

Vibrations des poutres

par Jean COURBON

Ingénieur Général Honoraire des Ponts et Chaussées

Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées

1.	Préliminaires	C 2 045 - 2
1.1	Spectre et fonctions propres d'un noyau symétrique défini positif.....	— 2
1.2	Variables généralisées. Équations de Lagrange	— 2
2.	Vibrations longitudinales	— 3
2.1	Équation du mouvement	— 3
2.2	Vibrations naturelles des poutres de section constante	— 3
2.3	Vibrations forcées des poutres de section constante.....	— 6
2.4	Vibrations naturelles des poutres de section quelconque	— 7
2.5	Vibrations forcées des poutres de section quelconque	— 9
2.6	Méthode de Rayleigh et méthode de Ritz.....	— 10
3.	Vibrations de torsion	— 10
3.1	Équation du mouvement. Analogie avec les vibrations longitudinales .	— 10
3.2	Exemple de vibrations propres de torsion	— 11
4.	Vibrations transversales	— 12
4.1	Équation du mouvement	— 12
4.2	Vibrations naturelles des poutres de section constante	— 13
4.3	Vibrations forcées des poutres de section constante.....	— 17
4.4	Vibrations naturelles des poutres de section quelconque	— 19
4.5	Vibrations forcées des poutres de section quelconque	— 21
4.6	Méthode de Rayleigh et méthode de Ritz.....	— 21
	Pour en savoir plus.....	Doc. C 2 045

Dans cet article, nous traiterons des principales caractéristiques de résistance des poutres dans les cas de vibrations longitudinales, vibrations de torsion et vibrations transversales.

1. Préliminaires

Nota : le lecteur pourra également se reporter à la rubrique *Calcul des Structures* dans le traité Sciences fondamentales.

1.1 Spectre et fonctions propres d'un noyau symétrique défini positif

Nous verrons que les périodes des vibrations naturelles des poutres se déduisent du **spectre** d'un **noyau** $K(x, y)$ borné, symétrique et défini positif. Le spectre de ce noyau est l'ensemble des **valeurs propres** λ_i du paramètre λ pour lesquelles l'**équation intégrale homogène de Fredholm** :

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\ell K(x, \alpha)\varphi(\alpha) d\alpha \tag{1}$$

a des solutions $\varphi(x)$ non identiquement nulles.

Par hypothèse $K(x, y)$ est borné, symétrique : $K(x, y) = K(y, x)$, et défini positif, ce qui signifie que l'on a, quelle que soit la fonction $f(x)$:

$$\int_0^\ell \int_0^\ell K(x, y)f(x)f(y) dx dy \geq 0$$

Dans ces conditions, on démontre que les valeurs propres λ_i forment une suite discrète infinie :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_i < \dots$$

pourvu que le noyau ne soit pas *dégénéré*, c'est-à-dire de la forme

$\sum_{i=1}^n \psi_i(x)\psi_i(y)$. En nous plaçant dans le cas général où aucune valeur propre n'est multiple, l'équation intégrale a pour $\lambda = \lambda_i$ une solution $\varphi_i(x)$, donc :

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_0^\ell K(x, \alpha)\varphi_i(\alpha) d\alpha$$

Les fonctions $\varphi_i(x)$ normées sont appelées **fonctions propres**. Deux fonctions propres distinctes sont orthogonales, donc :

$$\int_0^\ell \varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

On démontre (**théorème de Hilbert-Schmidt**) que toute fonction $f(x)$ représentable canoniquement sur le noyau $K(x, y)$:

$$f(x) = \int_0^\ell K(x, \alpha)h(\alpha) d\alpha$$

est développable en série absolument et uniformément convergente de fonctions propres :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x)$$

les coefficients c_i ayant pour valeurs :

$$c_i = \int_0^\ell f(x)\varphi_i(x) dx = \frac{1}{\lambda_i} \int_0^\ell h(x)\varphi_i(x) dx$$

Pour déterminer de façon approchée les premières valeurs propres, nous pouvons partager l'intervalle d'intégration en n intervalles égaux de centre x_i et de longueur ℓ/n , et remplacer l'intégrale par sa valeur approchée dans l'équation de Fredholm (1) :

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\ell}{n} K(x, x_i)\varphi(x_i)$$

En faisant $x = x_j$ dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$\varphi(x_j) = \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\ell}{n} K(x_i, x_j)\varphi(x_i)$$

et nous voyons que les nombres $\varphi(x_i)$ sont différents de zéro pourvu que λ soit une valeur propre λ'_k de la matrice $a_{ij} = (\ell/n) K(x_i, x_j)$ symétrique et définie positive. À la valeur propre λ'_k correspond le vecteur propre de composantes : $\varphi'_k(x_1), \varphi'_k(x_2), \dots, \varphi'_k(x_n)$.

On obtient ainsi des valeurs approchées des premières valeurs propres du noyau $K(x, y)$, et des représentations approchées (table de valeurs) des premières fonctions propres.

Les valeurs propres et les fonctions propres peuvent également être recherchées en utilisant les résultats suivants. Le maximum de l'intégrale :

$$J(\varphi) = \int_0^\ell \int_0^\ell K(x, y)\varphi(x)\varphi(y) dx dy$$

dans laquelle on suppose la fonction quelconque $\varphi(x)$ normée, est égal à $1/\lambda_1$ et est obtenu pour la première fonction propre : $\varphi(x) = \varphi_1(x)$.

Si l'on pose :

$$K_1(x, y) = K(x, y) - \frac{1}{\lambda_1} \varphi_1(x)\varphi_1(y)$$

le maximum de l'intégrale :

$$J_1(\varphi) = \int_0^\ell \int_0^\ell K_1(x, y)\varphi(x)\varphi(y) dx dy$$

dans laquelle on suppose la fonction quelconque $\varphi(x)$ normée, est égal à $1/\lambda_2$ et est obtenu pour la deuxième fonction propre : $\varphi(x) = \varphi_2(x)$.

Et ainsi de suite.

1.2 Variables généralisées. Équations de Lagrange

Il est toujours possible de définir l'état de déplacement d'une poutre à l'instant t au moyen d'une suite dénombrable de paramètres $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), \dots$ appelés **variables généralisées**.

Par **exemple**, le déplacement transversal $v(x, t)$ d'une poutre sur appuis simples de portée ℓ peut être représenté par la série de Fourier :

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (0 \leq x \leq \ell)$$

Les composantes généralisées Q'_n de l'ensemble des forces intérieures et extérieures sont définies par l'expression du travail virtuel $\delta \sigma$ de l'ensemble des forces pour un déplacement virtuel défini par les variations $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n, \dots$ des coordonnées généralisées :

$$\delta \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} Q'_n \delta q_n$$

Si l'on désigne par T l'énergie cinétique de la poutre, les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme (**équations de Lagrange**) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} = Q'_n \tag{2}$$

Mais, si l'on observe que le travail virtuel $\delta \sigma_i$ des forces intérieures a pour valeur, W désignant l'énergie de déformation de la poutre :

$$\delta \sigma_i = - \delta W = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial W}{\partial q_n} \delta q_n$$

la n^{e} composante généralisée des forces intérieures est $-\partial W/\partial q_n$; il en résulte qu'en désignant par Q_n les composantes généralisées des seules forces extérieures appliquées, les équations de Lagrange (2) s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} + \frac{\partial W}{\partial q_n} = Q_n$$

L'emploi des variables généralisées facilite l'étude des vibrations forcées ($Q_n \neq 0$).

2. Vibrations longitudinales

2.1 Équation du mouvement

Considérons une poutre d'axe Ox dont la section S peut être fonction de l'abscisse x . Proposons-nous d'établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le déplacement longitudinal $u(x, t)$ de la section d'abscisse x pendant la vibration longitudinale de la poutre.

La dilatation étant égale à $\partial u/\partial x$, l'effort normal N , positif dans le cas de la compression, dans la section d'abscisse x a pour valeur :

$$N = -ES \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3}$$

avec E module d'Young.

Écrivons l'équation fondamentale de la dynamique pour l'élément de poutre de masse $\rho S dx$ (avec ρ masse volumique) compris entre les sections d'abscisses x et $x + dx$ (figure 1). Supposons qu'une densité de force horizontale $p(x, t)$ soit appliquée à la poutre ; les forces appliquées à l'élément sont N , $-N - dN$ et $p dx$, donc :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -dN + p dx$$

Nous obtenons ainsi, compte tenu de la valeur de N , l'équation :

$$S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{p}{\rho} \tag{4}$$

dans laquelle c est une constante qui a les dimensions d'une vitesse :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{5}$$

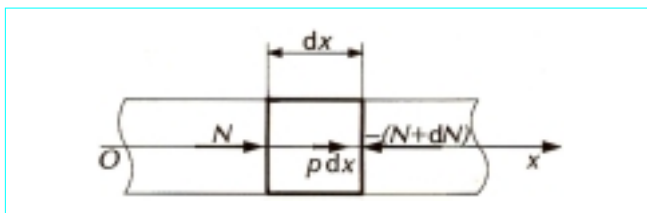


Figure 1 – Élément de poutre soumis à une densité de force horizontale p

La fonction $u(x, t)$ doit en outre satisfaire :

a) aux conditions aux limites imposées par les liaisons.

Par **exemple**, à une extrémité fixe d'abscisse x_0 , on doit avoir :

$$u(x_0, t) = 0 \text{ quel que soit } t$$

et à une extrémité libre d'abscisse x_0 , on doit avoir, N étant nul :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_0} = 0 \text{ quel que soit } t$$

b) aux conditions initiales : la donnée des positions et des vitesses à l'instant $t = 0$ impose des conditions de la forme :

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = g(x)$$

$f(x)$ et $g(x)$ étant deux fonctions données.

Les **vibrations naturelles** sont les mouvements en l'absence de forces extérieures, donc $p = 0$. La fonction $u(x, t)$ est donc une intégrale de l'équation aux dérivées partielles :

$$S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{6}$$

Lorsque la densité de forces extérieures $p(x)$ ne dépend pas du temps, l'étude des vibrations se ramène à celle des vibrations naturelles. En effet, la position d'équilibre est définie par la fonction $u_0(x)$ qui vérifie l'équation :

$$0 = c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{du_0}{dx} \right) + \frac{p(x)}{\rho}$$

En retranchant l'équation précédente de l'équation (4), nous voyons que la fonction $u(x, t) - u_0(x)$ est une intégrale de l'équation (6). Les mouvements de la poutre se réduisent donc à des vibrations naturelles autour de la position d'équilibre.

2.2 Vibrations naturelles des poutres de section constante

2.2.1 Généralités. Vibrations propres

Dans le cas où la section S est constante, l'équation des vibrations naturelles (6) se réduit à l'équation des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7}$$

On sait (article *Vibrations* [A 410] dans le traité Sciences fondamentales) que l'intégrale générale de cette équation est de la forme :

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

avec F et G deux fonctions arbitraires.

Cette solution, qui permet d'étudier les vibrations dans certains cas simples (§ 2.3.3), ne se généralise pas dans le cas des poutres de section variable. C'est pourquoi nous utiliserons la méthode qui consiste à décomposer la vibration naturelle en *vibrations propres*.

Une **vibration propre** de pulsation ω et de période $\tau = 2\pi/\omega$ est définie par une fonction $u(x, t)$ de la forme :

$$u(x, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) X(x) \tag{8}$$

la fonction X ne dépendant que de x . En reportant l'expression (8) dans l'équation (7), nous voyons que X est une intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0 \tag{9}$$

La fonction X a donc pour expression :

$$X = C \cos \frac{\omega X}{c} + D \sin \frac{\omega X}{c} \quad (10)$$

les constantes C et D étant déterminées par les conditions aux limites.

Par **exemple**, dans le cas d'une poutre de longueur ℓ qui n'est soumise à des liaisons qu'à ses extrémités, nous aurons une condition à chaque extrémité :

$$\left. \begin{aligned} X = 0 & \quad \text{si l'extrémité est fixe} \\ \frac{dX}{dx} = 0 & \quad \text{si l'extrémité est libre} \\ X = k \frac{dX}{dx} & \quad \text{si l'extrémité est liée élastiquement} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

D'autres conditions aux limites peuvent être envisagées (§ 2.2.2.4).

Les conditions aux limites donnent des équations linéaires et homogènes pour déterminer les constantes d'intégration. Nous obtiendrons donc une solution non identiquement nulle si et seulement si le déterminant de ces équations est nul, donc si ω est une solution d'une équation :

$$\mathcal{F}(\omega) = 0$$

Les racines positives $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n < \dots$ sont les pulsations propres. La plus petite pulsation propre ω_1 est la *pulsation fondamentale* ; la période $\tau_1 = 2\pi/\omega_1$ est la *période fondamentale*.

À chaque pulsation propre ω_n correspond une fonction X_n que l'on peut supposer normée, puisque les fonctions X_n ne sont définies qu'à un facteur près [expression (10)].

Exemple : dans le cas d'une poutre de longueur ℓ soumise à ses extrémités à des conditions aux limites du type (11), les fonctions X_n sont *orthonormées* :

$$\int_0^\ell X_m X_n dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases} \quad (12)$$

En effet, nous avons, d'après (9) :

$$\frac{\omega_m^2}{c^2} X_m = -\frac{d^2 X_m}{dx^2}, \quad \frac{\omega_n^2}{c^2} X_n = -\frac{d^2 X_n}{dx^2}$$

Il en résulte que :

$$\frac{\omega_m^2 - \omega_n^2}{c^2} \int_0^\ell X_m X_n dx = \int_0^\ell \left(X_m \frac{d^2 X_n}{dx^2} - X_n \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) dx$$

soit, en effectuant l'intégration :

$$\frac{\omega_m^2 - \omega_n^2}{c^2} \int_0^\ell X_m X_n dx = \left| X_m \frac{dX_n}{dx} - X_n \frac{dX_m}{dx} \right|_0^\ell$$

Compte tenu des conditions aux limites (11), les fonctions X_m et X_n sont orthogonales.

Une vibration naturelle quelconque peut être représentée par une série :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) X_n(x) \quad (13)$$

dont les coefficients A_n et B_n sont déterminés par les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n = f(x) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n X_n = g(x) \end{aligned} \right.$$

Admettons que, dans le cas où les fonctions X_n sont orthonormées, on puisse développer $f(x)$ et $g(x)$ en série de fonctions X_n ; nous trouvons grâce aux relations (12) :

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \int_0^\ell f(x) X_n(x) dx \\ B_n &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^\ell g(x) X_n(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

2.2.2 Exemples de vibrations propres

2.2.2.1 Poutre dont les extrémités $x = 0$ et $x = \ell$ sont fixes

Les conditions aux limites $X(0) = 0$ et $X(\ell) = 0$ montrent que l'on a $C = 0$ et $D \neq 0$ si ω est racine de l'équation :

$$\mathcal{F}(\omega) = \sin \frac{\omega \ell}{c} = 0$$

Les pulsations propres ont donc pour valeurs :

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{\ell}$$

avec $n = 1, 2, 3, \dots$

Les périodes propres τ_n ont pour valeurs :

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\ell}{nc} = \frac{2\ell}{n\pi} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

avec $n = 1, 2, 3, \dots$

Les fonctions X_n normées ont pour expressions :

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

On peut distinguer les *vibrations propres symétriques* obtenues pour n impair, et les *vibrations propres antisymétriques* obtenues pour n pair.

2.2.2.2 Poutre dont l'extrémité $x = 0$ est fixe et l'extrémité $x = \ell$ est libre

Les conditions aux limites $X(0) = 0$ et $X'(\ell) = 0$ montrent que l'on a $C = 0$ et $D \neq 0$ si ω est racine de l'équation :

$$\mathcal{F}(\omega) = \cos \frac{\omega \ell}{c} = 0$$

Les pulsations propres ont donc pour valeurs :

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2\ell}$$

avec $n = 1, 2, 3, \dots$

Les périodes propres τ_n ont pour valeurs :

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{4\ell}{(2n-1)c} = \frac{4\ell}{2n-1} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

avec $n = 1, 2, 3, \dots$

Les fonctions X_n normées ont pour expressions :

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}$$

2.2.2.3 Poutre dont les extrémités $x = 0$ et $x = \ell$ sont libres

Les conditions aux limites $X'(0) = 0$ et $X'(\ell) = 0$ montrent que l'on a $D = 0$ et $C \neq 0$ si ω est racine de l'équation :

$$\mathcal{F}(\omega) = \sin \frac{\omega \ell}{c} = 0$$

Les pulsations propres et les périodes propres ont donc les mêmes valeurs que lorsque la poutre a ses extrémités fixes (§ 2.2.2.1) :

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{\ell}, \quad \tau_n = \frac{2\ell}{n} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

avec $n = 1, 2, 3, \dots$

Par contre, les fonctions X_n normées sont différentes :

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

On peut distinguer les vibrations propres symétriques obtenues pour n pair, et les vibrations propres antisymétriques obtenues pour n impair.

2.2.2.4 Poutre verticale d'extrémité $x = 0$ fixe et sollicitée à son extrémité $x = \ell$ par un poids $P = Mg$ (figure 2)

En vertu d'une remarque faite au paragraphe 2.1, les vibrations se réduisent aux vibrations naturelles autour de la position d'équilibre définie par l'effort normal $N_0(x)$:

$$N_0(x) = -Mg - \rho Sg(\ell - x)$$

L'effort normal pendant la vibration est $N_0(x) + N(x, t)$.

La fonction X définie par l'expression (10) doit vérifier les conditions aux limites :

$$X(0) = 0, \quad M\omega^2 X(\ell) = ESX'(\ell)$$

La seconde condition résulte de l'équation du mouvement de la masse M :

$$M \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=\ell} = N(\ell, t) = -ES \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=\ell}$$

et l'on obtient la condition pour $x = \ell$ en reportant l'expression (8) dans l'équation précédente.

Les conditions aux limites montrent que l'on a $C = 0$ et $D \neq 0$ si ω est racine de l'équation :

$$\mathcal{F}(\omega) = M\omega^2 \sin \frac{\omega \ell}{c} - ES \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega \ell}{c} = 0$$

En désignant par $m = \rho S \ell$ la masse de la poutre, et en posant $\varphi = \omega \ell / c$, l'équation précédente peut s'écrire :

$$\cot \varphi = \left(\frac{M}{m} \right) \varphi$$

La figure 3 montre que cette équation a une infinité de racines positives $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots$. Les pulsations et les périodes propres ont pour valeurs :

$$\omega_n = \frac{c \varphi_n}{\ell}, \quad \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi \ell}{\varphi_n} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

On notera que lorsque n est grand, φ_n est très voisin de $(n-1)\pi$ et légèrement supérieur.

Lorsque m est petit devant M , on peut déterminer une valeur approchée de la pulsation fondamentale en remplaçant $\tan \varphi$ par $\varphi + \frac{1}{3}\varphi^3$, donc :

$$\varphi^2 \left(1 + \frac{1}{3}\varphi^2 \right) = \frac{m}{M}$$

Nous trouvons ainsi une valeur approchée de φ_1 :

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{m}{M + \frac{1}{3}m}}$$

La pulsation fondamentale et la période fondamentale ont pour valeurs approchées :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{ES}{\ell \left(M + \frac{1}{3}m \right)}} \quad \tau_1 = 2\pi \sqrt{\left(M + \frac{1}{3}m \right) \frac{\ell}{ES}}$$

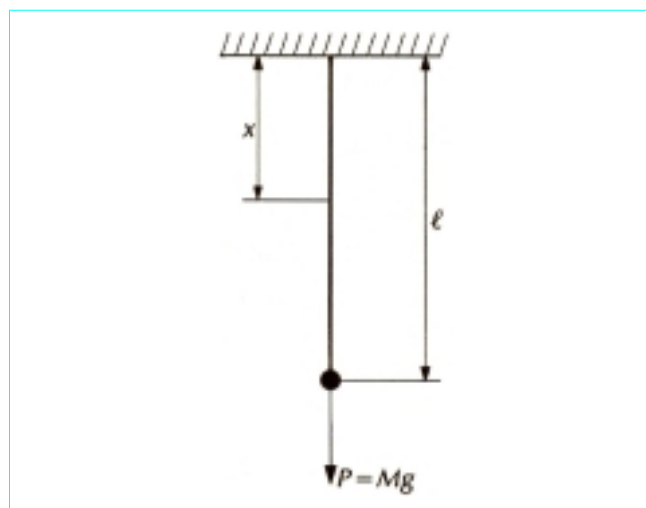


Figure 2 – Poutre verticale d'extrémité $x = 0$ fixe et sollicitée à son extrémité $x = \ell$ par un poids $P = Mg$

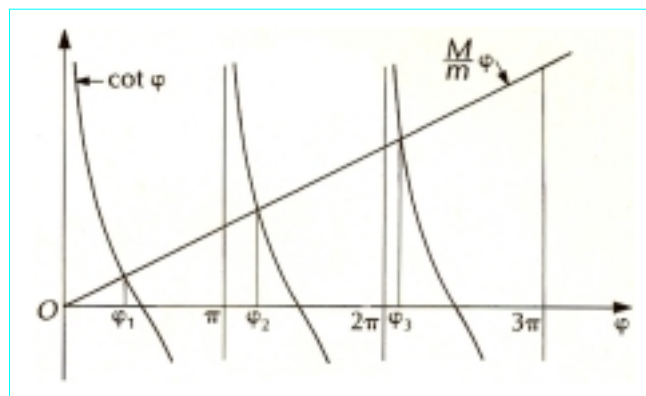


Figure 3 – Racines positives $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots$ de l'équation $\cot \varphi = \left(\frac{M}{m} \right) \varphi$

Donc, lorsqu'on étudie les vibrations d'un fil auquel est suspendu un poids donné, on peut déterminer une valeur approchée de la période fondamentale en négligeant la masse du fil, à condition de majorer le poids donné du tiers du poids du fil.

2.3 Vibrations forcées des poutres de section constante

2.3.1 Vibrations forcées d'une poutre dont l'extrémité $x = 0$ est fixe et dont l'extrémité $x = \ell$ est fixe ou libre

Nous laissons de côté le cas d'une poutre dont les extrémités sont libres, cas où un déplacement d'ensemble de la poutre est possible.

Les fonctions X_n sont orthogonales et normées. Il est aisé de voir que les fonctions $X'_n = dX_n/dx$ sont orthogonales ; en effet :

$$\int_0^\ell X'_m X'_n dx = [X_m X'_n]_0^\ell - \int_0^\ell X_m X''_n dx = \frac{\omega_n^2}{c^2} \int_0^\ell X_m X_n dx$$

En faisant $m = n$ dans l'identité précédente, nous trouvons que :

$$\int_0^\ell X_n'^2 dx = a_n = \frac{\omega_n^2}{c^2} \quad (15)$$

Nous pouvons représenter la fonction $u(x, t)$ par la série :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x) \quad (16)$$

Le problème consiste à calculer les coordonnées généralisées $q_n(t)$; nous utiliserons pour cela les équations de Lagrange (§ 1.2). L'énergie cinétique T a pour expression :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho S \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \rho S \int_0^\ell \left(\sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n X_n \right)^2 dx$$

soit, les fonctions X_n étant orthonormées :

$$T = \frac{1}{2} \rho S \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n^2$$

L'énergie de déformation W a pour expression :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{N^2}{ES} dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell ES \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} ES \int_0^\ell \left(\sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n X_n' \right)^2 dx$$

soit, compte tenu de la relation (15), les fonctions X_n' étant orthogonales :

$$W = \frac{1}{2} ES \sum_{n=1}^{\infty} a_n \dot{q}_n^2$$

Les équations de Lagrange s'écrivent donc, Q_n désignant les composantes généralisées du système des forces extérieures :

$$\rho S \ddot{q}_n + ES a_n \dot{q}_n = Q_n$$

ou, compte tenu de la valeur de $a_n = \frac{\omega_n^2}{c^2} = \frac{\rho}{E} \omega_n^2$:

$$q_n'' + \omega_n^2 q_n = \frac{Q_n}{\rho S} \quad (17)$$

Supposons, par exemple, que les forces extérieures soient des forces $F_i(t)$ longitudinales appliquées aux sections d'abscisses x_i ; le travail virtuel de ces forces dans un déplacement virtuel défini par la seule variation δq_n :

$$\delta \mathcal{C} = \sum_i F_i(t) \delta u(x_i, t) = \sum_i F_i(t) X_n(x_i) \delta q_n$$

montre que la composante généralisée Q_n a pour valeur :

$$Q_n = \sum_i X_n(x_i) F_i(t) \quad (18)$$

Lorsque toutes les composantes Q_n sont nulles, nous retrouvons les vibrations propres de pulsations ω_n .

Lorsque les composantes Q_n ne dépendent pas du temps, la fonction $q_n - Q_n / (\rho S \omega_n^2)$ vérifie l'équation (17) rendue homogène ($Q_n = 0$), et nous obtenons les vibrations naturelles autour de la position d'équilibre.

Dans le cas général où les composantes Q_n dépendent du temps, l'intégrale générale de l'équation (17), obtenue par la méthode de la variation des constantes, a pour expression :

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\rho S \omega_n} \int_0^t Q_n(\theta) \sin \omega_n(t - \theta) d\theta \quad (19)$$

les constantes d'intégration A_n et B_n étant déterminées par les conditions initiales. On vérifie aisément que les formules (14) sont encore exactes.

Lorsque la poutre est initialement au repos, on trouve :

$$A_n = 0, \quad B_n = 0$$

Par **exemple**, si les forces appliquées à la poutre initialement au repos sont des forces sinusoïdales de même période, nous avons :

$$Q_n(t) = Q_n \sin \beta t$$

et, en portant la valeur précédente dans la formule (19), nous trouvons :

$$q_n(t) = \left(\frac{Q_n}{\rho S \omega_n} \right) \frac{\omega_n \sin \beta t - \beta \sin \omega_n t}{\omega_n^2 - \beta^2}$$

Il y a *résonance* lorsque β est égal à une pulsation propre.

2.3.2 Poutre dont l'extrémité $x = 0$ est fixe et dont l'extrémité libre est soumise à une force $F = Vt$ (figure 4)

Dans ce cas où les fonctions X_n sont (§ 2.2.2.2) :

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}$$

la relation (18) montre que :

$$Q_n(t) = X_n(\ell) Vt = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{2}{\ell}} Vt$$

En supposant la poutre initialement au repos, la formule (19), dans laquelle $A_n = B_n = 0$, nous donne :

$$q_n(t) = \frac{(-1)^{n+1} V}{\rho S \omega_n^3} \sqrt{\frac{2}{\ell}} (\omega_n t - \sin \omega_n t)$$

la pulsation ω_n ayant pour valeur (§ 2.2.2.2) :

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2\ell}$$

2.3.3 Poutre dont l'extrémité $x = 0$ est fixe et dont l'extrémité $x = \ell$ est soumise au déplacement imposé $\Phi(t)$

Nous supposons la poutre initialement au repos et $\Phi(0) = 0$.
Le déplacement $u(x, t)$ est l'intégrale de l'équation (7) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

qui vérifie les conditions aux limites :

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = \Phi(t)$$

et les conditions initiales :

$$u(x, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

Nous traiterons ce problème en observant que les fonctions $f(t - t_0 \pm x/c)$ vérifient l'équation aux dérivées partielles. Le domaine d'existence $\{0 \leq x \leq \ell, t \geq 0\}$ de la solution $u(x, t)$ est divisé en domaines partiels $D_0, D_1, D_2, D_3, D_4, \dots, D_{2n}, D_{2n+1}, \dots$ (figure 5).

On montre alors aisément que la fonction $u(x, t)$, qui vérifie l'équation aux dérivées partielles, les conditions aux limites et les conditions initiales, a pour expression :

- dans D_0 : $u = u_0 = 0$
- dans D_1 : $u = u_1 = u_0 + \Phi(t - \theta + x/c)$
- dans D_2 : $u = u_2 = u_1 - \Phi(t - \theta - x/c)$
- dans D_3 : $u = u_3 = u_2 + \Phi(t - 3\theta + x/c)$
- dans D_4 : $u = u_4 = u_3 - \Phi(t - 3\theta - x/c)$

avec θ temps que met une onde de célérité c à parcourir la longueur de la poutre.

Nous trouvons donc dans D_{2n} :

$$u = u_{2n} = \sum_{i=1}^n \left\{ \Phi \left[t - (2i-1)\theta + \frac{x}{c} \right] - \Phi \left[t - (2i-1)\theta - \frac{x}{c} \right] \right\}$$

et dans D_{2n+1} :

$$u = u_{2n+1} = u_{2n} + \Phi \left[t - (2n+1)\theta + \frac{x}{c} \right]$$

Cette solution est due à Lagrange.

2.4 Vibrations naturelles des poutres de section quelconque

2.4.1 Formules générales

Considérons une poutre droite P soumise à des liaisons quelconques telles qu'un mouvement d'ensemble ne soit pas possible ; nous excluons donc une poutre qui ne serait soumise à aucune liaison. Sous l'action d'une densité de force horizontale $p(x)$, le déplacement $u(x)$ au moment de l'équilibre vérifie l'équation (4) dans laquelle $u(x, t) = u(x)$:

$$c^2 \frac{d}{dx} \left(S \frac{du}{dx} \right) = - \frac{p(x)}{\rho} \tag{20}$$

Désignons par $(1/E) U(\alpha, x)$ le déplacement longitudinal de la section d'abscisse x sous l'action d'une force horizontale unité appliquée à la section d'abscisse α . La solution de l'équation (20) est :

$$u(x) = \frac{1}{E} \int_P U(\alpha, x) p(\alpha) d\alpha \tag{21}$$

l'intégrale étant étendue à l'ensemble de la poutre.

Le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité *Sciences fondamentales*) nous apprend que la fonction d'influence $U(\alpha, x)$ est symétrique :

$$U(\alpha, x) = U(x, \alpha)$$

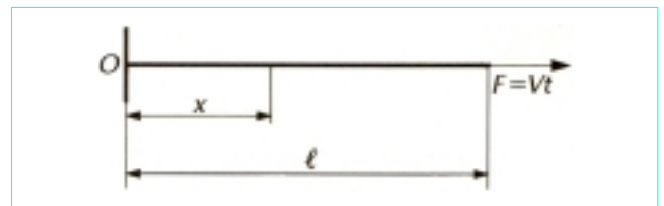


Figure 4 - Poutre d'extrémité $x = 0$ fixe et soumise à son extrémité $x = \ell$ à une force $F = Vt$

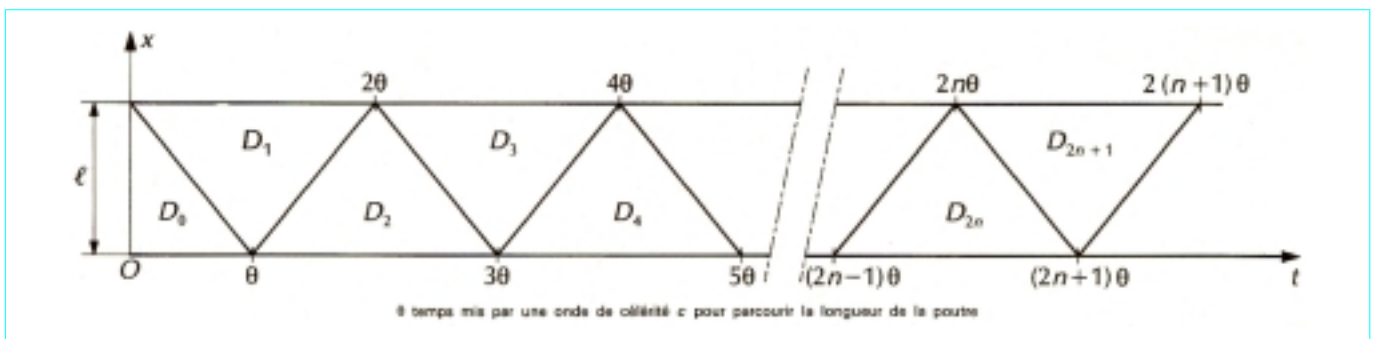


Figure 5 - Poutre d'extrémité $x = 0$ fixe et soumise à son extrémité $x = \ell$ à un déplacement imposé : domaines partiels d'existence de la solution $u(x, t)$

En outre, l'énergie de déformation W de la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int_P p(x) u(x) dx = \frac{1}{2E} \int_P \int_P U(\alpha, x) p(\alpha) p(x) d\alpha dx$$

est positive quelle que soit la fonction $p(x)$. Le noyau $U(\alpha, x)$ est donc symétrique et défini positif.

Reprenons l'équation (6) des vibrations naturelles :

$$c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial u}{\partial x} \right) = S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{22}$$

Dans cette équation, les forces d'inertie de densité $-\rho S \partial^2 u / \partial t^2$ jouent le même rôle que les forces extérieures de densité $p(x)$ dans l'équation (20). Compte tenu de ce que $E = \rho c^2$, la formule (21) montre que la solution $u(x, t)$ de l'équation (22) vérifie l'équation intégrale :

$$u(x, t) = - \frac{1}{c^2} \int_P U(\alpha, x) S(\alpha) \frac{\partial^2 u(\alpha, t)}{\partial t^2} d\alpha \tag{23}$$

En posant :

$$K(\alpha, x) = U(\alpha, x) \sqrt{S(\alpha) S(x)}$$

nous pouvons écrire l'équation (23) sous la forme :

$$u(x, t) \sqrt{S(x)} = - \frac{1}{c^2} \int_P K(\alpha, x) \sqrt{S(\alpha)} \frac{\partial^2 u(\alpha, t)}{\partial t^2} d\alpha$$

La fonction $u(x, t) \sqrt{S(x)}$ est donc représentable canoniquement sur le noyau symétrique défini positif $K(\alpha, x)$. Elle est donc, en vertu du théorème de Hilbert-Schmidt (§ 1.1), développable en série absolument et uniformément convergente des fonctions propres $Y_n(x)$ du noyau $K(\alpha, x)$:

$$u(x, t) \sqrt{S(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n(x)$$

Désignons par $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$ les valeurs propres du noyau $K(\alpha, x)$. Les fonctions propres orthogonales et normées :

$$\int_P Y_m(x) Y_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

vérifient les identités :

$$Y_n(x) = \lambda_n \int_P K(\alpha, x) Y_n(\alpha) d\alpha$$

Donc, si l'on pose :

$$Y_n(x) = X_n(x) \sqrt{S(x)} \tag{24}$$

les fonctions $X_n(x)$ sont telles que :

$$\int_P S(x) X_m(x) X_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases} \tag{25}$$

et vérifient les identités :

$$X_n(x) = \lambda_n \int_P U(\alpha, x) S(\alpha) X_n(\alpha) d\alpha \tag{26}$$

Il résulte de ce qui précède que la fonction $u(x, t)$ est développable en série absolument et uniformément convergente des fonctions $X_n(x)$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x) \tag{27}$$

Pour déterminer les coefficients $q_n(t)$, portons l'expression précédente dans l'équation intégrale (23) ; nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x) = - \frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} q_n''(t) \int_P U(\alpha, x) S(\alpha) X_n(\alpha) d\alpha$$

soit, compte tenu des identités (26) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[q_n(t) + \frac{1}{\lambda_n c^2} q_n''(t) \right] X_n(x) = 0$$

Puisque les fonctions $X_n(x)$ sont linéairement indépendantes, nous en déduisons que $q_n(t)$ est une intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\lambda_n c^2} q_n''(t) + q_n(t) = 0$$

Les fonctions $q_n(t)$ sont donc de la forme :

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$$

Les pulsations propres et les périodes propres se déduisent des valeurs propres du noyau $K(\alpha, x)$:

$$\omega_n = c \sqrt{\lambda_n} \quad \tau_n = \frac{2\pi}{c \sqrt{\lambda_n}} \tag{28}$$

Nous avons donc obtenu l'expression suivante de $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) X_n(x) \tag{29}$$

qui exprime la décomposition d'une vibration naturelle quelconque en vibrations propres. Les constantes A_n et B_n sont déterminées par les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = f(x) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n X_n(x) = g(x) \end{cases}$$

En admettant la possibilité de développer les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ en série des fonctions $X_n(x)$, nous trouvons, en utilisant les relations (23) :

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \int_P S(x) f(x) X_n(x) dx \\ B_n &= \frac{1}{\omega_n} \int_P S(x) g(x) X_n(x) dx \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

2.4.2 Exemple de détermination du noyau $K(\alpha, x)$

Il suffit de déterminer la fonction d'influence $U(\alpha, x)$.

2.4.2.1 Poutre dont l'extrémité $x = 0$ est fixe et l'extrémité $x = \ell$ est libre

Si l'on applique une force horizontale unité dans la section d'abscisse α (figure 6), l'effort normal est égal à -1 dans l'intervalle $(0, \alpha)$ et est nul dans l'intervalle (α, ℓ) ; nous avons donc :

$$ES(x) \frac{du}{dx} = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 < x < \alpha \\ 0 & \text{pour } \alpha < x < \ell \end{cases}$$

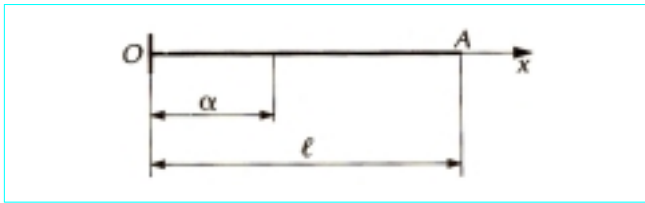


Figure 6 – Poutre d'extrémités $x = 0$ fixe et $x = \ell$ libre

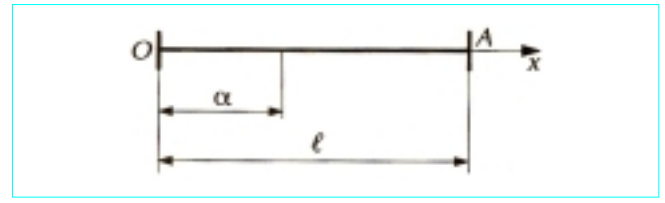


Figure 7 – Poutre d'extrémités $x = 0$ et $x = \ell$ fixes

Il en résulte que :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{E} \int_0^x \frac{dz}{S(z)} & \text{pour } 0 < x < \alpha \\ \frac{1}{E} \int_0^\alpha \frac{dz}{S(z)} & \text{pour } \alpha < x < \ell \end{cases}$$

La fonction d'influence $U(\alpha, x)$ a donc pour expression :

$$U(\alpha, x) = \begin{cases} F(x) & \text{pour } 0 < x < \alpha \\ F(\alpha) & \text{pour } \alpha < x < \ell \end{cases}$$

$F(x)$ désignant la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^x \frac{dz}{S(z)} \tag{31}$$

2.4.2.2 Poutre dont les extrémités $x = 0$ et $x = \ell$ sont fixes

Si l'on applique une force horizontale unité dans la section d'abscisse α (figure 7), l'effort normal est égal à N_1 dans l'intervalle $(0, \alpha)$ et à N_2 dans l'intervalle (α, ℓ) et nous avons :

$$N_2 - N_1 = 1, \quad \int_0^\alpha \frac{N_1 dx}{ES} + \int_\alpha^\ell \frac{N_2 dx}{ES} = 0$$

Nous en déduisons, $F(x)$ désignant la fonction (31) définie au paragraphe 2.4.2.1 :

$$N_1 = -\frac{F(\ell) - F(\alpha)}{F(\ell)}, \quad N_2 = \frac{F(\alpha)}{F(\ell)} \tag{32}$$

Nous avons ensuite :

$$ES \frac{du}{dx} = \begin{cases} -N_1 & \text{pour } 0 < x < \alpha \\ -N_2 & \text{pour } \alpha < x < \ell \end{cases}$$

donc :

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{E} N_1 F(x) & \text{pour } 0 < x < \alpha \\ -\frac{1}{E} N_1 F(\alpha) - \frac{1}{E} N_2 [F(x) - F(\alpha)] & \text{pour } \alpha < x < \ell \end{cases}$$

En remplaçant N_1 et N_2 par leurs valeurs (32), nous obtenons :

$$u(x) = \frac{1}{E} U(\alpha, x)$$

avec :

$$U(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{F(x)[F(\ell) - F(\alpha)]}{F(\ell)} & \text{pour } 0 < x < \alpha \\ \frac{F(\alpha)[F(\ell) - F(x)]}{F(\ell)} & \text{pour } \alpha < x < \ell \end{cases}$$

2.5 Vibrations forcées des poutres de section quelconque

Nous supposons toujours que les liaisons sont telles qu'un mouvement d'ensemble de la poutre ne soit pas possible.

L'intégrale $u(x, t)$ de l'équation :

$$c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial u}{\partial x} \right) = S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{p(x, t)}{\rho}$$

vérifiée, d'après la formule (21), l'équation intégrale :

$$u(x, t) = \frac{1}{E} \int_P U(\alpha, x) \left[p(\alpha, t) - \rho S(\alpha) \frac{\partial^2 u(\alpha, t)}{\partial t^2} \right] d\alpha$$

Désignons par $u_0(x, t)$ la fonction connue :

$$u_0(x, t) = \frac{1}{E} \int_P U(\alpha, x) p(\alpha, t) d\alpha$$

$u_0(x, t)$ est le déplacement que l'on obtiendrait en négligeant les forces d'inertie, c'est-à-dire en négligeant la masse de la poutre. Nous obtenons donc, compte tenu de $E = \rho c^2$, l'équation intégrale :

$$u(x, t) - u_0(x, t) = -\frac{1}{c^2} \int_P U(\alpha, x) S(\alpha) \frac{\partial^2 u(\alpha, t)}{\partial t^2} d\alpha \tag{33}$$

analogue à l'équation (23). Il en résulte que $u(x, t) - u_0(x, t)$ est développable en série absolument et uniformément convergente des fonctions $X_n(x)$ définies au paragraphe 2.4.1. Supposons la fonction $u_0(x, t)$ développable en série des fonctions X_n :

$$u_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^0(t) X_n(x)$$

la fonction $q_n^0(t)$ ayant pour expression :

$$q_n^0(t) = \int_P S(x) u_0(x, t) X_n(x) dx$$

La fonction $u(x, t)$ est, dans ces conditions, développable en série des fonctions X_n :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x) \tag{34}$$

Pour déterminer les fonctions $q_n(t)$, portons les développements de $u_0(x, t)$ et de $u(x, t)$ dans l'équation intégrale (33). Un calcul analogue à celui fait dans l'étude des vibrations naturelles (S.2.4.1) montre que $q_n(t)$ est une intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\lambda_n c^2} q_n''(t) + q_n(t) = q_n^0(t)$$

ou, puisque $\omega_n^2 = \lambda_n c^2$:

$$q_n''(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \omega_n^2 q_n^0(t) \tag{35}$$

En utilisant la méthode de la variation des constantes, nous obtenons l'intégrale générale de l'équation (35) :

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \omega_n \int_0^t q_n^0(\theta) \sin \omega_n(t - \theta) d\theta \quad (36)$$

les constantes A_n et B_n étant déterminées par les conditions initiales ; il est aisé de vérifier que les formules (30) sont encore exactes. Lorsque la poutre est initialement au repos, les constantes A_n et B_n sont nulles.

2.6 Méthode de Rayleigh et méthode de Ritz

2.6.1 Méthode de Rayleigh

Cette méthode permet de calculer une valeur approchée de la pulsation fondamentale d'une poutre P soumise à des liaisons quelconques. Imaginons que le mouvement de la poutre puisse être représenté par la fonction :

$$u(x, t) = f(t) \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ appartenant à la famille \mathcal{F} des fonctions vérifiant les conditions aux limites de la poutre P .

Portons $u(x, t)$ dans les expressions de l'énergie cinétique T et de l'énergie de déformation W de la poutre :

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_P S \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx, \quad W = \frac{1}{2} E \int_P S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

En posant :

$$J = \int_P S \varphi^2 dx, \quad H = \int_P S \varphi'^2 dx$$

φ' désignant la dérivée $d\varphi/dx$, nous obtenons :

$$T = \frac{1}{2} \rho J f'^2(t), \quad W = \frac{1}{2} E H f^2(t)$$

Le théorème des forces vives nous donne :

$$T + W = \frac{1}{2} \rho J f'^2(t) + \frac{1}{2} E H f^2(t) = Cte$$

soit, en dérivant par rapport à t :

$$\rho J f''(t) + E H f(t) = 0$$

Nous obtenons donc un mouvement de pulsation ω définie par :

$$\omega^2 = \left(\frac{E}{\rho} \right) \frac{H}{J} = c^2 \frac{H}{J}$$

Mais, si la fonction $\varphi(x)$ est différente de la fonction $X_1(x)$ qui correspond à la vibration propre fondamentale, la formule précédente donne une valeur trop élevée pour ω_1^2 , puisque le choix d'une fonction $\varphi(x)$ revient à transformer la poutre P , qui a une infinité de degrés de liberté, en un système qui n'a qu'un seul degré de liberté, donc à lui imposer des liaisons supplémentaires qui ne peuvent qu'élever la fréquence $\omega_1/(2\pi)$. Il en résulte que la pulsation fondamentale s'obtient en recherchant le minimum de l'expression :

$$\lambda = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\int_P S \varphi'^2 dx}{\int_P S \varphi^2 dx} \quad (37)$$

pour toutes les fonctions $\varphi(x)$ appartenant à la famille \mathcal{F} .

La formule (37) permet le calcul de la pulsation fondamentale avec une très bonne approximation.

Par **exemple**, dans le cas d'une poutre de section constante dont l'extrémité $x = 0$ est fixe et l'extrémité $x = \ell$ est libre, prenons la fonction $\varphi(x) = \ell x - \frac{1}{2} x^2$ qui est la fonction la plus simple vérifiant les conditions aux limites $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(\ell) = 0$. La formule (37) donne $\omega_1 \approx (c/\ell) \sqrt{5/2} = 1,581 1 c/\ell$ qui dépasse d'environ 0,66 pour-cent la valeur exacte $\omega_1 = \pi c/(2\ell) = 1,570 8 c/\ell$.

2.6.2 Méthode de Ritz

La méthode de Ritz est une généralisation de la méthode de Rayleigh. Elle consiste à choisir pour $\varphi(x)$ une fonction qui dépend de façon linéaire et homogène de n paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x) \quad (38)$$

Les fonctions $\varphi_i(x)$, qui appartiennent à la famille \mathcal{F} , sont linéairement indépendantes, sinon $\varphi(x)$ dépendrait d'un nombre de paramètres inférieur à n . En écrivant que les dérivées de l'expression (37) par rapport à α_i sont nulles, nous obtenons :

$$\int_P S \varphi^2 dx \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\int_P S \varphi'^2 dx \right) - \int_P S \varphi'^2 dx \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\int_P S \varphi^2 dx \right) = 0$$

soit, compte tenu de l'expression (37) :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[\int_P S (\varphi'^2 - \lambda \varphi^2) dx \right] = 0$$

Nous obtenons ainsi n équations linéaires et homogènes entre les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Les paramètres ne seront pas tous nuls si et seulement si le déterminant de ces équations est nul. Nous trouvons ainsi une équation algébrique de degré n :

$$\Phi(\lambda) = 0$$

donc nous désignerons les racines par $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$. Les valeurs approchées des n premières pulsations propres sont alors :

$$\omega_1 \approx c \sqrt{\lambda'_1} \quad \omega_2 \approx c \sqrt{\lambda'_2} \quad \dots \quad \omega_n \approx c \sqrt{\lambda'_n}$$

Ce sont les premières pulsations propres qui sont obtenues avec la meilleure approximation. A toute racine λ'_i correspond un ensemble de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pour lesquelles la formule (38) donne, à un facteur près, une expression approchée de la fonction X_i . On peut montrer que, si l'on prend $\varphi_i = X_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), on a :

$$\Phi(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda) \quad \text{avec} \quad \lambda_i = \omega_i^2/c^2$$

3. Vibrations de torsion

3.1 Équation du mouvement. Analogie avec les vibrations longitudinales

Bornons-nous au cas des poutres de section circulaire. Désignons par K le moment d'inertie polaire de la section, qui peut être fonction de x si le diamètre de la section est variable. Proposons-nous d'établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la rotation $\theta(x, t)$ de la section d'abscisse x pendant les vibrations de torsion.

L'angle de torsion par unité de longueur étant $\partial\theta/\partial x$, le couple de torsion C dans la section d'abscisse x a pour valeur :

$$C = - GK \frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{39}$$

avec G module d'élasticité transversal.

Écrivons l'équation fondamentale de la dynamique (mouvement autour de l'axe Ox de la poutre) pour l'élément de poutre de moment d'inertie $\rho K dx$ (ρ masse volumique) compris entre les sections d'abscisses x et $x + dx$ (figure 8). Supposons qu'une densité de couple $\gamma(x, t)$ soit appliquée à la poutre ; les couples appliqués à l'élément sont $C, - C - dC$ et γdx , donc :

$$\rho K dx \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = - dC + \gamma dx$$

Nous obtenons donc, compte tenu de la valeur (39) de C , l'équation :

$$K \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) + \frac{\gamma}{\rho} \tag{40}$$

dans laquelle c est une constante qui a les dimensions d'une vitesse :

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{41}$$

La fonction $\theta(x, t)$ doit en outre satisfaire :

a) aux conditions aux limites imposées par les liaisons ;

Par **exemple**, à une extrémité fixe d'abscisse x_0 ne pouvant tourner, on doit avoir :

$$\theta(x_0, t) = 0 \text{ quel que soit } t$$

et à une extrémité libre d'abscisse x_0 , on doit avoir, C étant nul :

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right)_{x=x_0} = 0 \text{ quel que soit } t$$

b) aux conditions initiales : la donnée des positions et des vitesses à l'instant $t = 0$ impose des conditions de la forme :

$$\theta(x, 0) = f(x), \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right)_{t=0} = g(x)$$

$f(x)$ et $g(x)$ étant deux fonctions données.

Les **vibrations naturelles** sont les mouvements en l'absence de forces extérieures ($\gamma = 0$). La fonction $\theta(x, t)$ est donc une intégrale de l'équation :

$$K \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) \tag{42}$$

Les équations relatives aux vibrations de torsion des poutres de section circulaire sont identiques aux équations relatives aux vibrations longitudinales (§ 2.1) si l'on établit la correspondance de notations suivante (tableau 1) :

Tableau 1 – Correspondance de notations entre les deux types de vibrations	
Vibrations longitudinales	Vibrations de torsion
Module longitudinal E	Module transversal G
Section S	Moment d'inertie polaire K
Déplacement $u(x, t)$	Rotation $\theta(x, t)$
Effort normal N	Couple de torsion C
Densité de force p	Densité de couple γ

Tous les problèmes de vibrations longitudinales étudiés précédemment peuvent être transposés en problèmes de vibrations de torsion.

3.2 Exemple de vibrations propres de torsion

Étudions les vibrations propres d'un arbre de section constante portant à ses extrémités deux disques circulaires de moments d'inertie I_1 et I_2 (figure 9). Soit $\theta(x, t)$ la rotation de la section d'abscisse x de l'arbre dont le moment d'inertie polaire K de la section est constant ; les équations du mouvement des disques donnent les conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} I_1 \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \right)_{x=0} &= -C(0) = GK \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)_{x=0} \\ I_2 \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \right)_{x=\ell} &= C(\ell) = -GK \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)_{x=\ell} \end{aligned} \right\} \tag{43}$$

Cherchons les vibrations propres de torsion définies par :

$$\theta(x, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) X(x)$$

En portant l'expression précédente dans l'équation (42), nous voyons que $X(x)$ est une intégrale de l'équation différentielle :

$$c^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + \omega^2 X = 0$$

donc est de la forme :

$$X(x) = A' \cos \frac{\omega x}{c} + B' \sin \frac{\omega x}{c}$$

les constantes A' et B' étant déterminées par les conditions aux limites (43) qui deviennent :

$$\begin{cases} I_1 \omega^2 X(0) + GK X'(0) = 0 \\ I_2 \omega^2 X(\ell) - GK X'(\ell) = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi deux équations linéaires et homogènes en A' et B' qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \varphi I_1 A' + I B' = 0 \\ \varphi I_2 (A' \cos \varphi + B' \sin \varphi) + I (A' \sin \varphi - B' \cos \varphi) = 0 \end{cases}$$

avec $\varphi = \omega \ell / c$,

$I = \rho K \ell$ moment d'inertie total de l'arbre.

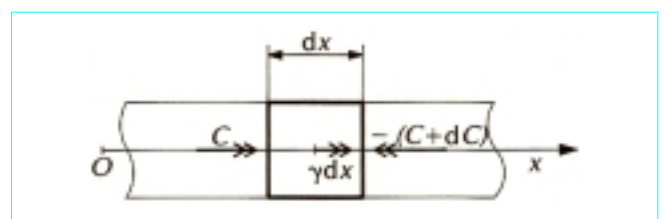


Figure 8 – Élément de poutre de section circulaire soumis à une densité de couple γ

En éliminant A' et B' , nous obtenons l'équation :

$$\cot \varphi = \frac{\varphi^2 - k_1 k_2}{(k_1 + k_2)\varphi} \quad \text{avec} \quad k_1 = \frac{I}{I_1} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{I}{I_2} \quad (44)$$

La figure 10 montre que cette équation a une infinité de racines positives $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots$ tendant rapidement vers $(n - 1)\pi$ lorsque n croît indéfiniment. Les pulsations propres et les périodes propres ont pour valeurs :

$$\omega_n = \frac{c \varphi_n}{\ell}, \quad \tau_n = \frac{2\pi \ell}{c \varphi_n} = \frac{2\pi \ell}{\varphi_n} \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

Si k_1 et k_2 sont très grands, on retrouve les pulsations propres des vibrations de torsion de la poutre dont les extrémités sont libres (S 3.1).

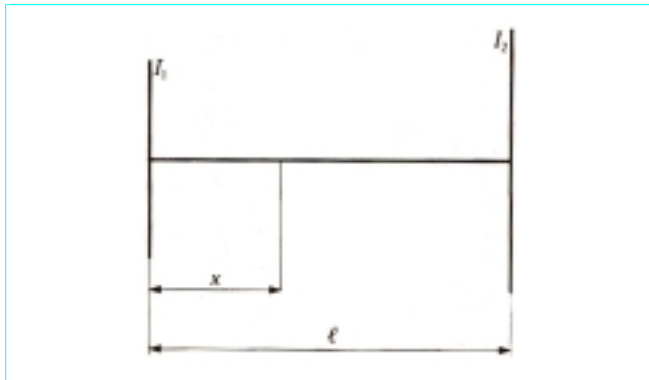


Figure 9 – Arbre de section constante portant à ses extrémités deux disques circulaires portant des moments d'inertie I_1 et I_2

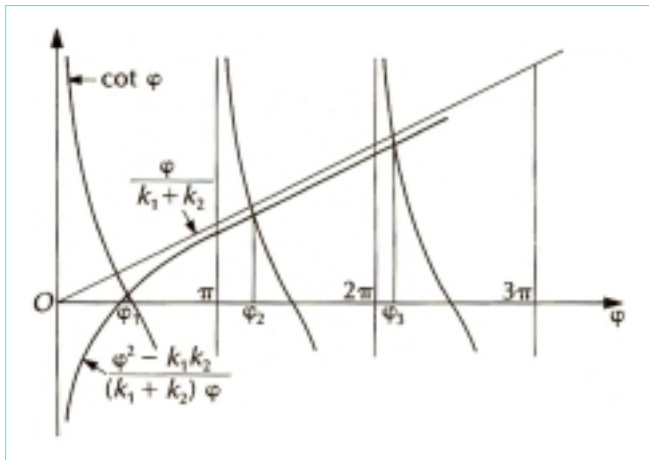


Figure 10 – Racines positives $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots$

de l'équation $\cot \varphi = \frac{\varphi^2 - k_1 k_2}{(k_1 + k_2)\varphi}$

Si k_1 et k_2 sont très petits (inertie de l'arbre négligeable), l'équation (44) peut être remplacée par l'équation approchée :

$$\cot \varphi = \frac{\varphi}{k_1 + k_2}$$

En remplaçant $\tan \varphi$ par φ , nous trouvons une valeur approchée $\varphi = \sqrt{k_1 + k_2}$ pour la première racine ; nous en déduisons des valeurs approchées de la pulsation fondamentale et de la période fondamentale :

$$\omega_1 = \frac{c}{\ell} \sqrt{\frac{I(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}, \quad \tau_1 = \frac{2\pi \ell}{c} \sqrt{\frac{I_1 I_2}{I(I_1 + I_2)}} \quad (45)$$

Ce sont les valeurs que l'on obtiendrait en négligeant la masse de l'arbre.

On obtient une meilleure approximation en remplaçant $\tan \varphi$ par $\varphi + \frac{1}{3}\varphi^3$. On trouve ainsi que les formules (45) sont encore exactes, à condition de remplacer I_1 et I_2 respectivement par :

$$I_1 + \frac{1}{3}I \frac{I_2}{I_1 + I_2} \quad \text{et} \quad I_2 + \frac{1}{3}I \frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

4. Vibrations transversales

4.1 Équation du mouvement

Considérons une poutre droite d'axe Ox dont l'aire S et l'inertie I de la section peuvent être fonctions de l'abscisse x . Proposons-nous d'établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le déplacement transversal $v(x, t)$ de la section d'abscisse x pendant la vibration transversale de la poutre.

Le moment fléchissant M et l'effort tranchant T dans la section d'abscisse x ont pour valeurs :

$$M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad T = \frac{\partial M}{\partial x} = E \frac{\partial}{\partial x} \left(I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (46)$$

Écrivons l'équation fondamentale de la dynamique pour l'élément de poutre de masse $\rho S dx$ (ρ masse volumique) compris entre les sections d'abscisses x et $x + dx$ (figure 11). Supposons qu'une densité de force transversale $q(x, t)$ soit appliquée à la poutre ; q et v sont comptés positivement dans le même sens. Les forces transversales appliquées à l'élément sont $T, -T - dT$ et $q dx$, donc :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -dT + q dx$$

Nous obtenons donc, compte tenu de l'expression (46) de T , l'équation :

$$S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = \frac{q}{\rho} \quad (47)$$

dans laquelle c est une constante qui a les dimensions d'une vitesse :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (48)$$

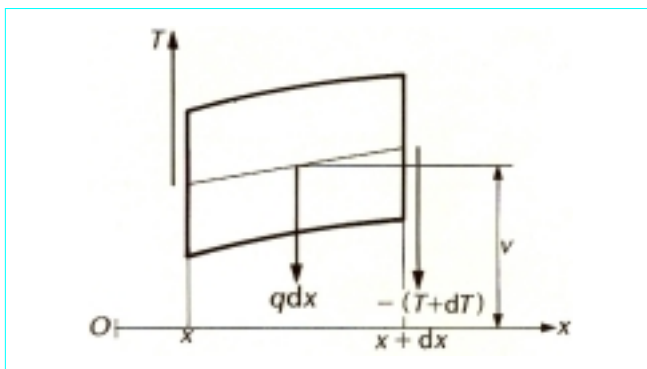


Figure 11 – Élément de poutre soumis à une densité de force transversale q

La fonction $v(x, t)$ doit en outre satisfaire :

a) aux conditions aux limites imposées par les liaisons :

Par **exemple**, à une extrémité encastree d'abscisse x_0 , on doit avoir :

$$v(x_0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_0} = 0 \quad \text{quel que soit } t$$

à une extrémité articulée d'abscisse x_0 , on doit avoir :

$$v(x_0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{x=x_0} = 0 \quad \text{quel que soit } t$$

à une extrémité libre d'abscisse x_0 , on doit avoir :

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{x=x_0} = 0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right]_{x=x_0} = 0 \quad \text{quel que soit } t$$

enfin, à une extrémité d'abscisse x_0 encastree élastiquement, on doit avoir :

$$v(x_0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_0} = kEI(x_0) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{x=x_0} = 0 \quad \text{quel que soit } t$$

avec k constante caractéristique de l'encastrement élastique.

b) aux conditions initiales : la donnée des positions et des vitesses à l'instant $t = 0$ impose des conditions de la forme :

$$v(x, 0) = f(x), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x)$$

$f(x)$ et $g(x)$ étant deux fonctions données.

Les vibrations naturelles sont les mouvements en l'absence de forces extérieures, donc $q = 0$, et la fonction $v(x, t)$ est une intégrale de l'équation aux dérivées partielles :

$$S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (49)$$

Lorsque la densité de force extérieure ne dépend pas de t , l'étude des vibrations se ramène à celle des vibrations naturelles. En effet, la position d'équilibre est définie par la fonction $v_0(x)$ qui vérifie l'équation :

$$c^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(I \frac{d^2 v_0}{dx^2} \right) = \frac{q(x)}{\rho}$$

Donc, en retranchant l'équation précédente de l'équation (47), nous voyons que la fonction $v(x, t) - v_0(x)$ est une intégrale de l'équation (49). Les mouvements se réduisent donc à des vibrations naturelles autour de la position d'équilibre.

Nous avons établi l'équation du mouvement en négligeant, d'une part, l'énergie de rotation de l'élément de poutre dx et, d'autre part, la déformation due à l'effort tranchant (§ 4.2.5).

4.2 Vibrations naturelles des poutres de section constante

4.2.1 Généralités. Vibrations propres

Dans le cas où la section est constante, I/S est constant et égal au carré du rayon de giration de la section, et l'équation (49) des vibrations naturelles se réduit à :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c^2 r^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad \text{avec} \quad r^2 = \frac{I}{S} \quad (50)$$

Nous chercherons à décomposer la vibration naturelle en vibrations propres. Une vibration propre de pulsation ω et de période $\tau = 2\pi/\omega$ est définie par une fonction $v(x, t)$ de la forme :

$$v(x, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) X(x) \quad (51)$$

En reportant l'expression (51) dans l'équation (50), nous trouvons que la fonction $X(x)$ est une intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - \beta^4 X = 0 \quad \text{avec} \quad \beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2 r^2} \quad (52)$$

La fonction $X(x)$ a donc une expression de la forme :

$$X(x) = C \cosh \beta x + D \sinh \beta x + C' \cos \beta x + D' \sin \beta x \quad (53)$$

les constantes étant déterminées par les conditions aux limites.

Par **exemple**, dans le cas d'une poutre de longueur ℓ qui n'est soumise à des liaisons qu'à ses extrémités, nous aurons deux conditions à chaque extrémité :

$$\left. \begin{aligned} X = 0 \quad \text{et} \quad X' = 0 & \quad \text{à une extrémité encastree} \\ X = 0 \quad \text{et} \quad X'' = 0 & \quad \text{à une extrémité articulée} \\ X'' = 0 \quad \text{et} \quad X''' = 0 & \quad \text{à une extrémité libre} \\ X = 0 \quad \text{et} \quad X' = kX'' & \quad \text{à une extrémité encastree} \\ & \quad \text{élastiquement} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

D'autres conditions aux limites peuvent être envisagées (poutres continues, par exemple).

Les conditions aux limites donnent des équations linéaires et homogènes pour déterminer les constantes d'intégration. Nous obtiendrons une solution non identiquement nulle si et seulement si le déterminant de ces équations est nul, donc si ω est une racine d'une équation :

$$\mathcal{F}(\omega) = 0$$

Les racines positives $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n < \dots$ sont les pulsations propres. La plus petite pulsation ω_1 est la pulsation fondamentale ; la période $\tau_1 = 2\pi/\omega_1$ est la période fondamentale.

À chaque pulsation propre ω_n correspond une fonction X_n qui peut être normée, puisque les fonctions X_n ne sont définies qu'à un facteur près [expression (53)].

Exemple : dans le cas d'une poutre de longueur ℓ soumise à ses extrémités à des conditions aux limites du type (54), les fonctions X_n sont orthonormées :

$$\int_0^\ell X_m X_n dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases} \quad (55)$$

En effet, des relations (52) :

$$\beta_m^4 X_m = \frac{d^4 X_m}{dx^4}, \quad \beta_n^4 X_n = \frac{d^4 X_n}{dx^4}$$

nous déduisons :

$$(\beta_m^4 - \beta_n^4) \int_0^\ell X_m X_n dx = \int_0^\ell \left(X_n \frac{d^4 X_m}{dx^4} - X_m \frac{d^4 X_n}{dx^4} \right) dx$$

L'intégrale qui figure dans le second membre de la relation précédente a pour valeur :

$$\left| X_n \frac{d^3 X_m}{dx^3} - X_m \frac{d^3 X_n}{dx^3} + \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 X_n}{dx^2} - \frac{dX_n}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right|_0^\ell$$

donc est nulle en vertu des conditions aux limites (54), ce qui démontre l'orthogonalité des fonctions X_m et X_n .

Une vibration naturelle quelconque peut être représentée par une série :

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) X_n(x) \quad (56)$$

dont les coefficients A_n et B_n sont déterminés par les conditions initiales :

$$\begin{cases} v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = f(x) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n X_n(x) = g(x) \end{cases}$$

Admettons que, dans le cas où les fonctions X_n sont orthonormées, on puisse développer $f(x)$ et $g(x)$ en série de fonctions X_n ; nous trouvons, grâce aux relations (55) :

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \int_0^\ell f(x) X_n(x) dx \\ B_n &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^\ell g(x) X_n(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

4.2.2 Exemples de vibrations propres

4.2.2.1 Poutre articulée à ses extrémités $x = 0$ et $x = \ell$

Les conditions aux limites (54) :

$$X(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(\ell) = 0, \quad X''(\ell) = 0$$

fournissent quatre équations linéaires et homogènes entre les constantes C, D, C' et D' de l'expression (53). Elles ont une solution non nulle $C = 0, D = 0, C' = 0$ et $D' \neq 0$ si et seulement si :

$$\sin \beta \ell = 0$$

Donc $\beta \ell = n\pi$; compte tenu de ce que $\beta^2 = \omega/(cr)$, les pulsations propres et les périodes propres ont pour valeurs :

$$\omega_n = cr \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad \tau_n = \frac{2\ell^2}{n^2 \pi} \sqrt{\frac{\rho S}{EI}}$$

Les fonctions X_n normées ont pour expressions :

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

4.2.2.2 Poutre encastree à ses extrémités $x = 0$ et $x = \ell$

Les conditions aux limites (54) :

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(\ell) = 0, \quad X'(\ell) = 0$$

fournissent quatre équations linéaires et homogènes entre les constantes C, D, C' et D' de l'expression (53). En égalant à zéro le déterminant de ces équations, nous trouvons, en posant $\beta \ell = \varphi$:

$$\operatorname{ch} \varphi \cos \varphi - 1 = 0$$

Cette équation a une infinité de racines positives $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ (figure 12) ; les pulsations propres et les périodes propres ont pour valeurs :

$$\omega_n = \frac{\varphi_n^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad \tau_n = \frac{2\pi \ell^2}{\varphi_n} \sqrt{\frac{\rho S}{EI}}$$

Les premières racines sont :

$$\varphi_1 = 4,730\ 04 ; \quad \varphi_2 = 7,853\ 20 ; \quad \varphi_3 = 10,995\ 61$$

et, pour $n > 3$, on a $\varphi_n \approx \frac{2n+1}{2}\pi$ avec une erreur inférieure à 10^{-5} .

Il est aisé de voir que $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5, \dots$ sont les racines positives de l'équation :

$$\operatorname{th} \frac{1}{2} \varphi - \tan \frac{1}{2} \varphi = 0$$

et que $\varphi_2, \varphi_4, \varphi_6, \dots$ sont les racines positives de l'équation :

$$\operatorname{th} \frac{1}{2} \varphi + \tan \frac{1}{2} \varphi = 0$$

En posant $x = \ell \xi$, les fonctions X_n normées ont pour expressions :

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left[\frac{\operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \varphi_n - \cos \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \varphi_n}{\operatorname{ch} \frac{1}{2} \varphi_n - \cos \frac{1}{2} \varphi_n} \right] \quad \text{pour } n \text{ impair}$$

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left[\frac{\operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \varphi_n - \sin \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \varphi_n}{\operatorname{sh} \frac{1}{2} \varphi_n - \sin \frac{1}{2} \varphi_n} \right] \quad \text{pour } n \text{ pair}$$

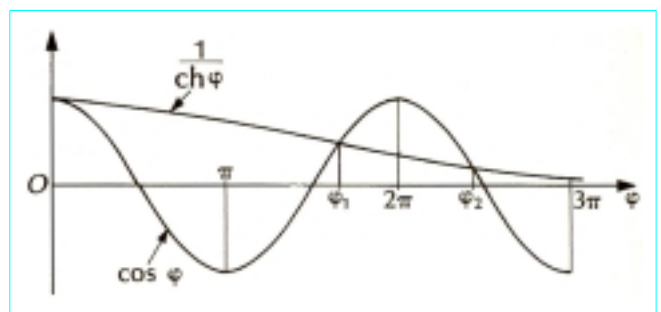


Figure 12 - Racines positives $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots$ de l'équation $\operatorname{ch} \varphi \cos \varphi - 1 = 0$

4.2.2.3 Poutre dont les extrémités $x = 0$ et $x = \ell$ sont libres

Les conditions aux limites (54) :

$$X''(0) = 0, \quad X'''(0) = 0, \quad X''(\ell) = 0, \quad X'''(\ell) = 0$$

fournissent quatre équations linéaires et homogènes entre les constantes C, D, C' et D' de l'expression (53). En égalant à zéro le déterminant de ces équations, nous trouvons, en posant $\beta\ell = \varphi$:

$$\operatorname{ch} \varphi \cos \varphi - 1 = 0$$

Les pulsations et les périodes propres ont donc les mêmes valeurs que lorsque la poutre a ses extrémités encastées (§ 4.2.2.2).

En posant $x = \ell\xi$, les fonctions X_n normées ont pour expressions :

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left[\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\varphi_n + \cos\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\varphi_n}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\varphi_n + \cos\frac{1}{2}\varphi_n} \right] \quad \text{pour } n \text{ impair}$$

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\varphi_n + \sin\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\varphi_n}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\varphi_n + \sin\frac{1}{2}\varphi_n} \right] \quad \text{pour } n \text{ pair}$$

4.2.2.4 Poutre dont l'extrémité $x = 0$ est encastée et l'extrémité $x = \ell$ est libre

Les conditions aux limites (54) :

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X''(\ell) = 0, \quad X'''(\ell) = 0$$

fournissent quatre équations linéaires et homogènes entre les constantes C, D, C' et D' de l'expression (53). En égalant à zéro le déterminant de ces équations, nous trouvons, en posant $\beta\ell = \varphi$:

$$\operatorname{ch} \varphi \cos \varphi + 1 = 0$$

Cette équation a une infinité de racines positives $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots$ (figure 13) ; les pulsations propres et les périodes propres ont pour valeurs :

$$\omega_n = \frac{\varphi_n^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad \tau_n = \frac{2\pi\ell^2}{\varphi_n^2} \sqrt{\frac{\rho S}{EI}}$$

Les premières racines sont :

$$\varphi_1 = 1,875\ 10 ; \quad \varphi_2 = 4,694\ 09 ; \quad \varphi_3 = 7,854\ 76$$

et, pour $n > 3$, on a $\varphi_n \approx \frac{2n+1}{2}\pi$ avec une erreur inférieure à 10^{-5} .

Il est aisé de voir que $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5, \dots$ sont les racines positives de l'équation :

$$\operatorname{th} \frac{1}{2} \varphi \tan \frac{1}{2} \varphi - 1 = 0$$

et que $\varphi_2, \varphi_4, \varphi_6, \dots$ sont les racines positives de l'équation :

$$\operatorname{th} \frac{1}{2} \varphi \tan \frac{1}{2} \varphi + 1 = 0$$

En posant $x = \ell\xi$, les fonctions X_n normées ont pour expressions :

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left[\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\varphi_n - \sin\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\varphi_n}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\varphi_n - \sin\frac{1}{2}\varphi_n} \right] \quad \text{pour } n \text{ impair}$$

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\varphi_n - \cos\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\varphi_n}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\varphi_n - \cos\frac{1}{2}\varphi_n} \right] \quad \text{pour } n \text{ pair}$$

4.2.2.5 Poutre dont l'extrémité $x = 0$ est articulée et l'extrémité $x = \ell$ est encastée

Les conditions aux limites (54) :

$$X(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(\ell) = 0, \quad X'(\ell) = 0$$

fournissent quatre équations linéaires et homogènes entre les constantes C, D, C' et D' de l'expression (53). En égalant à zéro le déterminant de ces équations, nous trouvons, en posant $\beta\ell = \varphi$:

$$\operatorname{th} \varphi = \tan \varphi$$

Cette équation a une infinité de racines positives $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots$ (figure 14) ; les pulsations propres et les périodes propres ont pour valeurs :

$$\omega_n = \frac{\varphi_n^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad \tau_n = \frac{2\pi\ell^2}{\varphi_n^2} \sqrt{\frac{\rho S}{EI}}$$

Les premières racines sont :

$$\varphi_1 = 3,926\ 60 ; \quad \varphi_2 = 7,068\ 58 ; \quad \varphi_3 = 10,210\ 18$$

et, pour $n > 3$, $\varphi_n \approx \frac{4n+1}{4}\pi$ avec une erreur inférieure à 10^{-5} .

En posant $x = \ell\xi$, les fonctions X_n normées ont pour expressions :

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left(\frac{\operatorname{sh} \xi \varphi_n}{\operatorname{sh} \varphi_n} - \frac{\sin \xi \varphi_n}{\sin \varphi_n} \right)$$

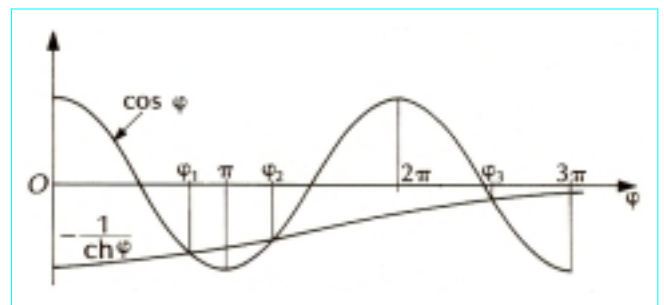


Figure 13 – Racines positives $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots$ de l'équation $\operatorname{ch} \varphi \cos \varphi + 1 = 0$

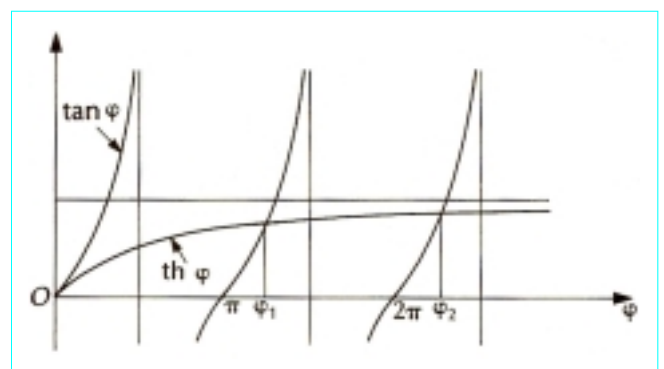


Figure 14 – Racines positives $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots$ de l'équation $\operatorname{th} \varphi = \tan \varphi$

4.2.2.6 Poutre dont l'extrémité $x = 0$ est articulée et l'extrémité $x = \ell$ est libre

Les conditions aux limites (54) :

$$X(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X''(\ell) = 0, \quad X'''(\ell) = 0$$

fournissent quatre équations linéaires et homogènes entre les constantes C, D, C' et D' de l'expression (53). En égalant à zéro le déterminant de ces équations, nous trouvons, en posant $\beta\ell = \varphi$:

$$\text{th } \varphi = \tan \varphi$$

Les pulsations propres et les périodes propres ont donc les mêmes valeurs que lorsque l'extrémité $x = 0$ est articulée et que l'extrémité $x = \ell$ est encastree (§ 4.2.2.5).

En posant $x = \ell\xi$, les fonctions X_n normées ont pour expressions :

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left(\frac{\text{sh } \xi \varphi_n}{\text{sh } \varphi_n} + \frac{\sin \xi \varphi_n}{\sin \varphi_n} \right)$$

4.2.3 Vibrations naturelles d'une poutre située dans un milieu élastique

Le milieu exerçant par hypothèse une densité de force de rappel égale à $-kv$ (k module de réaction), il suffit de prendre $q = -kv$ dans l'équation (47) pour obtenir l'équation des vibrations naturelles :

$$S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c^2 r^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{k}{\rho} v = 0$$

qui se réduit, lorsque I et S sont constants, à l'équation :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c^2 r^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{k}{\rho S} v = 0 \tag{58}$$

avec $r^2 = I/S$.

Cherchons les vibrations propres définies par :

$$v(x, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) X(x) \tag{59}$$

En reportant l'expression (59) dans l'équation (58), nous voyons que X est une intégrale de l'équation différentielle :

$$c^2 r^2 \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \left(\omega^2 - \frac{k}{\rho S} \right) X = 0 \tag{60}$$

L'intégrale générale de l'équation (60) dépend de façon linéaire et homogène de quatre constantes. Elle a deux formes différentes selon que ω^2 est plus petit ou plus grand que $k/(\rho S)$. On montre aisément que, lorsque $\omega^2 < k/(\rho S)$, les conditions aux limites donnent un système d'équations linéaires et homogènes entre les constantes dont le déterminant n'est jamais nul. Nous devons donc supposer $\omega^2 > k/(\rho S)$. En posant alors $\omega^2 = \omega'^2 + k/(\rho S)$, l'équation (60) se ramène à l'équation (52). Donc, si nous désignons par ω'_n les pulsations propres de la poutre calculées en supprimant le milieu élastique, les pulsations propres de la poutre placée dans le milieu élastique sont données par la formule :

$$\omega_n^2 = \omega_n'^2 + \frac{k}{\rho S} \tag{61}$$

À toute pulsation propre ω_n correspond une fonction X_n .

Lorsque la longueur de la poutre augmente infiniment, ω_n' tend vers zéro, et toutes les pulsations propres ω_n tendent vers la pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\rho S}}$$

4.2.4 Vibrations naturelles d'une poutre comprimée

Supposons la poutre soumise à un effort normal de compression F , et soit M le moment fléchissant provoqué par la densité de force d'inertie $-\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$; nous avons :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{62}$$

En dérivant deux fois par rapport à x la relation :

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = M - Fv$$

nous obtenons, compte tenu de l'expression (62), l'équation aux dérivées partielles :

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + F \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

qui se réduit, lorsque I et S sont constants, à :

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + F \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{63}$$

Cherchons les vibrations propres définies par :

$$v(x, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) X(x) \tag{64}$$

En reportant l'expression (64) dans l'équation (63), et en posant :

$$\beta^4 = \frac{\rho S}{EI} \omega^2 = \left(\frac{\omega}{cr} \right)^2, \quad \gamma^2 = \frac{F}{EI}$$

nous voyons que X est une intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} + \gamma^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \beta^4 X = 0$$

La fonction X est donc de la forme :

$$X = C \text{ch } \lambda x + D \text{sh } \lambda x + C' \cos \mu x + D' \sin \mu x$$

λ et μ étant définis par :

$$\begin{cases} \lambda^2 = \frac{1}{2} (-\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 4\beta^4}) \\ \mu^2 = \frac{1}{2} (\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 4\beta^4}) \end{cases}$$

Bornons-nous au cas d'une poutre de longueur ℓ articulée à ses extrémités $x = 0$ et $x = \ell$. Les conditions aux limites (54) :

$$X(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(\ell) = 0, \quad X''(\ell) = 0$$

montrent que $C = 0, C' = 0, D = 0$ et $D' \neq 0$ si et seulement si $\sin \mu \ell = 0$, soit $\mu \ell = n\pi$, donc :

$$\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 4\beta^4} = \frac{2n^2\pi^2}{\ell^2}$$

Nous en déduisons :

$$\beta^4 = \frac{n^4\pi^4}{\ell^4} \left(1 - \frac{\gamma^2 \ell^2}{n^2\pi^2} \right)$$

Il en résulte que, si $F_c = \pi^2 EI \ell^2$ désigne la force critique de flambement de la poutre, les pulsations propres ont pour valeurs :

$$\omega_n = \beta^2 cr = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \frac{F}{F_c}} = \omega_n' \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \frac{F}{F_c}}$$

ω_n' désignant les pulsations propres lorsque F est nul.

L'effort de compression F a pour effet de diminuer les pulsations propres et, en conséquence, d'augmenter les périodes propres. En particulier, lorsque F tend vers la force critique de flambement, la pulsation fondamentale tend vers zéro, et la période fondamentale tend vers l'infini. Ce résultat, qui a été utilisé pour mesurer expérimentalement les forces critiques de flambement, est général.

4.2.5 Influence de l'énergie cinétique de rotation et de la déformation due à l'effort tranchant

4.2.5.1 Influence de l'énergie cinétique de rotation

En conservant les notations définies au paragraphe 4.1, les équations du mouvement de l'élément de poutre de longueur dx s'écrivent, q étant nul :

$$\left. \begin{aligned} \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \\ \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + T - \frac{\partial M}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

En éliminant θ , M et T entre les deux équations (65), et les deux équations :

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

nous obtenons l'équation suivante qui remplace l'équation (50) :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c^2 r^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - r^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (66)$$

Dans le cas d'une poutre droite de longueur ℓ articulée à ses extrémités, on montre aisément que les pulsations propres ω'_n ont pour valeurs :

$$\omega'_n = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 + r^2 \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2}}$$

ω_n désignant les pulsations calculées en négligeant l'énergie de rotation.

Par **exemple**, dans le cas d'une poutre à section rectangulaire de hauteur h :

$$r^2 = \frac{1}{12} h^2, \quad \omega'_1 = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{h}{\ell}\right)^2}}$$

Si $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{10}$, on trouve : $\omega'_1 = 0,9959 \omega_1$ (-0,4 pour-cent).

Si $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{5}$, on trouve : $\omega'_1 = 0,9839 \omega_1$ (-1,6 pour-cent).

4.2.5.2 Influence de la déformation due à l'effort tranchant

En négligeant l'énergie cinétique de rotation, l'équation du mouvement de l'élément de poutre de longueur dx s'écrit :

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (67)$$

En éliminant M et T entre l'équation (67) et les deux équations :

$$T = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + kr^2 \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{avec} \quad k = \frac{ES}{GS_1}$$

S_1 désignant la section réduite relative à la déformation due à l'effort tranchant, nous obtenons l'équation suivante qui remplace l'équation (50) :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c^2 r^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - kr^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (68)$$

Dans le cas d'une poutre droite de longueur ℓ articulée à ses extrémités, on montre aisément que les pulsations propres ω''_n ont pour valeurs :

$$\omega''_1 = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 + kr^2 \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2}}$$

ω_n désignant les pulsations calculées en négligeant la déformation due à l'effort tranchant.

Par **exemple**, dans le cas d'une poutre à section rectangulaire de hauteur h , nous avons : $r^2 = \frac{1}{12} h^2$, $S_1 = \frac{5}{6} S$, $G = \frac{2}{5} E$ et $k = 3$, donc :

$$\omega''_1 = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{h}{\ell}\right)^2}}$$

Si $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{10}$, on trouve : $\omega''_1 = 0,9879 \omega_1$ (-1,2 pour-cent).

Si $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{5}$, on trouve : $\omega''_1 = 0,9540 \omega_1$ (-4,6 pour-cent).

4.3 Vibrations forcées des poutres de section constante

4.3.1 Poutre soumise à des liaisons aux extrémités ne permettant pas un déplacement d'ensemble

Nous excluons donc le cas où les extrémités sont libres, et le cas où une extrémité est articulée et l'autre libre.

Les fonctions X_n sont orthogonales et normées. Il est aisé de voir que les fonctions $X''_n = \frac{d^2 X_n}{dx^2}$ sont orthogonales. En effet, nous avons, en intégrant deux fois de suite par parties :

$$\int_0^\ell X''_m X''_n dx = \left[X'_m X''_n - X_m X'''_n \right]_0^\ell + \int_0^\ell X_m X''''_n dx$$

soit, compte tenu des conditions aux limites (54) et de $X''_n = \beta_n^4 X_n$:

$$\int_0^\ell X''_m X''_n dx = \beta_n^4 \int_0^\ell X_m X_n dx$$

En particulier, en faisant $m = n$ dans la relation précédente, nous avons :

$$\int_0^\ell X''_n{}^2 dx = \beta_n^4 = \left(\frac{\omega_n}{cr}\right)^2 \quad (69)$$

Nous pouvons représenter la fonction $v(x, t)$ par la série :

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x) \quad (70)$$

Nous calculerons les coordonnées généralisées $q_n(t)$ en utilisant les équations de Lagrange (§ 1.2). L'énergie cinétique a pour expression :

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^\ell S \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \rho S \int_0^\ell \left(\sum_{n=1}^{\infty} q'_n X_n \right)^2 dx$$

soit, les fonctions X_n étant orthonormées :

$$T = \frac{1}{2} \rho S \sum_{n=1}^{\infty} q_n'^2$$

L'énergie de déformation W a pour expression :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} EI \int_0^\ell \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n X_n'' \right)^2 dx$$

soit, compte tenu de la relation (69), les fonctions X_n'' étant orthogonales :

$$W = \frac{1}{2} EI \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^4 q_n^2$$

Les équations de Lagrange s'écrivent donc, Q_n désignant les composantes généralisées du système des forces extérieures :

$$\rho S q_n'' + EI \beta_n^4 q_n = Q_n$$

ou, compte tenu de ce que $\beta_n^4 = \frac{\omega_n^2}{c^2 r^2} = \frac{\rho S}{EI} \omega_n^2$:

$$q_n'' + \omega_n^2 q_n = \frac{Q_n}{\rho S} \tag{71}$$

Supposons, par exemple, que les forces extérieures soient des forces $F_j(t)$ transversales appliquées aux sections d'abscisses x_j ; le travail virtuel de ces forces dans un déplacement virtuel défini par la seule variation δq_n :

$$\delta \mathcal{E} = \sum_i F_i(t) \delta u(x_i, t) = \sum_i F_i(t) X_n(x_i) \delta q_n$$

montre que la composante généralisée Q_n a pour valeur :

$$Q_n = \sum_i X_n(x_i) F_i(t) \tag{72}$$

Lorsque toutes les composantes Q_n sont nulles, nous retrouvons les vibrations propres de pulsations ω_n .

Lorsque les composantes Q_n ne dépendent pas du temps, la fonction $q_n - Q_n / (\rho S \omega_n^2)$ vérifie l'équation (71) rendue homogène ($Q_n = 0$), et nous obtenons les vibrations naturelles autour de la position d'équilibre.

Dans le cas général où les composantes Q_n dépendent du temps, l'intégrale générale de l'équation (71) obtenue par la méthode de la variation des constantes a pour expression :

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\rho S \omega_n} \int_0^t Q_n(\theta) \sin \omega_n(t - \theta) d\theta \tag{73}$$

les constantes A_n et B_n étant déterminées par les conditions initiales. On vérifie aisément que les formules (57) sont encore exactes. Lorsque la poutre est initialement au repos, A_n et B_n sont nuls.

4.3.2 Premier exemple. Force $F(t) = F \sin \omega t$ appliquée à la section d'abscisse α d'une poutre articulée à ses extrémités

Nota : Le lecteur pourra se référer à la figure 15. Nous avons, d'après la formule (72) :

$$Q_n = X_n(\alpha) F(t) = F \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi\alpha}{\ell} \sin \omega t$$

Supposons la poutre initialement au repos, la formule (73) nous donne :

$$q_n(t) = \frac{F}{\rho S} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi\alpha}{\ell} \frac{\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

Nous obtenons ainsi la solution :

$$v(x, t) = \frac{2F}{\rho S \ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi\alpha}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell}}{\omega_n^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right)$$

Le mouvement résulte donc de la superposition d'une vibration forcée (terme en $\sin \omega t$) de même période que la force $F(t)$ et de vibrations propres (termes en $\sin \omega_n t$). Un amortissement, même faible, fera disparaître ces dernières et, au bout d'un certain temps, il ne subsistera plus que la vibration forcée :

$$v_F(x, t) = \frac{2F}{\rho S \ell} \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi\alpha}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

Si l'on suppose ω très petit (variation très lente de la force), l'expression précédente se réduit à la flèche statique :

$$v_S(x, t) = \frac{2F}{\rho S \ell} \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \sin \frac{n\pi\alpha}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

En effet, compte tenu de la valeur de ω_n^2 , la formule précédente s'écrit :

$$v_S(x, t) = \frac{2F \ell^3}{\pi^4 EI} \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi\alpha}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

et il est aisé de vérifier que cette expression représente bien la flèche statique.

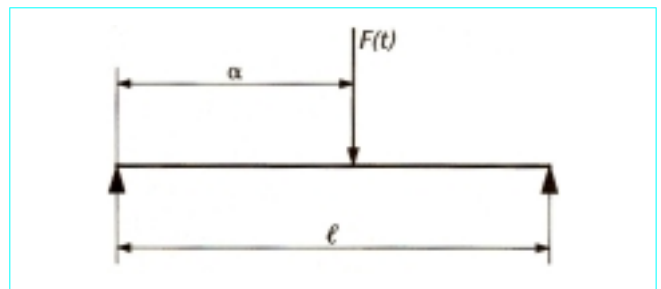


Figure 15 – Poutre articulée à ses extrémités et soumise à une force $F(t) = F \sin \omega t$ appliquée à la section d'abscisse α

Les formules précédentes permettent de comparer la *flèche statique* et la *flèche dynamique*. En ne gardant que le premier terme des séries qui, lorsque $\omega < \omega_1$, est le terme prépondérant, on trouve que la flèche dynamique est égale à la flèche statique multipliée par le facteur $1/[1 - (\omega/\omega_1)^2]$. Lorsque ω tend vers ω_1 , il y a *résonance*.

4.3.3 Deuxième exemple. Force constante F parcourant à la vitesse V une poutre articulée à ses extrémités

Nota : Le lecteur se référer à la figure 16.

La poutre est initialement au repos. À l'instant t , la force est dans la section d'abscisse $\alpha = Vt$, et la formule (72) nous donne :

$$Q_n(t) = F \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \omega'_n t \quad \text{avec} \quad \omega'_n = \frac{n\pi V}{\ell}$$

La formule (73) permet de calculer $q_n(t)$:

$$q_n(t) = \frac{F}{\rho S \ell} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega_n'^2} \left(\sin \omega'_n t - \frac{\omega'_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right)$$

Nous obtenons ainsi la solution :

$$v(x, t) = \frac{2F}{\rho S \ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega'_n t - \frac{\omega'_n}{\omega_n} \sin \omega_n t}{\omega_n^2 - \omega_n'^2} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

avec $\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$, $\omega'_n = \frac{n\pi V}{\ell}$, $\frac{\omega'_n}{\omega_n} = \frac{1}{n} \left(\frac{\omega'_1}{\omega_1} \right)$

Cette formule n'est valable que lorsque la force est sur la poutre, donc pour $t < t_1 = \ell/V$.

Il est aisé de voir que lorsque V est faible, la flèche $v(x, t)$ se réduit à la flèche statique :

$$v_S(x, t) = \frac{2F}{\rho S \ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \sin \frac{n\pi \alpha}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

avec $\alpha = Vt$.

Lorsque $t > t_1$, le mouvement est une vibration naturelle ; donc, puisque nous connaissons $q_n(t_1)$ et $q'_n(t_1)$, nous avons :

$$q_n(t) = q_n(t_1) \cos \omega_n(t - t_1) + \frac{q'_n(t_1)}{\omega_n} \sin \omega_n(t - t_1)$$

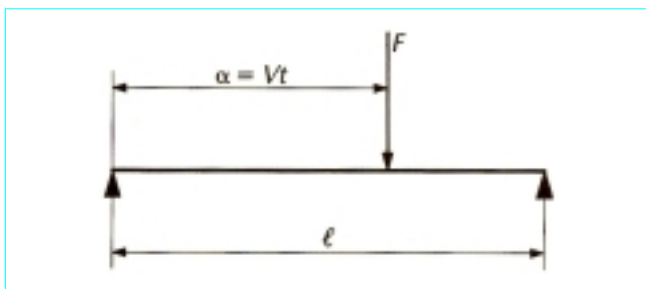


Figure 16 - Poutre articulée à ses extrémités et soumise à une force F constante, parcourant la poutre à la vitesse V

Supposons que V croisse jusqu'à la *vitesse critique* V_c correspondant à $\omega'_1 = \omega_1$:

$$V_c = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = \frac{\pi c r}{\ell} = \frac{\pi c}{\lambda}$$

avec $\lambda = \ell/r$ élanement de la poutre.

Le premier terme de la série représentant $v(x, t)$, qui est le terme prépondérant, se présente sous la forme indéterminée $0/0$; on trouve que sa limite, lorsque ω'_1 tend vers ω_1 , a pour valeur :

$$\frac{2F}{\rho S \ell} \cdot \frac{1}{2\omega_1^2} (\sin \omega_1 t - \omega_1 t \cos \omega_1 t) \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

Ce terme est maximal pour $\omega_1 t = \pi$, c'est-à-dire pour $t = t_1$; sa valeur maximale $\frac{2F}{\rho S \ell} \left(\frac{\pi}{2\omega_1^2} \right)$ est $\pi/2$ fois le premier terme de la série donnant la flèche statique maximale obtenue pour $x = \alpha = \ell/2$ et $t = \frac{1}{2} t_1$.

On notera que la vitesse critique est très grande, puisque $c = \sqrt{EI/\rho}$ est égal à 5 172 m/s dans le cas de l'acier ($E = 210\,000$ MPa, $\rho = 7\,850$ kg/m³) et à 4 000 m/s pour le béton ($E = 40\,000$ MPa, $\rho = 2\,500$ kg/m³).

4.4 Vibrations naturelles des poutres de section quelconque

4.4.1 Formules générales

Considérons une poutre P soumise à des liaisons quelconques telles qu'un mouvement d'ensemble ne soit pas possible. Sous l'action d'une densité de force transversale $q(x)$, le déplacement $v(x)$ au moment de l'équilibre vérifie l'équation (47), donc :

$$c^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(I \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = \frac{q(x)}{\rho} \quad (74)$$

Désignons par $(1/E) V(\alpha, x)$ le déplacement transversal de la section d'abscisse x sous l'action d'une force transversale unité appliquée à la section d'abscisse α . La solution de l'équation (74) est :

$$v(x) = \frac{1}{E} \int_P V(\alpha, x) q(\alpha) d\alpha \quad (75)$$

Le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti (article *Théorie de l'Élasticité* [A 305] dans le traité *Sciences fondamentales*) montre que l'on a :

$$V(\alpha, x) = V(x, \alpha)$$

En outre, l'énergie de déformation W de la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int_P q(x) v(x) dx = \frac{1}{2E} \int_P \int_P V(\alpha, x) q(\alpha) q(x) d\alpha dx$$

est positive quelle que soit la fonction $q(x)$. Le noyau $V(\alpha, x)$ est donc symétrique et défini positif.

Reprenons l'équation des vibrations naturelles :

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = -S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (76)$$

Dans cette équation, les forces d'inertie de densité $-\rho S \partial^2 v / \partial t^2$ jouent le même rôle que les forces extérieures de densité $q(x)$ dans l'équation (74). Compte tenu de $E = \rho c^2$, la formule (75) montre que la solution $v(x, t)$ de l'équation (76) vérifie l'équation intégrale :

$$v(x, t) = -\frac{1}{c^2} \int_P V(\alpha, x) S(\alpha) \frac{\partial^2 v(\alpha, t)}{\partial t^2} d\alpha \quad (77)$$

En posant :

$$K(\alpha, x) = V(\alpha, x) \sqrt{S(\alpha) S(x)}$$

nous pouvons écrire l'équation (77) sous la forme :

$$v(x, t) \sqrt{S(x)} = -\frac{1}{c^2} \int_P K(\alpha, x) \sqrt{S(\alpha)} \frac{\partial^2 v(\alpha, t)}{\partial t^2} d\alpha$$

La fonction $v(x, t) \sqrt{S(x)}$ est ainsi représentable canoniquement sur le noyau symétrique défini positif $K(\alpha, x)$. Elle est donc, en vertu du théorème de Hilbert-Schmidt (§ 1.1), développable en série absolument et uniformément convergente des fonctions propres $Y_n(x)$ du noyau $K(\alpha, x)$:

$$v(x, t) \sqrt{S(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n(x)$$

Désignons par $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$ les valeurs propres du noyau $K(\alpha, x)$. Les fonctions propres orthogonales et normées :

$$\int_P Y_m(x) Y_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

vérifient les identités :

$$Y_n(x) = \lambda_n \int_P K(\alpha, x) Y_n(\alpha) d\alpha$$

Donc, si l'on pose :

$$Y_n(x) = X_n(x) \sqrt{S(x)} \quad (78)$$

les fonctions X_n sont telles que :

$$\int_P S(x) X_m(x) X_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases} \quad (79)$$

et vérifient les identités :

$$X_n(x) = \lambda_n \int_P V(\alpha, x) S(\alpha) X_n(\alpha) d\alpha \quad (80)$$

Il résulte de ce qui précède que la fonction $v(x, t)$ est développable en série absolument et uniformément convergente des fonctions $X_n(x)$:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x) \quad (81)$$

Pour déterminer les coefficients $q_n(t)$, portons l'expression (81) dans l'équation intégrale (77) ; nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x) = -\frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} q_n''(t) \int_P V(\alpha, x) S(\alpha) X_n(\alpha) d\alpha$$

soit, compte tenu des identités (80) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[q_n(t) + \frac{1}{\lambda_n c^2} q_n''(t) \right] X_n(x) = 0$$

Puisque les fonctions $X_n(x)$ sont linéairement indépendantes, nous en déduisons que $q_n(t)$ est une intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\lambda_n c^2} q_n''(t) + q_n(t) = 0$$

Les fonctions $q_n(t)$ sont donc de la forme :

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$$

Les pulsations propres et les périodes propres se déduisent des valeurs propres du noyau $K(\alpha, x)$:

$$\omega_n = c \sqrt{\lambda_n}, \quad \tau_n = \frac{2\pi}{c \sqrt{\lambda_n}} \quad (82)$$

Nous avons donc obtenu l'expression suivante de $v(x, t)$:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) X_n(x) \quad (83)$$

qui exprime la décomposition d'une vibration naturelle quelconque en vibrations propres. Les constantes A_n et B_n sont déterminées par les conditions initiales :

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = f(x)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n X_n(x) = g(x)$$

En admettant la possibilité de développer les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ en série des fonctions $X_n(x)$, nous trouvons, en utilisant les relations (79) :

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \int_P S(x) f(x) X_n(x) \\ B_n &= \frac{1}{\omega_n} \int_P S(x) g(x) X_n(x) \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

4.4.2 Vitesses critiques de rotation des arbres

Cette question se rattache à l'étude des vibrations transversales propres de l'arbre. Désignons par ω_r la vitesse angulaire de rotation de l'arbre. Pour voir si l'arbre en rotation est stable, donnons un déplacement transversal $v(x)$ à l'axe rectiligne de l'arbre. Il naît une force centrifuge de densité $\rho S \omega_r^2 v(x)$. L'arbre est donc stable si la vitesse ω_r est telle que l'équation différentielle :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = \rho S \omega_r^2 v \quad (85)$$

n'a pas d'autre solution vérifiant les conditions aux limites que la solution identiquement nulle.

Or les vibrations transversales propres de l'arbre sont de la forme :

$$v(x, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) X(x)$$

dans laquelle x est une intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = \rho S \omega^2 X$$

vérifiant les conditions aux limites. Cette équation a des solutions non nulles toutes les fois que ω est égal à une pulsation propre ω_n . Il en résulte que l'équation (85) n'a de solutions non identiquement nulles que lorsque la vitesse angulaire ω_r est égale à une pulsation propre ω_n . Les pulsations propres des vibrations transversales sont donc les vitesses angulaires critiques de rotation de l'arbre.

4.5 Vibrations forcées des poutres de section quelconque

Nous supposons toujours que les liaisons sont telles qu'un mouvement d'ensemble de la poutre ne soit pas possible.

L'intégrale $v(x, t)$ de l'équation :

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = \frac{q(x, t)}{\rho} - S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{86}$$

est une solution de l'équation intégrale :

$$v(x, t) = \frac{1}{E} \int_P V(\alpha, x) \left[q(\alpha, t) - \rho S(\alpha) \frac{\partial^2 v(\alpha, t)}{\partial t^2} \right] d\alpha \tag{87}$$

Désignons par $v_0(x, t)$ la fonction connue :

$$v_0(x, t) = \frac{1}{E} \int_P V(\alpha, x) q(\alpha, t) d\alpha$$

$v_0(x, t)$ est le déplacement que l'on obtiendrait en négligeant les forces d'inertie, c'est-à-dire en négligeant la masse de la poutre. Nous obtenons donc, compte tenu de $E = \rho c^2$, l'équation intégrale :

$$v(x, t) - v_0(x, t) = - \frac{1}{c^2} \int_P V(\alpha, x) S(\alpha) \frac{\partial^2 v(\alpha, t)}{\partial t^2} d\alpha \tag{88}$$

analogue à l'équation (77). Il en résulte que $v(x, t) - v_0(x, t)$ est développable en série absolument et uniformément convergente des fonctions X_n définies au paragraphe 4.4.1. Supposons la fonction $v_0(x, t)$ développable en série des fonctions X_n :

$$v_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^0(t) X_n(x)$$

la fonction $q_n^0(t)$ ayant pour expression :

$$q_n^0(t) = \int_P S(x) v_0(x, t) X_n(x) dx$$

La fonction $v(x, t)$ est, dans ces conditions, développable en série des fonctions X_n :

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x) \tag{89}$$

Pour déterminer les fonctions $q_n(t)$, portons les développements de $v_0(x, t)$ et de $v(x, t)$ dans l'équation intégrale (88). Un calcul analogue à celui fait dans l'étude des vibrations naturelles (§ 4.4.1) montre que $q_n(t)$ est une intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\lambda_n c^2} q_n''(t) + q_n(t) = q_n^0(t)$$

ou, puisque $\omega_n^2 = \lambda_n c^2$:

$$q_n''(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \omega_n^2 q_n^0(t) \tag{90}$$

En utilisant la méthode de la variation des constantes, nous obtenons l'intégrale générale de l'équation (90) :

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \omega_n \int_0^t q_n^0(\theta) \sin \omega_n(t - \theta) d\theta \tag{91}$$

les constantes A_n et B_n étant déterminées par les conditions initiales ; il est aisé de vérifier que les formules (84) sont encore exactes. Lorsque la poutre est initialement au repos, les constantes A_n et B_n sont nulles.

4.6 Méthode de Rayleigh et méthode de Ritz

4.6.1 Méthode de Rayleigh

Cette méthode permet de calculer une valeur approchée de la pulsation fondamentale d'une poutre P soumise à des liaisons quelconques. Imaginons que le mouvement de la poutre puisse être représenté par la fonction :

$$v(x, t) = f(t) \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ appartenant à la famille \mathcal{F} des fonctions vérifiant les conditions aux limites de la poutre P .

Portons $v(x, t)$ dans les expressions de l'énergie cinétique T et de l'énergie de déformation W de la poutre :

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_P S \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx, \quad W = \frac{1}{2} E \int_P I \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

En posant :

$$J = \int_P S \varphi^2 dx, \quad H = \int_P I \varphi''^2 dx$$

φ'' désignant la dérivée seconde de φ , nous obtenons :

$$T = \frac{1}{2} \rho J f'^2(t), \quad W = \frac{1}{2} E H f^2(t)$$

Le théorème des forces vives nous donne :

$$T + W = \frac{1}{2} \rho J f'^2(t) + \frac{1}{2} E H f^2(t) = Cte$$

soit, en dérivant par rapport à t :

$$\rho J f''^2(t) + E H f(t) = 0$$

Nous obtenons donc un mouvement de pulsation ω définie par :

$$\omega^2 = \left(\frac{E}{\rho} \right) \frac{H}{J} = c^2 \frac{H}{J}$$

Mais, si la fonction $\varphi(x)$ est différente de la fonction $X_1(x)$ qui correspond à la vibration propre fondamentale, la formule précédente donne une valeur trop élevée pour ω_1^2 , puisque le choix de la fonction $\varphi(x)$ revient à transformer la poutre P , qui a une infinité de degrés de liberté, en un système qui n'a qu'un seul degré de liberté, donc à lui imposer des liaisons supplémentaires qui ne peuvent qu'élever la fréquence $\omega_1/(2\pi)$. Il en résulte que la pulsation fondamentale s'obtient en recherchant le minimum de l'expression :

$$\lambda = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\int_P I \varphi''^2 dx}{\int_P S \varphi^2 dx} \tag{92}$$

pour toutes les fonctions φ appartenant à la famille \mathcal{F} .

La formule (92) permet le calcul de la pulsation fondamentale avec une très bonne approximation.

Par exemple, dans le cas d'une poutre de section constante dont les extrémités sont articulées, prenons la fonction $\varphi(x) = \ell^3 x - 2 \ell x^3 + x^4$ qui vérifie les conditions aux limites (54) : $\varphi(0) = 0$, $\varphi''(0) = 0$, $\varphi(\ell) = 0$ et $\varphi''(\ell) = 0$. La formule (92) donne $\omega_1 = (c \ell \ell^2) \sqrt{3 \cdot 024/31} = 9,876 \ 7 \ c \ell \ell^2$ qui dépasse d'environ 0,07 pour-cent la valeur exacte $\omega_1 = \pi^2 \ c \ell \ell^2 = 9,869 \ 6 \ c \ell \ell^2$.

Bien entendu, dans le calcul de l'énergie de déformation, il faut tenir compte de l'énergie qui peut éventuellement être emmagasinée dans les appuis. Ainsi, dans le cas d'une poutre située dans un milieu élastique exerçant une densité de force transversale $-kv$, nous avons :

$$W = \frac{1}{2} E \int_P I \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_P kv^2 dx$$

donc $W = \frac{1}{2} (EH + H_1) f^2(t)$ avec $H_1 = \int_P k \varphi^2 dx$

et l'équation (92) doit être remplacée par l'équation :

$$\lambda = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\int_P I \varphi''^2 dx + \frac{1}{E} \int_P k \varphi^2 dx}{\int_P S \varphi^2 dx} \quad (93)$$

Par **exemple**, dans le cas d'une poutre de section constante de longueur ℓ et d'extrémités articulées, placée dans un milieu élastique de module k constant, en prenant $\varphi(x) = \sin(\pi x/\ell)$, nous retrouvons un résultat établi au paragraphe 4.2.3 :

$$\omega_1^2 = \frac{\pi^4}{\ell^4} \left(\frac{EI}{\rho S} \right) + \frac{k}{\rho S}$$

4.6.2 Méthode de Ritz

La méthode de Ritz est une *généralisation de la méthode de Rayleigh*. Elle consiste à choisir pour $\varphi(x)$ une fonction qui dépend de façon linéaire et homogène de n paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x) \quad (94)$$

Les fonctions $\varphi_i(x)$, qui appartiennent à la famille \mathcal{F} , sont linéairement indépendantes, sinon $\varphi(x)$ dépendrait d'un nombre de paramètres inférieur à n . En annulant les dérivées par rapport à α_i de l'expression (92), nous obtenons :

$$\int_P S \varphi^2 dx \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\int_P I \varphi''^2 dx \right) - \int_P I \varphi''^2 dx \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\int_P S \varphi^2 dx \right) = 0$$

soit, compte tenu de l'expression (92) :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[\int_P (I \varphi''^2 - \lambda S \varphi^2) d\varphi \right] = 0$$

Nous obtenons ainsi n équations linéaires et homogènes entre les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Les paramètres ne seront pas tous nuls si et seulement si le déterminant de ces équations est nul. Nous trouvons ainsi une équation algébrique de degré n :

$$\Phi(\lambda) = 0$$

dont nous désignons les racines par $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$. Les valeurs approchées des n premières pulsations propres sont alors :

$$\omega_1 \approx c \sqrt{\lambda'_1}, \quad \omega_2 \approx c \sqrt{\lambda'_2}, \quad \dots, \quad \omega_n \approx c \sqrt{\lambda'_n}$$

Ce sont les premières pulsations propres qui sont obtenues avec la meilleure approximation. À toute racine λ'_i correspond un ensemble de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pour lesquelles la formule (94) donne, à un facteur près, une expression approchée de la fonction X_i . On peut montrer que, si l'on prend $\varphi_i = X_i (i = 1, 2, \dots, n)$, on a :

$$\Phi(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda) \quad \text{avec} \quad \lambda_i = \omega_i^2 / c^2$$

Vibrations des poutres

par Jean COURBON

*Ingénieur Général Honoraire des Ponts et Chaussées
Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées*

Bibliographie

- COURBON (J.). - *Vibrations des poutres*. Annales de l'Institut du Bâtiment et des Travaux Publics (1969).
- TIMOSHENKO (S.). - *Théorème des Vibrations*. Paris et Liège, Béranger, 482 p. (1947).
- DEN HARTOG (J.P.). - *Vibrations mécaniques*. Paris, Dunod, 480 p. (1960).
- ROCARD (Y.). - *Dynamique générale des Vibrations*. Paris, Masson, 325 p. (1943).
-