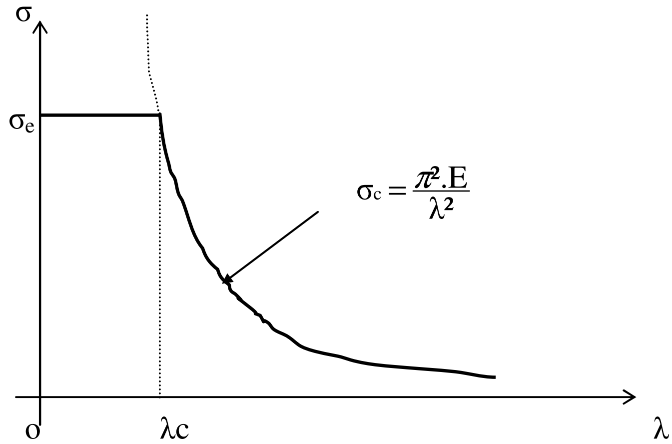
$$\Rightarrow \sigma_c = \frac{\pi^2 . E\,I}{l_0^{\,2} . A} = \frac{\pi^2\,E}{l_o^2} . i^2$$

avec $i = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$; rayon de giration minimal, correspond à l'inertie I minimale.

Soit $\lambda = \frac{lo}{i}$: l'élancement

D'où

$$\boxed{\sigma_c = \frac{\pi^2 . E}{\lambda^2}}$$



lorsque $\sigma_c > \sigma_e$, aucun risque de flambement n'est à craindre (on vérifie la compression simple) ;

lorsque $\sigma_c < \sigma_e$, il y a ruine par flambement dès lors que $\sigma = \sigma_c$.

Remarque : pour $\sigma c = \sigma e$ (limite), correspond un élancement critique λc

$$\lambda_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}}$$

$\rightarrow$ la théorie d'Euler n'est applicable que lorsque $\lambda \geq \lambda_c$

quelques valeurs de λ_c :

acier	:	$\lambda_c \approx 105$
bois	:	$\lambda_c \approx 70$
fonte	:	$\lambda_c \approx 60$

4) Poutres autres que bi-articulée :

D'une manière générale, selon les conditions aux appuis, la force critique d'Euler vaut :

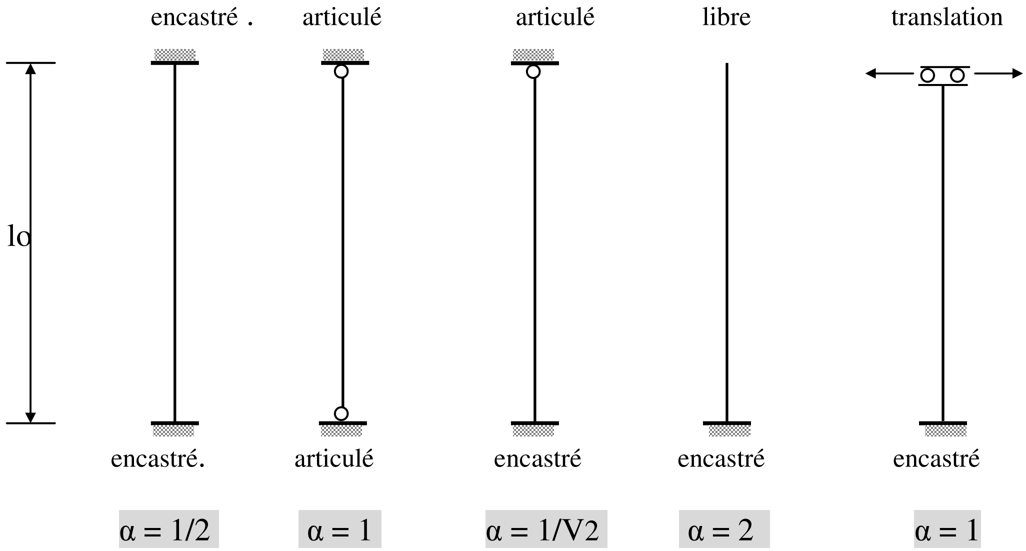
$$P_c = \frac{\pi^2\,EI}{(\alpha . l_o)^2}$$

avec l_o = la longueur réelle de l'élément

soit $l_f = \alpha . l_o$: la longueur de flambement

$$\Rightarrow \boxed{P_c = \frac{\pi^2\,EI}{(l_f)^2}}$$

avec α un coefficient qui dépend des conditions aux extrémités (types d'ancrage) :



5) Sécurité vis à vis du flambement :

Causes des imperfections :

- défauts d'homogénéité ;
- défauts de centrage ;
- défauts de rectitudes, …

Coefficients de sécurité :

$$\sigma \leq \frac{\sigma_c}{2.s} \quad \text{avec} \begin{cases} 2 : \text{superposition de la compression et la flexion ;} \\ s : \text{coefficient de sécurité} \quad (s = \sigma_e/\sigma_p) \quad ; \end{cases}$$

comme

$$\sigma_c = \frac{\pi^2.E}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma \leq \frac{\pi^2.E}{2.\lambda^2.s}$$

$$\sigma \leq \frac{\pi^2.E.\sigma_p}{2.\lambda^2.\sigma_e} = \underbrace{\frac{\pi^2.E.}{\sigma_e}}_{\lambda_c^2} . \frac{\sigma_p}{2\lambda^2}$$

$$\text{soit} \quad \beta = 1/\lambda_c^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma \leq \frac{\sigma_p}{2\beta\lambda^2}}$$

6) Théorie de Rankine :

Si λ ↗ ⇒ Pc : flambement d'Euler ;

Si λ ↘ ⇒ N : compression ;

Pour les valeurs intermédiaires (pièces moyennement courte) ⇒ Le modèle de Rankine

Dans ce cas : $\boxed{\sigma \leq \frac{\sigma_p}{1+\beta\lambda^2}}$

Résumé :

$\lambda \leq 20$	$20 \leq \lambda \leq \lambda c$	$\lambda \geq \lambda c$
⇒ compression simple	⇒ modèle de Rankine	⇒ théorie d'Euler
on vérifie que :	on vérifie que :	on vérifie que :
$\sigma \leq \sigma_p$	$\sigma \leq \frac{\sigma_p}{1+\beta\lambda^2}$	$\sigma \leq \frac{\sigma_p}{2\beta\lambda^2}$

7) Applications

Exemple1

Vérifier un poteau constitué par une poutrelle HEB200, hauteur 8.00m, articulé aux deux extrémités. Il est sollicité par un effort pondéré de 44 kN.

Caractéristiques géométriques du profilé :

$S = 78.1$ cm², $I_{min} = 2003$ cm^4, $E= 2{,}1.10^5$ MPa , $\sigma_e = 240$ MPa et $s = 2.5$

Solution :

- l'élancement du poteau : $\lambda = lf/i_{min}$

$= 8.10^3 / 5.07 = 159.2$

– l'élancement critique : $\lambda c = \pi.\sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} = \pi.\sqrt{\frac{2{,}1.10^5}{240}} = 92{,}93$

On constate que $\lambda > \lambda c$ → Théorie d'Euler

On vérifie que $\sigma \leq \frac{\sigma_c}{2.s}$

Avec la contrainte critique d'Euler :

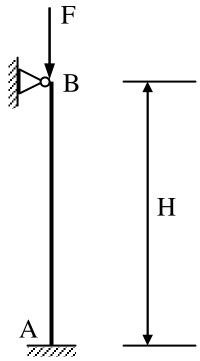
$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 .2{,}1.10^5}{2{,}53} = 79{,}3\ \text{MPa}$$

soit $\sigma = \frac{44.10^3}{7810} = 5.63 \leq \frac{79.3}{2.2{,}5} = 15.86$ <u>ok</u>

⇒ le poteau est stable vis à vis au flambement.

Exemple 2

Vérifier la stabilité du poteau représenté ci-après :

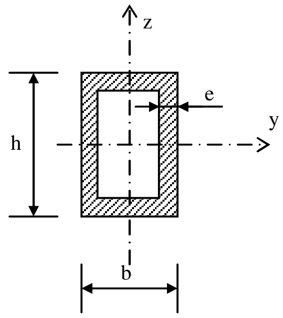


Données : F= 350 kN, H= 6.00m
b=150 mm, h = 200 mm et e=25 mm
λc= 80, σe = 30 Mpa et s=2 (coef. de sécurité)

Solution :

- l'élancement du poteau : $\lambda = lf/i_{min}$

avec
$$\begin{cases} l_f = 0{,}707.6{,}00 = 4{,}24 \text{ m} \\ I_{min} = \dfrac{200.150^3}{12} - \dfrac{150\,.100^3}{12} = 43{,}75\,10^6 \text{ mm}^4 \\ i_{min} = \sqrt{\dfrac{Imin}{A}} = \sqrt{\dfrac{43{,}75.10^6}{15.10^3}} = 54 \text{ mm} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \lambda = \frac{4{,}24.10^3}{54} = 78{,}52$$

– l'élancement critique : $\lambda c = 80$

On constate que $\lambda < \lambda c$ $\rightarrow$ Théorie de Rankine

On vérifie que $\sigma \leq \dfrac{\sigma_p}{1+\beta.\lambda^2}$

Avec
$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{\lambda_c^2} = \dfrac{1}{80^2} \\ \sigma_p = \dfrac{\sigma_e}{s} = \dfrac{30}{2} = 15 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\text{soit} \quad \sigma = \frac{350.10^3}{15000} = 23{,}33 \geq \frac{15}{1+\left(\dfrac{78{,}52}{80}\right)^2} = 7{,}64 \text{ MPa}$$

$\Rightarrow$ le poteau est instable vis à vis au flambement.