

# Résistance des matériaux

M. Khelifa

*Cours et exercices*

BTS, DUT, CPGE, Ecoles d'ingénieurs



CASTEILLA

Dr. Mourad KHELIFA

# Résistance des matériaux Cours et exercices corrigés

*BTS, DUT, Classes préparatoires, Écoles d'ingénieurs*

- Aux élèves des écoles post-baccalauréat de Génie Civil
- DUT : Génie Civil - Génie Mécanique
- BTS : Bricolage, Travaux pratiques
- Licences et Masters de Génie Civil
- Aux étudiants des écoles préparant au CAPET de l'Aggrégation
- Aux candidats à la préparation des concours de l'Aggrégation

ISBN : 978-2-7555-2181-1  
© Éditions Castella, 2010 - 9, rue Michel Paré, 78180 Montigny-Le-Raincy  
Site web : <http://www.castella.fr>



Cahiers de la résistance des matériaux

B. Bourgeois, E. Anani

Bac STI, Bac Pro

- Tome 1 : Fondamentaux de la RdM – Statique graphique
- Tome 2 : Extension – Compression – Cisaillement
- Tome 3 : Torsion – Flexion plane

# Résistance des matériaux

## Cours et exercices corrigés

La Résistance des matériaux *RDM* est une partie de la mécanique des solides. Elle s'intéresse à l'étude, de manière théorique, de la réponse mécanique des structures soumises à des sollicitations extérieures (traction, compression, cisaillement, flexion et torsion). Elle permet d'évaluer les efforts internes, les contraintes (normale et tangentielle) ainsi que les déplacements des structures.

Cet ouvrage de *RDM* présente des méthodes de calcul, des formules pratiques illustrant des cas réels de dimensionnement des structures. Les nombreuses illustrations de l'ouvrage montrent en détail les éléments de base à prendre en compte lors du dimensionnement d'une structure quelconque en Génie Civil. Les méthodes analytiques les plus utilisées en calcul des systèmes isostatique et hyperstatique sont développées en détail.

À qui s'adresse cet ouvrage ?

- Aux élèves des sections post-baccalauréat de Génie Civil
- DUT : Génie Civil, Génie Mécanique
- BTS : Bâtiment, Travaux publics
- Licence et Maîtrise de Génie Civil
- Aux premières années élèves-ingénieurs
- Aux candidats à la préparation des concours du CAPET, de l'Agrégation de Génie Civil et de l'Agrégation de Génie Mécanique

ISBN : 978.2.7135.3181.1

© Éditions Casteilla, 2010 - 9, rue Michael Faraday, 78180 Montigny-le-Bretonneux

Site web : <http://www.casteilla.fr>

**DANGER**



LE  
PHOTOCOPIAGE  
TUÉ LE LIVRE

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective" et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, "toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite" (alinéa 1<sup>er</sup> de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

# Sommaire

Notions principales.....	12
Chapitre 1. Généralités sur la résistance des matériaux.....	15
1.1. Objectifs de la résistance des matériaux RDM.....	15
1.2. Notion de poutre.....	15
1.3. Exemples de sollicitations.....	16
1.3.1. Traction/Compression.....	16
1.3.2. Cisaillement.....	17
1.3.3. Flexion.....	17
1.3.4. Torsion.....	18

1.4. Conditions aux limites - Fixation des corps.....	19
1.4.1. Notion d'appui.....	19
1.4.2. Appui simple - Appui glissant.....	19
1.4.3. Appui double - Appui articulé.....	19
1.4.4. Appui triple - Encastrement.....	20
1.5. Équilibre d'un corps.....	21
1.5.1. Équations d'équilibre. Principe fondamental de la statique PFS.....	21
1.5.2. Différents systèmes mécaniques.....	21
1.5.2.1. Système astatique - Mécanisme.....	21
1.5.2.2. Système isostatique.....	22
1.5.2.3. Système hyperstatique.....	22
1.5.3. Application.....	23

1.6. Efforts internes .....	24
1.6.1. Principe de la coupe - Éléments de réduction .....	24
1.6.2. Conventions de signe des efforts internes .....	26
1.6.2.1. Effort normal $N_x$ .....	26
1.6.2.2. Effort tranchant $T_y$ .....	26
1.6.2.3. Moment fléchissant $M_z$ .....	27
1.6.3. Relations entre efforts internes .....	27
1.6.4. Diagrammes des efforts internes .....	29
1.6.5. Application .....	30
1.7. Équation de la déformée .....	35
1.7.1. Calcul de la flèche et de la rotation .....	35
1.7.2. Application .....	35
Chapitre 2. Caractéristiques géométriques des sections planes .....	37
Introduction .....	37
2.1. Centre de gravité .....	37
2.2. Moment statique .....	38
2.3. Application .....	39
2.4. Moment d'inertie .....	40

2.5. Théorème des axes parallèles - Théorème de Huyghens .....	41
2.6. Moment d'inertie et produit d'inertie - Cas de translation d'axes .....	42
2.7. Moment d'inertie et produit d'inertie - Cas de rotation d'axes .....	43
2.8. Application .....	44
Chapitre 3. Sollicitations simples .....	48
Généralités .....	48
3.1. Traction pure - Compression pure .....	48
3.1.1. Effet de l'effort normal .....	50
3.1.1.1. Contrainte normale .....	50
3.1.1.2. Déformation et déplacement .....	51
3.1.2. Condition de résistance .....	52
3.1.3. Application .....	52
3.2. Cisaillement pur .....	55

3.2.1. Effet de l'effort tranchant.....	55
3.2.1.1. Contrainte de cisaillement.....	55
3.2.1.2. Déformation de cisaillement.....	56
3.2.2. Condition de résistance.....	57
3.2.3. Application.....	58
3.3. Flexion pure.....	59
3.3.1. Effet du moment fléchissant.....	60
3.3.1.1. Contrainte normale.....	60
3.3.1.2. Déformation normale.....	62
3.3.2. Condition de résistance.....	63
3.3.3. Application.....	64
3.4. Torsion pure.....	65
3.4.1. Torsion d'une barre circulaire.....	66
3.4.1.1. Observations expérimentales.....	66
3.4.1.2. Effet du moment de torsion.....	67
3.4.2. Torsion d'une barre rectangulaire.....	69
3.4.3. Condition de résistance.....	71
3.4.4. Application.....	71

Chapitre 4. Sollicitations composées.....	73
Généralités.....	73
4.1. Flexion plane.....	74
4.1.1. Contrainte normale.....	75
4.1.2. Contrainte de cisaillement.....	75
4.1.3. Application.....	77
4.1.4. Calcul de la résistance.....	78
4.1.5. Calcul de la rigidité.....	79
4.1.6. Application.....	79
4.2. Flexion déviée.....	82
4.2.1. Contrainte normale.....	83
4.2.2. Contrainte de cisaillement.....	84
4.2.3. Calcul de la résistance.....	84
4.2.4. Calcul de la rigidité.....	85
4.2.5. Application.....	86

4.3. Flexion composée.....	88	5.3. Déplacement d'un système à treillis.....	103
4.3.1. Contrainte normale.....	89	5.4. Application - Étude d'une ferme.....	103
4.3.2. Contrainte de cisaillement.....	90		
4.3.3. Calcul de la résistance.....	90	Chapitre 6. Systèmes hyperstatiques.....	106
4.3.4. Calcul de la rigidité.....	90	Généralités.....	106
4.3.5. Application.....	91	6.1. Poutres continues.....	106
4.4. Flexion-torsion.....	95	6.1.1. Méthode des trois moments - Formules de Clapeyron.....	106
4.4.1. Contrainte normale.....	95	6.1.2. Relations entre efforts internes et moments aux appuis.....	108
4.4.2. Contrainte de cisaillement.....	96	6.1.3. Application - Étude d'une poutre reposant sur quatre appuis.....	109
4.4.3. Calcul de la résistance.....	96	6.2. Méthode des déplacements.....	114
4.4.4. Application.....	97	6.2.1. Principe de la méthode.....	114
Chapitre 5. Systèmes isostatiques à treillis.....	99	6.2.2. Barres soumises à des charges.....	116
Généralités.....	99	6.2.3. Application - Étude d'un portique.....	120
1. Système à treillis.....	100		
5.1.1. Détermination du degré d'hyperstaticité.....	100	Bibliographie.....	125
5.1.2. Exemple.....	101		
2. Calcul des efforts normaux - Méthode des sections.....	102		

## Notations principales

- : aire de la section droite
- : axe neutre
- $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$  : directions principales
- : largeur de la poutre
- : diamètre
- : allongement
- : degré de liberté
- : déplacement
- : droite
- : module d'Young
- : déformation normale suivant la direction x
- : flèche
- $F_x$  : forces suivant les axes x, y et z
- : flèche admissible
- : centre de gravité cdg (ou module de cisaillement)
- : degré d'hyperstaticité
- : hauteur de la poutre
- : moment d'inertie polaire
- : moment d'inertie

- i : nombre d'inconnues
- $I_y$  et  $I_z$  : rayons de giration
- k : coefficient de correction du cisaillement
- l, L : longueur de la poutre (ou de la portée)
- lm : ligne moyenne
- $M_t$  : moment de torsion
- $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_z$  : moments fléchissants autour des axes x, y et z
- $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_z$  : efforts normaux suivant x, y et z
- n : nombre de barres
- P, p : charge concentrée
- q : charge permanente
- R : rayon
- $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$  : réactions suivant les axes x, y et z
- $R_{iF}$  : réaction dans la liaison i sous l'action de la charge appliquée F
- $r_{ij}^u$  : rigidité dans la liaison i sous l'action d'un déplacement unitaire
- $\rho$  : rayon de courbure
- s : coefficient de sécurité
- $S_\Delta$  : moment statique
- (S) : section droite (système hyperstatique)
- (S0) : système isostatique
- $\bar{\sigma}_a$  : résistance admissible du matériau
- $\sigma_c$  : résistance élastique du matériau
- $\sigma_{max}$  : contrainte maximale
- $\sigma_x$  : contrainte normale suivant la direction x
- $T_x$ ,  $T_y$  et  $T_z$  : efforts tranchants suivant x, y et z
- $\tau_{xy}$  : contrainte de cisaillement

# Chapitre 1

## Généralités sur la résistance des matériaux

### 1.1. Objectifs de la résistance des matériaux RDM

La RDM est une partie de la mécanique des solides déformables. Elle s'intéresse à l'étude, de manière théorique, de la réponse mécanique des structures soumises à des sollicitations extérieures (traction, compression, cisaillement, flexion et torsion). Elle permet d'évaluer les efforts internes, les contraintes ainsi que les déplacements et les rotations des structures.

### 1.2. Notion de poutre

Les notions abordées dans ce chapitre ne sont valables que pour des solides ayant une forme de poutre (figure 1.1.), c'est-à-dire un solide pour lequel :

- il existe une ligne moyenne  $lm$ , continue, passant par les centres de gravité des sections du solide ;
- la longueur  $L$  est supérieure ou égale à 5 fois le diamètre  $D$  ;
- il n'existe pas de défauts de variation de section (trous, épaulements) ;
- le solide admet un seul et même plan de symétrie pour le chargement et la géométrie.

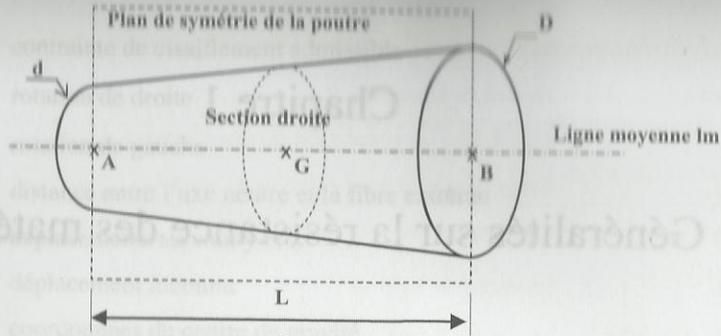


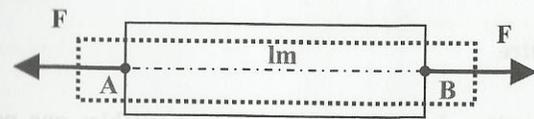
Figure 1.1. Éléments de poutre

## Exemples de sollicitations

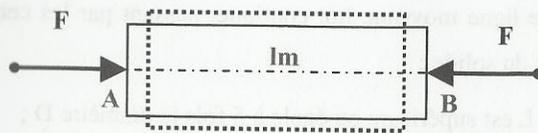
Ces exemples de sollicitations seront traités, en détail, dans le chapitre 3.

### 1. Traction/Compression

Une poutre est sollicitée en **traction** (ou en **compression**) lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux forces égales et opposées, portées par la ligne moyenne  $lm$ .



(a). Traction (allongement)

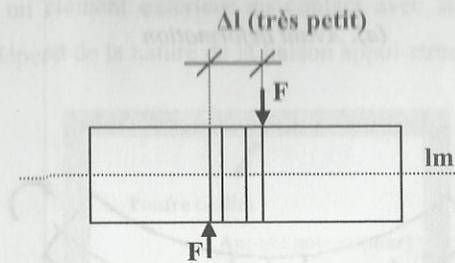


(b). Compression (rétrécissement)

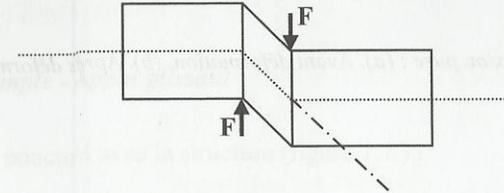
Figure 1.2. Traction/compression : (a). Traction, (b). Compression

### 1.3.2. Cisaillement

La direction du chargement est perpendiculaire à la ligne moyenne  $lm$  de la poutre, figure 1.3.



(a). Avant déformation

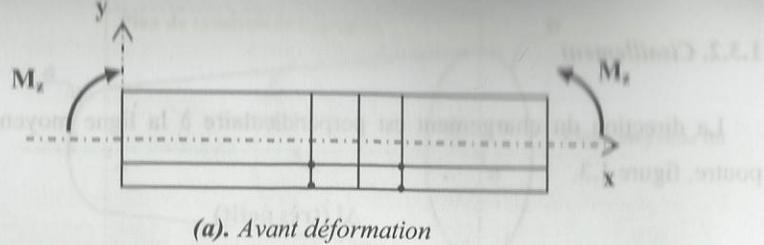


(b). Après déformation

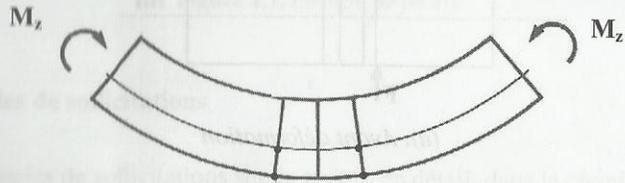
Figure 1.3. Cisaillement pur : (a). Avant déformation, (b). Après déformation

### 1.3.3. Flexion

Le chargement est un moment autour l'axe Z. Le moment  $M_z$  est appelé **moment fléchissant**.



(a). Avant déformation



(b). Après déformation

Figure 1.4. Flexion pure : (a). Avant déformation, (b). Après déformation

#### 1.4. Torsion

Une poutre est sollicitée en **torsion** lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux moments de torsion  $M_t$  **égaux** et **opposés**, portés par la ligne moyenne  $lm$ .

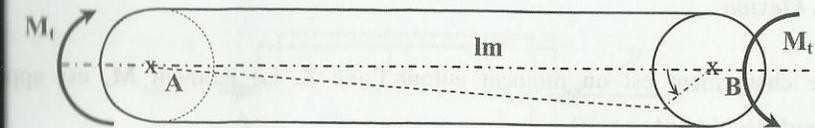


Figure 1.5. Torsion d'une barre circulaire

#### 1.4. Conditions aux limites - Fixation des corps

##### 1.4.1. Notion d'appui

Un appui est un élément extérieur en contact avec la structure étudiée et la réaction d'appui dépend de la nature de la liaison appui-structure.

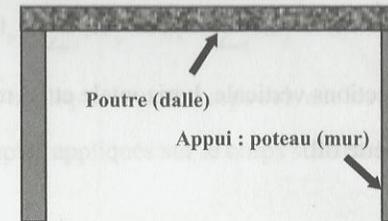


Figure 1.6. Notion d'appui

##### 1.4.2. Appui simple - Appui glissant

Un contact ponctuel avec la structure (figure 1.7.) :

- une inconnue (réaction verticale) ;
- deux degrés de liberté dII (un déplacement suivant x et une rotation).



Figure 1.7. Appui simple

##### 1.4.3. Appui double - Appui articulé

- Deux inconnues (réactions verticale et horizontale) ;
- un dII (une rotation).



Figure 1.8. Appui double

#### 1.4.4. Appui triple - Encastrement

- Trois inconnues (réactions verticale, horizontale et un moment fléchissant) ;
- Pas de degrés de liberté dll.

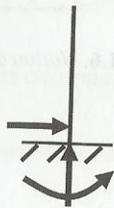


Figure 1.9. Encastrement

### 1.5. Équilibre d'un corps

#### 1.5.1. Équations d'équilibre - Principe fondamental de la statique PFS

Un corps est en équilibre s'il vérifie le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, & \sum F_y = 0, & \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0, & \sum M_y = 0, & \sum M_z = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

$F_x, F_y$  et  $F_z$  : forces appliquées sur le corps suivant les axes  $x, y$  et  $z$  ;

$M_x, M_y$  et  $M_z$  : couples appliqués sur le corps suivant les axes  $x, y$  et  $z$ .

#### 1.5.2. Différents systèmes mécaniques

##### 1.5.2.1. Système astatique - Mécanisme

- Le nombre d'inconnues est inférieur au nombre d'équations ;
- c'est un cas à éviter (système instable).

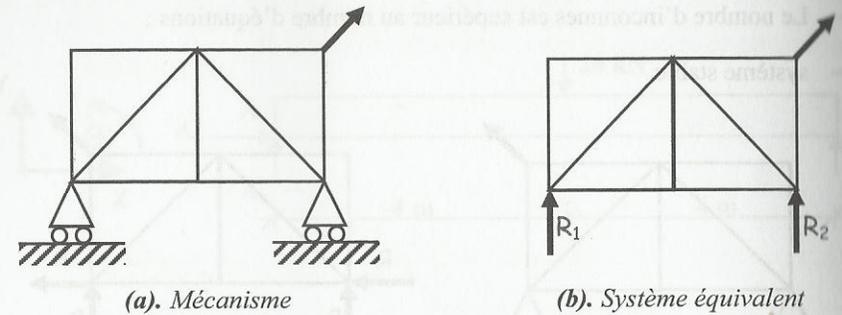


Figure 1.10. Système astatique : (a). Mécanisme, (b). Système équivalent

### 1.5.2.2. Système isostatique

- Le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations ;
- système stable.

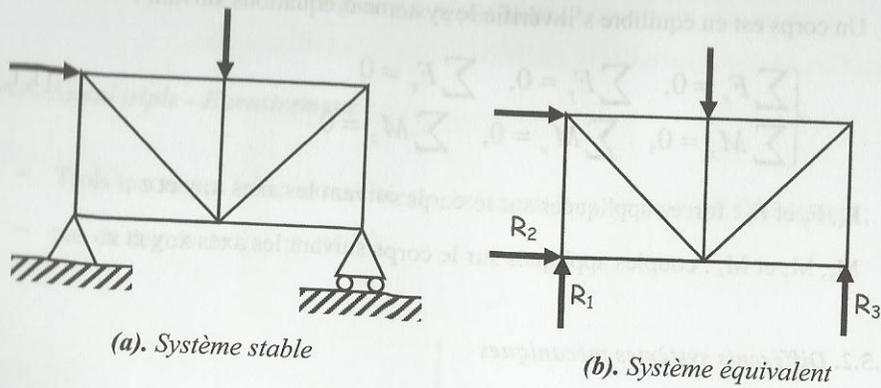


Figure 1.11. Système isostatique : (a). Système stable, (b). Système équivalent

### 1.5.2.3. Système hyperstatique

- Le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations ;
- système stable.

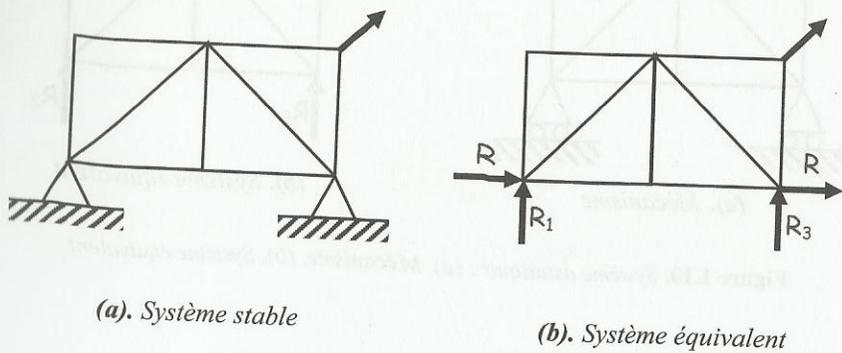


Figure 1.12. Système hyperstatique : (a). Système stable, (b). Système équivalent

### Remarque

Les inconnues (réactions) sont obtenues en exploitant les équations d'équilibre (Principe Fondamental de la Statique PFS, équation [1.1.1]).

### 1.5.3. Application

Déterminer les réactions d'appuis de la poutre reposant sur 2 appuis et chargée comme montrée ci-dessous :

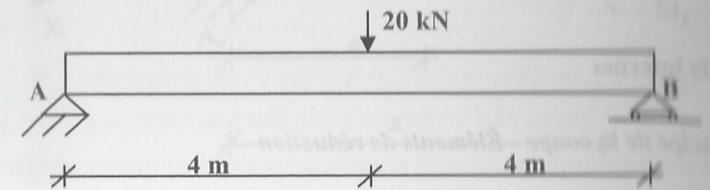


Figure 1.13. Poutre reposant sur deux appuis

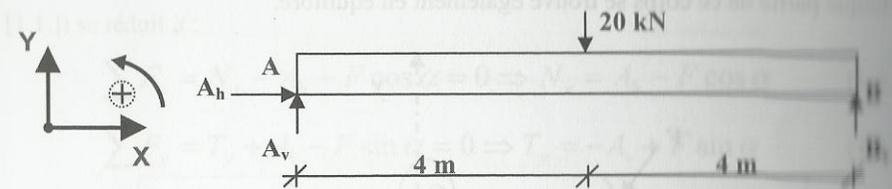


Figure 1.14. Système équivalent

Vérifions les équations d'équilibre [1.1.] :

$$\sum F_x = A_h = 0 \quad [1.1.a]$$

$$\sum F_y = A_v - 20 + B_v = 0 \Rightarrow A_v + B_v = 20 \text{ kN} \quad [1.1.b]$$

$$\sum M_{z/A} = B_v \times 8 - 20 \times 4 = 0 \Rightarrow B_v = 10 \text{ kN} \quad [1.1.c]$$

En substituant la valeur de  $B_v$  dans l'équation [1.1.b], on obtient :  $A_v = 10 \text{ kN}$

Vérification :  $\sum M_{z/B} = -A_v \times 8 + 20 \times 4 = 0$ .

## 1.6. Efforts internes

### 1.6.1. Principe de la coupe - Éléments de réduction

Considérons une poutre chargée comme représentée sur la figure 1.15. D'après le principe de l'action et de la réaction, le corps est en équilibre sous l'action des forces extérieures et des réactions aux appuis (supposées connues). Cependant, chaque partie de ce corps se trouve également en équilibre.

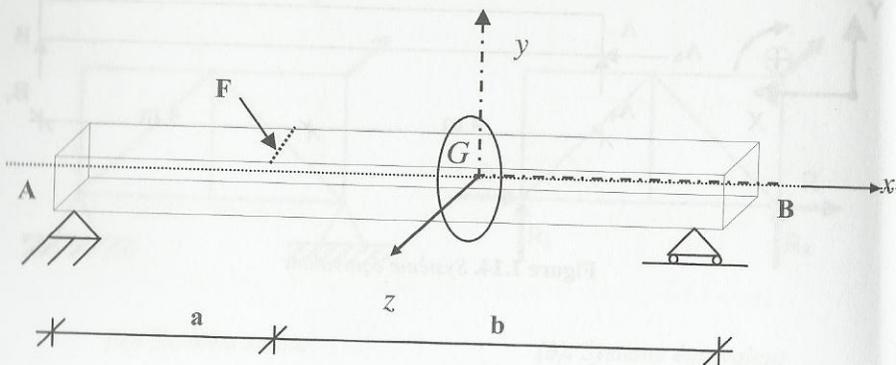


Figure 1.15. Poutre simplement appuyée

Faisons une coupe dans la poutre selon le plan (yoz), de manière à avoir deux sections. Intéressons-nous, par exemple, à la partie gauche de la poutre. La partie gauche est en équilibre sous l'action des sollicitations qui lui sont appliquées, de l'effort externe  $F$ , des réactions verticale et horizontale au point A et de la réaction verticale de la partie de droite supprimée.

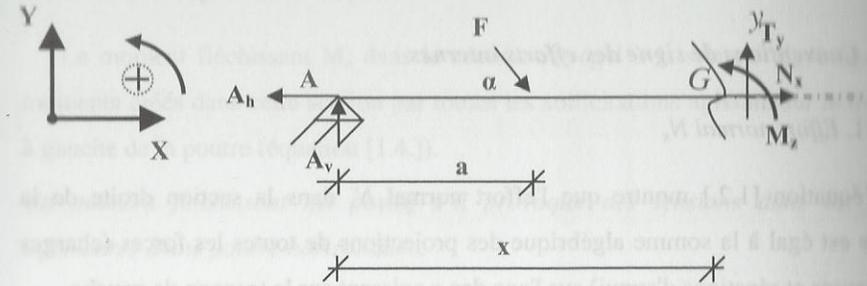


Figure 1.16. Système mécanique équivalent

On suppose que les réactions d'appuis sont connues, le bilan des forces (équation [1.1.]) se réduit à :

$$\sum F_x = N_x - A_h + F \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_x = A_h - F \cos \alpha \quad [1.2.]$$

$$\sum F_y = T_y + A_v - F \sin \alpha = 0 \Rightarrow T_y = -A_v + F \sin \alpha \quad [1.3.]$$

$$\sum M_{z/G} = M_z + F \sin \alpha (x - a) - A_v x = 0 \quad [1.4.]$$

D'où :  $M_z = -F \sin \alpha (x - a) + A_v x$

Les quantités  $N_x$ ,  $T_y$  et  $M_z$  sont appelées efforts internes. En RDM, on utilise plutôt les notations  $N_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_z$  qui désignent respectivement l'effort normal  $N_x$ , les efforts tranchants ( $T_y$  et  $T_z$ ), le moment de torsion  $M_x$  et les moments fléchissants ( $M_y$  et  $M_z$ ).

Les valeurs des efforts internes sont les mêmes qu'on procède de gauche ou de droite.

### 1.6.2. Conventions de signe des efforts internes

#### 1.6.2.1. Effort normal $N_x$

L'équation [1.2.] montre que l'effort normal  $N_x$  dans la section droite de la poutre est égal à la somme algébrique des projections de toutes les forces (charges extérieures et réactions d'appui) sur l'axe des  $x$  agissant sur le tronçon de gauche.

Un effort normal est positif s'il exerce une traction sur la section considérée (figure 1.17.).

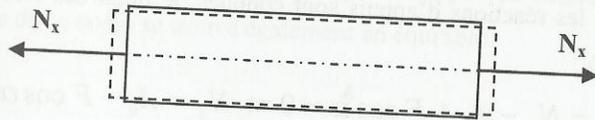


Figure 1.17. Effort normal

#### 1.6.2.2. Effort tranchant $T_y$

L'effort tranchant  $T_y$  dans la section droite de la poutre est égal à la somme algébrique des projections de toutes les forces sur l'axe des  $y$  agissant sur la partie de la poutre située à gauche de la section de coupe (équation [1.3.]).

Un effort tranchant  $T_y$  est positif s'il a tendance à faire tourner la section dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

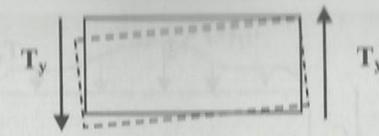


Figure 1.18. Effort tranchant

#### 1.6.2.3. Moment fléchissant $M_z$

Le moment fléchissant  $M_z$  dans la section est égal à la somme algébrique des moments créés dans cette section par toutes les sollicitations agissant sur le tronçon à gauche de la poutre (équation [1.4.]).

Un moment fléchissant est positif s'il provoque des tensions dans les fibres inférieures d'une poutre horizontale.

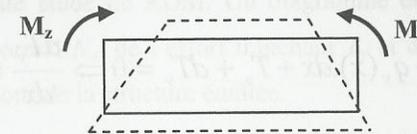


Figure 1.19. Moment fléchissant

### 1.6.3. Relations entre efforts internes

Considérons un système, constitué d'un élément infinitésimal, figure 1.20.

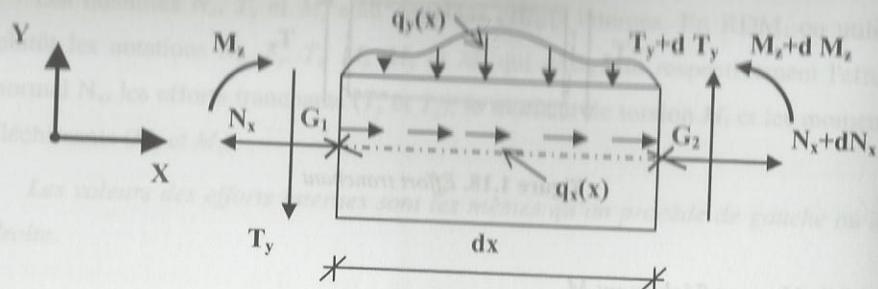


Figure 1.20. Efforts normaux

Vérifions l'équilibre statique de la structure :

$$\sum F_x = -N_x + q_x(x).dx + N_x + dN_x = 0 \Rightarrow \frac{dN_x}{dx} = -q_x(x) \quad [1.5.]$$

$$\sum F_y = -T_y - q_y(x).dx + T_y + dT_y = 0 \Rightarrow \frac{dT_y}{dx} = q_y(x) \quad [1.6.]$$

$$\begin{aligned} \sum M_{z/G_2} &= -M_z + T_y \cdot dx + q_y(x) \cdot \frac{dx}{2} \cdot dx + M_z + dM_z = 0 \\ \Rightarrow T_y &= -\frac{dM_z}{dx} \quad [1.7.] \end{aligned}$$

Le terme de second degré tend vers zéro  $\left[ \frac{dx^2}{2} \rightarrow 0 \right]$ .

Des équations [1.6.] et [1.7.], on arrive à :

$$\frac{dT_y}{dx} = -\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q_y(x) \quad [1.8.]$$

#### Remarques

- Si les charges  $q_x(x)$  et  $q_y(x)$  sont nulles, alors :  $\frac{dN_x}{dx} = \frac{dT_y}{dx} = 0$   
 $N_x$  et  $T_y$  sont des constantes et  $M_z$  varie linéairement.
- Si les charges  $q_x(x)$  et  $q_y(x)$  sont des constantes, alors :  $\frac{dN_x}{dx} = \frac{dT_y}{dx} = k$ ,  $k$  est une constante,  $N_x$  et  $T_y$  varient linéairement et  $M_z$  varie d'une manière quadratique.

#### 1.6.4. Diagrammes des efforts internes

La construction des diagrammes des éléments de réduction constitue une étape essentielle dans toute étude de RDM. Un diagramme est un graphe qui trace la valeur de l'effort normal  $N_x$ , de l'effort tranchant  $T_y$  et du moment fléchissant  $M_z$  dans toutes les sections de la structure étudiée.

Les étapes à suivre pour la construction des diagrammes des efforts internes sont :

- calcul des réactions d'appuis ;
- subdivision de la fibre moyenne en tronçons, définis par un changement brusque de la nature de la sollicitation ou de la direction principale de l'axe de la pièce ;
- choix d'une origine des abscisses (en général l'origine correspond à l'extrémité gauche de la structure) ;
- considérons un point  $P$  de la structure d'abscisse  $x$ , puis calculons en ce point en faisant une coupe et en ne considérant qu'une partie gauche de la structure, les efforts internes  $N_x$ ,  $T_y$  et  $M_z$  ;
- représentation graphique des diverses fonctions de  $N_x$ ,  $T_y$  et  $M_z$ .

Les diagrammes des éléments de réduction permettent de localiser les sections les plus sollicitées (zones de concentration de contraintes) et servent au dimensionnement des différents éléments des structures.

### 1.6.5. Application

Tracer les diagrammes des efforts internes du système suivant :

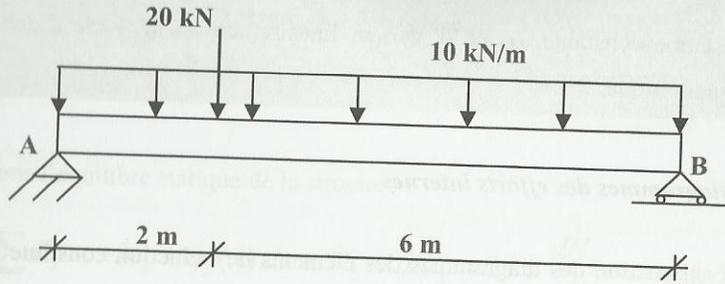


Figure 1.21. Poutre reposant sur deux appuis

Le système équivalent est :

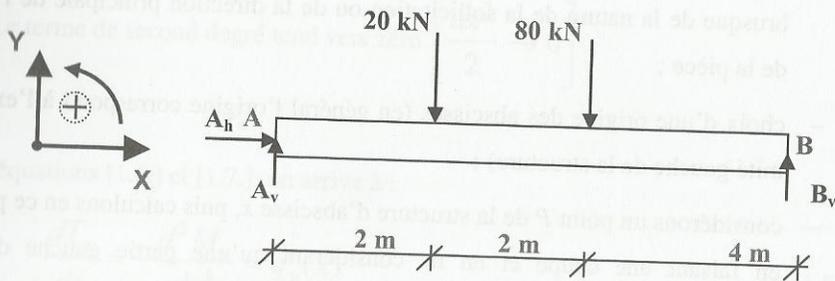


Figure 1.22. Système équivalent

Calcul des réactions d'appuis :

$$\sum F_x = A_h = 0 \quad [1.9]$$

$$\sum F_y = A_v - 20 - 80 + B_v = 0 \Rightarrow A_v + B_v = 100 \text{ kN} \quad [1.10]$$

$$\sum M_{z/A} = -20 \times 2 - 80 \times 4 + B_v \times 8 = 0 \Rightarrow B_v = 45 \text{ kN.m} \quad [1.11]$$

De l'équation [1.10.] :  $A_v = 55 \text{ kN}$

$$\text{Vérification : } \sum M_{z/B} = -55 \times 8 + 20 \times 6 + 80 \times 4 = 0$$

Calcul des efforts internes :

$$\sum F_x = A_h = 0$$

$$\sum F_y = A_v - 20 - 80 + B_v = 0 \Rightarrow A_v + B_v = 100 \text{ kN}$$

$$\sum M_{z/A} = -20 \times 2 - 80 \times 4 + B_v \times 8 = 0 \Rightarrow B_v = 45 \text{ kN.m}$$

De l'équation [1.10.] :  $A_v = 55 \text{ kN}$

$$\text{Vérification : } \sum M_{z/B} = -55 \times 8 + 20 \times 6 + 80 \times 4 = 0$$

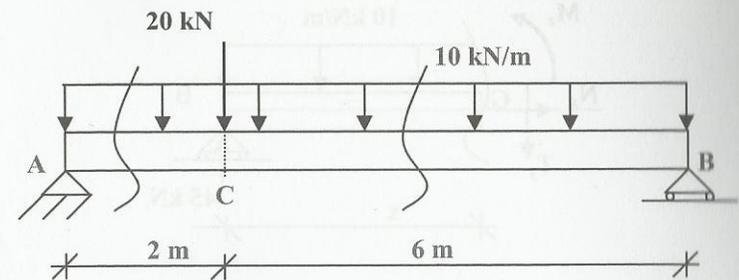


Figure 1.23. Subdivision de la structure en tronçons

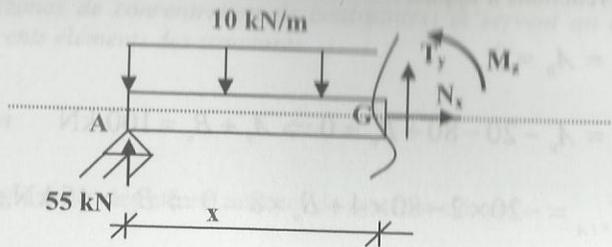


Figure 1.24. Tronçon AC

Faisons l'équilibre du système :

$$\sum F_x = N_x = 0 \quad [1.12.]$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = T_y + 55 - 10x = 0 \\ \Rightarrow T_y = -55 + 10x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow T_y = -55 \text{ kN} \\ x = 2 \text{ m} \rightarrow T_y = -35 \text{ kN} \end{cases} \end{aligned} \quad [1.13.]$$

$$\begin{aligned} \sum M_{z/G} = M_z - 55x + 10 \frac{x^2}{2} = 0 \\ \Rightarrow M_z = 55x - 5x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow M_z = 0 \\ x = 2 \text{ m} \rightarrow M_z = 90 \text{ kN.m} \end{cases} \end{aligned} \quad [1.14.]$$

Tronçon BC

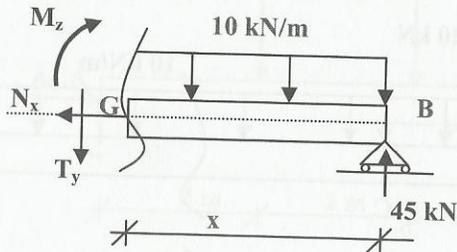


Figure 1.25. Tronçon BC

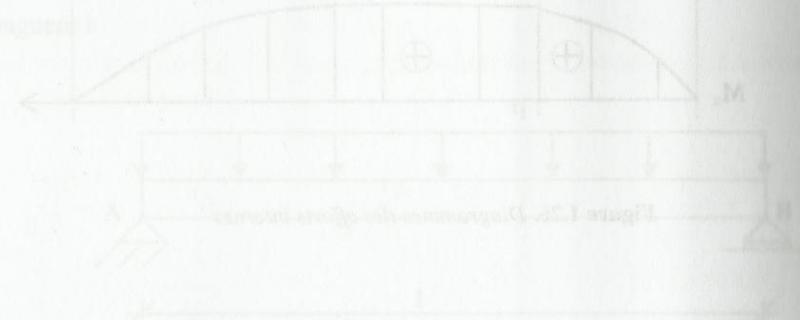
Faisons l'équilibre du système :

$$\sum F_x = N_x = 0 \quad [1.15.]$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = -T_y + 45 - 10x = 0 \\ \Rightarrow T_y = 45 - 10x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow T_y = 45 \text{ kN} \\ x = 6 \text{ m} \rightarrow T_y = -15 \text{ kN} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sum M_{z/G} = M_z - 45x + 10 \frac{x^2}{2} = 0 \quad [1.16.]$$

$$\Rightarrow M_z = 45x - 5x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow M_z = 0 \\ x = 6 \text{ m} \rightarrow M_z = 90 \text{ kN.m} \end{cases} \quad [1.17.]$$



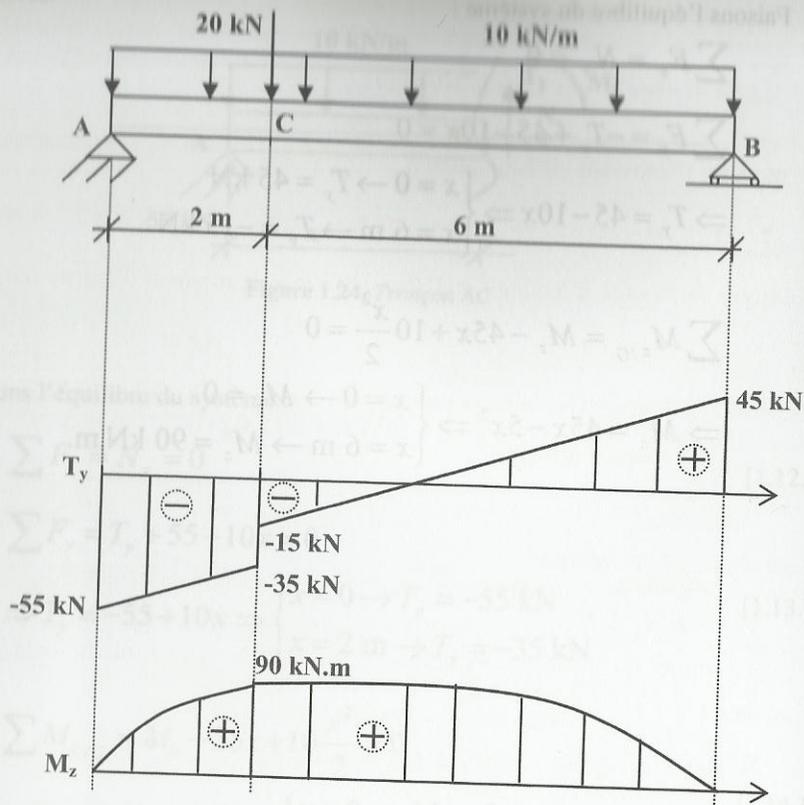


Figure 1.26. Diagrammes des efforts internes

## 1.7. Équation de la déformée

### 1.7.1. Calcul de la flèche et de la rotation

Le moment fléchissant est équivalent à :

$$EI_z \ddot{y} = M_z \quad [1.18.]$$

$E$  désigne le module d'Young (en MPa),  $I_z$  désigne le moment d'inertie (en  $mm^4$ ) et  $\ddot{y}$  la courbure (en  $mm^{-1}$ ).

La flèche  $y$  (en mm) et la rotation  $\dot{y} = \theta$  (en radian) se calculent à partir de l'équation [1.18.] par intégration.

### 1.7.2. Application

Déterminer les rotations aux points A et B et la flèche au milieu de la poutre de longueur  $l$ .

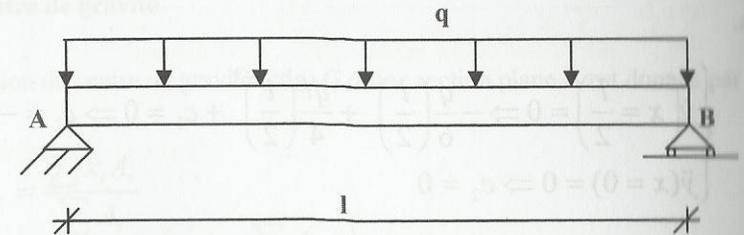


Figure 1.27. Poutre chargée uniformément

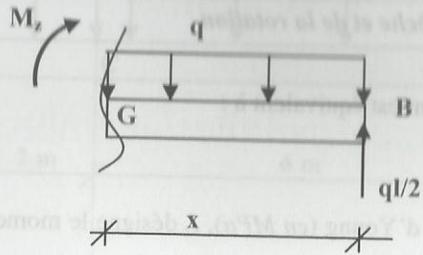


Figure 1.28. Moment fléchissant

L'équation [1.18.] devient :

$$EI \ddot{y} = M_z = -\frac{qx^2}{2} + \frac{ql}{2}x \Rightarrow \begin{cases} EI \dot{y} = -\frac{q}{6}x^3 + \frac{ql}{4}x^2 + c_1 \\ EI y = -\frac{q}{24}x^4 + \frac{ql}{12}x^3 + c_1x + c_2 \end{cases}$$

On détermine les constantes d'intégration  $c_1$  et  $c_2$  en utilisant les conditions aux limites.

$$\begin{cases} \dot{y}\left(x = \frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{q}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{ql}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{ql^3}{24} \\ \ddot{y}(x = 0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{q}{24EI}(-4x^3 + 6lx^2 - l^3) \\ y = \frac{q}{24EI}(-x^4 + 2lx^3 - l^3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_B(x = 0) = \theta_B = -\frac{ql^3}{24EI} \\ \dot{y}_A(x = l) = \theta_A = \frac{ql^3}{24EI} \\ y\left(x = \frac{l}{2}\right) = f_{l/2} = -\frac{5ql^4}{384EI} \end{cases}$$

## Chapitre 2

### Caractéristiques géométriques des sections planes

#### Introduction

Dans cette partie, on s'intéresse au calcul du centre de gravité, du moment d'inertie, du produit d'inertie et du moment statique d'une section plane.

#### 2.1. Centre de gravité

La position du centre de gravité (cdg)  $G$  d'une section plane  $A$  est donnée par :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} \\ y_G = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} \end{cases}, \quad A = \sum A_i \quad (2.1)$$

L'aire totale  $A$  est subdivisée en nombre de  $i$  aires (figure 2.1.).

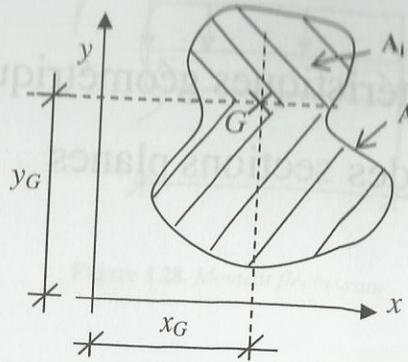


Figure 2.1. Centre de gravité d'une section plane

## 2.2. Moment statique

Le moment statique par rapport à la droite  $(\Delta)$  est donné par :

$$S_{\Delta} = \sum S_{\Delta}^i = \sum \delta_i A_i \quad [2.2.]$$

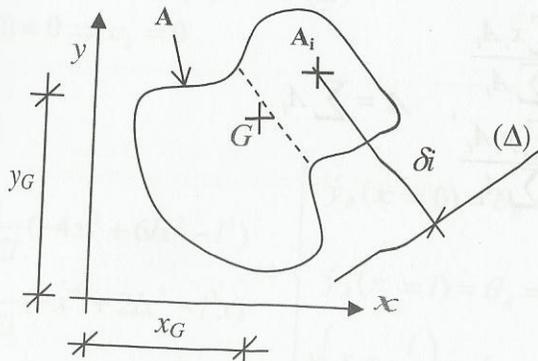


Figure 2.2. Moment statique

Si la section possède un axe de symétrie et le cdg  $G$  appartient à  $(\Delta)$ , le moment statique est nul.

## 2.3. Application

Soit une section rectangulaire partiellement creuse, figure 2.3.

- Déterminer le cdg de la section.
- Déterminer le moment statique par rapport à  $x$ .

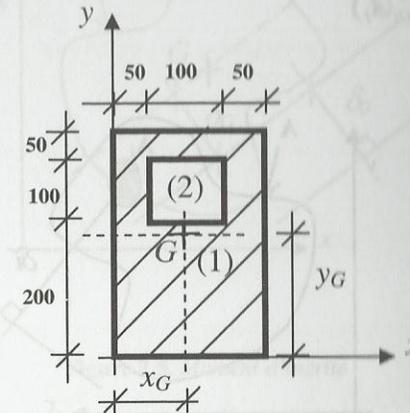


Figure 2.3. Pièce rectangulaire. Dimensions en mm

- Coordonnées du cdg  $G$

Section (1) :  $A_1 = 200 \times 350 = 70\,000 \text{ mm}^2$  ;  $x_1 = 100 \text{ mm}$  ;  $y_1 = 175 \text{ mm}$

Section (2) :  $A_2 = 100 \times 100 = 10\,000 \text{ mm}^2$  ;  $x_2 = 100 \text{ mm}$  ;  $y_2 = 250 \text{ mm}$

$$\text{Éq. [2.1.] : } \begin{cases} x_G = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{100 \times 70\,000 - 100 \times 10\,000}{70\,000 - 10\,000} = 100 \text{ mm} \\ y_G = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{175 \times 70\,000 - 250 \times 10\,000}{70\,000 - 10\,000} = 162,5 \text{ mm} \end{cases}$$

(b). Moment statique par rapport à l'axe  $x$

$$\text{Éq. [2.2.]: } S_x = \sum y_{Gi} A_i = 175 \times 70\,000 - 250 \times 10\,000 = 9\,750\,000 \text{ mm}^3$$

#### 2.4. Moment d'inertie

Le moment d'inertie de l'aire  $A$  par rapport à  $(\Delta)$  est donné par la relation :

$$I_{\Delta} = \sum (I_{Gi} + \delta_{Gi}^2 A_i) \quad [2.3.]$$

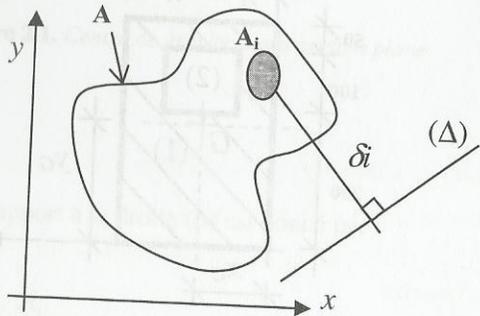


Figure 2.4. Moment d'inertie

Le moment d'inertie est toujours positif.

#### 2.5. Théorème des axes parallèles - Théorème de Huyghens

Le moment d'inertie de l'aire  $A$  par rapport à  $(\Delta)$  est donné par la relation :

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + (2\delta_0 \delta_G + \delta_0^2) A \quad [2.4.]$$

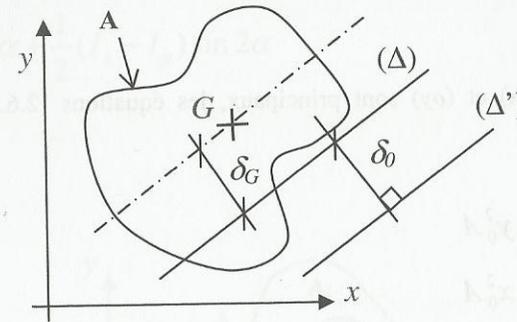


Figure 2.5. Moment d'inertie

Si l'axe  $(\Delta)$  passe par le cdg de la section, l'équation [2.4.] devient :

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + \delta_0^2 A \quad [2.5.]$$

L'équation [2.5.] est l'expression du théorème de Huyghens (la méthode la plus utilisée).

## 2.6. Moment d'inertie et produit d'inertie - Cas de translation d'axes

Les moments d'inertie de l'aire A dans le repère  $(x'O'y')$  sont :

$$I_{x'} = I_x + (2y_0y_G + y_0^2)A \quad [2.6.]$$

$$I_{y'} = I_y + (2x_0x_G + x_0^2)A \quad [2.7.]$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + (x_0y_G + y_0x_G + x_0y_0)A \quad [2.8.]$$

Si les axes  $(ox)$  et  $(oy)$  sont principaux, les équations [2.6.], [2.7.] et [2.8.] se ramènent à :

$$I_{x'} = I_x + y_0^2 A \quad [2.9.]$$

$$I_{y'} = I_y + x_0^2 A \quad [2.10.]$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + x_0y_0 A \quad [2.11.]$$

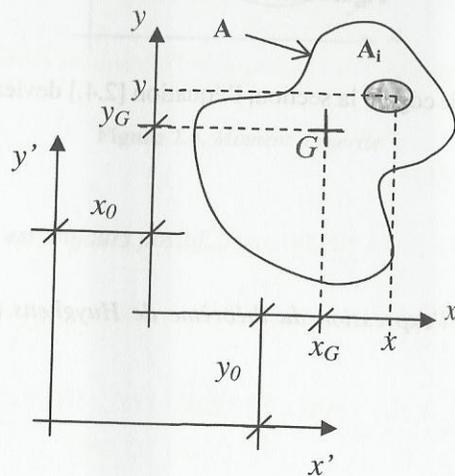


Figure 2.6. Translation d'axes

## 2.7. Moment d'inertie et produit d'inertie - Cas de rotation d'axes

Les moments d'inertie de l'aire A dans le repère  $(x'O'y')$  sont :

$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \quad [2.12.]$$

$$I_{y'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \quad [2.13.]$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\alpha \quad [2.14.]$$

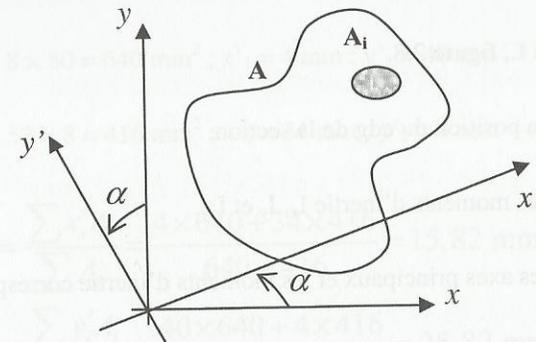


Figure 2.7. Rotation d'axes

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{I_x - I_y}{2}\right]^2 + I_{xy}^2} \quad [2.15.]$$

Directions principales

$$\frac{dI_{x'}}{d\alpha} = -(I_x - I_y) \sin 2\alpha_0 - 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad [2.16.]$$

$\alpha_0$  et  $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$  sont appelées directions principales.

### 2.8. Application

Soit la section en L, figure 2.8.

- Déterminer la position du cdg de la section.
- Déterminer les moments d'inertie  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_{xy}$ .
- Déterminer les axes principaux et les moments d'inertie correspondants.

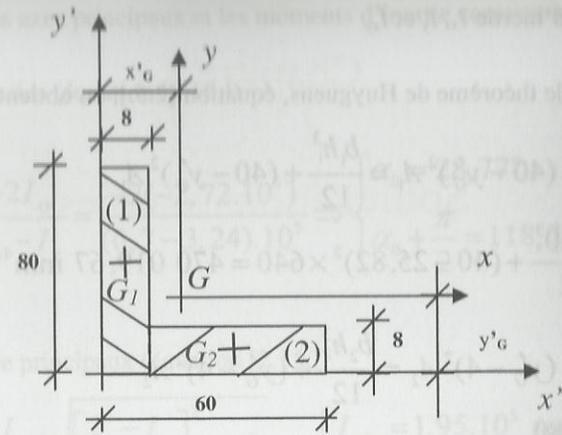


Figure 2.8. Section en L. Dimensions en mm

(a). Coordonnées du cdg G

Section (1) :  $A_1 = 8 \times 80 = 640 \text{ mm}^2$  ;  $x'_1 = 4 \text{ mm}$  ;  $y'_1 = 40 \text{ mm}$

Section (2) :  $A_2 = 52 \times 8 = 416 \text{ mm}^2$  ;  $x'_2 = 34 \text{ mm}$  ;  $y'_2 = 4 \text{ mm}$

$$\text{Éq. [2.1.] : } \begin{cases} x'_G = \frac{\sum x'_i A_i}{\sum A_i} = \frac{4 \times 640 + 34 \times 416}{640 + 416} = 15,82 \text{ mm} \\ y'_G = \frac{\sum y'_i A_i}{\sum A_i} = \frac{40 \times 640 + 4 \times 416}{640 + 416} = 25,82 \text{ mm} \end{cases}$$

(b). Moments d'inertie  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_{xy}$

En appliquant le théorème de Huyguens, équation [2.5.], on obtient :

$$I_x^1 = I_x^1 + (40 - y'_G)^2 A_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + (40 - y'_G)^2 A_1$$

$$I_x^1 = \frac{8 \times 80^3}{12} + (40 - 25,82)^2 \times 640 = 470\,019,67 \text{ mm}^4$$

$$I_x^2 = I_x^2 + (y'_G - 4)^2 A_2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} + (y'_G - 4)^2 A_2$$

$$I_x^2 = \frac{52 \times 8^3}{12} + (25,82 - 4)^2 \times 416 = 200\,281,43 \text{ mm}^4$$

D'où :

$$I_x = I_x^1 + I_x^2 = 6,7 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_y^1 = \frac{80 \times 8^3}{12} + (15,82 - 4)^2 \times 640 = 92\,829,27 \text{ mm}^4$$

$$I_y^2 = \frac{8 \times 52^3}{12} + (34 - 15,82)^2 \times 416 = 231\,231,83 \text{ mm}^4$$

D'où :

$$I_y = I_y^1 + I_y^2 = 3,24 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = I_{xy}^1 + I_{xy}^2 = x_{G1} y_{G1} A_1 + x_{G2} y_{G2} A_2 = -2,72 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

(c). Déterminer les axes principaux et les moments d'inertie correspondants

Directions principales (équation [2.16.])

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{-2(-2,72 \cdot 10^5)}{(6,7 - 3,24) \cdot 10^5} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 28,77^\circ \\ \alpha_0 + \frac{\pi}{2} = 118,77^\circ \end{cases}$$

Moments d'inertie principaux (équation [2.15.])

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{I_x - I_y}{2}\right]^2 + I_{xy}^2} \Rightarrow \begin{cases} I_{\min} = 1,95 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \\ I_{\max} = 8 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

Les axes principaux (I) et (II) sont donnés sur la figure 2.9.

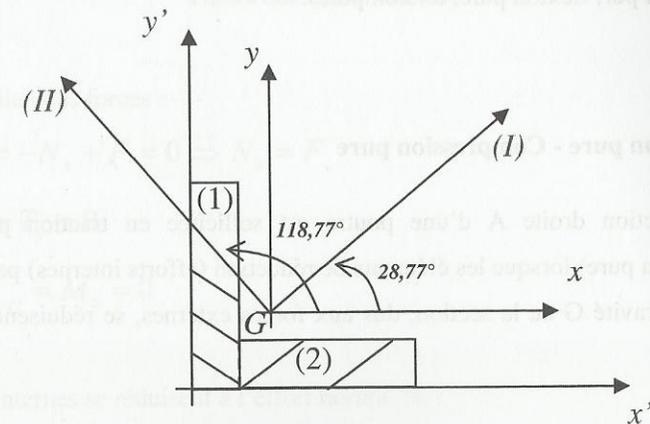


Figure 2.9. Axes principaux

## Chapitre 3

### Sollicitations simples

#### Généralités

Une sollicitation est dite simple si dans une section droite d'une poutre il existe seulement une seule composante d'efforts internes (traction/compression, cisaillement pur, flexion pure, torsion pure).

#### 3.1. Traction pure - Compression pure

Une section droite A d'une poutre est sollicitée en traction pure (ou en compression pure) lorsque les éléments de réduction (efforts internes) par rapport au centre de gravité G de la section, dus aux forces externes, se réduisent à un effort normal  $N_x$ .

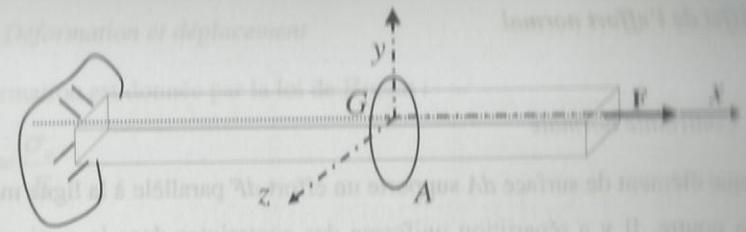


Figure 3.1. Poutre en traction

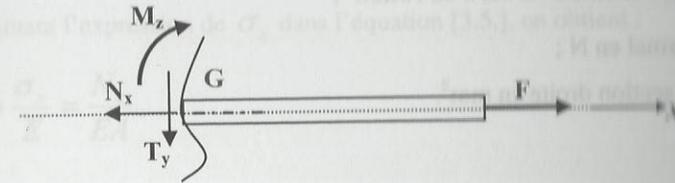


Figure 3.2. Efforts internes

Faisons le bilan des forces :

$$\sum F_x = -N_x + F = 0 \Rightarrow N_x = F \quad (3.1)$$

$$\sum F_y = T_y = 0 \quad (3.2)$$

$$\sum M_{z/G} = M_z = 0 \quad (3.3)$$

Les efforts internes se réduisent à l'effort normal  $N_x$  :

- si l'effort  $N_x$  dirige vers l'extérieur de la section ( $N_x > 0$ ) : *traction pure*
- si l'effort  $N_x$  dirige vers l'intérieur de la section ( $N_x < 0$ ) : *compression pure*

### 3.1.1. Effet de l'effort normal

#### 3.1.1.1. Contrainte normale

Chaque élément de surface  $dA$  supporte un effort  $dF$  parallèle à la ligne moyenne  $lm$  de la poutre. Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} \quad [3.4.]$$

$\sigma_x$  : contrainte normale en MPa ou  $N/mm^2$  ;

$N_x$  : effort normal en N ;

$A$  : aire de la section droite en  $mm^2$ .

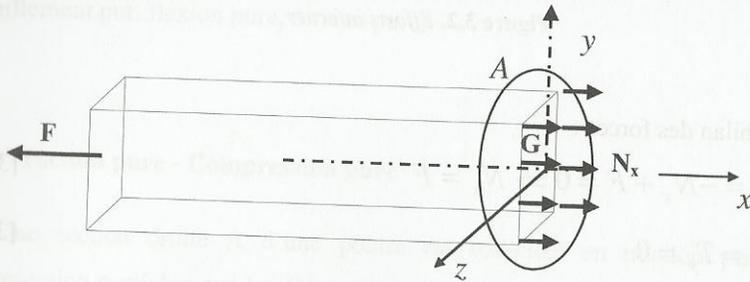


Figure 3.3. Distribution de la contrainte normale

#### 3.1.1.2. Déformation et déplacement

La déformation est donnée par la loi de Hooke :

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad [3.5.]$$

$\epsilon_x$  : déformation normale suivant la direction x ;

$\sigma_x$  : contrainte normale en MPa ou  $N/mm^2$  ;

$E$  : module d'Young en MPa (ou  $N/mm^2$ ).

En substituant l'expression de  $\sigma_x$  dans l'équation [3.5.], on obtient :

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N_x}{EA} \quad [3.6.]$$

L'allongement (déplacement) de la poutre est donné par :

$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N_x}{EA} \Rightarrow \Delta l = \frac{N_x l}{EA} \quad [3.7.]$$

$\Delta l$  : allongement de la poutre en mm ;

$l$  : longueur de la poutre en m (ou en mm).

#### Remarque

Le produit  $EA$  est appelé *rigidité axiale* de la poutre.

### 3.1.2. Condition de résistance

La condition de résistance s'écrit :

$$\sigma_{\max} = \frac{N_x}{A} \leq \bar{\sigma}_a = \frac{\sigma_e}{s} \quad [3.8.]$$

$\sigma_{\max}$  : contrainte maximale en MPa ;

$\bar{\sigma}_a$  : résistance admissible du matériau en MPa ;

$\sigma_e$  : résistance élastique du matériau en MPa ;

$s$  : coefficient de sécurité.

### 3.1.3. Application

Calculer les contraintes et les allongements subis par chacune des barres supportant le corps rigide de section constante et de masse de 3 000 kg.

Les caractéristiques des barres sont :

- Barre (1) :  $E_1 = 70\,000$  MPa ;  $A_1 = 240$  mm<sup>2</sup>

- Barre (2) :  $E_2 = 210\,000$  MPa ;  $A_2 = 180$  mm<sup>2</sup>

Les barres (1) et (2) sont soumises à une traction sous l'effet du poids du bloc.

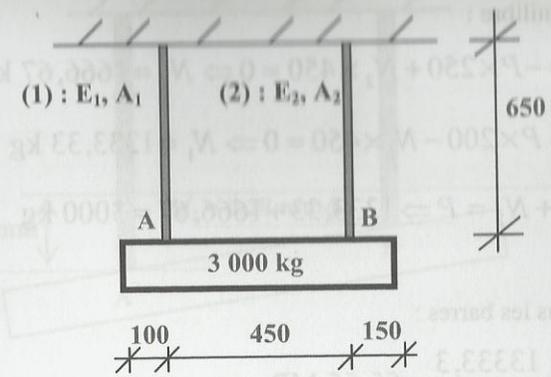


Figure 3.4. Bloc suspendu. Dimensions en mm

On isole le bloc des deux barres (1) et (2).

- On remplace les coupures par des efforts internes (et les efforts extérieurs).
- On vérifie l'équilibre (PFS), on détermine les inconnues du problème.

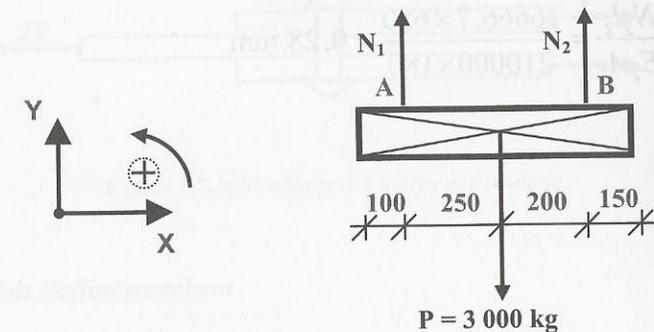


Figure 3.5. Modèle mécanique. Dimensions en mm

Équations d'équilibre :

$$\sum M_{/A} = -P \times 250 + N_2 \times 450 = 0 \Rightarrow N_2 = 1666,67 \text{ kg}$$

$$\sum M_{/B} = P \times 200 - N_1 \times 450 = 0 \Rightarrow N_1 = 1333,33 \text{ kg}$$

Vérifiant :  $N_1 + N_2 = P \Rightarrow 1333,33 + 1666,67 = 3000 \text{ kg}$

Contraintes dans les barres :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{13333,3}{240} = 55,55 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{16666,7}{180} = 92,59 \text{ MPa}$$

Allongements dans les barres :

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{13333,3 \times 650}{70000 \times 240} = 0,52 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{16666,7 \times 650}{210000 \times 180} = 0,28 \text{ mm}$$

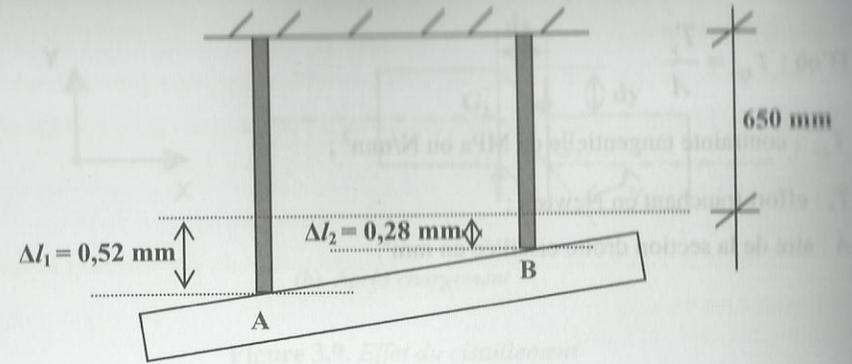


Figure 3.6. Position finale

### 3.2. Cisaillement pur

On dit qu'une section droite A d'une poutre est sollicitée en cisaillement pur lorsque les éléments de réduction par rapport au centre de gravité G (cdg) de la section dus aux forces externes se réduisent au seul effort tranchant  $T_y$ .

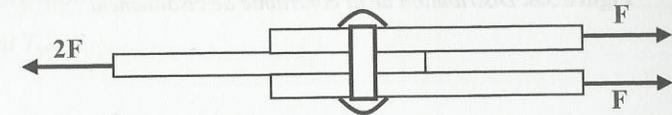


Figure 3.7. Assemblage des pièces par boulons

#### 3.2.1. Effet de l'effort tranchant

##### 3.2.1.1. Contrainte de cisaillement

Chaque élément  $dA$  supporte un effort tranchant  $dT_y$  perpendiculaire à la ligne moyenne  $lm$  de la poutre. Il y a répartition uniforme des contraintes de cisaillement dans la section droite (figure 3.8.).

$$\text{D'où : } \tau_{xy} = \frac{T_y}{A}$$

[3.9.]

$\tau_{xy}$  : contrainte tangentielle en MPa ou N/mm<sup>2</sup> ;

$T_y$  : effort tranchant en Newton ;

$A$  : aire de la section droite cisailée en mm<sup>2</sup>.

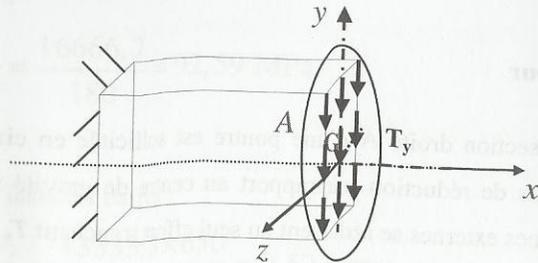
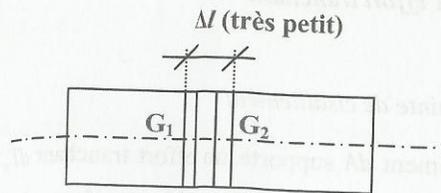


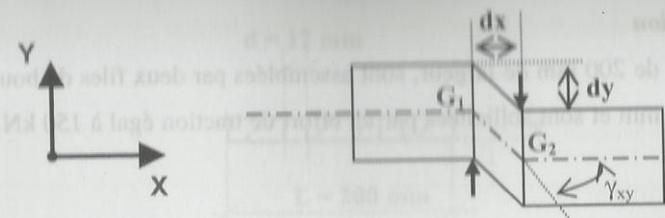
Figure 3.8. Distribution de la contrainte de cisaillement

### 3.2.1.2. Déformation de cisaillement

En déformation élastique, la contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$  varie linéairement en fonction de l'angle de glissement  $\gamma_{xy}$ .



(a). Avant chargement



(b). Après chargement

Figure 3.9. Effet du cisaillement

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{A} = G\gamma_{xy} = G \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{T_y}{GA}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T_y}{GA}$$

[3.10.]

$G$  étant le module de cisaillement.

L'expression [3.10.] est l'équation de la déformation moyenne due à l'effort tranchant  $T_y$ .

### Remarque

Le produit  $GA$  représente la rigidité transversale de la section.

### 3.2.2. Condition de résistance

La condition de résistance s'écrit :

$$\tau_{\max} = \frac{T_y}{A} \leq \bar{\tau} = \frac{\tau_e}{s} \quad [3.11.]$$

$\bar{\tau}$  : contrainte de cisaillement admissible en MPa ;

$s$  : coefficient de sécurité.

### 3.2.3. Application

Deux tôles, de 200 mm de largeur, sont assemblées par deux files de boulons de diamètre de 12 mm et sont sollicitées par un effort de traction égal à 150 kN (figure 3.10.).

Vérifier la résistance et en déduire l'épaisseur minimale des pièces et le nombre de boulons nécessaires.

Données :  $\sigma_e = 240 \text{ MPa}$  ;  $\tau_e = 160 \text{ MPa}$  et  $s = 1,7$  (coefficient de sécurité).

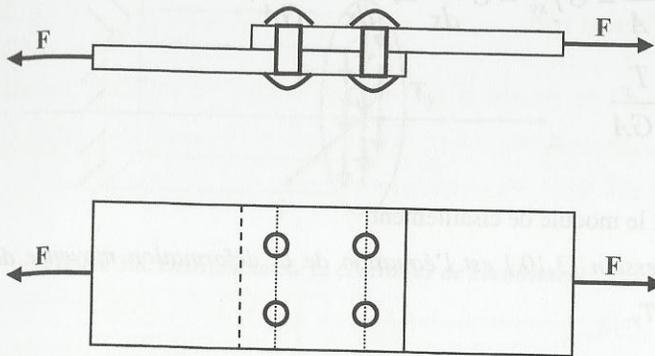


Figure 3.10. Distribution des boulons

Contraintes admissibles

Contrainte normale admissible : 
$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_e}{s} = \frac{240}{1,7} = 141,2 \text{ MPa}$$

Contrainte de cisaillement admissible : 
$$\bar{\tau} = \frac{\tau_e}{s} = \frac{160}{1,7} = 94,2 \text{ MPa}$$

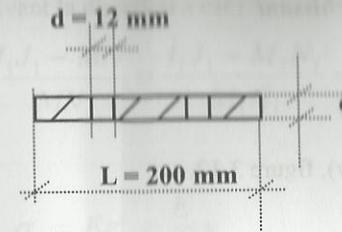


Figure 3.11. Section cisailée

Aire de la section droite :  $A = (l - 2(d+2)) \times e = (200 - 2(12 + 2)) \times e = 172e$

Calcul de l'épaisseur de la pièce

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \bar{\sigma} \Leftrightarrow \frac{150\,000}{172e} \leq 141,2 \Rightarrow e \geq \frac{150\,000}{172 \times 141,2} = 6,17 \text{ mm}$$

On prend  $e = 8 \text{ mm}$ .

Nombre de boulons nécessaires

Aire de la section cisailée par boulon :

$$A_b = \frac{\pi}{4} (d + 2)^2 = \frac{\pi}{4} 14^2 = 153,94 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{F}{A} \leq \bar{\tau} = \frac{\tau_e}{s} \Leftrightarrow \frac{150\,000}{153,94 \times n} \leq 94,2 \Rightarrow n \geq \frac{150\,000}{153,94 \times 94,2} = 10$$

On prend 12 boulons. Il existe 2 files. Il faut 6 boulons par file.

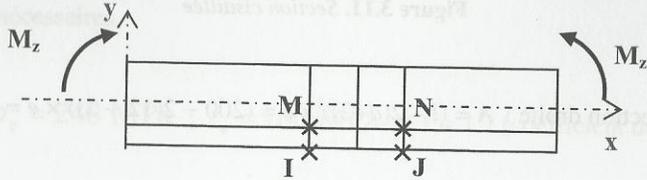
### 3.3. Flexion pure

On appelle une flexion pure l'effet produit dans les sections droites d'une poutre par un moment fléchissant  $M_z$ . Les autres efforts internes (normal et tranchant) sont nuls.

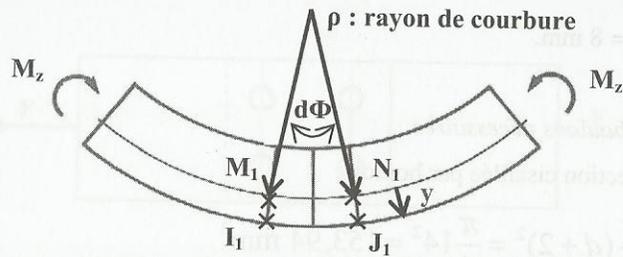
### 3.3.1. Effet du moment fléchissant

#### 3.3.1.1. Contrainte normale

La flexion dans le plan (xoy), figure 3.12.



(a). Avant chargement



(b). Après chargement

Figure 3.12. Poutre en flexion

La déformation axiale suivant la direction  $x$  est :

$$\varepsilon_x = \frac{I_1 J_1 - IJ}{IJ} = \frac{I_1 J_1 - MN}{MN} = \frac{I_1 J_1 - M_1 N_1}{M_1 N_1} = \frac{(\rho + y)d\phi - \rho d\phi}{\rho d\phi} = \frac{y}{\rho} \quad (3.12)$$

D'après la loi de Hooke :  $\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{E}{\rho} y$  (3.13)

Étudions l'équilibre de la section :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} y_G A = 0 \quad (3.14)$$

(L'axe neutre AN passe par le cdg de la section.)

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x z dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A yz dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} I_{yz} = 0 \quad (3.15)$$

(Les axes  $y$  et  $z$  sont principaux centraux.)

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_z - \int_A \sigma_x y dA = 0 \Rightarrow \quad (3.16)$$

$$M_z = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA \Rightarrow M_z = \frac{E}{\rho} I_z \Rightarrow \rho = \frac{E}{M_z} I_z$$

En substituant  $\rho$  dans l'expression de  $\sigma_x$ , on trouve :

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \quad (3.17)$$

$I_z$  étant le moment quadratique de la poutre.

### Remarques

- L'expression de la contrainte normale  $\sigma_x$  donne les valeurs de contraintes aux différents points de la section transversale et sont normales à celle-ci ;
- les contraintes normales varient linéairement suivant  $y$  ;
- les contraintes normales sont maximales aux fibres extrêmes inférieure et supérieure de la poutre et elles s'annulent sur l'axe neutre AN de la poutre.

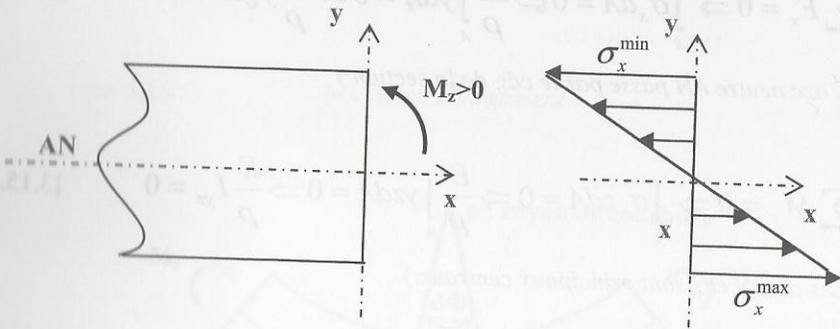


Figure 3.13. Distribution de la contrainte normale dans l'épaisseur de la poutre

#### 3.3.1.2. Déformation normale

D'après la loi de Hooke :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{M_z}{EI_z} y \quad [3.18.]$$

#### 3.3.2. Condition de résistance

La condition de résistance s'écrit :

$$\sigma_x^{\min} = \frac{M_z}{I_z} |v_1| \leq \sigma_{adm}^c \quad [3.19.]$$

$$\sigma_x^{\max} = \frac{M_z}{I_z} |v_2| \leq \sigma_{adm}^t \quad [3.20.]$$

$v_1$  : distance entre l'axe neutre et la fibre la plus tendue ;

$v_2$  : distance entre l'axe neutre et la fibre la plus comprimée ;

$\sigma_{adm}^c$  : contrainte admissible due à la compression ;

$\sigma_{adm}^t$  : contrainte admissible due à la traction.

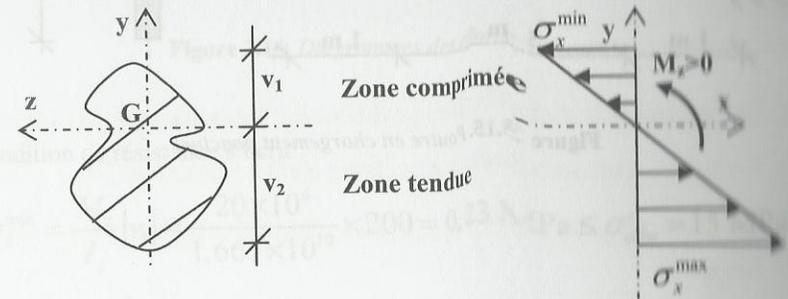


Figure 3.14. Distribution de la contrainte normale dans une section quelconque

### 3.3.3. Application

Vérifier la résistance de la poutre entre les deux charges de la poutre suivante :

Données :

$\sigma_{adm}^c = 15 \text{ MPa}$  : contrainte admissible à la compression ;

$\sigma_{adm}^t = 3 \text{ MPa}$  : contrainte admissible à la traction ;

$I_z = 1,667 \times 10^{10} \text{ mm}^4$ .

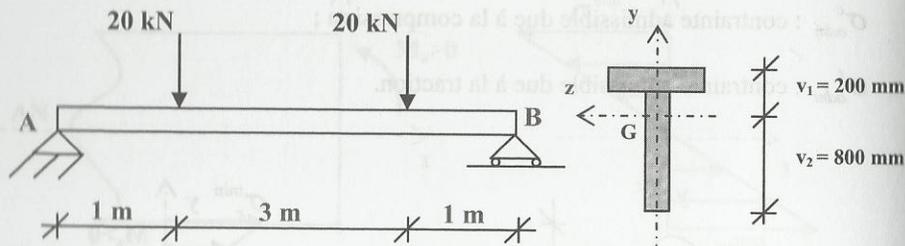


Figure 3.15. Poutre en chargement ponctuel

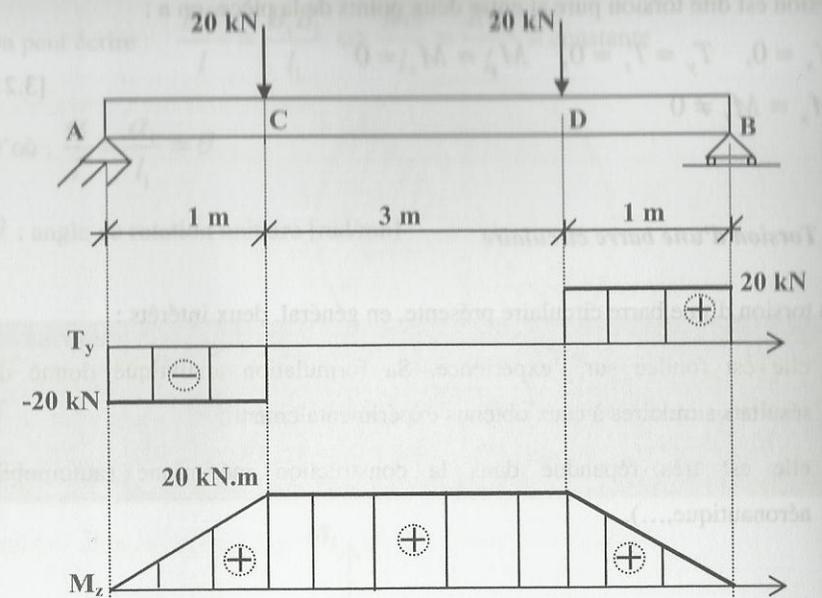


Figure 3.16. Diagrammes des efforts internes

La condition de résistance s'écrit :

$$\sigma_x^{\min} = \frac{M_z}{I_z} |v_1| = \frac{20 \times 10^6}{1,667 \times 10^{10}} \times 200 = 0,23 \text{ MPa} \leq \sigma_{adm}^c = 15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^{\max} = \frac{M_z}{I_z} |v_2| = \frac{20 \times 10^6}{1,667 \times 10^{10}} \times 800 = 0,959 \leq \sigma_{adm}^t = 3 \text{ MPa}$$

La condition de résistance est vérifiée.

### 3.4. Torsion pure

On appelle torsion l'effet produit par un moment de torsion  $M_t$  dans une section droite d'une poutre.

La torsion est dite torsion pure si entre deux points de la pièce, on a :

$$\begin{aligned} N_x = 0, \quad T_y = T_z = 0, \quad M_y = M_z = 0 \\ M_x = M_t \neq 0 \end{aligned} \quad [3.21.]$$

### 3.4.1. Torsion d'une barre circulaire

La torsion d'une barre circulaire présente, en général, deux intérêts :

- elle est fondée sur l'expérience. Sa formulation analytique donne des résultats similaires à ceux obtenus expérimentalement ;
- elle est très répandue dans la construction mécanique (automobile, aéronautique,...).

#### 3.4.1.1. Observations expérimentales

- La longueur et le diamètre de la poutre restent constants après déformation.
- Les lignes génératrices restent rectilignes après déformation.
- Les surfaces planes restent planes après déformation (hypothèses de Bernoulli).

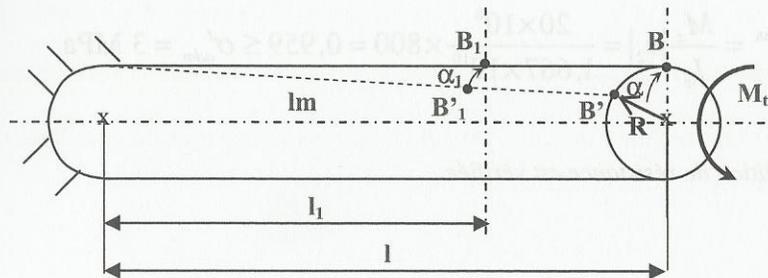


Figure 3.17. Torsion d'une barre circulaire

On peut écrire :  $\frac{BB'}{l} = \frac{B_1B'_1}{l_1} \Leftrightarrow \frac{R\alpha}{l} = \frac{R\alpha_1}{l_1} = \text{constante}$

D'où :  $\frac{\alpha}{l} = \frac{\alpha_1}{l_1} = \theta$  [3.22.]

$\theta$  : angle de rotation unitaire [rad/mn]

#### Remarque

C'est l'angle de rotation unitaire  $\theta_e$  qui provoque l'écoulement du matériau (figure 3.18.).

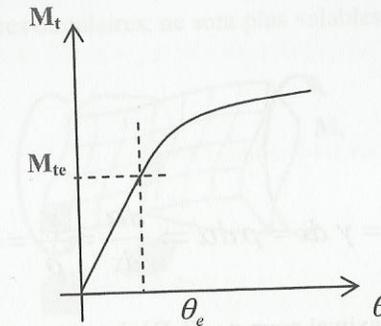


Figure 3.18. Moment de torsion-angle de rotation

#### 3.4.1.2. Effet du moment de torsion

Dans une section circulaire, on admet que les contraintes de cisaillement sont tangentes aux cercles concentriques (figure 3.19.)

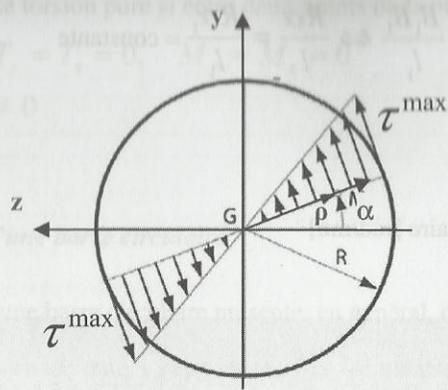


Figure 3.19. Contraintes de cisaillement dues à la torsion

On peut écrire :

$$BB' = \rho d\alpha$$

$$\frac{BB'}{dx} = \gamma \Rightarrow BB' = \gamma dx = \rho d\alpha \Rightarrow \frac{d\alpha}{dx} = \frac{\gamma}{\rho} = \theta \Rightarrow \gamma = \rho\theta \quad [3.23.]$$

Le glissement  $\gamma$  est maximal pour  $\rho = R$ . D'où :  $\gamma_{\max} = R\theta$

D'après la loi de Hooke :

$$\tau = G\gamma = G\rho\theta \Rightarrow \tau_{\max} = G\gamma_{\max} = G R\theta \quad [3.24.]$$

Efforts dus à la torsion

$$dF = \tau dA$$

$$M_t = \int_A \rho dF = \int_A \rho \tau dA = \int_A \rho G \rho \theta dA = G\theta \int_A \rho^2 dA = G\theta I_0 \quad [3.25.]$$

$$\text{Pour une barre circulaire : } I_0 = \frac{\pi}{32} d^4 \quad [3.26.]$$

$I_0$  : moment d'inertie polaire

$d$  : diamètre de la barre

$$M_t = G\theta I_0 \Rightarrow G\theta = \frac{M_t}{I_0} \Rightarrow \tau = \frac{M_t}{I_0} \rho \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_t}{I_0} R \quad [3.27.]$$

### 3.4.2. Torsion d'une barre rectangulaire

Dans le cas des pièces prismatiques, l'hypothèse de Bernoulli (les sections droites restent planes après déformations) n'est pas vérifiée. Donc les formules établies dans le cas de barres circulaires, ne sont plus valables.

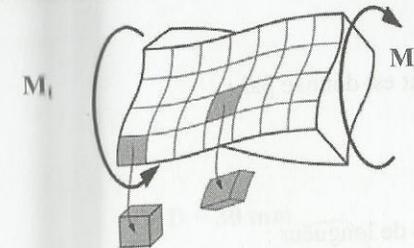


Figure 3.20. Torsion d'une pièce prismatique

L'étude de la torsion de barres prismatiques à section pleine est basée sur la méthode de Saint-Venant.

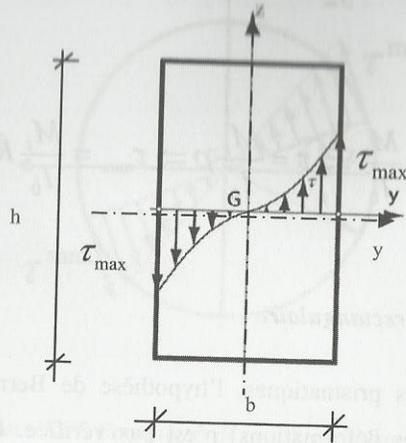


Figure 3.21. Distribution de la contrainte de cisaillement

La condition de cisaillement est donnée par :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha(hb^2)} \quad [3.28.]$$

L'angle de torsion par unité de longueur :

$$\theta = \frac{M_t}{\beta G(hb^3)} \quad [3.29.]$$

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont fonction des caractéristiques géométriques  $m = \frac{h}{b}$ .

m	1	2,5	5	10	20	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,258	0,292	0,313	0,323	0,333
$\beta$	0,141	0,249	0,292	0,313	0,323	0,333

Tableau 3.1. Quelques valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $m$

### 3.4.3. Condition de résistance

La condition de résistance s'écrit :  $\tau_{\max} \leq \bar{\tau}$  [3.30.]

La condition de rigidité s'écrit :  $\theta_{\max} \leq \bar{\theta}$  [3.31.]

### 3.4.4. Application

Soit un tube ( $D, d$ ), de longueur  $l = 1,5$  m, encastré à l'une de ces extrémités et soumis à un moment de torsion  $M_t = 1,5$  kN.m à l'autre (figure 3.22.).

Déterminer la contrainte de cisaillement maximale et la rotation de l'extrémité libre.

Données :

$D = 30$  mm ;

$d = 25$  mm ;

$G = 80\,000$  MPa.

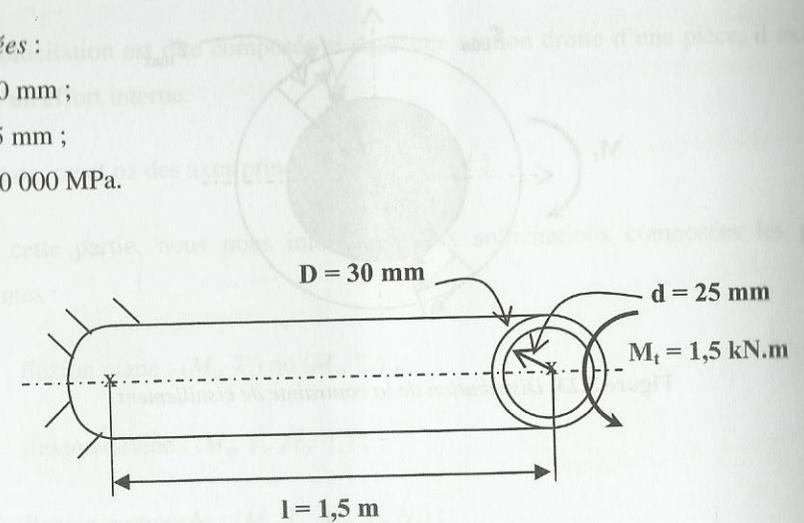


Figure 3.22. Tube circulaire en torsion

Le moment d'inertie polaire

$$I_0 = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32} (30^4 - 25^4) = 41\,151,2 \text{ mm}^4$$

La contrainte de cisaillement maximale

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_0} R = \frac{1,5 \times 10^6}{41\,151,2} \times \frac{30}{2} = 546,76 \text{ MPa}$$

La contrainte de cisaillement minimale

$$\tau_{\min} = \frac{M_t}{I_0} \frac{d}{2} = \frac{1,5 \times 10^6}{41\,151,2} \times \frac{25}{2} = 455,64 \text{ MPa}$$

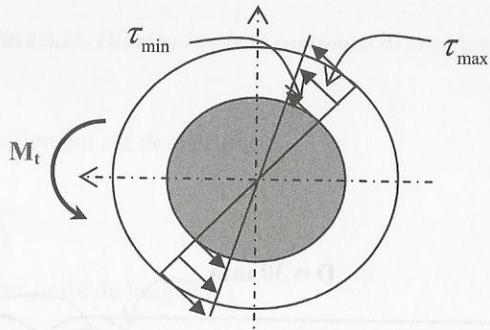


Figure 3.23. Distribution de la contrainte de cisaillement

## Chapitre 4

### Sollicitations composées

#### Généralités

Une sollicitation est dite composée si dans une section droite d'une pièce, il existe plus d'un effort interne.

Soient  $ox$ ,  $oy$  et  $oz$  des axes principaux (figure 4.1.).

Dans cette partie, nous nous intéressons aux sollicitations composées les plus courantes :

- flexion plane :  $(M_z, T_y)$  ou  $(M_y, T_z)$  ;
- flexion déviée :  $(M_z, T_y, M_y, T_z)$  ;
- flexion composée :  $(M_z, T_y, M_y, T_z, N_x)$  ;
- flexion-torsion :  $(M_z, T_y, M_x)$  ou  $(M_y, T_z, M_x)$ .

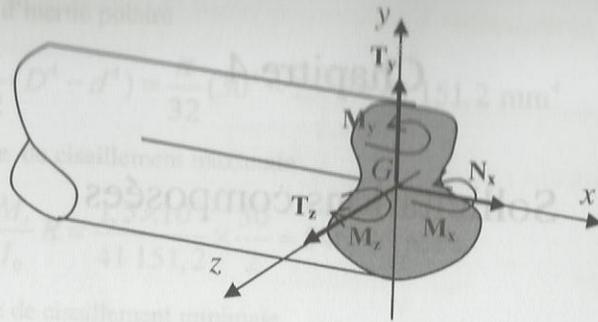


Figure 4.1. Efforts internes

#### 4.1. Flexion plane

Une flexion est dite plane si dans une section droite de la pièce, il existe deux composantes d'efforts internes :

- dans le plan (xoy) : ( $M_z$ ,  $T_y$ ), figure 4.2.a ;
- dans le plan (xoz) : ( $M_y$ ,  $T_z$ ), figure 4.2.b.

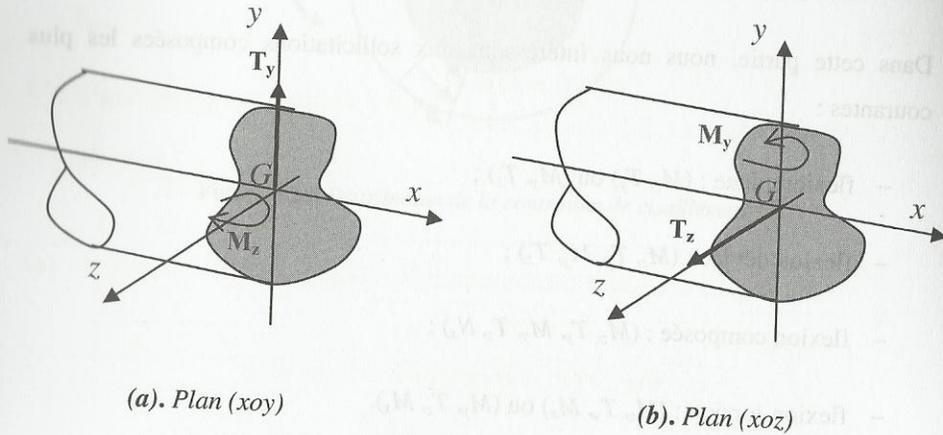


Figure 4.2. Flexion plane

#### Remarques

- Les forces extérieures appartiennent à l'un des plans principaux d'inertie.
- Les forces externes sont perpendiculaires à l'axe x.
- La section transversale admet un axe de symétrie.

#### 4.1.1. Contrainte normale

Considérons un plan de charges (xoy).

La contrainte normale est donnée par :

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \quad (4.1)$$

L'équation [4.1.] est équivalente à l'équation [3.17.], chapitre 3.

#### 4.1.2. Contrainte de cisaillement

Soit un élément de longueur  $dx$  infiniment petit de la pièce, figure 4.3.

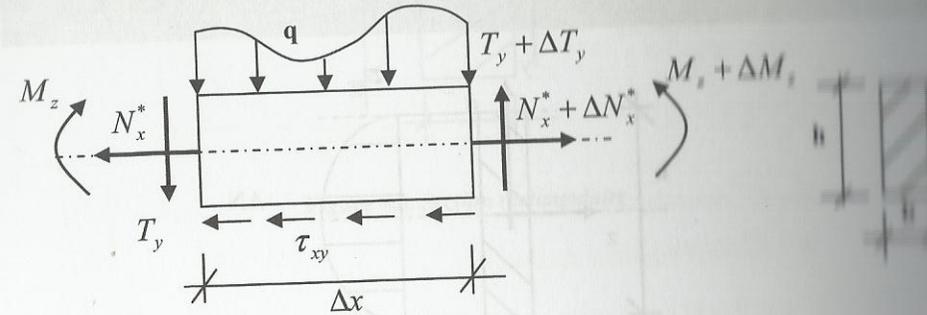


Figure 4.3. Élément de poutre

Faisons l'équilibre des efforts suivant l'axe  $x$  :

$$N_x^* + \Delta N_x^* - N_x^* - \tau_{xy} b \Delta x = 0 \Rightarrow \Delta N_x^* = \tau_{xy} b \Delta x \quad [4.2.]$$

$$N_x^* = \int \sigma_x dA = \int \frac{M_z}{I_z} y dA = \frac{M_z}{I_z} \int y dA = \frac{M_z}{I_z} S_z \quad [4.3.]$$

D'où :

$$\Delta N_x^* = \frac{\Delta M_z}{I_z} S_z = \frac{T_y \Delta x}{I_z} S_z = \tau_{xy} b \Delta x$$

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{b} \frac{S_z}{I_z} \quad [4.4.]$$

$S_z$  et  $I_z$  sont les moments statique et d'inertie de la section considérée, respectivement. L'équation [4.4.], donnant l'expression de la contrainte de cisaillement, est la formule de *Jourawski*.

#### Remarques

- $\tau_{xy}$  est fonction de l'effort tranchant  $T_y$  ;
- $\tau_{xy}$  s'annule sur les fibres extrêmes.

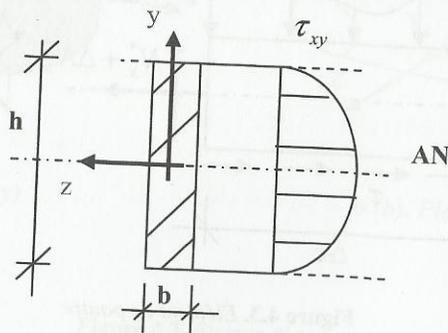


Figure 4.4. Distribution de la contrainte de cisaillement

Pour les sections courantes, l'équation [4.4.] se réduit à :

$$\tau_{xy} = k \frac{T_y}{A} \quad [4.5.]$$

$k = \frac{3}{2}$  pour le cas des sections rectangulaires ;

$k = \frac{4}{3}$  pour le cas des sections circulaires.

$A$  est la section transversale de la poutre.

#### 4.1.3. Application

Déterminer l'expression de la contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$  en fonction de l'effort tranchant  $T_y$  d'une pièce rectangulaire de dimensions  $(bxh)$ , figure 4.5.

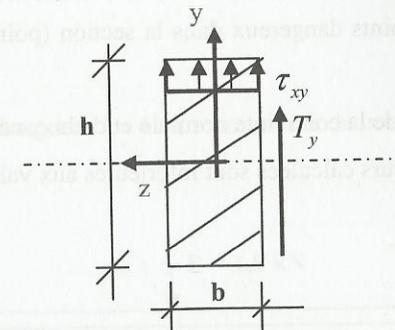


Figure 4.5. Section rectangulaire

Calculons le moment statique et le moment d'inertie de la section transversale :

$$S_z = \left(\frac{h}{2} - y\right)b \left(y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right) = \frac{b}{8}(h^2 - 4y^2)$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

En substituant la valeur de  $S_z$  et de  $I_z$  dans l'expression [4.4.], on obtient :

$$\tau_{xy} = \frac{3T_y}{2A} \left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right)$$

#### 4.1.4. Calcul de la résistance

Les étapes du calcul à la résistance sont :

- déterminer les sections dangereuses (zones où les efforts internes sont maximum) ;
- déterminer les points dangereux dans la section (points les plus éloignés de l'axe neutre) ;
- évaluer la valeur de la contrainte normale et de la contrainte de cisaillement ;
- vérifier si les valeurs calculées sont inférieures aux valeurs admissibles ;

$$\begin{cases} \sigma_x \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_e}{s} \\ \tau_{xy} \leq \bar{\tau} \end{cases} \quad [4.6.]$$

$\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\tau}$  : contraintes admissibles du matériau ;

$\sigma_e$  : limite d'élasticité du matériau ;

$s$  : coefficient de sécurité.

= Vérification d'un critère de rupture (cas d'un matériau ductile) :

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq \bar{\sigma} \quad (\text{Critère de Von Mises}) \quad [4.7.]$$

#### 4.1.5. Calcul de la rigidité

= Le calcul de la flèche se fait en utilisant l'équation différentielle de la ligne élastique, équation [1.18.] :

$$EI_z \frac{d^2 f}{dx^2} = M_z \quad [4.8.]$$

- La flèche maximale doit satisfaire la condition :

$$f \leq \bar{f} \quad [4.9.]$$

$$\bar{f} = \frac{l}{150} \div \frac{l}{1000}, \quad l \text{ étant la portée de la poutre et } \bar{f} \text{ étant la flèche admissible.}$$

- La vérification à la flèche s'effectue après la vérification à la résistance.

#### 4.1.6. Application

Soit une poutre, de longueur  $l = 4$  m, reposant sur deux appuis et chargée comme le montre la figure 4.6. :

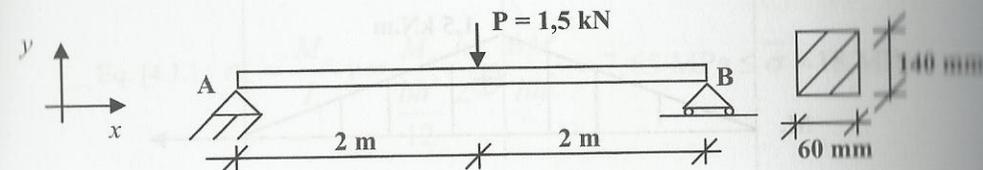


Figure 4.6. Poutre reposant sur deux appuis

Données :  $E = 13\,000\text{ MPa}$  ;  $\bar{\sigma} = 18\text{ MPa}$  et  $\bar{\tau} = 5\text{ MPa}$  .  
 Le chargement est dans le plan (xoy).

Vérification de la résistance

Réactions d'appuis

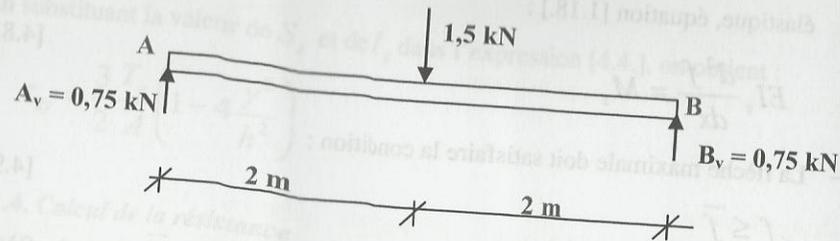


Figure 4.7. Réactions d'appuis

Efforts internes

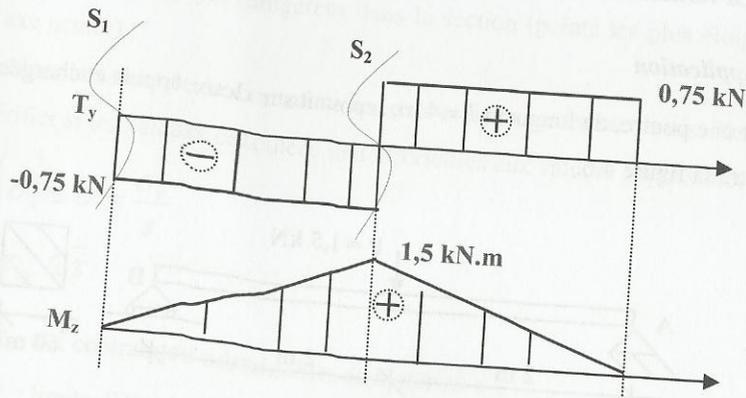


Figure 4.8. Efforts internes

Les efforts  $T_y$  et  $M_z$  ne sont pas nuls (hypothèse de la flexion plane).

Sections dangereuses (efforts internes maximum, figure 4.8.)

$$(S_1) : T_y = \mp 0,75\text{ kN et } M_z = 0$$

$$(S_2) : T_y = \mp 0,75\text{ kN et } M_z = 1,5\text{ kN.m}$$

Points dangereux (distributions des contraintes, figure 4.9.)

$$\sigma_x \text{ est maximale à } y = \mp \frac{h}{2}$$

$$\tau_{xy} \text{ est maximale sur l'axe neutre AN (à } y = 0)$$

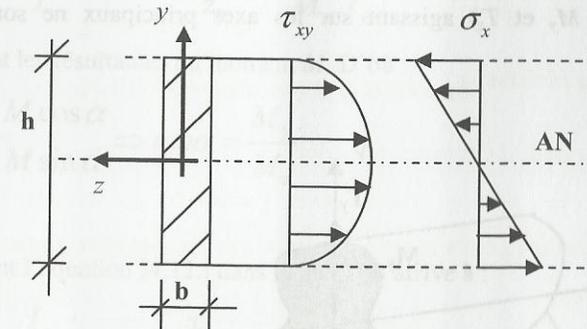


Figure 4.9. Distributions des contraintes (normale et tangentielle)

$$\text{Éq. [4.1.] : } \sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y = \frac{M_z}{bh^3} \frac{h}{2} = \frac{6M_z}{bh^2} = 7,65\text{ MPa} \leq \bar{\sigma} = 18\text{ MPa}$$

$$\text{Éq. [4.5.] : } \tau_{xy} = 1,5 \frac{T_y}{A} = 0,2 \leq \bar{\tau} = 5\text{ MPa}$$

La flèche maximale est calculée par l'équation [4.8.] :

$$f = \frac{Pl^3}{48EI_z} = \frac{Pl^3}{48E \frac{bh^3}{12}} = 11,22 \text{ mm} \leq \bar{f} = \frac{l}{200} = 20 \text{ mm}$$

## 4.2. Flexion déviée

Une flexion est dite déviée si, dans une section droite de la pièce, les efforts internes ( $M_z$ ,  $T_y$ ,  $M_y$  et  $T_z$ ) agissant sur les axes principaux ne sont pas nuls (figure 4.10.).

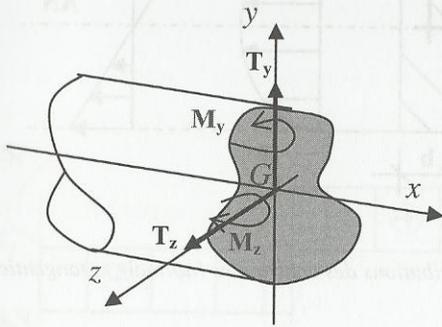


Figure 4.10. Flexion déviée

### 4.2.1. Contrainte normale

La contrainte normale est donnée par :

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad [4.10.]$$

On appelle l'axe neutre AN l'ensemble des points où la contrainte normale est nulle.

Soit un point  $P(x_0; y_0)$  appartenant à l'axe AN. Alors :

$$\frac{M_z}{I_z} y_0 + \frac{M_y}{I_y} z_0 = 0 \Rightarrow \frac{y_0}{z_0} = -\frac{M_y}{M_z} \frac{I_z}{I_y} = \tan \beta \quad [4.11.]$$

$M_y$  et  $M_z$  sont les résultantes du moment  $M$ . D'où :

$$\begin{cases} M_z = M \cos \alpha \\ M_y = M \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{M_y}{M_z} \quad [4.12.]$$

En substituant l'équation [4.12.] dans [4.11.], on arrive à :

$$\tan \beta = -\frac{I_z}{I_y} \tan \alpha \quad [4.13.]$$

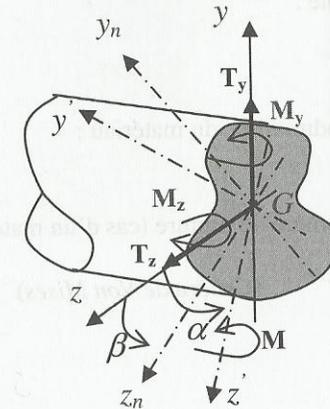


Figure 4.11. Coordonnées d'un point appartenant à l'axe neutre

#### 4.2.2. Contrainte de cisaillement

La contrainte de cisaillement en un point est donnée par :

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad [4.14.]$$

Avec :

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \frac{T_y S_z}{b I_z} \\ \tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b I_y} \end{cases} \quad [4.15.]$$

#### 4.2.3. Calcul de la résistance

Les étapes du calcul de la résistance sont :

- déterminer les sections dangereuses (zones où les efforts internes sont maximum) et les points dangereux dans la section (points les plus éloignés de l'axe neutre) ;
- calculer la valeur de la contrainte normale et vérifier qu'elle est inférieure à la valeur admissible :

$$\sigma_x \leq \bar{\sigma} \quad [4.16.]$$

$\bar{\sigma}$  : contrainte admissible du matériau ;

- vérification d'un critère de rupture (cas d'un matériau ductile) :

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} \leq \bar{\sigma} \quad (\text{Critère de Von Mises}) \quad [4.17.]$$

#### 4.2.4. Calcul de la rigidité

Le calcul de la flèche se fait en utilisant l'équation différentielle de la ligne élastique (équation [1.18.] :

$$EI_z \frac{d^2 f}{dx^2} = M_z \quad [4.18.]$$

Avec :

$$f = \sqrt{[v(x)]^2 + [w(x)]^2} \quad [4.19.]$$

$v(x)$  et  $w(x)$  sont respectivement les déplacements suivant y et z.

- La flèche maximale doit satisfaire la condition :

$$f \leq \bar{f} \quad [4.20.]$$

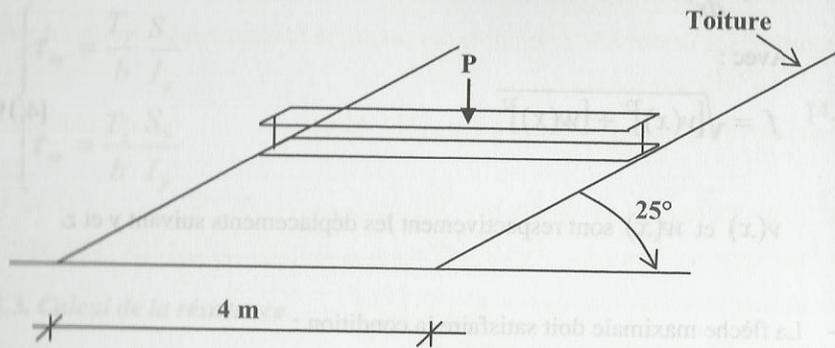
$\bar{f} = \frac{l}{150} \div \frac{l}{1000}$ ,  $l$  étant la portée de la poutre et  $\bar{f}$  étant la flèche admissible.

- La vérification de la flèche s'effectue après la vérification de la résistance.

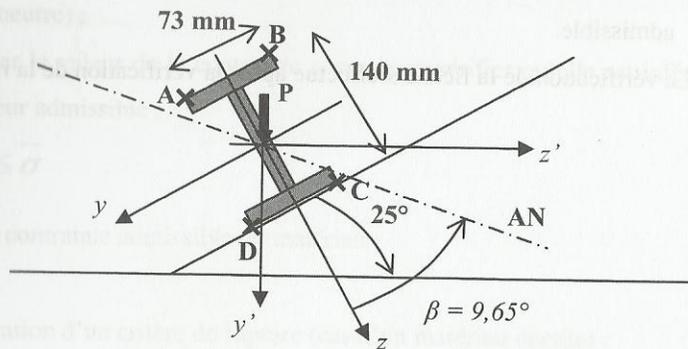
#### 4.2.5. Application

Calculer la charge maximale  $P$  que peut supporter une panne en IPE140 en respectant les conditions de résistance (figure 4.12.) :

Données :  $\bar{\sigma} = 120 \text{ MPa}$



(a). Position de la panne en IPE140 dans l'espace



(b). Position de la panne en IPE140 dans le plan

Figure 4.12. Disposition d'une panne sur la toiture

Les caractéristiques géométriques d'un IPE140 sont :  
 $A = 16,4 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$  ;  $I_y = 541,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$  ;  $I_z = 44,9 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

Le vecteur de chargement  $P$  peut-être décomposé comme :

$$\vec{P} = P_y \vec{j} + P_z \vec{k}$$

Avec :

$$\begin{cases} P_y = P \sin 25 = 0,423P \\ P_z = P \cos 25 = 0,908P \end{cases}$$

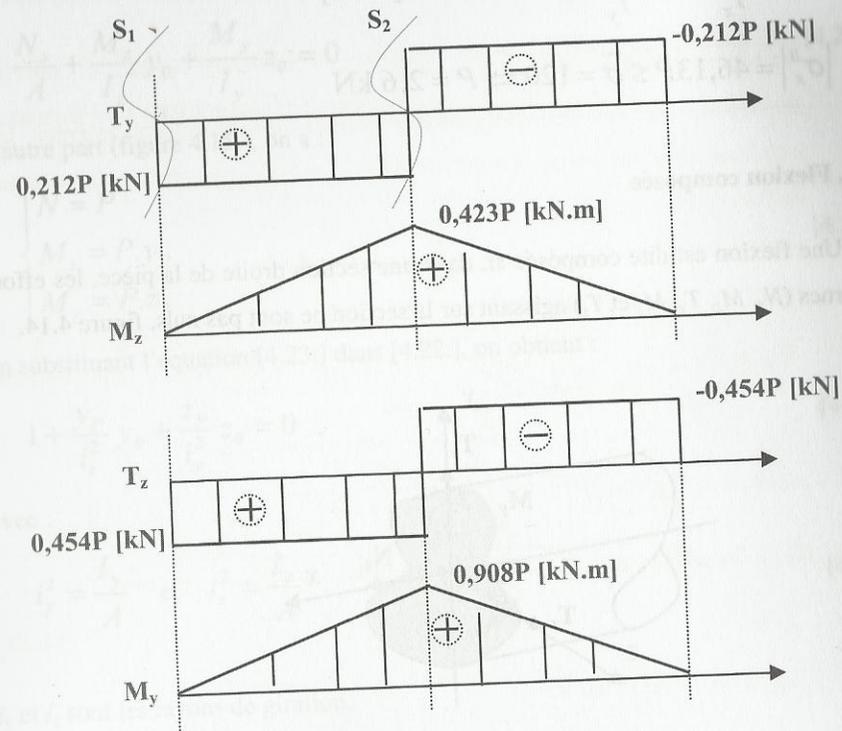


Figure 4.13. Efforts internes

Les efforts  $T_y$  et  $M_z$  ne sont pas nuls (hypothèse de la flexion plane).

Équation de l'axe neutre (équation [4.11.]) :

$$\frac{M_z}{I_z} y_0 + \frac{M_y}{I_y} z_0 = 0 \Rightarrow \frac{y_0}{z_0} = -\frac{M_y I_z}{M_z I_y} = \tan \beta = -0,17 \Rightarrow \beta = -9,64^\circ$$

C'est l'équation d'une droite passant par le cdg de la section, figure 4.12.b.

Le point  $B(-36,5 ; -70)$  est le plus éloigné de l'axe AN.

La contrainte normale maximale au point  $B$

$$\sigma_x^B = \frac{M_z}{I_z} y_B + \frac{M_y}{I_y} z_B = -46,13P \text{ [MPa]}$$

$$|\sigma_x^B| = 46,13P \leq \bar{\sigma} = 120 \Rightarrow P = 2,6 \text{ kN}$$

### 4.3. Flexion composée

Une flexion est dite composée si, dans une section droite de la pièce, les efforts internes ( $N_x$ ,  $M_y$ ,  $T_y$ ,  $M_z$  et  $T_z$ ) agissant sur la section ne sont pas nuls, figure 4.14.

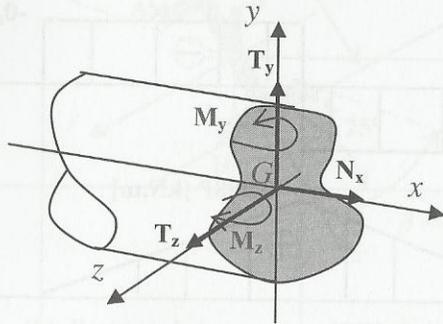


Figure 4.14. Flexion composée

### 4.3.1. Contrainte normale

La contrainte normale est donnée par :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad [4.21.]$$

$A$  étant l'aire de la section droite de la pièce.

Équation de l'axe neutre

Soit un point  $P(x_0 ; y_0)$  appartenant à l'axe AN. Alors :

$$\frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_0 + \frac{M_y}{I_y} z_0 = 0 \quad [4.22.]$$

D'autre part (figure 4.15.), on a :

$$\begin{cases} N = P \\ M_z = P \cdot y_P \\ M_y = P \cdot z_P \end{cases} \quad [4.23.]$$

En substituant l'équation [4.23.] dans [4.22.], on obtient :

$$1 + \frac{y_P}{i_z^2} y_0 + \frac{z_P}{i_y^2} z_0 = 0 \quad [4.24.]$$

avec :

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} \quad \text{et} \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A} \quad [4.25.]$$

$i_y$  et  $i_z$  sont les rayons de giration.

### 4.3.2. Contrainte de cisaillement

La contrainte de cisaillement en un point est donnée par :

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad [4.26.]$$

avec :

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{b} \frac{S_z}{I_z} \quad \text{et} \quad \tau_{xz} = \frac{T_z}{b} \frac{S_y}{I_y} \quad [4.27.]$$

### 4.3.3. Calcul de la résistance

Les étapes du calcul de la résistance sont :

- déterminer les sections dangereuses (zones où les efforts internes sont maximums) et les points dangereux dans la section (points les plus éloignés de l'axe AN) ;
- évaluer la valeur de la contrainte normale et vérifier si la valeur calculée est inférieure à la valeur admissible du matériau :

$$\sigma_x \leq \bar{\sigma} \quad [4.28.]$$

### 4.3.4. Calcul de la rigidité

La flèche maximale doit satisfaire la condition :

$$f \leq \bar{f} \quad [4.29.]$$

$\bar{f}$  étant la flèche admissible.

### Remarques

- Dans le cas de la flexion composée, l'axe AN ne passe pas par le cdg de la section transversale ;
- $\sigma_x$  est maximale pour les points les plus éloignés de l'axe AN ;
- Pour le calcul de la résistance, comme dans le cas de la flexion déviée, il suffit de vérifier que :  $\sigma_x \leq \bar{\sigma}$ . Le terme  $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$  est négligeable.

### 4.3.5. Application

Calculer la charge maximale  $P$  que peut supporter une console en IPE140 en respectant les conditions de résistance (figure 4.15.) :

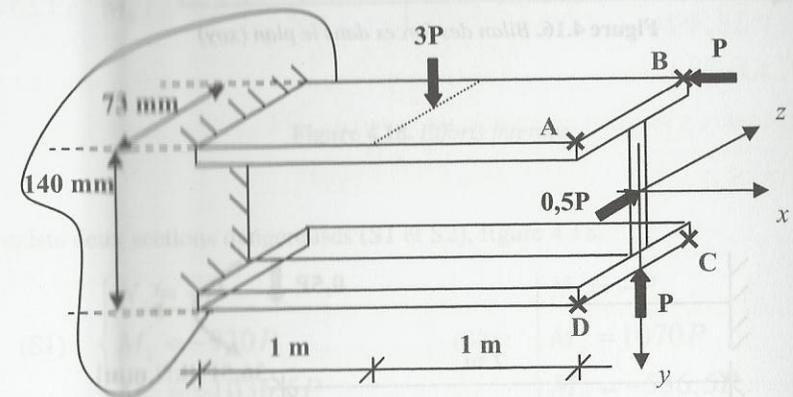


Figure 4.15. Console encadrée à une extrémité

Données :  $\bar{\sigma} = 120 \text{ MPa}$

Les caractéristiques géométriques d'un IPE140 sont :

$$A = 16,4 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 ; I_y = 541,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 ; I_x = 44,9 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

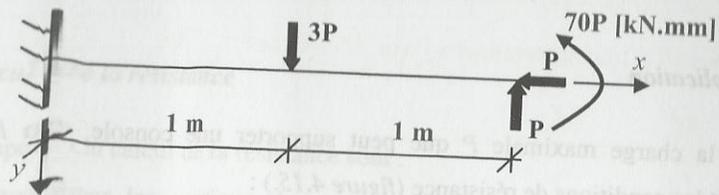


Figure 4.16. Bilan des forces dans le plan (xoy)

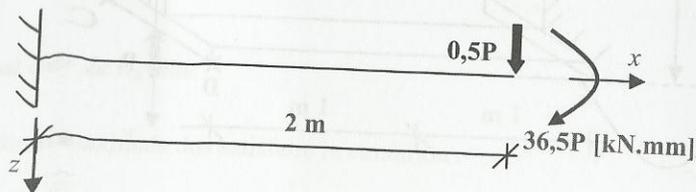


Figure 4.17. Bilan des forces dans le plan (xoz)

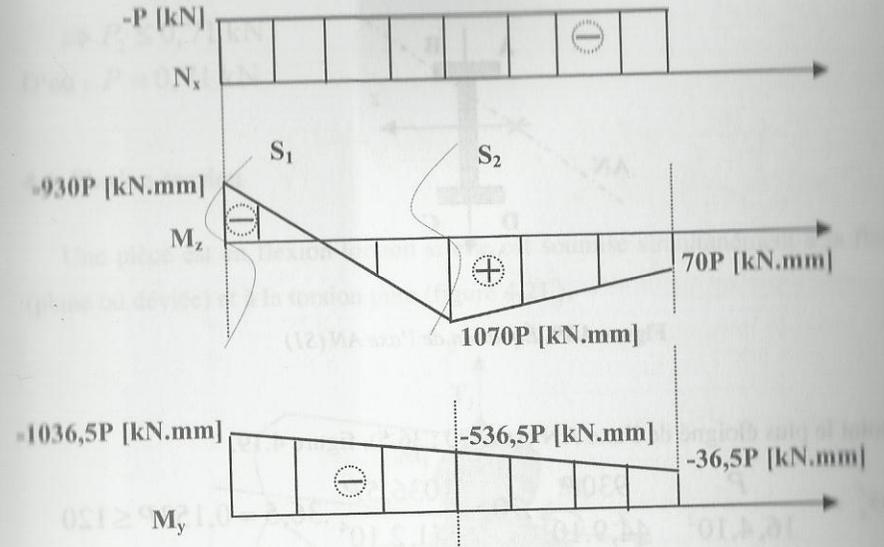


Figure 4.18. Efforts internes

Il existe deux sections dangereuses (S1 et S2), figure 4.18.

$$(S1) : \begin{cases} N_x = -P \\ M_z = -930P \\ M_y = -1036,5P \end{cases} \quad (S2) : \begin{cases} N_x = -P \\ M_z = 1070P \\ M_y = -536,5P \end{cases}$$

Équation de l'axe AN : équation [4.22.] :

$$(S1) : -\frac{P}{A} - \frac{930P}{I_z} y_0 - \frac{1036,5P}{I_y} z_0 = 0$$

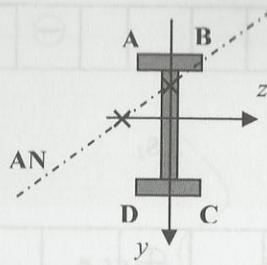


Figure 4.19. Équation de l'axe AN (S1)

Le point le plus éloigné de l'axe AN est C(70 ; 36,5), figure 4.19.

$$\sigma_x^C = -\frac{P}{16,4 \cdot 10^2} - \frac{930P}{44,9 \cdot 10^4} \cdot 70 - \frac{1036,5P}{541,2 \cdot 10^4} \cdot 36,5 = 0,153P \leq 120$$

$$\Rightarrow P_1 \leq 0,78 \text{ kN}$$

$$(S2) : -\frac{P}{A} + \frac{1070P}{I_z} y_0 - \frac{536,5P}{I_y} z_0 = 0$$

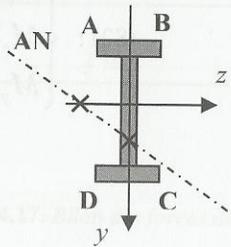


Figure 4.20. Équation de l'axe AN (S2)

Le point le plus éloigné de l'axe AN est B(-70 ; 36,5), figure 4.19.

$$\sigma_x^B = -\frac{P}{16,4 \cdot 10^2} + \frac{1070P}{44,9 \cdot 10^4} \cdot (-70) - \frac{536,5P}{541,2 \cdot 10^4} \cdot 36,5 = 0,171P \leq 120$$

$$\Rightarrow P_2 \leq 0,71 \text{ kN}$$

D'où :  $P = 0,71 \text{ kN}$

#### 4.4. Flexion-torsion

Une pièce est en flexion-torsion si elle est soumise simultanément à la flexion (plane ou déviée) et à la torsion pure (figure 4.21.).

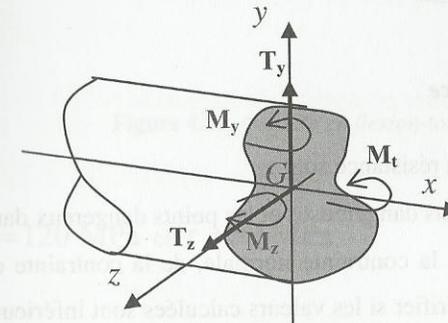


Figure 4.21. Flexion-torsion

##### 4.4.1. Contrainte normale

La contrainte normale est donnée par :

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad [4.30.]$$

A étant l'aire de la section droite de la pièce.

#### 4.4.2. Contrainte de cisaillement

La contrainte de cisaillement en un point est donnée par :

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_t^2} \quad [4.31.]$$

Avec :

$$\tau_{xy} = \frac{T_y S_z}{b I_z}, \quad \tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b I_y} \quad \text{et} \quad \tau_t = \frac{M_t}{I_0} R \quad [4.32.]$$

$M_t$  : moment de torsion ;

$I_0$  : moment d'inertie polaire ;

$R$  : rayon de la barre.

#### 4.4.3. Calcul de la résistance

Les étapes du calcul à la résistance sont :

- déterminer les sections dangereuses et les points dangereux dans la section ;
- évaluer la valeur de la contrainte normale, de la contrainte de cisaillement due à la torsion et vérifier si les valeurs calculées sont inférieures aux valeurs admissibles du matériau :

$$\sigma_x \leq \bar{\sigma} \quad \text{et} \quad \tau_t \leq \bar{\tau} \quad [4.33.]$$

- pour un matériau ductile, il faut vérifier un critère de rupture :

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_t^2} \leq \bar{\sigma} \quad (\text{Critère de Von Mises}) \quad [4.34.]$$

#### Remarques

- La condition de résistance est satisfaite si les conditions aux points les plus éloignés de l'axe AN sont vérifiées.
- La contrainte de cisaillement due à la torsion n'est pas négligeable.
- Le calcul des sections circulaires creuses est similaire à celui des sections circulaires pleines.

#### 4.4.4. Application

Calculer le diamètre de la pièce en respectant les conditions de résistance, (figure 4.22.) :

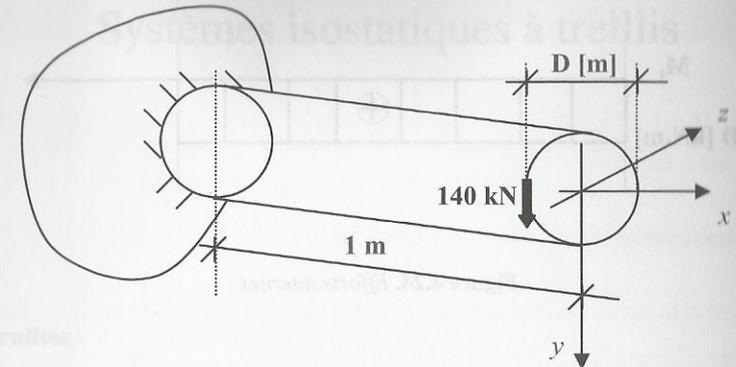


Figure 4.22. Console en flexion-torsion

Données :  $\bar{\sigma} = 120 \text{ MPa}$  et  $\bar{\tau} = 90 \text{ MPa}$

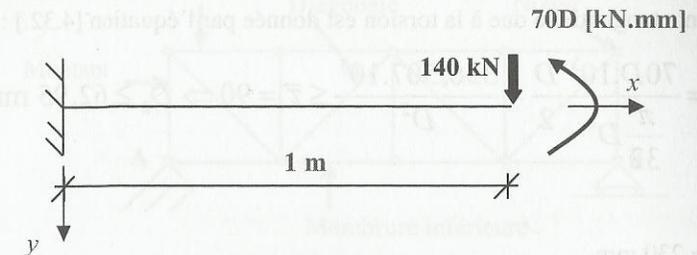


Figure 4.23. Système équivalent

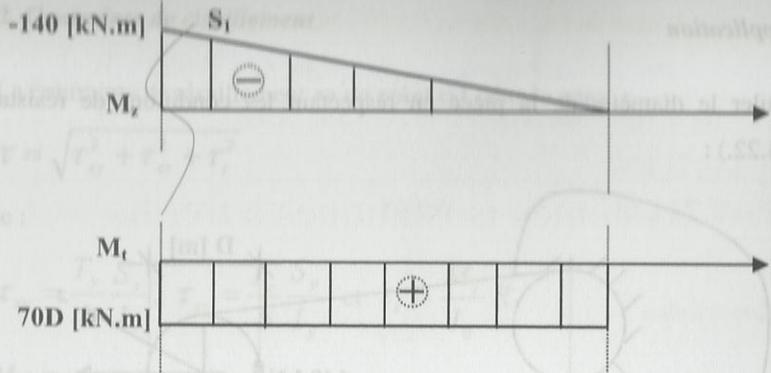


Figure 4.24. Efforts internes

La contrainte normale maximum est donnée par l'équation [4.30.] :

$$\sigma_x^{\max} = \frac{M_z}{I_z} y = \frac{140 \cdot 10^6}{\frac{\pi}{64} D^4} \frac{D}{2} = \frac{1,426 \cdot 10^9}{D^3} \leq 120 \Rightarrow D_1 \geq 228,2 \text{ mm}$$

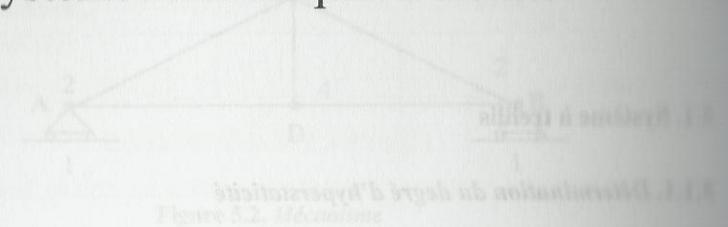
La contrainte tangentielle due à la torsion est donnée par l'équation [4.32.] :

$$\tau_t^{\max} = \frac{70D \cdot 10^3}{32} \frac{D}{2} = \frac{356,507 \cdot 10^3}{D^2} \leq \bar{\tau} = 90 \Rightarrow D_2 \geq 62,95 \text{ mm}$$

D'où :  $D = 230 \text{ mm}$ .

## Chapitre 5

### Systemes isostatiques à treillis



#### Généralités

Un système à treillis est une triangulation de barres droites articulées aux nœuds (figure 5.1.).

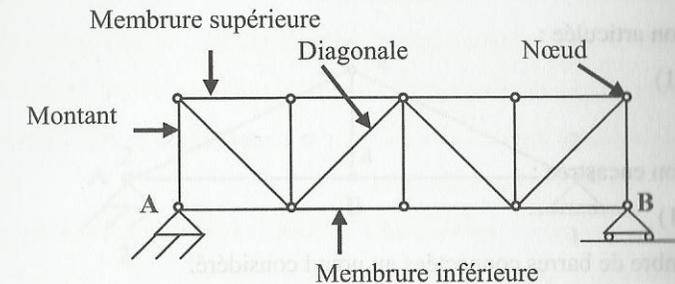


Figure 5.1. Poutre auvent

## Remarques

- Les nœuds du treillis sont des articulations parfaites.
- Les barres travaillent uniquement en traction ou en compression.

## 5.1. Système à treillis

### 5.1.1. Détermination du degré d'hyperstaticité

Le degré d'hyperstaticité  $H$  est égal à la différence entre le nombre d'inconnues  $i$  et le nombre d'équations :

$$H = i - 3n \quad [5.1.]$$

$n$  étant le nombre de barres de la structure.

Pour une liaison articulée :

$$i = 2(n_b - 1) \quad [5.2.]$$

Pour une liaison encadrée :

$$i = 3(n_b - 1) \quad [5.3.]$$

$n_b$  étant le nombre de barres connectées au nœud considéré.

- Si  $H < 0$  : système hypostatique (mécanisme) ;
- Si  $H = 0$  : système isostatique ;
- Si  $H > 0$  : système hyperstatique d'ordre  $H$ .

## 5.1.2. Exemple

Déterminer le degré d'hyperstaticité  $H$  des systèmes suivants :

(a).

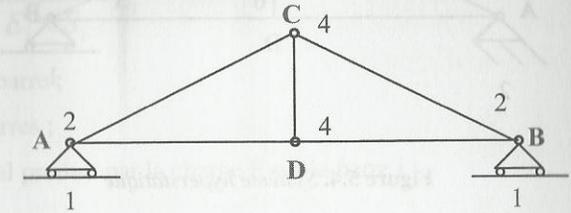


Figure 5.2. Mécanisme

$$i = 14$$

$$3n = 3 \times 5 = 15$$

$$H = i - 3n = -1 < 0 : \text{système hypostatique.}$$

(b).

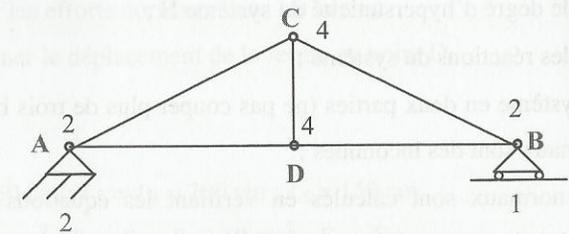


Figure 5.3. Système isostatique

$$i = 15$$

$$3n = 3 \times 5 = 15$$

$$H = i - 3n = 0 : \text{système isostatique.}$$

(e).

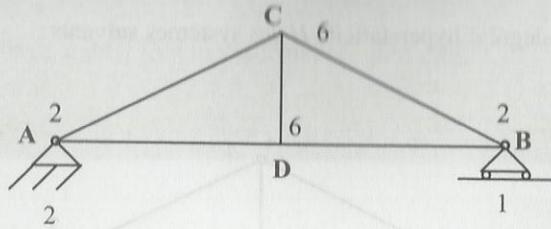


Figure 5.4. Système hyperstatique

$$i = 19$$

$$3n = 3 \times 5 = 15$$

$H = i - 3n = 4$  : système hyperstatique d'ordre 4.

### 5.2. Calcul des efforts normaux - Méthode des sections

Les étapes de calcul des efforts normaux sont :

- déterminer le degré d'hyperstaticité du système H ;
- déterminer les réactions du système ;
- couper le système en deux parties (ne pas couper plus de trois barres) où les efforts normaux sont des inconnues ;
- les efforts normaux sont calculés en vérifiant les équations du principe fondamental de la statique PFS.

### 5.3. Déplacement d'un système à treillis

Le déplacement est donné par l'expression :

$$\delta_{k0} = \sum_{i=1}^n \frac{N_{ki}^0 \times N_{pi}}{E_i \times S_i} L_i \quad [5.4]$$

$i$  : numéro de la barre ;

$n$  : nombre de barres ;

$N_{pi}$  : effort normal produit par la charge P sur la barre  $i$  ;

$N_{ki}^0$  : effort normal produit par la charge unitaire au point k de la barre  $i$  ;

$L_i$  : longueur de la barre  $i$  ;

$S_i$  : section de la barre  $i$  ;

$E_i$  : module d'Young de la barre  $i$ .

### 5.4. Application - Étude d'une ferme

Soit une ferme, figure 5.5.

- Calculer les efforts normaux dans les barres.
- Déterminer le déplacement de la ferme au point D.

Données :

$$L_1 = L_2 = 250 \text{ cm} ; L_3 = L_4 = 200 \text{ cm} ; L_5 = 150 \text{ cm}$$

$$S_1 = S_2 = 20 \text{ cm}^2 ; S_3 = S_4 = S_5 = 10 \text{ cm}^2 ; E_i = E$$

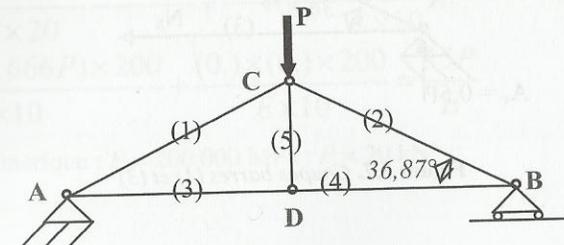


Figure 5.5. Système isostatique

(a). Calcul des efforts normaux dans les barres

Les étapes de calcul, section 5.2., sont les suivantes :

- Calcul du degré d'hyperstaticité  $H = 0$  : système isostatique, section 5.1.2. (cas b)
- Calcul des réactions d'appuis

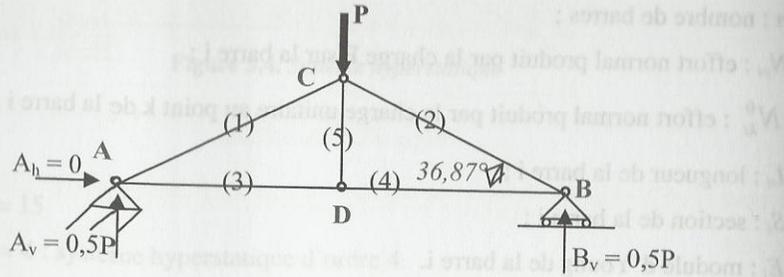


Figure 5.6. Réactions d'appuis

Pour des raisons de symétrie (géométrie et chargement), on considère la moitié de la structure pour le calcul des efforts internes dans les barres.

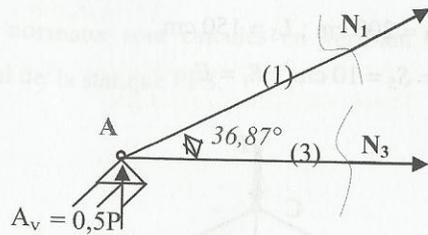


Figure 5.7. Coupes barres (1) et (3)

Vérifions les équations du PFS :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 0,5P + N_1 \sin 36,87 = 0 \Rightarrow N_1 = -0,833P$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_3 + N_1 \cos 36,87 = 0 \Rightarrow N_3 = 0,666P$$

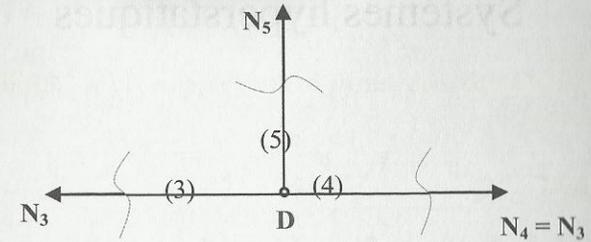


Figure 5.8. Coupes barres (3), (4) et (5)

Appliquons le PFS :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_5 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_3 + N_4 = 0 \Rightarrow N_4 = N_3 = 0,666P$$

(b). Le déplacement de la ferme au point D

$$\delta_{k0} = \sum_{i=1}^n \frac{N_{ki}^0 \times N_{pi}}{E_i \times S_i} L_i = \frac{(-0,833) \times (-0,833P) \times 250}{E \times 20} + \frac{(-0,833) \times (-0,833P) \times 250}{E \times 20} + \frac{(0,666) \times (0,666P) \times 200}{E \times 10} + \frac{(0,666) \times (0,666P) \times 200}{E \times 10} + \frac{(0) \times (0) \times 200}{E \times 10} = \frac{35P}{E}$$

Application numérique :  $E = 200\,000 \text{ MPa}$  ;  $P = 20 \text{ kN}$

$$\delta_{k0} = \frac{35P}{E} = 3,5 \text{ mm}$$

# Chapitre 6

## Systèmes hyperstatiques

### Généralités

En général, les portiques ont un comportement flexionnel. De ce fait, on peut négliger les déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude des structures planes, hyperstatiques, chargées dans leur plan. Pour le calcul des poutres continues, on utilise la méthode des trois moments (formules de Clapeyron) et pour le calcul des portiques on utilise la méthode des déplacements.

### 6.1. Poutres continues

#### 6.1.1. Méthode des trois moments - Formules de Clapeyron

Soit un système (S) composé d'une poutre continue sur trois appuis  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$ , (figure 6.1.) :

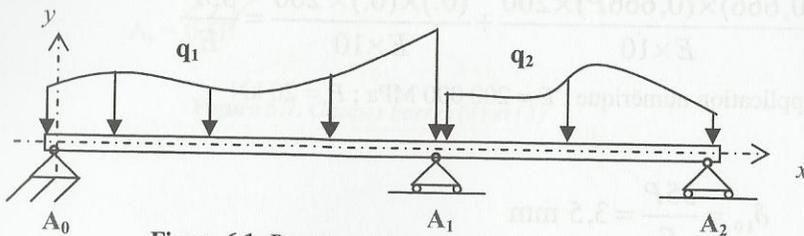


Figure 6.1. Poutre continue sur trois appuis

### Remarques

- La méthode des trois moments propose de remplacer le système hyperstatique (S) par un système isostatique ( $S_0$ ) auquel on associe une condition cinématique.
- Le système ( $S_0$ ) se décompose en deux parties comme :

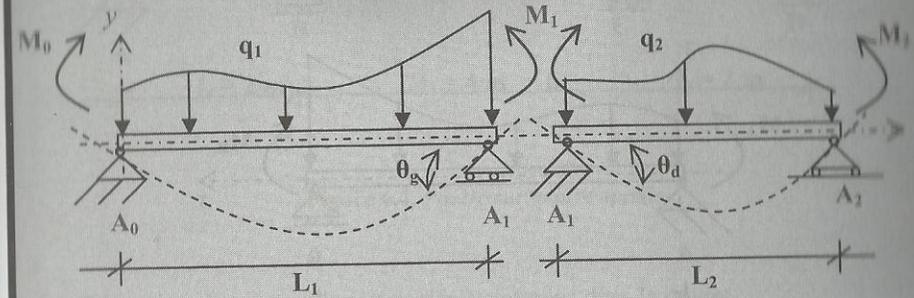


Figure 6.2. Système isostatique équivalent ( $S_0$ )

Le système (S) est équivalent au système ( $S_0$ ) à condition de vérifier la condition suivante :

$$L_1 M_0 + 2(L_1 + L_2) M_1 + L_2 M_2 = 6EI_z (\theta_d - \theta_g) \quad [6.1.]$$

Avec :

$$\theta_d = \frac{1}{EI_z} \int_0^{L_2} m_z^2 \left[ \frac{x}{L_2} - 1 \right] dx \quad \text{et} \quad \theta_g = \frac{1}{EI_z} \int_0^{L_1} m_z^1 \left[ \frac{x}{L_1} \right] dx \quad [6.2.]$$

$\theta_d$  : rotation (de droite) au point  $A_1$  de la poutre  $A_1A_2$  sous l'effet de la charge  $q_2$  ;

$\theta_g$  : rotation (de gauche) au point  $A_1$  de la poutre  $A_0A_1$  sous l'effet de la charge  $q_1$  ;

$m_z^1$  : moment fléchissant dû à la charge  $q_1$  dans la poutre isostatique  $A_0A_1$  ;

$m_z^2$  : moment fléchissant dû à la charge  $q_2$  dans la poutre isostatique  $A_1A_2$  ;

$E$  : module d'Young ;

$I_z$  : moment quadratique de la section transversale.

### 6.1.2. Relations entre efforts internes et moments aux appuis

Soit une poutre isostatique reposant sur deux appuis, figure 6.3.

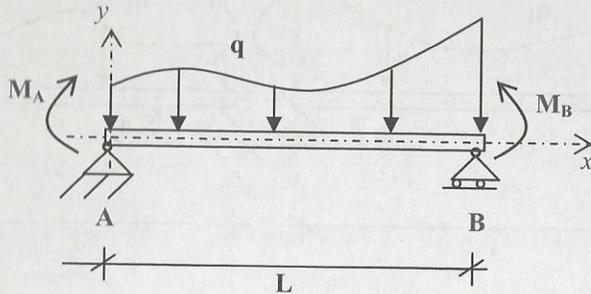


Figure 6.3. Poutre isostatique

L'effort tranchant  $T_y^{AB}$  dans la travée hyperstatique du système (S) en fonction de l'effort tranchant  $t_y^{AB}$  dans la travée isostatique du système ( $S_0$ ) est donné par :

$$T_y^{AB}(x) = t_y^{AB}(x) + \frac{M_A - M_B}{L} \quad [6.3.]$$

Le moment fléchissant  $M_z^{AB}$  dans la travée hyperstatique du système (S) en fonction du moment fléchissant  $m_z^{AB}$  dans la travée isostatique du système ( $S_0$ ) est donné par :

$$M_z^{AB}(x) = m_z^{AB}(x) + M_A \left[ 1 - \frac{x}{L} \right] + M_B \left[ \frac{x}{L} \right] \quad [6.4.]$$

### 6.1.3. Application - Étude d'une poutre reposant sur quatre appuis

Soit une poutre reposant sur quatre appuis, (figure 6.4.)

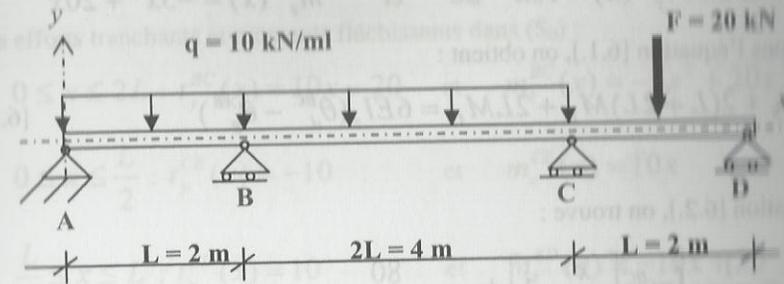


Figure 6.4. Poutre sur quatre appuis

- Déterminer les expressions des efforts internes dans la poutre.
  - Tracer les diagrammes des fonctions internes dans la poutre.
  - Calculer les réactions d'appuis.
- $EI_z$  étant une constante.

(a). Efforts internes dans la poutre

Tronçons AB et BC

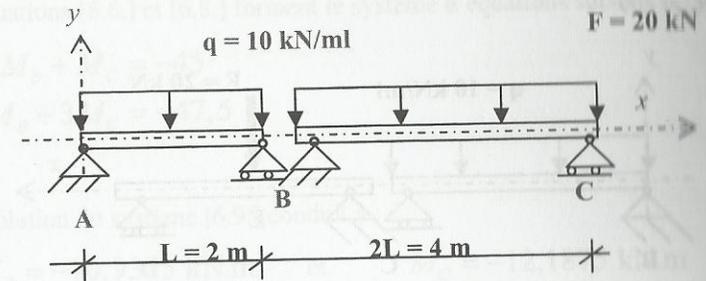


Figure 6.5. Systèmes isostatiques. Tronçons AB et BC

Les efforts tranchants et moments fléchissants dans ( $S_0$ ) :

$$0 \leq x \leq L : t_y^{AB}(x) = 10x - 10 \quad \text{et} \quad m_z^{AB}(x) = -5x^2 + 10x$$

$$0 \leq x \leq 2L : t_y^{BC}(x) = 10x - 20 \quad \text{et} \quad m_z^{BC}(x) = -5x^2 + 20x$$

Appliquons l'équation [6.1.], on obtient :

$$LM_A + 2(L + 2L)M_B + 2LM_C = 6EI_z(\theta_d^{BC} - \theta_g^{AB}) \quad [6.5.]$$

De l'équation [6.2.], on trouve :

$$\theta_d^{BC} = \frac{1}{EI_z} \int_0^{2L} m_z^{BC} \left[ \frac{x}{2L} - 1 \right] dx = -\frac{80}{3EI_z}$$

$$\theta_g^{AB} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L m_z^{AB} \left[ \frac{x}{L} \right] dx = \frac{10}{3EI_z}$$

En substituant les expressions des rotations dans [6.5.], on obtient :

$$3M_B + M_C = -45 \quad [6.6.]$$

L'équation [6.6.] a deux inconnues : pour déterminer les valeurs de  $M_B$  et  $M_C$ , il nous faut une deuxième équation.

Tronçons BC et CD

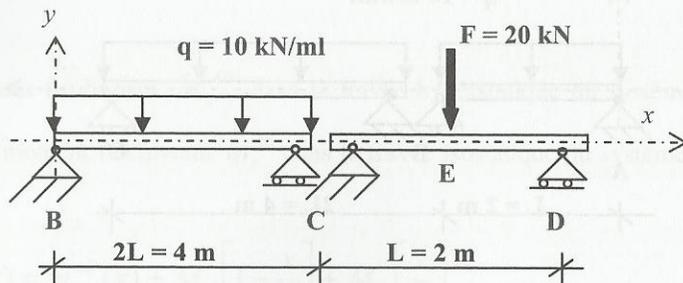


Figure 6.6. Systèmes isostatiques. Tronçons BC et CD

En appliquant l'équation [6.1.], on obtient :

$$2LM_B + 2(L + 2L)M_C + LM_D = 6EI_z(\theta_d^{CD} - \theta_g^{BC}) \quad [6.7.]$$

Les efforts tranchants et moments fléchissants dans ( $S_0$ ) :

$$0 \leq x \leq 2L : t_y^{BC}(x) = 10x - 20 \quad \text{et} \quad m_z^{BC}(x) = -5x^2 + 20x$$

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2} : t_y^{CE}(x) = -10 \quad \text{et} \quad m_z^{CE}(x) = 10x$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L : t_y^{ED}(x) = 10 \quad \text{et} \quad m_z^{ED}(x) = -10x + 20$$

Grâce à l'équation [6.2.], on trouve :

$$\theta_d^{CD} = \frac{1}{EI_z} \left[ \int_0^{L/2} m_z^{CE} \left[ \frac{x}{L} - 1 \right] dx + \int_{L/2}^L m_z^{ED} \left[ \frac{x}{L} - 1 \right] dx \right] = -\frac{5}{EI_z}$$

$$\theta_g^{BC} = \frac{1}{EI_z} \int_0^{2L} m_z^{BC} \left[ \frac{x}{2L} \right] dx = \frac{80}{3EI_z}$$

En substituant les expressions des rotations dans [6.7.], on obtient :

$$M_B + 3M_C = -47,5 \quad [6.8.]$$

Les équations [6.6.] et [6.8.] forment le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3M_B + M_C = -45 \\ M_B + 3M_C = -47,5 \end{cases} \quad [6.9.]$$

La résolution du système [6.9.] conduit à :

$$M_B = -10,9375 \text{ kN.m} \quad \text{et} \quad M_C = -12,1875 \text{ kN.m}$$

(b). Diagrammes des fonctions internes dans la poutre

En appliquant les équations [6.3.] et [6.4.], on détermine les efforts tranchants et les moments fléchissants dans le système hyperstatique (S) :

Tronçon AB

$$0 \leq x \leq L : T_y^{AB}(x) = t_y^{AB}(x) - \frac{M_B}{L} = 10x - 4,53$$

$$M_z^{AB}(x) = m_z^{AB}(x) + M_B \left[ \frac{x}{L} \right] = -5x^2 + 4,53x$$

Tronçon BC

$$0 \leq x \leq 2L : T_y^{BC}(x) = t_y^{BC}(x) + \frac{M_B - M_C}{2L} = 10x - 19,68$$

$$M_z^{BC}(x) = m_z^{BC}(x) + M_C \left[ \frac{x}{2L} \right] + M_B \left[ 1 - \frac{x}{2L} \right] = -5x^2 + 19,68x - 10,9375$$

Tronçon CE

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2} : T_y^{CE}(x) = -16,1 \text{ kN}, \quad M_z^{CE}(x) = 16,1x - 12,2$$

Tronçon ED

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L : T_y^{ED}(x) = 3,9 \text{ kN}, \quad M_z^{ED}(x) = -3,9x + 7,8$$

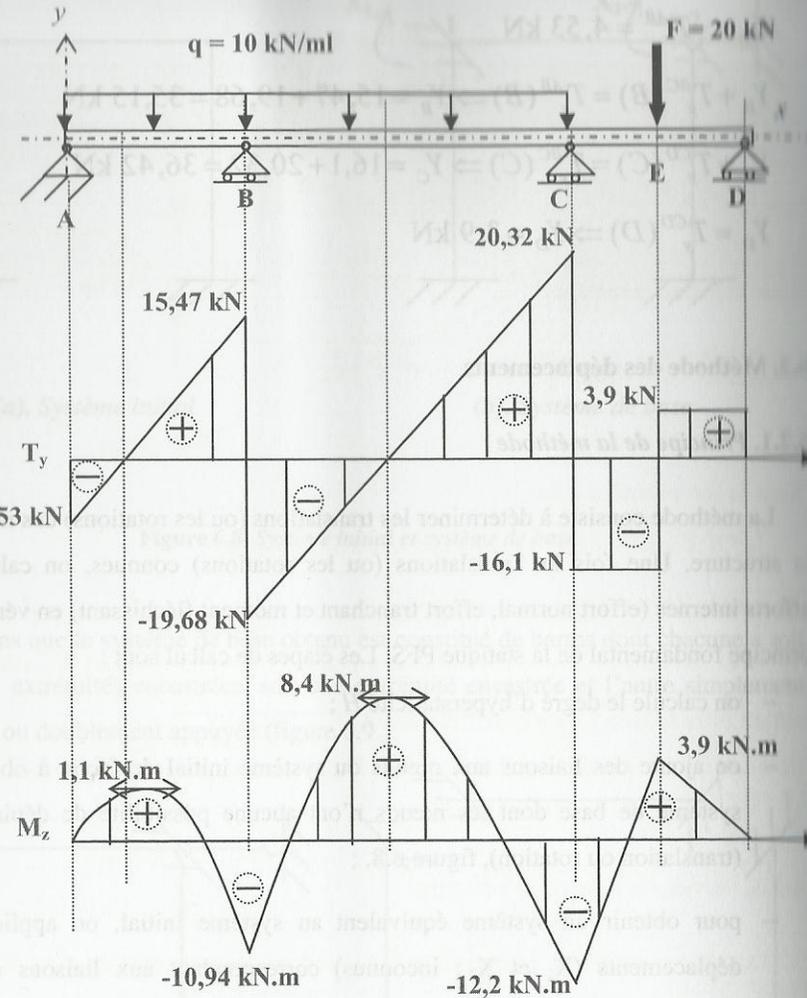


Figure 6.7. Efforts internes

(c). Réactions d'appuis

$$Y_A = -T_y^{AB} = 4,53 \text{ kN}$$

$$Y_B + T_y^{BC}(B) = T_y^{AB}(B) \Rightarrow Y_B = 15,47 + 19,68 = 35,15 \text{ kN}$$

$$Y_C + T_y^{CD}(C) = T_y^{BC}(C) \Rightarrow Y_C = 16,1 + 20,32 = 36,42 \text{ kN}$$

$$Y_D = T_y^{CD}(D) \Rightarrow Y_D = 3,9 \text{ kN}$$

## 6.2. Méthode des déplacements

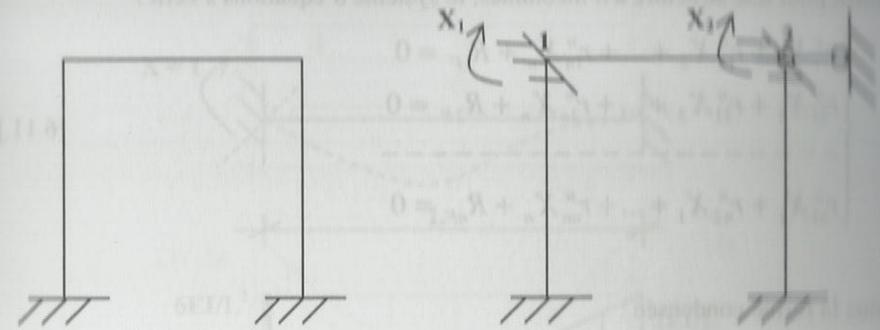
### 6.2.1. Principe de la méthode

La méthode consiste à déterminer les translations (ou les rotations) des nœuds de la structure. Une fois les translations (ou les rotations) connues, on calcule les efforts internes (effort normal, effort tranchant et moment fléchissant) en vérifiant le principe fondamental de la statique PFS. Les étapes de calcul sont :

- on calcule le degré d'hyperstaticité  $H$  ;
- on ajoute des liaisons aux nœuds du système initial de façon à obtenir un système de base dont les nœuds n'ont aucune possibilité de déplacement (translation ou rotation), figure 6.8. ;
- pour obtenir un système équivalent au système initial, on applique des déplacements ( $X_1$  et  $X_2$  : inconnus) correspondant aux liaisons ajoutées (figure 6.8.) ;
- pour obtenir les inconnues ( $X_1$  et  $X_2$ ), on vérifie l'équilibre des forces à chaque nœud :

$$R_1 = \sum \text{des moments réactionnels au nœud 1} = 0 \quad [6.10.a]$$

$$R_2 = \sum \text{des moments réactionnels au nœud 2} = 0 \quad [6.10.b]$$

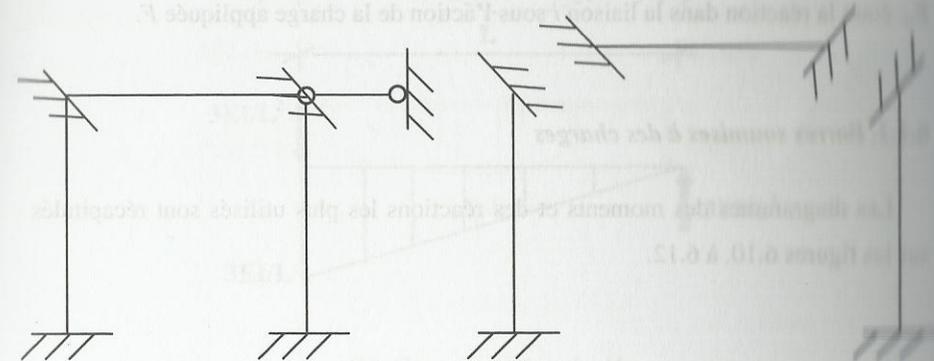


(a). Système initial

(b). Système de base

Figure 6.8. Système initial et système de base

Notons que le système de base obtenu est constitué de barres dont chacune a soit ses deux extrémités encastrees, soit une extrémité encastree et l'autre simplement appuyée ou doublement appuyée (figure 6.9.).



(a). Système de base

(b). Système équivalent

Figure 6.9. Système de base et système équivalent

Ainsi, pour une structure à  $n$  inconnues, le système d'équations s'écrit :

$$\begin{cases} r_{11}'' X_1 + r_{12}'' X_2 + \dots + r_{1n}'' X_n + R_{1F} = 0 \\ r_{21}'' X_1 + r_{22}'' X_2 + \dots + r_{2n}'' X_n + R_{2F} = 0 \\ \dots \\ r_{n1}'' X_1 + r_{n2}'' X_2 + \dots + r_{nn}'' X_n + R_{nF} = 0 \end{cases} \quad [6.11.]$$

Sous la forme condensée :

$$\sum_{j=1}^n r_{ij}'' X_j + R_{iF} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad [6.12.]$$

Sous la forme matricielle :

$$[r_{ij}''] \{X\} = -\{R_F\} \quad [6.13.]$$

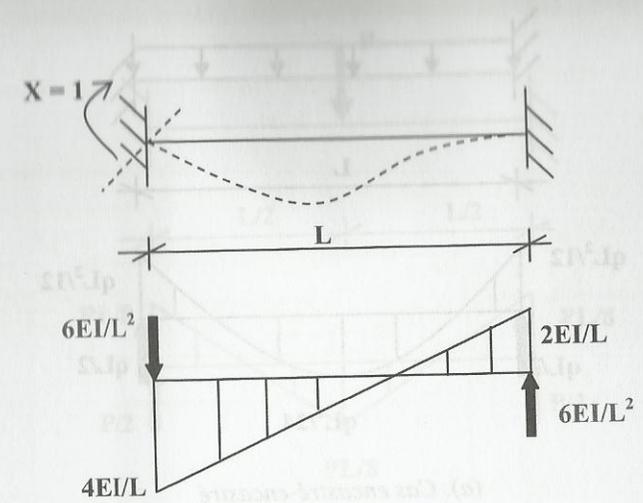
$X_{ij}$  étant le déplacement inconnu appliqué ;

$r_{ij}''$  étant la rigidité dans la liaison  $i$  sous l'action d'un déplacement unitaire selon la nature de la liaison  $j$ , appliqué à la liaison  $j$  ;

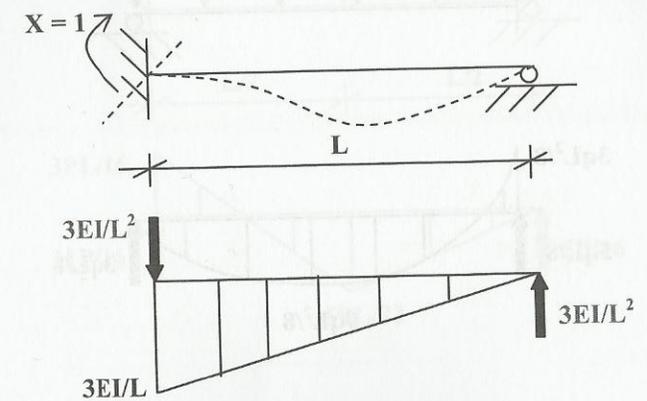
$R_{iF}$  étant la réaction dans la liaison  $i$  sous l'action de la charge appliquée  $F$ .

### 6.2.2. Barres soumises à des charges

Les diagrammes des moments et des réactions les plus utilisés sont récapitulés sur les figures 6.10. à 6.12.

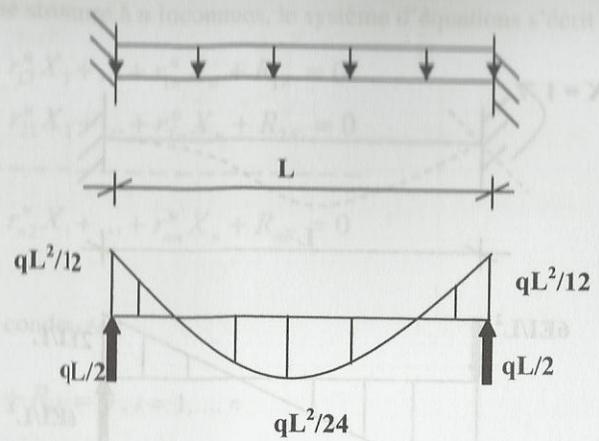


(a). Cas encastré-encastré

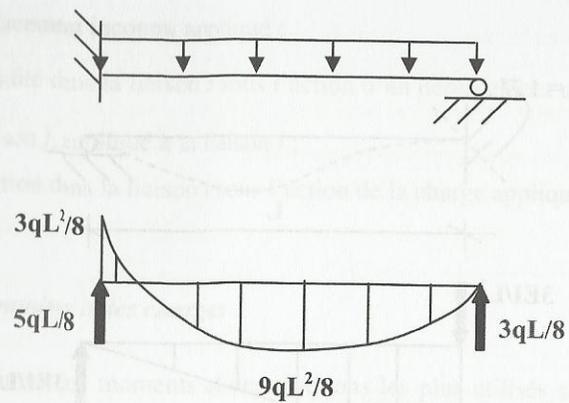


(b). Cas encastré-articulé

Figure 6.10. Barres soumises à une rotation unitaire

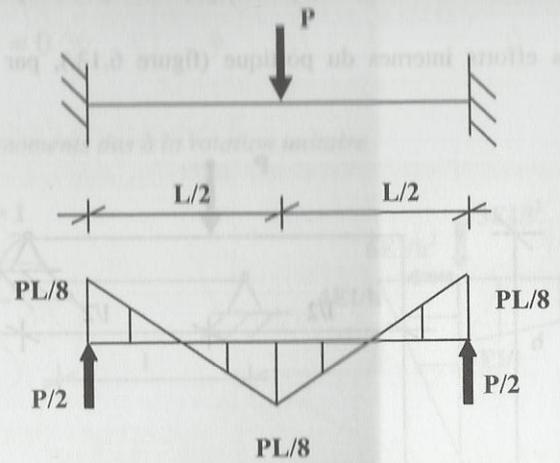


(a). Cas encastré-encastré

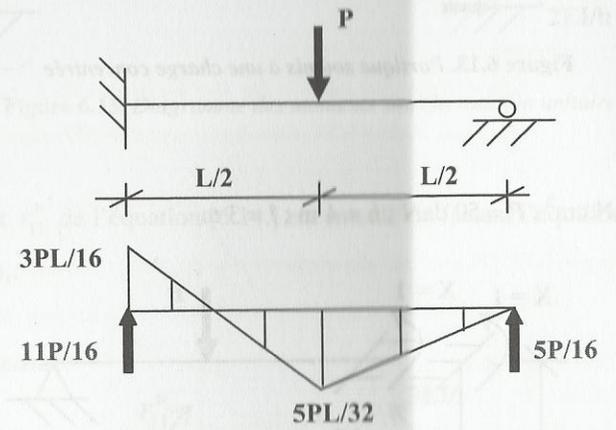


(b). Cas encastré-articulé

Figure 6.11. Barres soumises à une charge uniformément répartie



(a). Cas encastré-encastré



(b). Cas encastré-articulé

Figure 6.12. Barres soumises à une charge concentrée

### 6.2.3. Application - Étude d'un portique

Calculer les efforts internes du portique (figure 6.13.), par la méthode des déplacements.

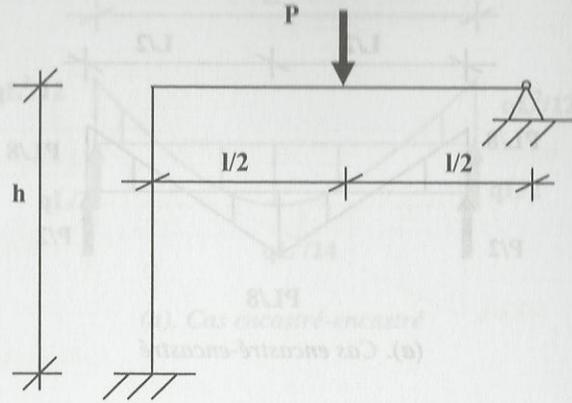


Figure 6.13. Portique soumis à une charge concentrée

Données :

$$EI = 2 \cdot 10^{10} \text{ daN.cm}^2 ; P = 50 \text{ daN} ; h = 4 \text{ m} ; l = 3 \text{ m}$$

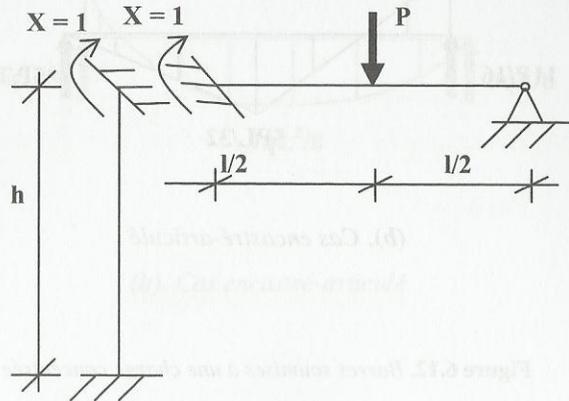


Figure 6.14. Équivalent du système de base

L'équation canonique du système (équation [6.12.]) s'écrit :

$$r_{11}^u X_1 + R_{1P} = 0 \quad [6.14.]$$

Diagramme des moments dus à la rotation unitaire

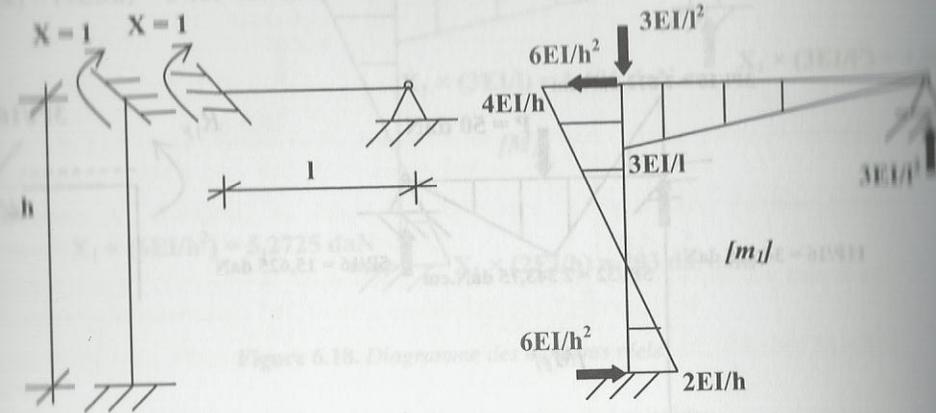


Figure 6.15. Diagramme des moments sous la rotation unitaire

Le coefficient  $r_{11}^u$  de l'équation [6.14.] est calculé en faisant l'équilibre au nœud du diagramme  $m_1$ .

Équilibre du nœud :

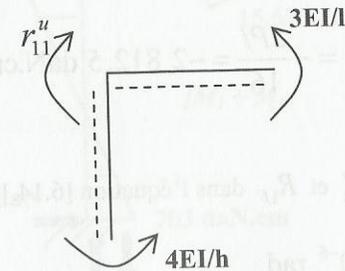


Figure 6.16. Équilibre du nœud

$$r_{11}'' - \frac{3EI}{l} - \frac{4EI}{h} = 0 \Rightarrow r_{11}'' = \frac{3EI}{l} + \frac{4EI}{h} = \left[ \frac{3}{l} + \frac{4}{h} \right] EI = 4,10^8 \text{ daN.cm}$$

Diagramme des moments sous la charge appliquée P

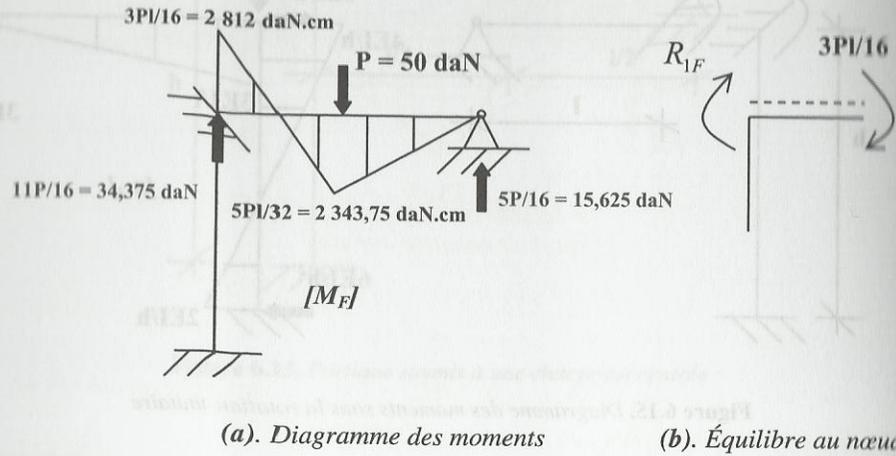


Figure 6.17. Diagramme des moments sous la charge concentrée

Faisons l'équilibre du nœud :

$$R_{1F} + \frac{3Pl}{16} = 0 \Rightarrow R_{1F} = -\frac{3Pl}{16} = -2 812,5 \text{ daN.cm}$$

En substituant les valeurs  $r_{11}''$  et  $R_{1F}$  dans l'équation [6.14.], on obtient :

$$X_1 = -\frac{R_{1F}}{r_{11}''} = 7,03 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

Pour passer d'un diagramme unitaire  $m_1$  à un diagramme réel  $M_1$ , il faut multiplier les valeurs de  $m_1$  par  $X_1$ .

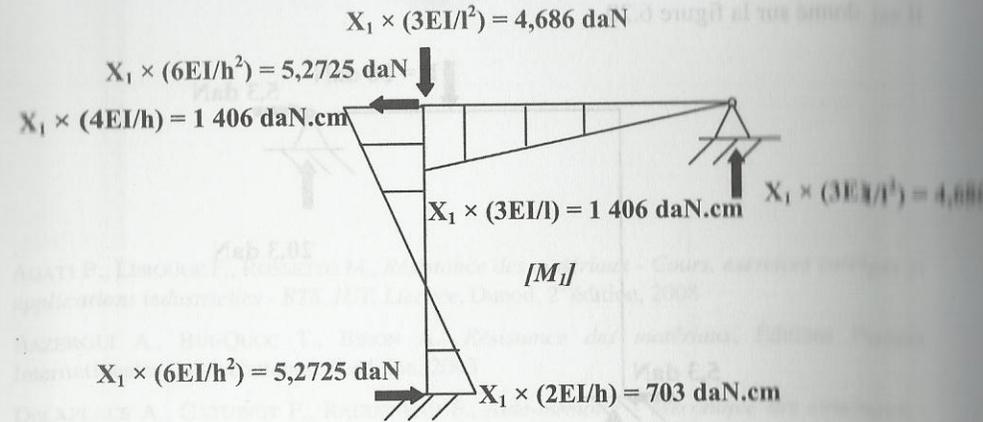


Figure 6.18. Diagramme des moments réels

Le diagramme final des moments est obtenu par superposition des moments  $M_1$  et  $M_F$  aux appuis. Le diagramme ainsi obtenu est :

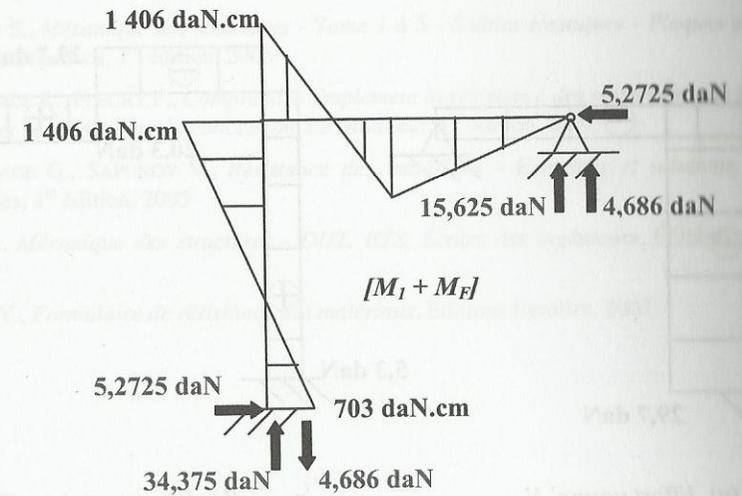


Figure 6.19. Diagramme des moments.

Notons que l'équilibre des moments au nœud est satisfait, figure 6.19.

Le diagramme final des réactions est ainsi obtenu par superposition des réactions et il est donné sur la figure 6.20.

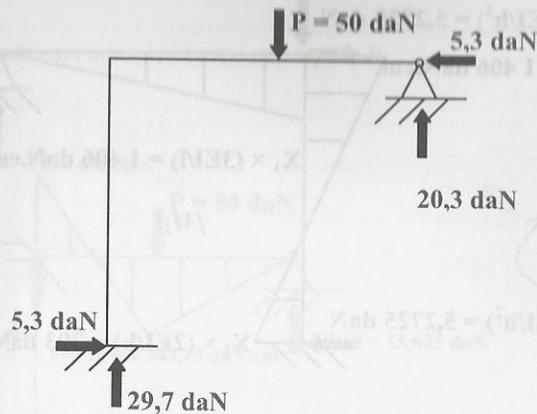


Figure 6.20. Diagramme des réactions aux appuis

À partir du diagramme des réactions, on trace les efforts internes  $N_x$  et  $T_y$ , figure 6.21.

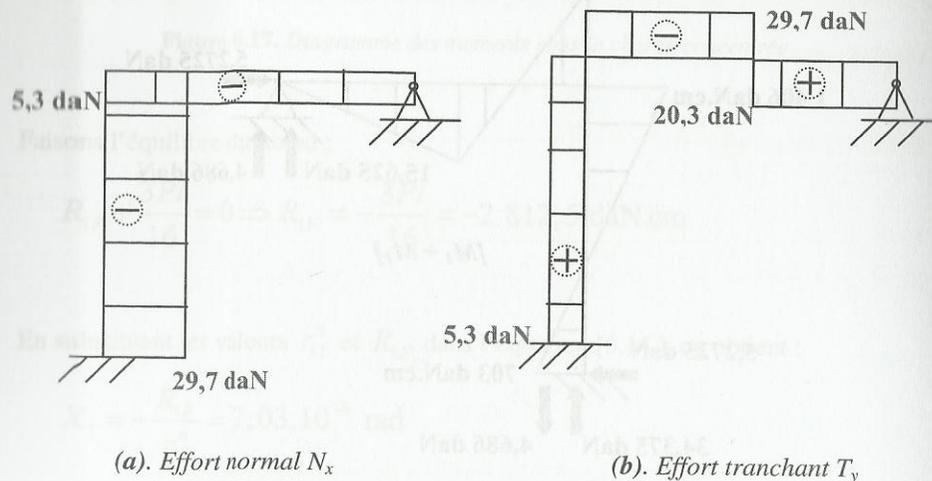


Figure 6.21. Diagramme des efforts internes  $N_x$  et  $T_y$

## Bibliographie

- AGATI P., LEROUGE F., ROSSETTO M., *Résistance des matériaux - Cours, exercices corrigés et applications industrielles - BTS, IUT, Licence*, Dunod, 2<sup>e</sup> édition, 2008
- BAZERGUI A., BUI-QUOC T., BIRON A., *Résistance des matériaux*, Éditions Presses Internationales Polytechniques, 3<sup>e</sup> édition, 2003
- DELAPLACE A., GATUINGT F., RAGUENEAU F., *Aide-mémoire - Mécanique des structures - Résistance des matériaux - IUT, licence, master*, Dunod, 1<sup>re</sup> édition, 2008
- DOUBRÈRE J.-C., *Résistance des matériaux-cours et exercices corrigés*, Éditions Eyrolles, 2001
- GOULET J., BOUTIN J., *Aide-mémoire - Résistance des matériaux*, Dunod, Le Moniteur, 9<sup>e</sup> édition, 2009
- GOULET J., *Résistance des matériaux*, Éditions Dunod, 1990
- LABRALDE J.-P., *Résistance des matériaux*, Éditions Masson, 1990
- LAROZE S., *Mécanique des structures - Tome 1 à 5 - Solides élastiques - Plaques et coques*, Éditions Cépaduès, 1<sup>re</sup> édition, 2005
- MOUTERDE R., FLEURY F., *Comprendre simplement la résistance des matériaux - La structure, principes et enjeux pour la conception*, Le Moniteur, 1<sup>re</sup> édition, 2007
- PLUVINAGE G., SAPUNOV V., *Résistance des matériaux - Exercices et solutions*, Éditions Cépaduès, 1<sup>re</sup> édition, 2005
- QUIN J., *Mécanique des structures - DUT, BTS, Écoles des ingénieurs*, Éditions Castella, 1997
- XIONG Y., *Formulaire de résistance des matériaux*, Éditions Eyrolles, 2007

Il nous faut l'équilibre des moments au droit du support, figure 6.21. Le diagramme final des moments est donné sur la figure 6.20.

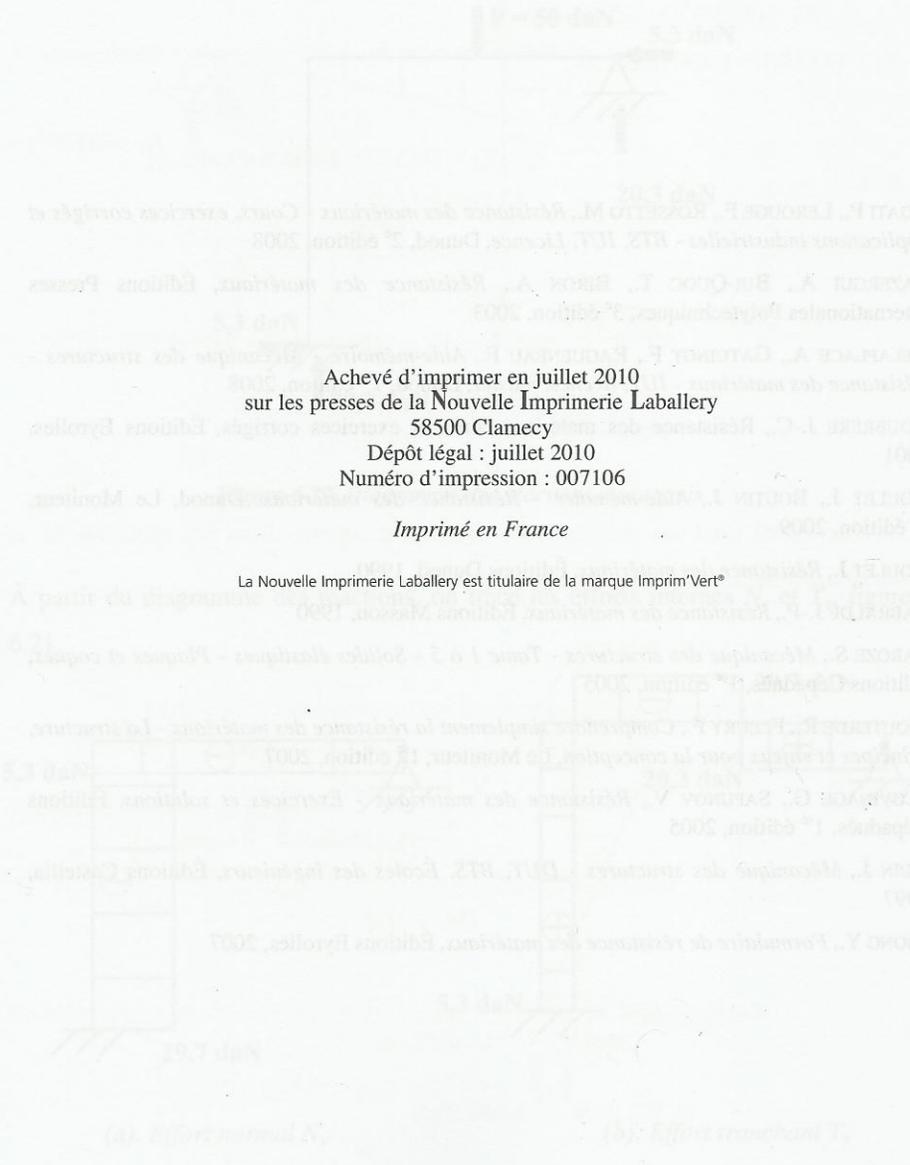


Figure 6.21. Diagramme des effets hyperstatiques  $N$  et  $T$ .

Achevé d'imprimer en juillet 2010  
 sur les presses de la Nouvelle Imprimerie Laballery  
 58500 Clamecy  
 Dépôt légal : juillet 2010  
 Numéro d'impression : 007106

Imprimé en France

La Nouvelle Imprimerie Laballery est titulaire de la marque Imprim'Vert®

# Résistance des matériaux

Cet ouvrage est un cours pratique de résistance des matériaux (RDM) qui permet de comprendre simplement les principes de calcul des structures en génie civil. Son axe pédagogique résume de manière synthétique les aspects théoriques et pratiques utilisés en RDM. Il rassemble des formules utiles pour une résolution rapide des problèmes de structures et contient plusieurs exemples corrigés. Les méthodes analytiques, les plus utilisées en calcul des systèmes isostatiques et hyperstatiques, sont développées en détail.

Un livre extrêmement utile pour toute personne effectuant des calculs de structures. Il s'adresse aux étudiants en Génie civil et en Génie mécanique, aux techniciens, aux ingénieurs et projeteurs, aux candidats à la préparation des concours (CAPET, agrégation de Génie civil, agrégation de Génie mécanique, classes préparatoires, ...).

## Au sommaire de l'ouvrage

### Chapitre 1

Généralités sur la RDM (objectifs de la RDM, conditions aux limites, notions d'appuis, principe fondamental de la statique, réactions d'appuis, efforts internes, ...)

### Chapitre 2

Caractéristiques géométriques des sections planes (centre de gravité, moment statique, moment d'inertie, théorème de Huyghens, ...)

### Chapitre 3

Sollicitations simples (traction/compression, cisaillement pur, flexion pure, torsion pure, ...)

### Chapitre 4

Sollicitations composées (flexion plane, flexion déviée, flexion composée, flexion-torsion, ...)

### Chapitre 5

Systèmes isostatiques en treillis (détermination du degré d'hyperstaticité, méthode des sections, ...)

### Chapitre 6

Systèmes hyperstatiques (calcul des poutres continues par la méthode des trois moments, calcul des portiques par la méthode des déplacements, ...)

*Mourad KHELIFA est Maître de conférences à l'Ecole Supérieure des Technologies et Industries du Bois (ENSTIB d'Epinal) rattachée à l'Université Henri Poincaré de Nancy-1 (UHP). Il participe également aux recherches du Laboratoire d'Etudes et de Recherche sur le MATériau Bois (LERMAB). Ses activités d'enseignement portent essentiellement sur la RDM, la mécanique des milieux continus (MMC) et les Euro-Codes.*



9 782713 531811

RDMCE

ISBN : 978 2 7135 3181 1