

CHAPITRE 4

Plasticité et résistance au cisaillement

*Problème 4.1 Triaxial sur un sable

Un échantillon sec de sable compact est soumis à un essai triaxial, on suppose que l'angle de frottement interne φ est voisin de 36° . Si la contrainte principale minimale σ_3 est de 300 kPa, pour quelle valeur de la contrainte maximale σ_1 l'échantillon se rompra-t-il ?

Solution

Il y aura « rupture » ou plutôt entrée en plasticité de l'échantillon, lorsque le cercle de Mohr sera tangent à la courbe intrinsèque.

Dans le cas du sable considéré, la courbe intrinsèque est constituée des 2 droites faisant un angle de 36° avec $O\sigma$ et passant par l'origine des axes.

Au début de l'essai, l'échantillon est soumis à un tenseur de contrainte isotrope et le cercle de Mohr se réduit à un point, d'abscisse σ_3 .

Lorsque l'on fait croître σ_1 , le diamètre du cercle de Mohr augmente, l'extrémité du diamètre correspondant à σ_3 restant fixe (Fig. 4.1), jusqu'au cercle de Mohr de rupture qui est tangent à la courbe intrinsèque.

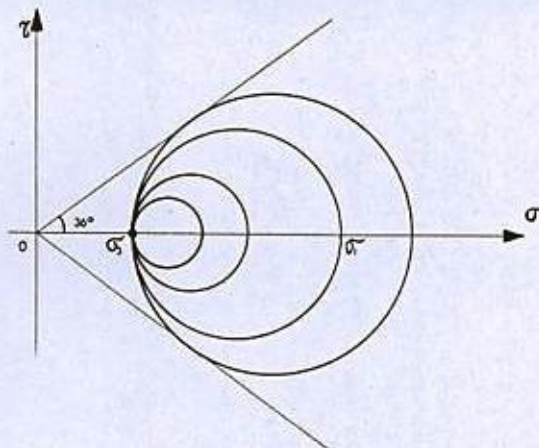


Fig. 4.1.

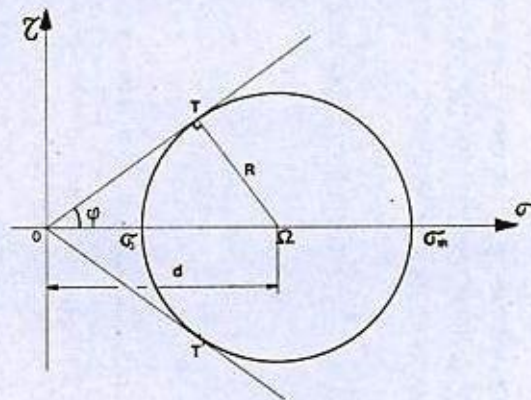


Fig. 4.2.

Soient d et R l'abscisse du centre et le rayon du cercle de Mohr de rupture. On a (Fig. 4.2)

$$\frac{R}{d} = \sin \varphi \quad \text{d'où : } \sigma_3 = d - R = \frac{R}{\sin \varphi} - R = R \frac{1 - \sin \varphi}{\sin \varphi}$$

$$\sigma_{1R} = d + R = \frac{R}{\sin \varphi} + R = R \frac{1 + \sin \varphi}{\sin \varphi}.$$

Par suite :

$$\frac{\sigma_{1R}}{\sigma_3} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Application numérique :

$$\sigma_3 = 300 \text{ kPa}$$

$$\varphi = 36^\circ$$

$$\pi/4 + \varphi/2 = 45 + 18 = 63^\circ$$

$$\tan 63^\circ = 1,96$$

$$\sigma_{1R} = 300 \times 1,96^2 = 1\,155 \approx 1\,160 \text{ kPa}.$$

Réponse

$$\sigma_{1R} = 1\,160 \text{ kPa}.$$

Problème 4.2 Triaxial sur sable avec cohésion

Résoudre le problème précédent en supposant que le sable possède une légère cohésion égale à 12 kPa.

Solution

Dans ce cas, la courbe intrinsèque est toujours constituée de deux droites symétriques par rapport à l'axe $O\sigma$ et faisant avec cet axe des angles de 36° .

Mais du fait de la cohésion, ces deux droites ne passent plus par l'origine mais par les points de coordonnées $\sigma = 0, \tau = \pm c$ (Fig. 4.3).

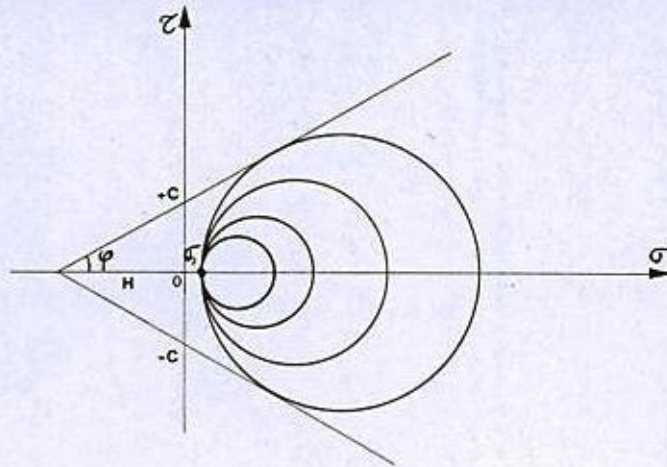


Fig. 4.3.

Un calcul analogue à celui effectué au cours du problème précédent, nous donne, en posant :

$$H = c \cot \varphi \quad (\text{Fig. 4.4})$$

$$\sigma_{iR} + H = (\sigma_3 + H) \tan^2(\pi/4 + \varphi/2)$$

soit :

$$\sigma_{iR} = (\sigma_3 + H) \tan^2(\pi/4 + \varphi/2) - H.$$

Application numérique :

$$\sigma_3 = 300 \text{ kPa}$$

$$\varphi = 36^\circ$$

$$\cot \varphi = 1,376$$

$$\tan^2(\pi/4 + \varphi/2) = 3,85$$

$$c = 12 \text{ kPa}$$

$$H = c \cot \varphi = 16,5 \approx 17 \text{ kPa}$$

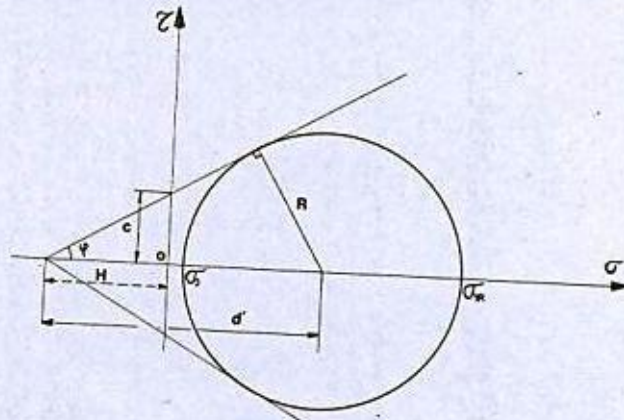


Fig. 4.4.

d'où :

$$\sigma_{1R} = (300 + 17) \times 3,85 - 17 = 1203 \neq 1\,200 \text{ kPa.}$$

Réponse

$$\sigma_{1R} = 1\,200 \text{ kPa.}$$

★**Problème 4.3** *Mesure de c et φ à l'aide d'un essai triaxial*

On effectue deux essais triaxiaux sur un matériau cohérent. Dans le premier, la pression latérale est de 200 kPa et la rupture se produit quand on applique une pression verticale supplémentaire de 600 kPa. Au cours du deuxième essai la pression latérale est de 300 kPa et la rupture survient lorsqu'on exerce une contrainte verticale supplémentaire de 800 kPa (Fig. 4.5).

Quelles valeurs peut-on attribuer, à la suite de ces essais, à c et à φ pour le matériau considéré ?

Solution

Chacune des deux expériences fournit un cercle de Mohr limite qui conduit à la relation établie au cours de l'exercice précédent :

$$\sigma_{1R} = (\sigma_3 + H) \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - H.$$

Posons : $K = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$.

Pour le premier essai nous avons :

$\sigma_3 = 200 \text{ kPa}$ et $\sigma_{1R} = 200 + 600 = 800 \text{ kPa}$.

Pour le second essai nous avons :

$\sigma_3 = 300 \text{ kPa}$ et $\sigma_{1R} = 300 + 800 = 1100 \text{ kPa}$.

On a donc les relations suivantes :

$800 - 200 K = H(K - 1)$ (1)

$1100 - 300 K = H(K - 1)$ (2)

D'où l'on tire : $K = 3$ soit $\tan^2(\pi/4 + \varphi/2) = 3$.

Donc : $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = 60^\circ$ d'où $\varphi = 30^\circ$.

L'équation (1) donne alors : $H = \frac{800 - 200 K}{K - 1} = 100$

Soit : $c \cot \varphi = 100$

d'où : $c = 100 \tan \varphi = 100 \tan 30^\circ = 100 \sqrt{3}/3 = 57,7 \text{ kPa}$.

$c \approx 58 \text{ kPa}$.

Résumé des réponses

$c = 58 \text{ kPa}$; $\varphi = 30^\circ$.

Remarque : Le résultat peut être également obtenu graphiquement en construisant les deux cercles de Mohr et en traçant leur tangente commune comme indiqué sur la figure 4.5.

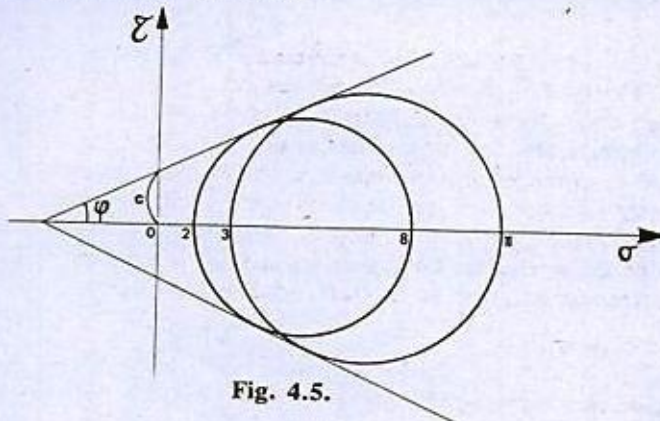


Fig. 4.5.

Résumé des réponses

$$s = 13,6 \text{ lb/in}^2 \text{ ou } 94 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_3 = 12 \text{ lb/in}^2 \text{ ou } 83 \text{ kPa}$$

$$\sigma_3 = 28 \text{ lb/in}^2 \text{ ou } 193,5 \text{ kPa} .$$

****Problème 4.6 Interprétation de différents types d'essais triaxiaux drainés, non drainés, consolidés, non consolidés

Un certain nombre d'essais triaxiaux ont été réalisés sur des échantillons d'argile identiques, les processus d'essai pour les échantillons X et Y différant seulement sur un point.

Tracer dans chaque cas les différents cercles de Mohr de rupture en contraintes totales et effectives.

Quel est dans chaque cas, l'échantillon qui est soumis à la plus grande contrainte de cisaillement ?

1) Essai consolidé drainé (c.d.)

Contrainte de consolidation σ_3

- Vitesse d'écrasement pour X : 1 mm/min.
- Vitesse d'écrasement pour Y : 0,005 mm/min.

2) Essai consolidé drainé (c.d.)

Contrainte de consolidation $\sigma_3 = 0,3 \text{ MPa}$

- X a été soumis précédemment à une contrainte de préconsolidation de 0,2 MPa (vitesse d'écrasement = 0,005 mm/min).
- Y a été soumis précédemment à une contrainte de préconsolidation de 0,4 MPa (même vitesse d'écrasement).

3) Essai consolidé drainé pour Y (essai c.d.), consolidé non drainé pour X (essai c.u.)

La contrainte de consolidation σ_3 est la même pour les deux échantillons.

4) Les deux échantillons sont surconsolidés à 0,6 MPa.

- l'essai sur l'échantillon X est drainé et consolidé à 0,2 MPa.
- l'essai sur l'échantillon Y est non drainé et consolidé à une contrainte σ_3 telle que la contrainte effective σ'_3 au moment de la rupture soit égale à $\sigma'_3 = 0,2 \text{ MPa}$.

5) Essai consolidé non drainé (essai c.u.)

Contrainte de consolidation σ'_3 , Y est non remanié, X est remanié mais a été recompressé à la même densité que Y. L'argile est une argile sensible.

Solution

De façon générale, on peut dire que pour un échantillon donné soumis à un certain état de contrainte donné, le cercle de Mohr en contraintes effectives se déduit du cercle de Mohr en contraintes totales par une translation de u (égale à la pression interstitielle).

Si la pression interstitielle est nulle en tout point de l'échantillon (essai drainé) les cercles de Mohr en contraintes totales et effectives sont alors confondus.

Rappelons aussi que la contrainte de cisaillement maximum subie par l'échantillon est égale au rayon du cercle de Mohr de rupture.

1) En fait, l'essai réalisé à la vitesse de 1 mm/min est trop rapide pour être considéré comme un essai drainé. L'argile étant un matériau de très faible perméabilité, des pressions interstitielles vont apparaître dans l'échantillon au cours de l'essai. Soit u cette pression au moment de la rupture au centre de l'échantillon. L'essai sur X peut être considéré comme drainé. C'est l'échantillon Y qui supportera la contrainte de cisaillement la plus forte car il est soumis à une contrainte radiale effective plus élevée que l'échantillon X (Fig. 4.9).

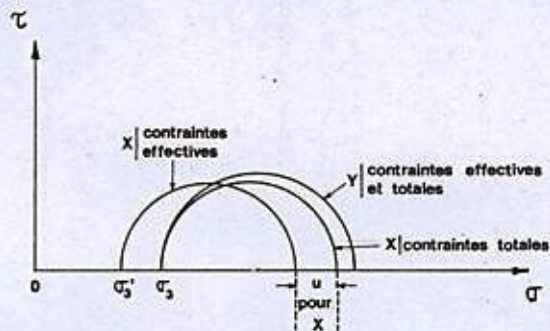


Fig. 4.9.

Donc, le cercle de Mohr de rupture de l'échantillon Y aura un diamètre supérieur à celui du cercle de Mohr de rupture de l'échantillon X (cf. Fig. 4.9).

2) L'échantillon Y ayant subi une contrainte de préconsolidation supérieure à celle subie par l'échantillon X , aura des caractéristiques mécaniques meilleures, et en particulier une résistance au cisaillement plus élevée (cf. Fig. 4.10).

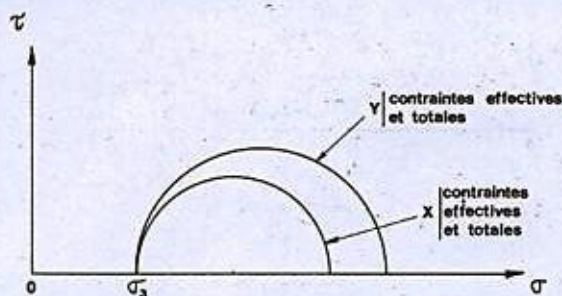


Fig. 4.10.

3) On retrouve le même problème et donc la même solution qu'à la question 1.

4) On admet avec Roscoe, Schofield et Wroth [33] que la « surface d'état limite » est la même dans l'espace e, p (contrainte moyenne), q (déviateur) quel que soit le type d'essai.

L'échantillon Y est non drainé, son indice des vides est constant au cours du cisaillement soit e_0 .

L'échantillon X est drainé, son indice des vides augmente au cours du cisaillement (sol surconsolidé), en fin d'essai soit $e_f > e_0$.

Dans l'espace p, q, e pour p constant q décroît avec e [33] donc le rayon du cercle de Mohr de rupture sera plus petit pour l'échantillon X que pour l'échantillon Y (Fig. 4.11).

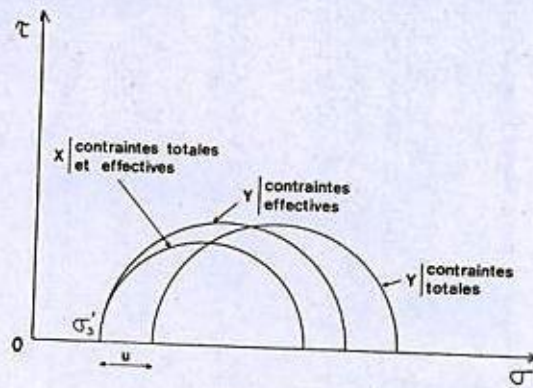


Fig. 4.11.

5) L'argile étant sensible, ses propriétés mécaniques diminuent lors du remaniement, en particulier la contrainte maximale de cisaillement supportée par Y sera plus élevée que celle supportée par X (cf. Fig. 4.12).

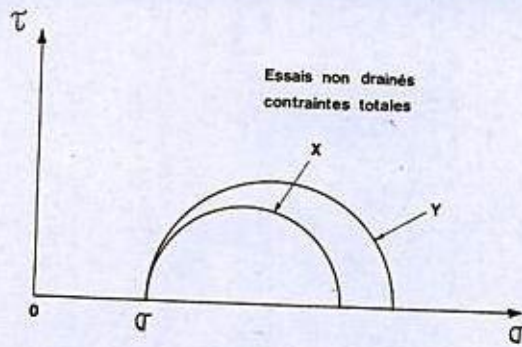


Fig. 4.12.

★★Problème 4.7 Calcul de la résistance à la compression simple à partir d'un essai triaxial consolidé non drainé

On effectue un essai consolidé non drainé (c.u.) à l'appareil triaxial sur une argile peu plastique de poids volumique sec $\gamma_d = 1,7 \times 10^4 \text{ N/m}^3$. L'échantillon a été prélevé à une profondeur de 8,15 m. La porosité de l'argile est $n = 0,35$. L'essai c.u. fournit les valeurs suivantes des paramètres :

$$\varphi_{cu} = 14^\circ \quad c_{cu} = 4 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

Calculer la valeur de la résistance à la compression simple d'un échantillon saturé de cette argile prélevé à la même profondeur (on supposera que l'échantillon est resté parfaitement saturé entre l'instant où il a été extrait du sol et l'instant où il a été soumis à l'essai de compression simple).

Solution

Pour l'échantillon d'argile saturée, la résistance à la compression simple est donnée par :

$$R_c = 2 c_u.$$

Il s'agit donc de déterminer c_u à partir des paramètres φ_{cu} et c_{cu} .

Traçons dans le plan de Mohr, le cercle de Mohr en contraintes totales correspondant à l'essai consolidé non drainé (Fig. 4.13). La contrainte de consolidation σ_0 est égale à la valeur de σ_3 au cours de l'essai. On notera bien qu'à la fin de la phase de consolidation $u = 0$, le drainage étant possible. Donc $\sigma_0 = \sigma_3$ est une contrainte effective ; à la fin de l'écrasement au contraire, le drainage n'étant pas permis, $u \neq 0$, donc $\sigma_3 = \sigma_0$ est une contrainte totale.

On notera également que la droite $O' T$ n'est pas une courbe intrinsèque puisqu'on a affaire au cours de l'essai à un matériau constitué de deux phases (liquide et solide).

Soit r le rayon du cercle de Mohr.

On a :

$$c_u = (\sigma_1 - \sigma_0)/2 = r \quad \text{et} \quad \Omega T/O' \Omega = \sin \varphi_{cu}$$

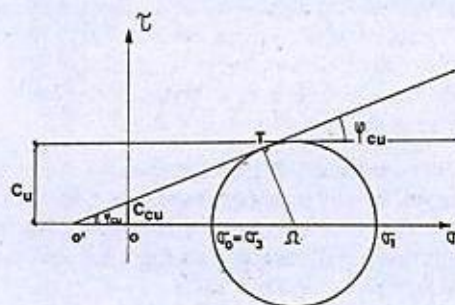


Fig. 4.13.

une rotation de $\pi/4 + \varphi/2$ au cours du cisaillement, alors qu'au triaxial les directions principales du tenseur des contraintes restent les mêmes, le plan de cisaillement n'étant pas imposé et faisant l'angle $\alpha = \pi/4 + \varphi/2$ avec l'horizontale (Fig. 4. 17).

****Problème 4.11 Essai triaxial : calcul de la pression interstitielle à la rupture et du coefficient A_v de Skempton**

Une vase a pour caractéristiques mécaniques effectives $\varphi' = 25^\circ$, $c' = 16$ kPa. On effectue sur un échantillon de ce matériau un essai triaxial consolidé non drainé avec mesure de la pression interstitielle. Sachant que la pression latérale est de 50 kPa et que le déviateur de rupture mesuré est de 80 kPa, calculer la valeur de la pression interstitielle au moment de la rupture.

Quelle est alors la valeur du coefficient A_v de Skempton ?

Solution

Le cercle de Mohr des contraintes effectives (C') est tangent à la droite de Coulomb d'équation

$$\tau = c' + \sigma' \tan \varphi'$$

et d'autre part, il se déduit du cercle de Mohr en contraintes totales (C) par une translation de $-u$.

En se reportant à la figure 4.18, on peut donc écrire :

$$\frac{\Omega T}{A\Omega} = \sin \varphi'$$

soit
$$\frac{R}{H' + d - u} = \sin \varphi' \tag{1}$$

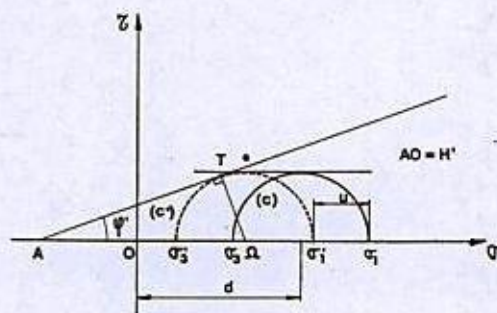


Fig. 4.18. Essai triaxial consolidé non drainé

192 *Plasticité et résistance au cisaillement*

en désignant par d l'abscisse du centre du cercle de Mohr des contraintes totales, et par R son rayon.

On a :

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$d = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_3) + 2\sigma_3]$$

et d'autre part, $H' = c' \cot \varphi'$.

L'équation (1) nous donne enfin :

$$u = H' + d - \frac{R}{\sin \varphi'} = c' \cot \varphi' + d - \frac{R}{\sin \varphi'}$$

Application numérique :

$$R = 80/2 = 40 \text{ kPa}$$

$$d = \frac{1}{2}(80 + 2 \times 50) = 90 \text{ kPa}$$

$$\sin 25^\circ = 0,423 \quad \cot 25^\circ = 2,145$$

$$\text{d'où : } u = 16 \times 2,145 + 90 - 40/0,423 = 29,7 \text{ kPa}$$

soit $u \approx 30 \text{ kPa}$.

Pour un échantillon saturé, $B = 1$, la relation de Skempton s'écrit donc :

$$\Delta u = \Delta \sigma_r + A(\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_r)$$

Dans l'essai triaxial classique

$$\Delta \sigma_r = 0 \quad (\sigma_3 = \text{Cte})$$

par suite

$$A_r = (\Delta u / \Delta \sigma_1)_r$$

Au début de l'essai l'échantillon est consolidé sous une pression hydrostatique de 50 kPa (Fig. 4.19).

$$\sigma_3 = \sigma'_3 = (\sigma_1)_0 = (\sigma'_1)_0 = 50 \text{ kPa} \quad u = 0$$

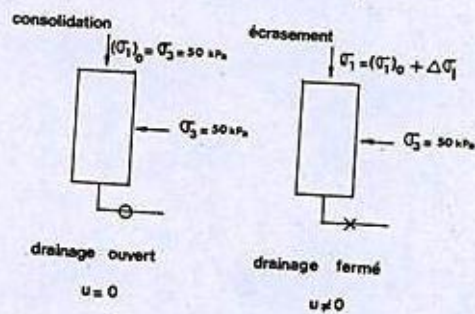


Fig. 4.19.

On ferme alors les orifices de drainage et on écrase l'échantillon à $\sigma_3 = \text{Cte} = 50 \text{ kPa}$.
On a donc :

$$\Delta u = u_f - 0 = 30 \text{ kPa}$$

$$\Delta \sigma_1 = (\sigma_1)_f - (\sigma_1)_0 = (\sigma_1 - \sigma_3) + \sigma_3 - (\sigma_1)_0$$

$$= 80 + 50 - 50 = 80 \text{ kPa} .$$

Il vient donc finalement :

$$A_f = 30/80 = 0,38 .$$

Remarque : Cette valeur de A_f correspond à une argile saturée légèrement surconsolidée ($0,3 < a_f < 0,7$ d'après Leonards). Ceci est vraisemblable avec $c' = 16 \text{ kPa}$ (si l'argile était normalement consolidée on aurait $c' = 0$).

Résumé des réponses

$$u = 30 \text{ kPa} ; \quad A_f = 0,38 .$$

***Problème 4.12 Détermination du chemin des contraintes suivi au cours de différents essais

On réalise les essais suivants :

- essai œdométrique
- essai à la boîte de cisaillement (contrainte normale = σ_N)
- essai triaxial c.d. classique ($\sigma_3 = \sigma_2 = \text{Cte}$)
- essai triaxial c.d. isotrope ($\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_1$)
- essai triaxial à contrainte moyenne constante.

1) Tracer dans le plan $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, des contraintes principales, le chemin des contraintes suivi au cours des différents essais.

2) Tracer dans le plan p, q le chemin des contraintes suivi au cours des différents essais.

p et q sont définis par les relations suivantes :

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad q = \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_1 - \sigma_3 .$$

3) Tracer dans le plan de Mohr, les cercles de Mohr représentatifs de l'état de contrainte en début et en fin d'essai.

Préciser dans chacun des cas si les directions principales restent fixes au cours de l'essai.

Application numérique

$$t = 5 \text{ minutes} = 5 \times 60 \text{ secondes}$$

$$h' = 370 \text{ cm} \quad h = 2 \text{ cm}$$

$$1 \text{ jour} = 86\,400 \text{ secondes d'où : } t = 5 \times 60 \times \left(\frac{370}{2}\right)^2 \times \frac{1}{86\,400}$$

$$t = 118,8 \approx 119 \text{ jours, soit : 4 mois.}$$

Remarque :

La donnée $U = 50\%$ est surabondante, le résultat est le même quelque soit U .

Réponse

$$t' = 4 \text{ mois.}$$

***Problème 3.11 Etablissement des courbes de compressibilité et de consolidation. Calcul de tassement. Evaluation du préchargement

On réalise un remblai autoroutier de 2,40 m de hauteur sur une couche d'argile homogène saturée d'épaisseur $2H = 4$ m, reposant sur un gravier sableux propre pratiquement incompressible. La nappe se situe au niveau du terrain naturel. La densité du remblai est de 2,1 (Fig. 3.12).

On prélève un échantillon d'argile à 2 m de profondeur. Un essai œdométrique exécuté sur cet échantillon donne les résultats consignés dans les tableaux 3F et 3G.

La hauteur initiale de l'échantillon est $2h_0 = 24,0$ mm. La teneur en eau initiale de l'argile saturée est $w = 69\%$ et la densité de ses grains est de 2,7.

a) Représenter graphiquement les courbes de compressibilité ($e - \lg \sigma$) et de consolidation ($e - \lg t$).

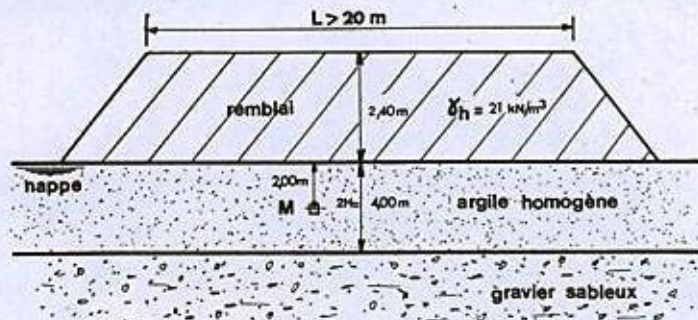


Fig. 3.12.

Déterminer la valeur probable de la pression de consolidation σ_c , la valeur de l'indice C_c , et celle du coefficient de consolidation c_v .

b) Quel est le tassement total prévisible s sous le remblai ? Au bout de combien de temps ce tassement sera-t-il pratiquement atteint ?

c) Quelle serait l'épaisseur totale de remblai à mettre en œuvre pour obtenir en 4 mois la totalité des tassements calculés sous le remblai initialement prévu ?

Tableau 3F. Compressibilité
(Chaque palier de charge est maintenu pendant 24 heures)

Contrainte (daN/cm ²)	Indice des vides
0,05	1,82
0,1	1,81
0,2	1,80
0,4	1,74
0,8	1,40
1,6	0,80
3,2	0,16

Tableau 3G. Consolidation
(de 0,4 à 0,8 daN/cm²)

Temps (min)	Indice des vides
0,1	1,700
0,2	1,690
0,3	1,683
0,5	1,675
1	1,650
2,5	1,600
5	1,550
10	1,504
20	1,451
50	1,432
100	1,421
200	1,418
500	1,409
1 400	1,400

Solution

a) Le tableau 3F de l'énoncé permet de construire point par point le diagramme œdométrique ($e, \lg \sigma'$) de l'argile, représenté par la figure 3.13.

La valeur de l'indice des vides initial s'écrit, puisque le matériau est saturé :

$$e_0 = w(\gamma_s / \gamma_w)$$

d'où $e_0 = 0,69 \times 2,7 = 1,86$.

Le tableau 3G permet de construire, point par point, la courbe de consolidation ($e - \lg t$) correspondant à l'application d'une contrainte constante de 0,8 daN/cm², après consolidation sous 0,4 daN/cm². Cette courbe est représentée sur la figure 3.14.

Contrainte de consolidation σ'_c

La contrainte de consolidation σ'_c est la plus grande contrainte effective à laquelle a été soumis l'échantillon de sol au cours de son histoire. On peut

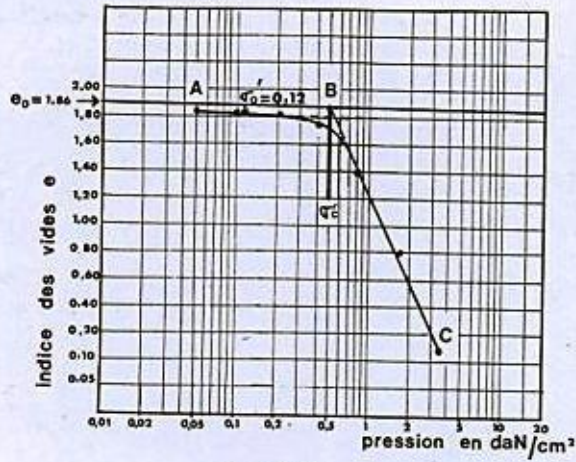


Fig. 3.13.

l'estimer par la construction graphique indiquée par la première figure du paragraphe 3.4.2 du Costet-Sanglerat.

Cette construction donne dans le cas de l'argile étudiée :

$$\sigma'_c \approx 0,50 \text{ daN/cm}^2 \quad (\text{Fig. 3.13}).$$

Indice de compression C_c

La branche rectiligne *BC* du diagramme œdométrique permet la détermination de l'indice de compression C_c par l'intermédiaire de la formule :

$$C_c = \frac{-\Delta e}{\Delta \lg \sigma'}.$$

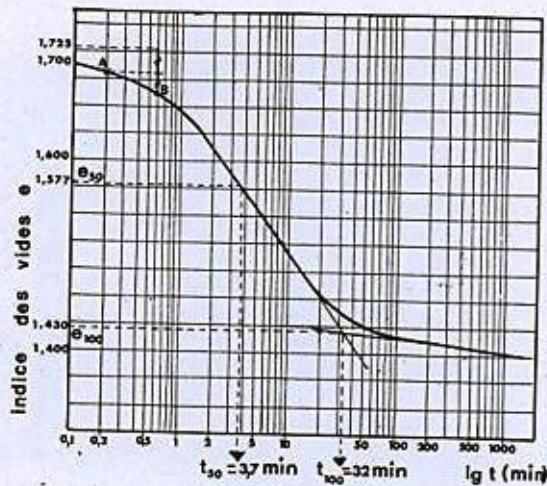


Fig. 3.14.

On a : $\sigma'_1 = 0,80 \text{ daN/cm}^2$ $e_1 = 1,40$
 $\sigma'_2 = 3,20 \text{ daN/cm}^2$ $e_2 = 0,16$

$$\Delta e = 0,16 - 1,40 = -1,24$$

$$\Delta \lg \sigma' = \lg \sigma'_2 - \lg \sigma'_1 = \lg \frac{\sigma'_2}{\sigma'_1} = \lg \frac{3,2}{0,8} = \lg 4$$

d'où : $C_c = -\frac{-1,24}{0,602} = 2,06$

soit $C_c = 2,1$.

Coefficient de consolidation

Le coefficient de consolidation c_v se détermine par la méthode de Casagrande.

L'intersection des 2 parties rectilignes de la courbe de consolidation ($e, \lg t$) donne la valeur e_{100} de l'indice des vides qui correspond à la fin de la phase dite de consolidation primaire (Fig. 3.14).

L'indice des vides initial corrigé e_{oc} est obtenu de la manière suivante (Fig. 3.15).

On choisit un temps voisin de l'origine, ici $t_1 = 0,1$ minute, et un temps 4 fois plus grand $t_2 = 4 t_1 = 0,4$ minute.

On trace le début de la courbe de consolidation dans les axes (t, e) (échelle arithmétique pour l'axe des temps (')).

On a :

$$e_1 = 1,700 \text{ pour } t = t_1 \quad (\text{lecture directe})$$

$$e_2 = 1,678 \text{ pour } t = t_2 \quad (\text{interpolation}).$$

En assimilant suivant la méthode de Casagrande, la courbe (e, t) à une parabole d'axe horizontal au voisinage de l'origine, il vient par suite des propriétés classiques de la parabole :

$$e_{oc} - e_1 = e_1 - e_2 \quad \text{d'où } e_{oc} = 1,721.$$

La figure 3.14 donne :

$$e_{100} = 1,430 \quad t_{100} \approx 32,5 \text{ min}$$

par suite :

$$e_{50} = \frac{e_{oc} + e_{100}}{2} = \frac{1,721 + 1,430}{2} = 1,576$$

d'où $t_{50} \approx 3,7 \text{ min.}$

(1) Dans la pratique on peut faire directement la construction sur la courbe ($e, \lg t$), si celle-ci est tracée avec une précision suffisante pour effectuer l'interpolation.

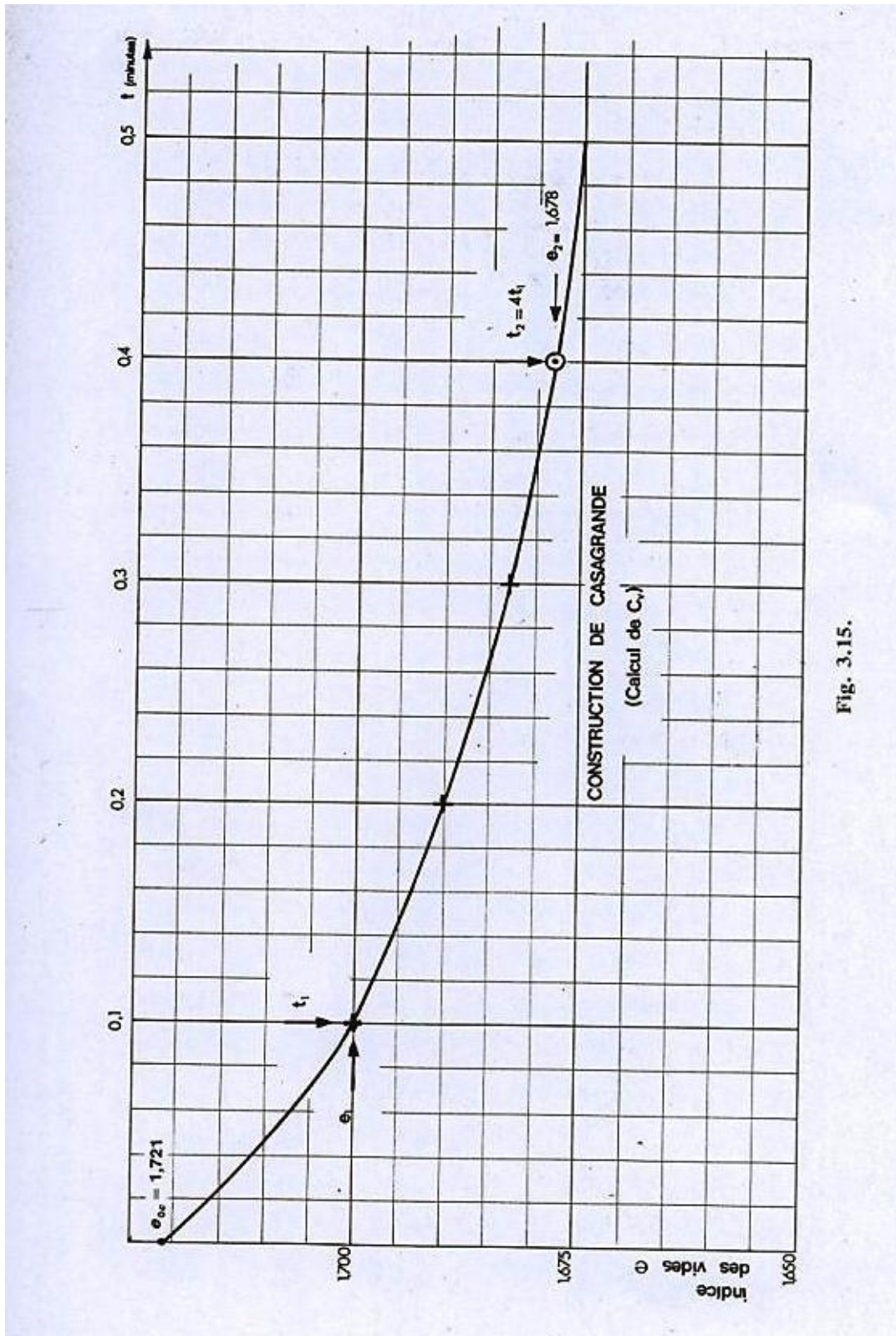


Fig. 3.15.

La hauteur de l'échantillon au début de la consolidation sous $0,8 \text{ daN/cm}^2$ a pour valeur $2h$ et l'on a :

$$\frac{2h}{1 + e_{oc}} = \frac{2h_0}{1 + e_0}$$

d'où : $h = h_0 \frac{1 + e_{oc}}{1 + e_0} = 12,0 \times \frac{2,721}{2,860} = 11,4 \text{ mm} .$

Le coefficient de consolidation c_v est alors donné par l'expression :

$$c_v = \frac{0,197 \times h^2}{t_{50}}$$

d'où :

$$c_v = \frac{0,197 \times (1,14)^2}{3,7 \times 60} \approx 1,15 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s} .$$

b) Tassement total prévisible dû au remblai

Etant donné la faible épaisseur de la couche d'argile compressible comparée à la largeur du remblai (la largeur d'une autoroute est d'au moins 25 m) on peut admettre avec une bonne approximation que la distribution des contraintes apportée par la surcharge due au remblai est uniforme au sein de la couche d'argile (Fig. 3.16).

On a donc :

$$\Delta\sigma' = 2,40 \times 21 = 50 \text{ kPa} \approx 0,50 \text{ daN/cm}^2 .$$

Calculons maintenant la contrainte verticale effective *initiale* σ'_0 en M, à mi-hauteur de la couche d'argile :

$$\sigma'_0 = H \times \gamma'_{\text{argile}} .$$

Calculons γ'_{argile} :

$$\gamma' = \frac{\gamma_s - \gamma_w}{\gamma_s} \times \gamma_d$$

$$\gamma_d = \frac{\gamma_s}{1 + e_0} .$$

On rappelle que l'on a trouvé $e_0 = 1,86$ d'où :

$$\frac{\gamma'}{\gamma_w} = \frac{\gamma_s - \gamma_w}{1 + e_0} = \frac{2,70 - 1,00}{2,86} = 0,594$$

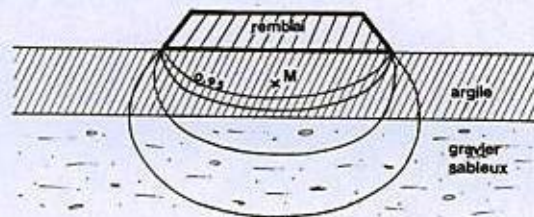


Fig. 3.16.

132 *Calcul pratique des tassements*

donc :

$$\sigma'_0 = 2,00 \times 5,94 = 11,9 \text{ kPa} \neq 0,12 \text{ daN/cm}^2.$$

Nous avons trouvé à la première question $\sigma'_c = 0,50 \text{ daN/cm}^2$.

On a donc $\sigma'_0 < \sigma'_c$ très nettement.

L'argile est donc *surconsolidée*.

Après construction du remblai, la contrainte effective *actuelle* au centre de la couche d'argile a donc pour valeur :

$$\sigma'_0 + \Delta\sigma' = 0,12 + 0,50 = 0,62 \text{ daN/cm}^2 \quad (\text{cf. Fig. 3.17})$$

et l'on a :

$$\sigma'_0 + \Delta\sigma' > \sigma'_c.$$

Le diagramme œdométrique (Fig. 3.13) nous donne

pour $\sigma'_0 = 0,12 \text{ daN/cm}^2$ $e = 1,80$

pour $\sigma'_0 = 0,62 \text{ daN/cm}^2$ $e = 1,56$

La relation : $\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta e}{1 + e}$ fournit donc la valeur du tassement :

$$\Delta h = 400 \times \frac{1,80 - 1,56}{2,80} = 34,3 \text{ cm}.$$

On arrondira à :

$$\Delta h = 34 \text{ cm}.$$

Il y aurait lieu de vérifier également la sécurité au poinçonnement de la couche d'argile sous le poids du remblai. Celle-ci est assurée dans le cas présent avec :

$$c_u = 40 \text{ kPa}.$$

c) *Épaisseur de remblai à prévoir pour obtenir en 4 mois la totalité du tassement calculé.*

— On peut tout d'abord se demander le temps que mettrait la couche d'argile pour tasser de 34 cm. Théoriquement, un temps infini.

Mais en pratique, on considère le tassement terminé lorsque $T_v = 2$, c'est-à-dire pour $U = 99,4\%$ (cf. tableau III, § 3.5.2 du Costet-Sanglerat).

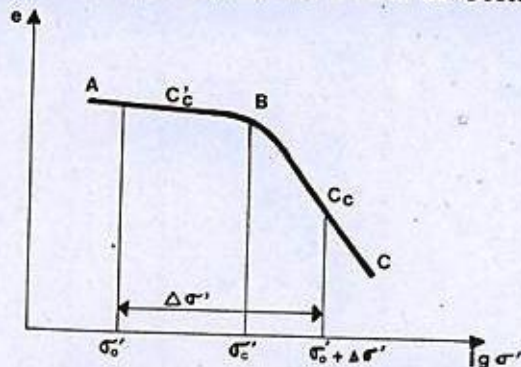


Fig. 3.17.

On a :

$$T_v = (c_v/h^2) t$$

et, puisqu'il s'agit d'un problème de couche ouverte, on a ici :

$$h = H/2$$

d'où : $t = \frac{2 \times (200)^2}{1,15 \times 10^{-3}}$ secondes

soit : $t = \frac{8}{1,15} \times 10^7 \times \frac{1}{8,64 \times 10^4} = 805$ jours

soit : 2 ans 2 mois 15 jours.

— On veut réduire le temps de tassement à 4 mois, soit 120 jours.

Dans ces conditions le facteur temps a pour valeur :

$$T_v = \frac{1,15 \times 10^{-3} \times 120 \times 8,64 \times 10^4}{(200)^2} = 0,298 \neq 0,30.$$

Le tableau III, page 123 du Costet-Sanglerat donne $U = 0,613$ pour $T_v = 0,30$.

Il faut donc que les 34 cm de tassement correspondent à 61,3 % du tassement S obtenu sous une surcharge plus forte d'où :

$$S = \frac{0,34}{0,613} = 0,55 \text{ m.}$$

Le tassement S se calcule par l'équation :

$$S = H \times \frac{C_c}{1 + e_0} \lg \left(\frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'^*}{\sigma'_c} \right).$$

Posons $x = \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'^*}{\sigma'_c}$.

Il vient : $\lg x = \frac{55 \times 2,86}{400 \times 2,1} = 0,187$.

D'où : $x = 1,54$.

D'où finalement :

$$\Delta\sigma'^* = 1,54 \times 0,50 - 0,12 = 0,65 \text{ daN/cm}^2$$

$$\Delta\sigma'^* = 65 \text{ kPa (1)}.$$

La hauteur de remblai correspondante est donc :

$$H' = \frac{65}{21} = 3,10 \text{ m.}$$

La surépaisseur de remblai à prévoir est donc :

$$\Delta H = 3,10 - 2,40 = 0,70 \text{ m.}$$

(1) De même que précédemment, cette valeur peut être obtenue directement sur le diagramme $(e, \lg \sigma')$.

Il est donc possible de stabiliser rapidement les tassements, si l'on prévoit d'exécuter provisoirement pendant 4 mois, une surépaisseur de remblai de 70 cm environ qui sera éliminée par la suite. On n'aura d'ailleurs simplement qu'à éliminer $70 - 34 = 36$ cm compte tenu des tassements obtenus.

Résumé des réponses

a) Voir figures 3.13 et 3.14.

$$\sigma'_c = 0,5 \text{ daN/cm}^2; \quad C_c = 2,1; \quad c_v = 1,15 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}.$$

b) $s = 34$ cm après 2 ans 2 mois 15 jours.

c) Environ 310 cm.

**** Problème 3.12 Calcul de modules œdométriques. Comportement d'une argile surconsolidée**

En reprenant les données du problème n° 3.11 :

a) Calculer le module œdométrique E' de l'argile relatif à la branche BC du diagramme œdométrique et correspondant à l'accroissement de contrainte produit par le remblai (Fig. 3.12) à mi-hauteur de la couche d'argile.

Comparer le résultat obtenu avec celui déterminé par la formule approchée donnée dans le Costet-Sanglerat, § 3.4.2, page 112.

b) Calculer l'indice de compression C'_c relatif à la partie rectiligne AB du diagramme œdométrique correspondant aux valeurs des contraintes inférieures à $0,20 \text{ daN/cm}^2$ (Fig. 3.13 et 3.17). Calculer le module œdométrique correspondant.

c) Que peut-on dire du comportement de cette argile ? En tirer des conclusions pratiques.

On se référera au tableau I, § 3.4.2 du Costet-Sanglerat.

Solution

a) D'après le problème n° 3.11, la contrainte effective initiale à mi-hauteur de la couche d'argile a pour valeur :

$$\sigma'_0 = 0,12 \text{ daN/cm}^2.$$

L'accroissement de contrainte provoqué par le remblai est :

$$\Delta\sigma' = 0,92 \text{ daN/cm}^2.$$

Par ailleurs, on a trouvé que la contrainte de consolidation de l'argile était :

$$\sigma'_c = 0,5 \text{ daN/cm}^2.$$

et $\frac{h_1 - h_0}{h_0} = 1,04 \%$

d'où la pente : $5\,070/6,7 = 757$ au lieu de 752 pour E' .

On constate que les deux méthodes de calcul donnent des résultats très voisins ; les différences entre les deux types de résultats sont, en particulier inférieures aux incertitudes sur les résultats des mesures.

★★ Problème 3.2 Essai œdométrique sur une argile

On soumet un échantillon d'argile à un essai œdométrique qui donne le résultats suivants :

Contraintes (daN/cm ²)	Tassements (mm)
0	0
0,1	0,02
0,2	0,03
0,4	0,05
0,8	0,10
1,6	0,19
3,2	0,43
6,4	1,09
12,8	1,78
1,6	1,58
0,4	1,43
0,1	1,22

Au début de l'expérience, la hauteur de l'échantillon est de 25 mm et son indice des vides de 1,01. On demande de construire le diagramme œdométrique ($e - \lg \sigma$) et de calculer l'indice de compression C_c ainsi que le module œdométrique correspondant à l'intervalle de contrainte, 6,4 daN/cm² 12,8 daN/cm² (au chargement). On comparera ce module avec le module instantané pour la contrainte de 6,4 daN/cm².

Solution

En écrivant que le volume des grains reste constant au cours de l'essai, on obtient (cf. § 3.4.2 du Costet-Sanglerat) :

$$\frac{\Delta h}{h_0} = \frac{\Delta e}{1 + e_0}$$

Comme $h_0 = 25$ mm et $e_0 = 1,01$, on aura, en exprimant Δh en millimètres

$$\Delta e = \frac{1 + e_0}{h_0} \Delta h = \frac{2,01}{25} \Delta h$$

$$\Delta e = 8,04 \times 10^{-2} \times \Delta h.$$

D'où le tableau 3C qui permet de tracer le diagramme œdométrique sur papier semi-logarithmique (Fig. 3.2).

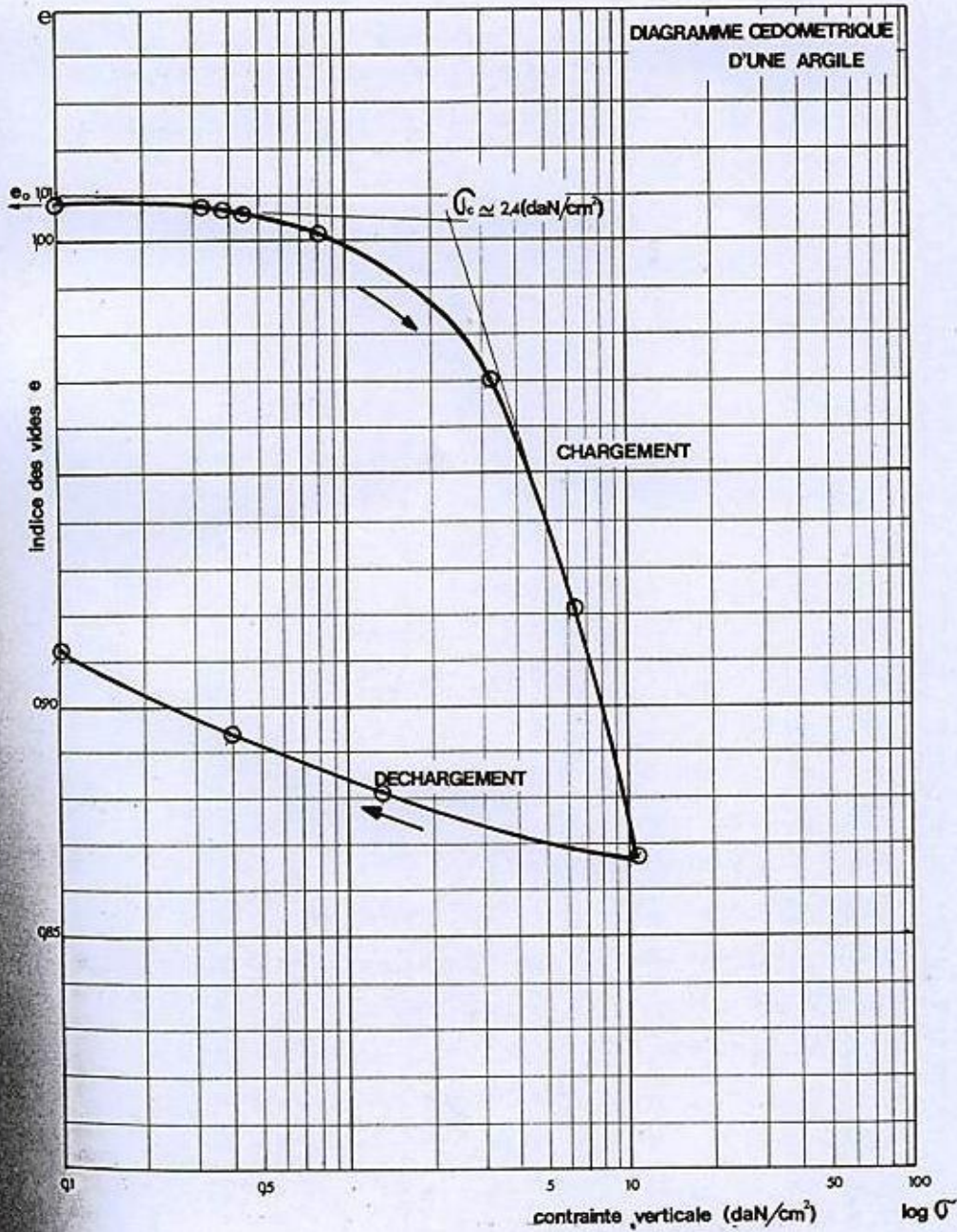


Fig. 3.2.

Tableau 3C

σ daN/cm ²	Δh (mm)	Δe	e
0	0	0	1,010
0,1	0,02	$16,1 \times 10^{-4}$	1,008 4
0,2	0,03	$24,1 \times 10^{-4}$	1,007 6
0,4	0,05	$40,2 \times 10^{-4}$	1,006
0,8	0,10	$80,4 \times 10^{-4}$	1,002
1,6	0,19	$152,8 \times 10^{-4}$	0,995
3,2	0,43	$345,7 \times 10^{-4}$	0,975
6,4	1,09	$876,4 \times 10^{-4}$	0,922
12,8	1,78	$1\ 431,1 \times 10^{-4}$	0,867
1,6	1,58	$1\ 270,3 \times 10^{-4}$	0,883
0,4	1,43	$1\ 149,7 \times 10^{-4}$	0,895
0,1	1,22	$980,9 \times 10^{-4}$	0,912

L'indice de compression C_c n'est autre que la valeur absolue de la pente de la branche rectiligne du diagramme pour $\sigma > \sigma_c$; σ_c étant la contrainte de consolidation (Fig. 3.2)

$$C_c = - \frac{\Delta e}{\Delta \lg \sigma}$$

Le diagramme peut être assimilé à une droite pour $3,2 \leq \sigma \leq 12,8$ daN/cm², par suite :

$$C_c = - \frac{0,867 - 0,975}{\lg 12,8 - \lg 3,2} = \frac{0,108}{\lg 4} = \frac{0,108}{0,602} \approx 0,18.$$

Le module œdométrique E' correspondant à l'intervalle de contrainte : 6,4 - 12,8 daN/cm² au chargement, est donné par l'expression :

$$E' = - \frac{\Delta \sigma}{\Delta h/h}$$

où h représente la hauteur de l'échantillon lorsque $\sigma = 6,4$ daN/cm²
 Δh représente le tassement de l'échantillon entre 6,4 et 12,8 daN/cm²

$$h = 25,00 - 1,09 = 23,91 \text{ mm}$$

$$\Delta h = -(1,78 - 1,09) = -0,69 \text{ mm}$$

$$\Delta \sigma = 12,8 - 6,4 = 6,4 \text{ daN/cm}^2$$

d'où :

$$\frac{\Delta h}{h} = - \frac{0,69}{23,91} = -0,028 8$$

$$E' = \frac{6,4}{0,028 8} \approx 222 \text{ daN/cm}^2.$$

Le module instantané (module sécant) est donné par la formule :

$$E'_s = - \frac{\sigma}{\Delta h / h_0}$$

où :

h_0 représente la hauteur initiale de l'échantillon

Δh représente le tassement de l'échantillon pour la valeur σ de la contrainte verticale

par suite :

$$E'_s = - \frac{6,4}{-(1,09/25)} = \frac{640}{4,36} = 147 \text{ daN/cm}^2.$$

On constate l'écart important entre les deux valeurs trouvées pour ce module.

Résumé des réponses

$$C_c = 0,18.$$

Au chargement :

$$E' = 222 \text{ daN/cm}^2 \text{ pour } 6,4 \leq \sigma \leq 12,8 \text{ daN/cm}^2$$

$$E' = 147 \text{ daN/cm}^2 \text{ pour } \sigma = 6,4 \text{ daN/cm}^2.$$

★★ Problème 3.3 Calculs approchés de l'indice de compression C_c et du tassement d'une argile normalement consolidée

Au droit d'une construction projetée, des sondages ont révélé que le sol était constitué d'une couche de sable fin de 10,60 m d'épaisseur surmontant une couche d'argile molle de 7,60 m. La nappe aquifère est à 4,60 m sous la surface du sol (Fig. 3.3).

La densité déjaugée est de 1,04. La densité du sable mouillé situé au-dessus de la nappe est de 1,76.

On est assuré que l'argile est normalement consolidée. La teneur en eau naturelle est $w = 40\%$, la limite de liquidité est $w_L = 45\%$, la densité des particules solides est de $\rho_s = 2,78$.

La construction projetée augmentera la contrainte actuellement exercée sur l'argile de $1,2 \text{ daN/cm}^2$. On demande le tassement moyen de la couche d'argile (on évaluera l'indice de compression par la formule de Skempton, et l'on calculera la pression initiale au milieu de la couche d'argile).

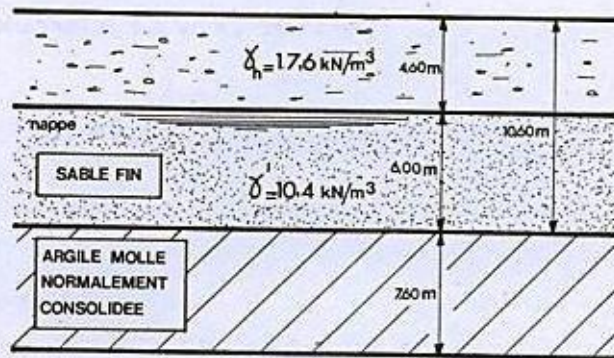


Fig. 3.3.

Solution

La formule de Skempton permet d'évaluer l'indice de compression de l'argile à partir de sa limite de liquidité :

$$C_c = 0,009(w_L - 10)$$

soit dans le cas considéré :

$$C_c = 9 \times 10^{-3}(45 - 10) = 9 \times 35 \times 10^{-3} = 315 \times 10^{-3}$$

$$C_c = 0,32.$$

On vérifie d'après le tableau II, § 3.4.2, du Costet-Sanglerat que cette valeur correspond à une argile moyenne.

Le tassement est alors donné par la formule classique :

$$\frac{\Delta h}{h} = -\frac{C_c}{1+e} \lg \left(1 + \frac{\Delta \sigma'}{\sigma'} \right).$$

Calculons l'indice des vides initial de l'argile. Celle-ci est saturée, donc :

$$e = w \frac{\gamma_s}{\gamma_w} = 0,40 \times 2,78 = 1,11.$$

On peut également vérifier que l'indice des vides trouvé est de l'ordre de grandeur correspondant à une argile molle (cf. tableau I, § 1.2.4 du Costet-Sanglerat).

La contrainte verticale s'exerçant au milieu de la couche d'argile est :

$$\sigma' = 4,60 \times 17,6 + 6,00 \times 10,4 + \frac{7,60}{2} \times \gamma'$$

γ' étant le poids volumique déjaugé de l'argile

$$\gamma_h = \frac{\gamma_s + e\gamma_w}{1+e} = \frac{27,8 + 11,1}{21,1} = 18,44 \neq 18,4$$

d'où : $\gamma' = 8,4 \text{ kN/m}^3$.

On a donc :

$$\sigma' = 4,60 \times 17,6 + 6,00 \times 10,4 + 3,80 \times 8,4 = 175,3 \text{ kPa}$$

par suite :

$$\frac{\Delta h}{7,60} = -\frac{0,32}{2,11} \lg \left(1 + \frac{12,}{17,5} \right)$$

$$\Delta h = -\frac{7,60 \times 0,32}{2,11} \lg 1,686 = 0,261$$

soit : $\Delta h \approx 26 \text{ cm}$.

Résumé des réponses

$C_c = 0,32$; tassement : 26 cm .

**** Problème 3.4 Calculs approchés des tassements d'une argile surconsolidée et de la contrainte de consolidation**

Au début du quaternaire, la région qui nous intéresse était un lac. Le sol du lac comportait une couche de sable de 55,70 m de profondeur surmontant une couche d'argile de 7,60 m d'épaisseur (Fig. 3.4). Le lac a disparu et le sol du lac a formé un plateau dans lequel une rivière a creusé une vallée profonde. Le plateau est maintenant à 45 m au-dessus du sol de la vallée, la nappe de la rivière est à 1,50 m sous le sol de la vallée (Fig. 3.5).

La couche de sable a les caractéristiques suivantes : densité déjaugée : 1,04, densité humide au-dessus de la nappe de la rivière : 1,76.

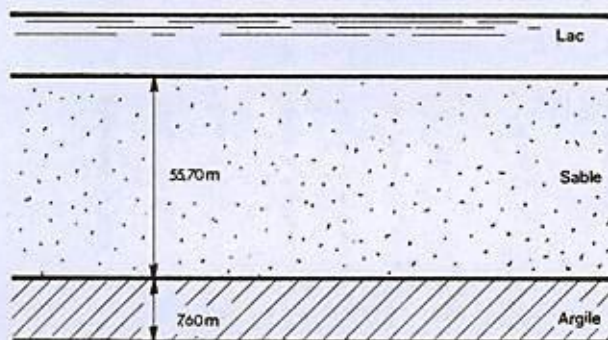


Fig. 3.4.

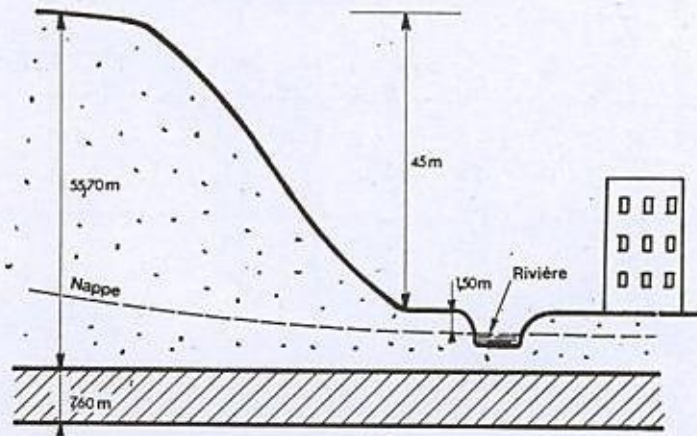


Fig. 3.5.

La couche d'argile a les caractéristiques suivantes : teneur en eau naturelle 35 %, limite de liquidité 45 %, densité des grains 2,78.

- Calculer la contrainte de consolidation (on négligera les contraintes dues au poids de la couche d'argile).
- Calculer les limites entre lesquelles peut varier le tassement de la couche d'argile, si l'on construit au bord de la rivière un bâtiment qui augmente de $0,9 \text{ daN/cm}^2$ la contrainte sur l'argile.

Solution

a) Par définition, la contrainte de consolidation est la plus forte contrainte effective supportée par le sol au cours de son histoire géologique.

Lorsque le lac existait encore, au début du quaternaire, la contrainte effective au niveau du toit de la couche d'argile était :

$$\sigma' = 55,70 \times 10,4 = 579 \text{ kPa} .$$

Si l'on admet que le niveau de la nappe s'est maintenu au niveau du sol au cours du phénomène d'érosion, la plus forte contrainte effective supportée par la couche d'argile correspond donc à la valeur calculée ci-dessus.

On a donc : $\sigma_e = 580 \text{ kPa}$, soit :

$$\sigma_e = 5,8 \text{ daN/cm}^2 .$$

Remarques

1) Il y a une erreur dans l'énoncé du même problème présenté dans le Costet-Sanglerat :

On ne peut pas avoir $\frac{\gamma_{sat}}{\gamma_w} = 1,76$ et $\frac{\gamma'}{\gamma_w} = 1,04$ car :

$$\frac{\gamma_{sat}}{\gamma_w} = 1 + \frac{\gamma'}{w} = 2,04 .$$

Résumé des réponses

$\sigma_c \approx 580 \text{ kPa} ; \quad 2,4 < s < 6 \text{ cm} .$

★★ Problème 3.5 Evaluation des contraintes en profondeur sous des semelles superficielles

Une semelle de fondation carrée de 12 m de côté et de 20 cm d'épaisseur supporte une surcharge d'intensité uniforme de 0,78 daN/cm². On prendra la densité du béton égale à 2,5.

Calculer la composante verticale de la contrainte supplémentaire résultant de ces charges dans un plan situé à 24 m sous la surface libre et à la verticale des points ACE et F représentés sur la figure 3.7. Comparer ces résultats avec ceux que l'on obtient en supposant que toute la charge est concentrée en C (Fig. III.35 Costet-Sanglerat, p. 140, tome 1).

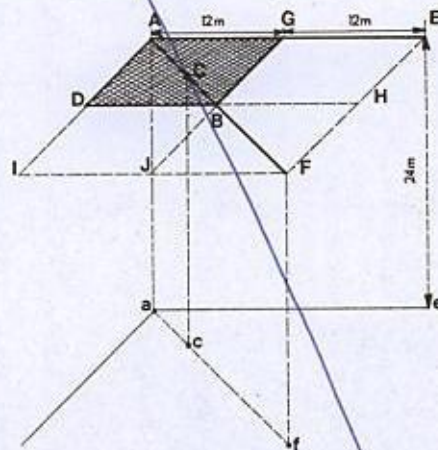


Fig. 3.7.

Solution

La contrainte due au poids propre de la semelle est de :

$0,20 \times 1,00 \times 25 = 5 \text{ kPa} , \text{ soit environ } 0,05 \text{ daN/cm}^2 .$

La contrainte uniforme sous la semelle a donc pour valeur :

$q = 0,78 + 0,05 = 0,83 \text{ daN/cm}^2 .$

a) Désignons par a, c, e et f les projections orthogonales de A, C, E et F sur le plan horizontal situé à 24 m sous la surface libre.

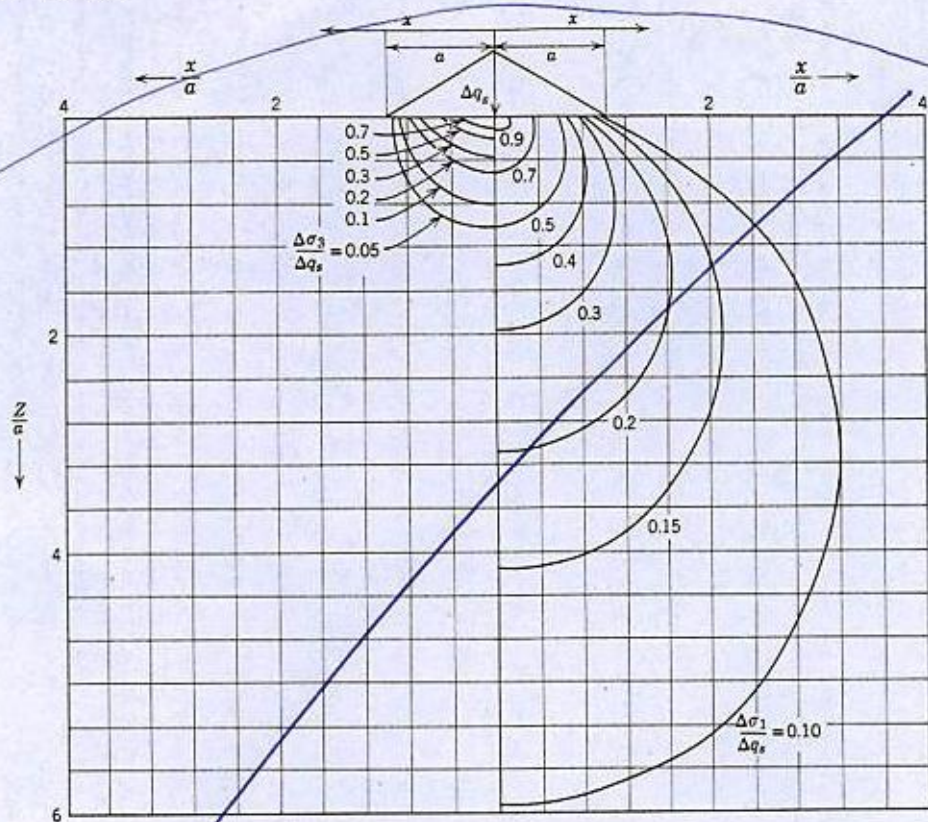


Fig. 8.8 Principal stresses under triangular strip load.

stresses is called the *major principal stress* σ_1 , the smallest is called the *minor principal stress* σ_3 , and the third is called the *intermediate principal stress* σ_2 .

When the stresses in the ground are geostatic, the horizontal plane through a point is a principal plane and so too are all vertical planes through the point. When $K < 1$, $\sigma_v = \sigma_1$, $\sigma_h = \sigma_3$, and $\sigma_2 = \sigma_2 = \sigma_h$. When $K > 1$ the situation is reversed: $\sigma_h = \sigma_1$, $\sigma_v = \sigma_3$, and $\sigma_2 = \sigma_2 = \sigma_h$. When $K = 1$, $\sigma_v = \sigma_h = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ and the state of stress is *isotropic*.

We should also recall that the shear stresses on any two orthogonal planes (planes meeting at right angles) must be numerically equal. Returning to the definition of stresses given in Section 8.1, we must have $\tau_h = \tau_v$.

Mohr circle. Throughout most of this book, we shall be concerned only with the stresses existing in two dimensions rather than those in three dimensions.⁴ More

⁴ The intermediate principal stress unquestionably has some influence upon the strength and stress-strain properties of soil. However, this influence is not well understood. Until this effect has been clarified, it seems best to work primarily in terms of σ_1 and σ_3 .

specifically, we shall be interested in the state of stress in the plane that contains the major and minor principal stresses, σ_1 and σ_3 . Stresses will be considered positive when compressive. The remainder of the sign conventions are given in Fig. 8.9. The quantity $(\sigma_1 - \sigma_3)$ is called the *deviator stress* or *stress difference*.

Given the magnitude and direction of σ_1 and σ_3 , it is possible to compute normal and shear stresses in any other direction using the equations developed from statics and shown in Fig. 8.9.⁵ These equations, which provide a complete (in two dimensions) description for the state of stress, describe a circle. Any point on the circle, such as *A*, represents the stress on a plane whose normal is oriented at angle θ to the direction of the major principal stress. This graphical representation of the state of stress is known as the *Mohr circle* and is of the greatest importance in soil mechanics.

Given σ_1 and σ_3 and their directions, it is possible to find the stresses in any other direction by graphical

⁵ Equations 8.6 and 8.7 are derived in most mechanics texts; e.g., see Crandall and Dahl (1959), pp. 130-138.

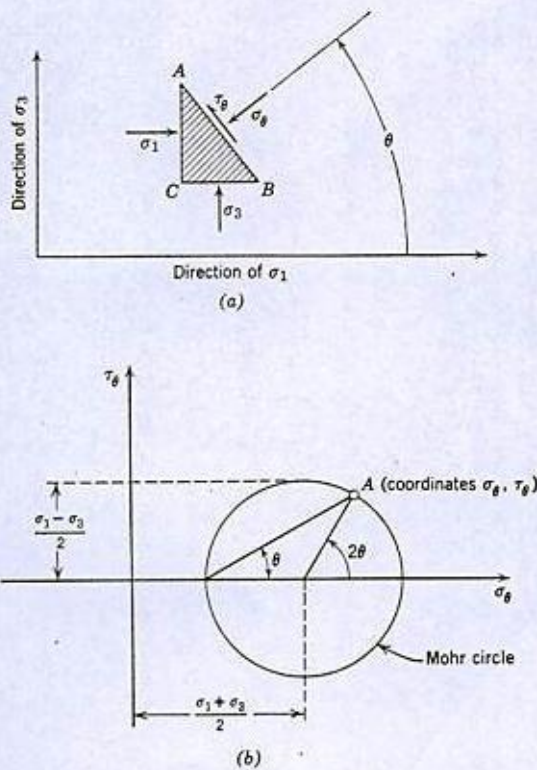


Fig. 8.9 Representation of stress by the Mohr circle. (a) Equations for state of stress at a point. (b) Mohr diagram for state of stress at a point. τ is positive when counterclockwise; θ is measured counter clockwise from the direction of σ_1 .

$$\sigma_\theta = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \quad (8.6)$$

$$\tau_\theta = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \theta \cos \theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta \quad (8.7)$$

construction using the Mohr circle. Or, given the σ_θ and τ_θ that act on any two planes, the magnitude and direction of the principal stresses can be found. The notion of the *origin of planes* is especially useful in such constructions. The origin of planes is a point on the Mohr circle, denoted by O_P , with the following property: a line through O_P and any point A of the Mohr circle will be parallel to the plane on which the stresses given by point A act. Examples 8.4 to 8.7 illustrate the use of the Mohr circle and of the origin of planes. The reader should study these examples very carefully.

The maximum shear stress at a point, τ_{max} , is always equal to $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$; i.e., the maximum shear stress equals the radius of the Mohr circle. This maximum

shear stress occurs on planes lying at $\pm 45^\circ$ to the major principal stress direction.

If the stress condition is geostatic, the largest shear stress will be found upon planes lying at 45° to the horizontal. The magnitude of the maximum shear stress will be

$$\text{if } K < 1, \quad \tau_{max} = \frac{\sigma_v}{2} (1 - K)$$

$$\text{if } K > 1, \quad \tau_{max} = \frac{\sigma_v}{2} (K - 1)$$

$$\text{if } K = 1, \quad \tau_{max} = 0$$

8.5 p-q DIAGRAMS

In many problems it is desirable to represent, on a single diagram, many states of stress for a given specimen of soil. In other problems, states of stress for many different specimens are represented on one such diagram. In such cases it becomes cumbersome to plot Mohr circles, and even more difficult to see what is on the diagram once all circles are plotted.

An alternative scheme for plotting the state of stress is to plot a *stress point* whose coordinates are

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

$$q = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \begin{cases} + & \text{if } \sigma_1 \text{ is inclined equal to or} \\ & \text{less than } \pm 45^\circ \text{ to the vertical} \\ - & \text{if } \sigma_1 \text{ is inclined less than} \\ & \pm 45^\circ \text{ to the horizontal} \end{cases} \quad (8.8)$$

In most cases for which the stress point representation is used, the principal stresses act on vertical and horizontal planes. Then Eq. (8.8) simplifies to

$$p = \frac{\sigma_v + \sigma_h}{2}, \quad q = \frac{\sigma_v - \sigma_h}{2} \quad (8.9)$$

Plotting a stress point is equivalent to plotting one single point of a Mohr circle: the uppermost point if q is positive or the bottom-most point if q is negative. Numerically, q equals one-half of the deviator stress.

Example 8.8 shows stress points corresponding to the state of stress worked out in Examples 8.4 to 8.6. Knowing the values of p and q for some state of stress, one has all of the information needed to plot the corresponding Mohr circle. However, the use of a p - q diagram is no substitute for the use of the Mohr circle construction to determine the magnitude of these principal stresses from a given state-of-stress.

► Example 8.4

Given. Figure E8.4-1.

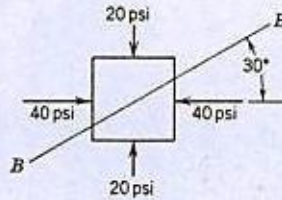


Fig. E8.4-1

Find. Stresses on plane B-B.

Solution. Use Fig. E8.4-2.

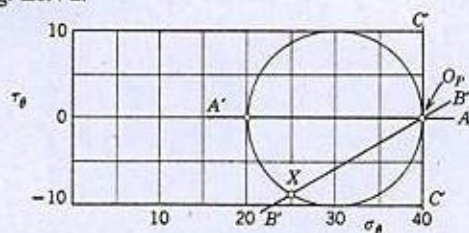


Fig. E8.4-2

1. Locate points with co-ordinates (40, 0) and (20, 0).
2. Draw circle, using these points to define diameter.
3. Draw line A'A' through point (20, 0) and parallel to plane on which stress (20, 0) acts.
4. Intersection of A'A' with Mohr circle at point (40, 0) is the origin of planes.
5. Draw line B'B' through O_P parallel to BB.
6. Read coordinates of point X where B'B' intersects Mohr circle.

Answer. See Fig. E8.4-3.

$$\text{on } BB \quad \begin{cases} \sigma = 25 \text{ psi} \\ \tau = -8.7 \text{ psi} \end{cases}$$

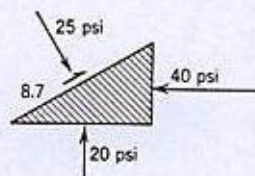


Fig. 8.4-3

Alternate Solution. Steps 1 and 2 same as above.

3. Draw line C'C' through (40, 0) parallel to plane on which stress (40, 0) acts. C'C' is vertical.

4. C'C' intersects Mohr circle only at (40, 0), so this point is O_P. Steps 5 and 6 same as above.

Solution Using Eqs. 8.6 and 8.7.

$$\sigma_1 = 40 \text{ psi} \quad \sigma_3 = 20 \text{ psi} \quad \theta = 120^\circ$$

$$\sigma_\theta = \frac{40 + 20}{2} + \frac{40 - 20}{2} \cos 240^\circ = 30 - 10 \cos 60^\circ = 25 \text{ psi}$$

$$\tau_\theta = \frac{40 - 20}{2} \sin 240^\circ = -10 \sin 60^\circ = -8.66 \text{ psi}$$

(Questions for student. Why is $\theta = 120^\circ$? Would result be different if $\theta = 300^\circ$?)

► Example 8.5

Given. Figure E8.5-1.

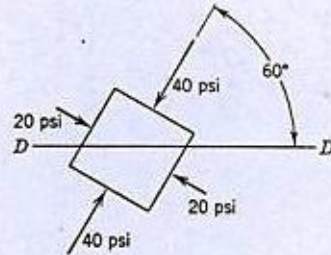


Fig. E8.5-1

Find. Stresses on horizontal plane DD .

Solution.

1. Locate points $(40, 0)$ and $(20, 0)$ on Mohr diagram (Fig. E8.5-2).

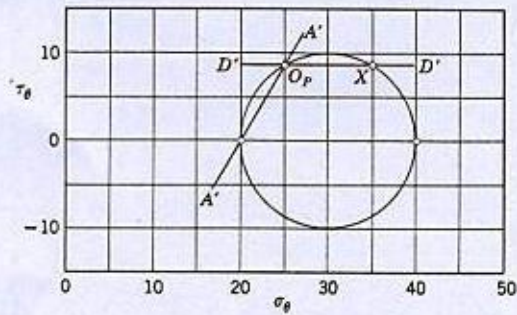


Fig. E8.5-2

2. Draw Mohr circle.
3. Draw line $A'A'$ through $(20, 0)$ parallel to plane upon which stress $(20, 0)$ acts.
4. Intersection of $A'A'$ with Mohr circle gives O_P .
5. Draw line $D'D'$ parallel to plane DD .
6. Intersection X gives desired stresses

Answer. See Fig. E8.5-3.

$$\text{on } DD \quad \begin{cases} \sigma = 35 \text{ psi} \\ \tau = 8.7 \text{ psi} \end{cases}$$

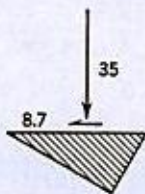


Fig. E8.5-3

Example 8.6

Given. Figure E8.6-1.

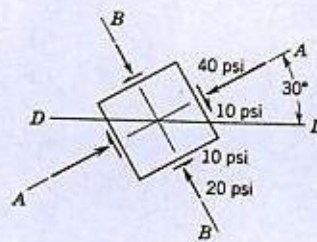


Fig. E8.6-1

Find. Magnitude and direction of the principal stresses.

Solution. Use Fig. E8.6-2.

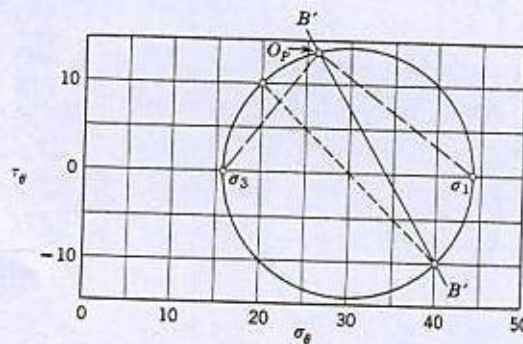


Fig. E8.6-2

1. Locate points (40, -10) and (20, 10).
2. Erect diameter and draw Mohr circle.
3. Draw $B'B'$ through (-10, 40) parallel to BB .
4. Intersection of $B'B'$ with circle gives O_P .
5. Read σ_1 and σ_3 from graph.
6. Line through O_P and σ_1 gives plane on which σ_1 acts, etc. (see Fig. E8.6-3).

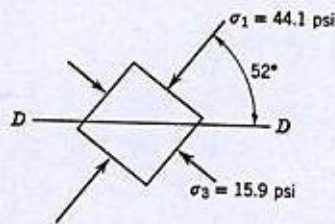


Fig. E8.6-3

Solution by Equations.

1. First make use of fact that sum of normal stresses is a constant:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\Sigma \sigma_\theta}{2} = \frac{40 + 20}{2} = 30 \text{ psi}$$

2. Use relation

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) = \sqrt{\left[\sigma_\theta - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)\right]^2 + [\tau_\theta]^2}$$

with either pair of given stresses

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) = \sqrt{[20 - 30]^2 + [10]^2} = \sqrt{200} = 14.14 \text{ psi}$$

$$3. \quad \sigma_1 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) = 44.14 \text{ psi}$$

$$\sigma_3 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) = 15.86 \text{ psi}$$

4. Use stress pair in which σ_θ is largest; i.e. (40, -10)

$$\sin 2\theta = \frac{2\tau_\theta}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{-20}{28.28} = -0.707$$

$$2\theta = -45^\circ$$

$$\theta = -22\frac{1}{2}^\circ$$

5. Angle from horizontal to major principal stress direction = $30^\circ - \theta = 52\frac{1}{2}^\circ$.

► **Example 8.7**

Given. A load of 5000 psf uniformly distributed over a circular area with a radius of 100 ft.

Find. At 100-ft depth under the edge of the loaded area, find the horizontal stress increment and the directions of the major and minor principal stress increments.

Solution. Figures 8.4 and 8.5 can be used to find $\Delta\sigma_v$, $\Delta\sigma_1$, and $\Delta\sigma_3$. These are plotted and the Mohr circle is constructed. The origin of planes is located by drawing a horizontal line through the point representing the vertical stress, and the problem is then completed.

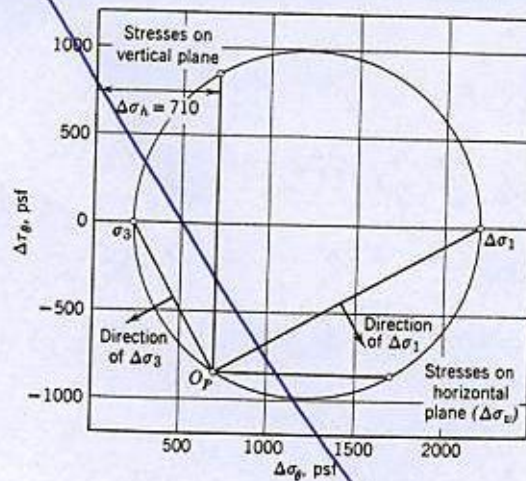


Fig. E8.7

Question for student. In order to construct the diagram, it was necessary to assume that the shear stress was negative on the horizontal plane. One way to test this assumption is to ask whether the directions of the principal stress increments are reasonable. Are they?

Murs de soutènement

★ **Problème 7.1** Poussée des terres sur un mur vertical, terre-plein horizontal, sans nappe phréatique

Un mur de 4 m de haut, ayant un parement intérieur (côté terre) lisse et vertical soutient une masse de sable sec sans cohésion, dont la surface supérieure est horizontale (Fig. 7.1).

La densité du sable sec est de $1,83$ et son angle de frottement interne 36° .

Quelle est approximativement l'intensité de la poussée P pour une tranche de mur de 1 m, si l'on empêche tout déplacement de ce dernier ? Calculer, également, la poussée P_1 dans le cas où le mur se déplace suffisamment pour qu'un état actif de Rankine se développe.

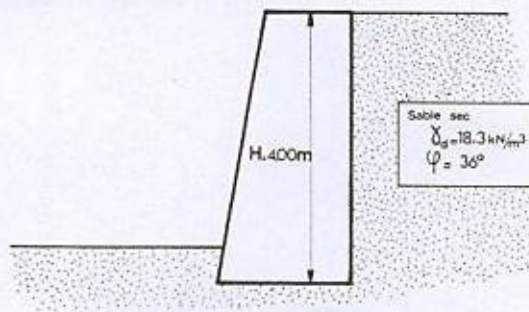


Fig. 7.1

Solution

Si l'on empêche tout déplacement du mur, le massif ne peut pas se trouver en état d'équilibre limite.

La poussée P_0 qui s'exerce alors sur le parement intérieur du mur, correspond à un état d'équilibre représenté par un cercle de Mohr intérieur au domaine compris entre les droites de Coulomb (Fig. 7.2). C'est la *poussée des terres au repos*.

Pour un sable on a, en général : $0,33 \leq K_0 \leq 0,70$ (cf. § 6.1.4 du Costet-Sanglerat, les valeurs de K_0 étant obtenues par des formules empiriques).

La répartition des contraintes sur le parement intérieur du mur est triangulaire, les contraintes étant perpendiculaires au parement.

2 Murs de soutènement

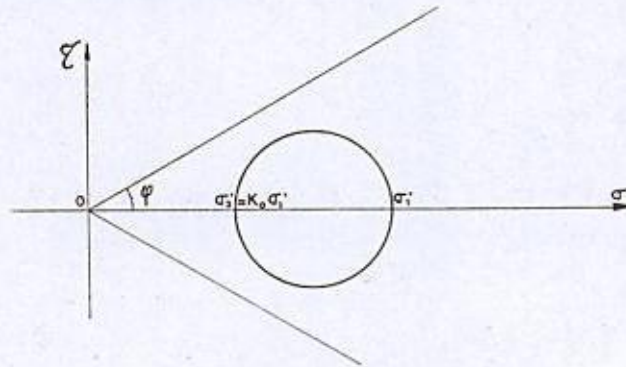


Fig. 7.2

Pour une tranche de 1 m de largeur, on a donc :

$$P_0 = \frac{1}{2} K_0 \gamma_d H^2 b$$

avec $b = 1,00$ m et $\gamma_d = 18,3$ kN/m³.

Si l'on prend pour déterminer K_0 la formule de Jaky

$$K_0 = 1 - \sin \varphi'$$

il vient pour $\varphi' = 36^\circ$

$$\sin \varphi' = 0,588 \text{ d'où } K_0 = 0,412.$$

Par suite :

$$P_0 = 0,5 \times 0,412 \times 18,3 \times 4,00^2 = 60,3 \text{ kN (par mètre de largeur).}$$

Si l'on admet en revanche la formule

$$K_0 = \frac{1 - \sin \varphi'}{\cos \varphi'}$$

proposée par d'autres auteurs, il vient :

$$\cos \varphi' = 0,809 \text{ d'où } K_0 = 0,51.$$

Et par suite :

$$P_0 = 74,6 \text{ kN (par mètre de largeur).}$$

On aura donc en définitive :

$$\boxed{60 \text{ kN} < P_0 < 74 \text{ kN}} \text{ (par mètre de largeur) .}$$

Si l'on admet maintenant que le mur se déplace suffisamment, ce qui est généralement le cas (déplacement de l'ordre du millième de la hauteur du mur, soit ici 4 mm - cf. § 6.1.3), le massif entre en plasticité et on peut admettre qu'il se développe un état actif de Rankine.

Dans ce cas il vient :

$$P_1 = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \gamma_d \cdot \frac{H^2}{2} \cdot b$$

avec $b = 1,00 \text{ m}$ et $\gamma_d = 18,3 \text{ kN/m}^3$

$$\pi/4 - \varphi/2 = 27^\circ \quad \tan 27^\circ = 0,5095$$

d'où :

$$P_1 = 0,5 \times 0,5095^2 \times 18,3 \times 4,00^2 \approx 38 \text{ kN} \quad (\text{par mètre de largeur})$$

$$P_1 = 38 \text{ kN} \quad (\text{par mètre de largeur}).$$

On voit que la majoration de P_1 dans le cas d'un déplacement nul est comprise entre 58 % et 95 % de la valeur de P_1 .

Résumé des réponses

$$60 \text{ kN/m} < P_0 < 74 \text{ kN/m} ; \quad P_1 = 38 \text{ kN/m}.$$

****Problème 7.2 Poussée des terres sur un mur vertical avec nappe phréatique**

Avec les données du problème précédent, quels sont l'intensité de la poussée totale et son point d'application par rapport à la base du mur, lorsqu'il y a une nappe phréatique dont le niveau se trouve à un mètre au-dessous du terre-plein ? (la porosité du sable est de 0,31) (Fig. 7.3).

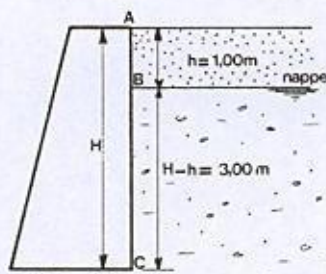


Fig. 7.3

4 Murs de soutènement

Solution

Le problème précédent nous a fourni :

$$k_{ay} = \tan^2(27^\circ) = 0,2596 \text{ arrondi à } 0,26.$$

Cherchons d'abord la valeur du poids volumique déjaugé du sable. On a :

$$\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w = \gamma_d + n\gamma_w - \gamma_w = \gamma_d - (1 - n)\gamma_w$$

soit : $\gamma' = 18,3 - (1 - 0,31) \times 10,0 = 11,4 \text{ kN/m}^3$.

Etudions maintenant la distribution des contraintes le long du parement intérieur du mur (Fig. 7.3 et 7.5) :

Sur *AB* :

La répartition est triangulaire et l'on a :

$$\sigma_A = 0 \quad \sigma_B = k_{ay} \times \gamma_d \times h = 0,26 \times 18,3 \times 1,00 = 4,76 \text{ kN/m}^2.$$

Sur *BC* :

La répartition est toujours triangulaire, mais il y a cassure du diagramme en *B*. On doit ajouter la poussée des terres déjaugées et la pression hydrostatique et prendre en compte la couche de sable sec comme une surcharge uniforme.

Il vient donc :

— poussée des terres déjaugées :

$$\sigma'_{1B} = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{1C} &= k_{ay} \times \gamma' \times (H - h) \\ &= 0,26 \times 11,4 \times 3,00 = 8,89 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

— poussée due à la surcharge uniforme équivalente à la couche de sable sec (répartition rectangulaire) :

$$\sigma'_{2B} = \sigma'_{2C} = k_q \times q = k_q \times h \times \gamma_d$$

avec : $k_q = \frac{k_{ay}}{\cos(\beta - \lambda)}$ (Fig. 7.4)

Cette relation, établie dans l'hypothèse de Coulomb, est valable également dans l'hypothèse de Rankine (cf. § 6.2.4 du Costet-Sanglerat).

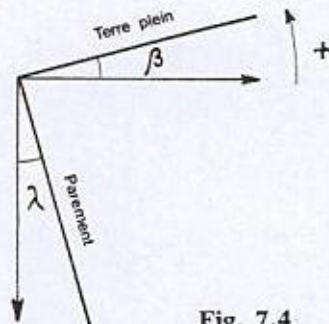


Fig. 7.4

Or

$$\beta = \lambda = 0$$

par suite :

$$k_{\alpha} = k_{\alpha\gamma}$$

$$\text{d'où : } \sigma_{2B} = \sigma_{2C} = k_{\alpha\gamma} \times h \times \gamma_d = \sigma_B \text{ calculé précédemment} \\ = 4,76 \text{ kN/m}^2$$

— pression hydrostatique : répartition triangulaire

$$\sigma_{3B} = 0 \quad \sigma_{3C} = (H - h) \gamma_w = 30 \text{ kN/m}^2.$$

On a donc en définitive le diagramme de la figure 7.5.

La poussée totale s'obtiendra en prenant la résultante des poussées partielles R_1 , R_2 et R_3 indiquées sur la figure 7.5.

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = (1/2) \times 4,76 \times 1,00 \times 1,00 = 2,40 \text{ kN (par mètre de largeur)} \\ \text{point d'application à : } 3,00 + 0,33 = 3,33 \text{ m du point C (au tiers} \\ \text{inférieur de AB)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_2 = 3,00 \times 4,76 \times 1,00 = 14,3 \text{ kN (par mètre de longueur)} \\ \text{point d'application à : } 1,50 \text{ m de C (au milieu de BC)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_3 = (1/2) \times 38,9 \times 3,00 \times 1,00 = 58,3 \text{ kN (par mètre de largeur)} \\ \text{point d'application à : } 1,00 \text{ m de C (au tiers inférieur de BC).} \end{array} \right.$$

La résultante des poussées sera donc :

$$P = R_1 + R_2 + R_3 = 75 \text{ kN (par mètre de largeur).}$$

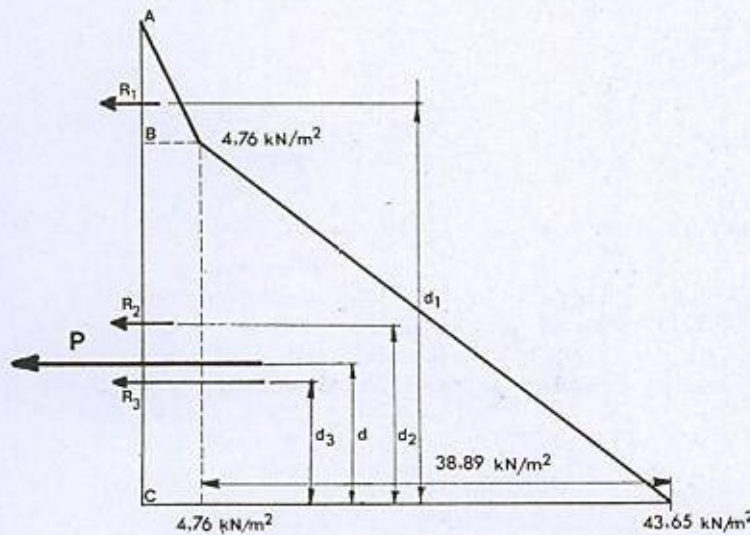


Fig. 7.5

On adoptera les hypothèses de calcul suivantes :

- Béton : poids volumique 23 kN/m^3
 Remblai : poids volumique 18 kN/m^3
 frottement interne $\varphi_1 = 30^\circ$
 cohésion $c = 0$
 coefficients de poussée sur AB ($\delta = \varphi_1$ et $\lambda = 25^\circ$):
 $k_{av} = 0,474$ $k_{aq} = 0,522$
 surcharge sur le remblai $q = 10 \text{ kPa}$
 Terrain naturel: poids volumique déjaugé 11 kN/m^3
 frottement interne $\varphi_2 = 25^\circ$
 cohésion $c = 0$
 coefficients de poussée sur BC ($\delta = \frac{2}{3} \varphi_2$):
 $k_{av} = k_{aq} = 0,364$
 Mur : $h_1 = 6,50 \text{ m}$ $h_2 = 2,50 \text{ m}$ $FA = 1 \text{ m}$
 $KB = 4 \text{ m}$ et $DC = 5 \text{ m}$.

Par mesure de sécurité, on négligera la butée du terrain de fondation sur la face avant ED de la semelle.

On demande :

- 1) L'excentricité de la résultante des forces sur la base CD de la fondation. Y a-t-il des efforts de traction ?
- 2) La contrainte maximale de compression sur le sol de fondation.
- 3) Le coefficient de sécurité vis-à-vis du renversement par rapport au point D (rapport des moments des forces de stabilisation et de renversement).
- 4) Le coefficient de sécurité au glissement (on admettra que le coefficient de frottement du sol de fondation sur le béton de la semelle est égal à $\tan \varphi_2$).

Remarque importante :

Comme dans le Costet-Sanglerat, k_{av} et k_{aq} sont les coefficients de poussée oblique ; K_{av} et K_{aq} sont les coefficients de poussée « normale » ($K_{av} = k_{av} \cdot \cos \delta$).

Solution

1) Calcul de l'excentricité de la résultante générale

Le système des forces extérieures agissant sur le mur se compose :

- du poids propre du mur W (¹),
- de la poussée d'Archimède sur la partie immergée du mur Π ,
- de la poussée des terres P augmentée de la poussée Q due à la transmission de la surcharge appliquée sur le remblai,
- de la butée B sur la face avant ED de la semelle,
- de la réaction R du sol de fondation.

L'équilibre du mur étant réalisé, ce système de forces est équivalent à zéro et permet de calculer la réaction R .

(¹) On attire l'attention du lecteur sur le fait que la notation W représente un vecteur qui, autrefois était représenté par \vec{W} .

8 Murs de soutènement

Toutefois, par souci de sécurité et suivant l'usage, la butée **B** sur la face avant de la semelle ne sera pas prise en compte. Il y a deux raisons pour cela :

— d'une part le déplacement du mur ne suffirait pas (sauf désordres inacceptables) à mobiliser toute la butée. Il faut, en effet, pour mobiliser la butée en totalité, un déplacement de l'ordre de $0,05$ à $0,10 h$ (h étant la hauteur de l'écran sur lequel s'exerce la butée), ce qui donne dans notre cas un déplacement de 12 à 25 cm, très supérieur à celui correspondant à la poussée,

— d'autre part, il faut toujours prévoir l'éventualité du creusement d'une tranchée au pied du mur.

Pour la détermination de ces divers efforts, nous calculerons séparément les efforts s'exerçant sur le fût et sur la semelle. Les forces seront calculées par mètre de largeur d'ouvrage (Fig. 7.7).

a) Poids propre du mur et poussée d'Archimède :

Suivant les indications de l'énoncé, on assimile la série des redans à un parement arrière rectiligne.

Fût : partie rectangulaire $AHKF$:

$$W_1 = 1,00 \times 6,50 \times 23 = 149,5 \text{ kN (par mètre de largeur) ;}$$

partie triangulaire AHB :

$$W_2 = \frac{1}{2} \times 3,00 \times 6,50 \times 23 = 224,3 \text{ kN (par mètre de largeur) .}$$

Semelle : $BCDE$ (compte tenu de la poussée d'Archimède Π , ce qui conduit à utiliser le poids volumique déjaugé du béton $\gamma'_{\text{béton}} = 13 \text{ kN/m}^3$).

$$W'_3 = W_3 - \Pi = 2,50 \times 5,00 \times 13 = 162,5 \text{ kN .}$$

Dans le système d'axes (Cx, Cy) (Fig. 7.6) ; ces forces ont respectivement pour points d'application :

$$W_1 : (x = 3,50 ; y = 5,75)$$

$$W_2 : (x = 2,00 ; y = 4,67)$$

$$W_3 : (x = 2,50 ; y = 1,25) .$$

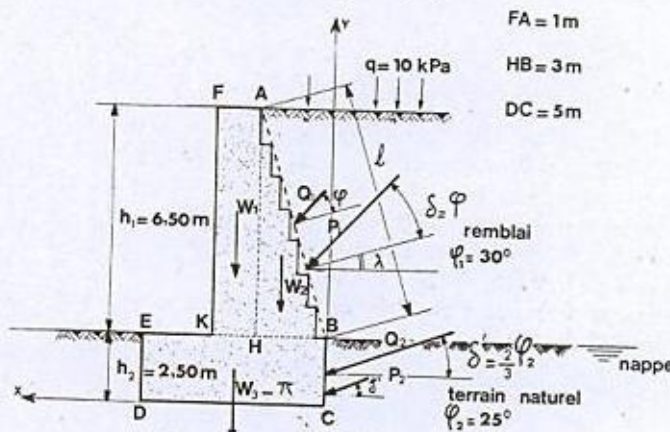


Fig. 7.7

b) Efforts sur le fût AB

b₁) Poussée des terres P_1

On a $P_1 = \frac{1}{2} \gamma_d \ell^2 k_{ay}$ avec $k_{ay} = 0,474$

$$\ell = \frac{h_1}{\cos \lambda} = \frac{6,50}{\cos 25^\circ} = 7,17 \text{ m}$$

d'où $P_1 = \frac{1}{2} \times 18 \times 7,17^2 \times 0,474 = 219,3 \text{ kN}$ (par mètre de largeur).

Composante horizontale :

$$P_{1H} = P_1 \cos (\delta + \lambda) = P_1 \cos 55^\circ = 125,8 \text{ kN}$$
 (par mètre de largeur).

Composante verticale :

$$P_{1V} = P_1 \sin 55^\circ = 179,6 \text{ kN}$$
 (par mètre de largeur).

Remarque

L'angle $\delta = \varphi$ a été choisi car lors de l'entrée en plasticité la droite BA sera une ligne de glissement. En effet, les coins de terre situés à gauche de cette ligne au-dessus des redans n'entrent pas en plasticité. Il y aura donc frottement sol sur sol le long de AB et par suite $\delta = \varphi$.

La répartition des contraintes de poussée étant triangulaire, le point d'application de la poussée sur le fût se trouve au tiers du parement compté à partir de B, soit dans les axes (Cx, Cy) au point de coordonnées :

$$x = 1,00 \text{ m}$$

$$y = 4,67 \text{ m}$$

b₂) Poussée due à la surcharge sur le remblai : Q_1

La répartition des contraintes appliquées le long du fût est une répartition uniforme (diagramme rectangulaire).

On a :

$$Q_1 = q \cdot k_{aq} \cdot l = 10 \times 0,522 \times 7,17 = 37,4 \text{ kN}$$
 (par mètre de largeur).

Composante horizontale :

$$Q_{1H} = Q_1 \cos 55^\circ = 21,5 \text{ kN}$$
 (par mètre de largeur).

Composante verticale :

$$Q_{1V} = Q_1 \sin 55^\circ = 30,6 \text{ kN}$$
 (par mètre de largeur).

Le point d'application de cette force se trouve à mi-hauteur du parement du fût à partir de B, soit dans les mêmes axes que précédemment au point de coordonnées ($x = 1,50$; $y = 5,75 \text{ m}$).

c) Efforts sur le parement arrière de la semelle

Le parement arrière de la semelle BC est vertical ($\lambda = 0$) et de plus l'énoncé nous indique :

$$\delta' = \frac{2}{3} \varphi_2 = \frac{2}{3} \times 25^\circ = 16^\circ 40'$$

d'où $\cos \delta' = 0,958$ et $\sin \delta' = 0,287$.

10 Murs de soutènement

Remarque

L'angle $\delta' = \frac{2}{3} \varphi$ est la valeur couramment admise dans le cas du frottement sol béton.

La base du mur est immergée dans la nappe jusqu'au niveau supérieur de la semelle. Il n'y a donc pas lieu de prendre en compte l'effet de la pression hydrostatique qui agit sur les deux parements opposés.

La nappe étant également supposée en équilibre, il n'y a pas de poussée d'écoulement à prendre en compte.

c₁) *Poussée des terres* : répartition triangulaire

$$P_2 = \frac{1}{2} \gamma' h_2^2 k'_{av}$$

$$P_2 = 0,5 \times 11 \times 2,50^2 \times 0,364 = 12,5 \text{ kN (par mètre de largeur).}$$

Composante horizontale :

$$P_{2H} = 12,5 \times 0,958 = 12 \text{ kN (par mètre de largeur).}$$

Composante verticale :

$$P_{2V} = 12,5 \times 0,287 = 3,6 \text{ kN (par mètre de largeur).}$$

Le point d'application de cette poussée est au tiers de BC à partir de C , c'est-à-dire au point de coordonnées ($x = 0,00$; $y = 0,83$ m).

c₂) *Poussée due à la surcharge superficielle et au poids des couches supérieures* : Q_2

Surcharge de surface : 10 kPa.

Surcharge due au poids des couches supérieures (au-dessus de la nappe) : $6,50 \times 18 = 117$ kPa.

Au total on obtient une surcharge $q' = 127$ kPa.

On a donc :

$$Q_2 = q' \cdot h_2 \cdot k'_{aq} = 127 \times 2,50 \times 0,364 = 115,6 \text{ kN (par mètre de largeur).}$$

Composante horizontale :

$$Q_{2H} = 115,6 \times 0,958 = 110,7 \text{ kN (par mètre de largeur).}$$

Composante verticale :

$$Q_{2V} = 115,6 \times 0,287 = 33,2 \text{ kN (par mètre de largeur).}$$

La répartition est uniforme, donc le point d'application à mi-hauteur de BC , soit au point de coordonnées ($x = 0,00$, $y = 1,25$ m).

Le système des forces extérieures s'exerçant sur le mur (à l'exclusion de la réaction du sol R sous la semelle) se réduit à une force unique F dont on cherche le point de passage au niveau de la fondation DC (Fig. 7.8). En P ce torseur se réduit à la force F' équipollente à F et l'on peut écrire :

$$M_c = \text{moment de } F \text{ en } C = \text{moment de } F' \text{ en } C = F_v \times d.$$

Par suite, le point P cherché est défini par

$$d = M_c / F_v$$

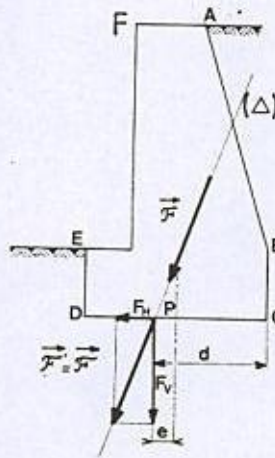


Fig. 7.8

avec

$M_c = \Sigma$ moments des forces extérieures par rapport à C

$F_v = \Sigma$ composantes verticales des forces extérieures.

L'excentricité de P par rapport à l'axe de symétrie de la semelle est :

$$e = |d - DC/2|$$

et la résultante F passera dans le tiers central si :

$$e \leq DC/6.$$

Le tableau 7A résume les calculs :

Tableau 7A

Désignation des forces	FORCES (kN)		Bras de levier par rapport à C(m)	Moment en C kN . m
	Verticales	Horizontales		
P_{1H}		125,8	4,67	587,5
P_{1V}	179,6		1,00	179,6
Q_{1H}		21,5	5,75	123,6
Q_{1V}	30,6		1,50	45,9
P_{2H}		12,0	0,83	10,0
P_{2V}	3,6		0	0
Q_{2H}		110,7	1,25	138,4
Q_{2V}	33,2		0	0
W_1	149,5		3,50	523,3
W_2	224,3		2,00	448,6
$W'_3 = W_3 - \Pi$	162,5		2,50	406,3

12 Murs de soutènement

$$F_v = \Sigma f_v = 783,3 \text{ kN} \quad M_e = \Sigma m_e = 2463,2 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

$$d = 2463,2/783,3 = 3,14 \text{ m}$$

d'où : $e = 3,14 \text{ m} - 2,50 \text{ m} = 0,64 \text{ m}.$

Or $DC/6 = 5,00/6 = 0,83$ par suite $e < DC/6$

donc la résultante passe dans le tiers central de la semelle.

Si l'on admet une répartition linéaire de contraintes sous la semelle, on voit (§ 6.3.3 du Costet-Sanglerat) que la répartition des contraintes est trapézoïdale, ce qui permet de vérifier qu'au niveau de la semelle il n'y a pas de contraintes de traction dans le béton.

(Le calcul complet de la stabilité interne du mur exigerait la vérification à différents niveaux, que nous ne ferons pas ici.)

2) Calcul de la contrainte maximale sous la semelle

— La répartition des contraintes sous la semelle admet pour résultante le vecteur **R** qui doit équilibrer **F'**. La méthode de calcul traditionnelle sépare les composantes verticales et horizontales.

En ce qui concerne les composantes verticales, la répartition trapézoïdale doit donc équilibrer F_v . Avec les notations de la figure 7.9 on a donc :

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \times B = F_v & (1) \\ \frac{1}{2} (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \times B \times \left(\frac{2B}{3} - \frac{B}{2} \right) = F_v \times e & (2) \end{cases}$$

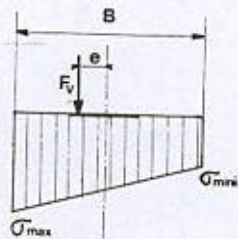


Fig. 7.9

d'où l'on tire : $\sigma_{\max} = (F_v/B)(1 + 6e/B)$.
Il vient donc :

$$\sigma_{\max} = \frac{783,3}{5,00} \left(1 + \frac{6 \times 0,64}{5,00} \right) = 277 \text{ kPa}$$

soit :

$$\sigma_{\max} \approx 2,8 \text{ daN/cm}^2$$

Remarque

Calcul de la contrainte admissible (charge inclinée et excentrée). Meyerhof propose la formule suivante pour la composante verticale de la contrainte admissible (en milieu pulvérulent) :

$$q_{\text{vad}} = \gamma D + \frac{1}{F} \left\{ \frac{1}{2} \gamma B' \left(1 - \frac{\delta}{\varphi} \right)^2 N_v + \gamma D \left[\left(1 - \frac{2\delta}{\pi} \right)^2 N_q - 1 \right] \right\}$$

$B' = B - 2e$ étant la largeur réduite de la semelle, e l'excentrement de la charge et δ son inclinaison.

D'où la charge admissible : $Q_v = B' \cdot q_{\text{vad}} = 310 \text{ kN/m} < F_v$.

On voit que le mur périclite par rupture du sol de fondation.

3) Calcul du coefficient de sécurité vis-à-vis du renversement

— Pour vérifier la stabilité au renversement du mur, il faut connaître l'axe de rotation du mur. Si le sol de fondation était indéformable, l'axe de rotation ne serait autre que l'arête avant D de la semelle de fondation. Mais comme le sol est déformable, la position de l'axe de rotation n'est pas connue et varie au cours du mouvement (mouvement plan sur plan).

Suivant la position de l'axe de rotation, la classification entre « forces stabilisantes » et « forces renversantes » est différente et l'on trouve des coefficients de sécurité différents. Si on suppose dans le cas considéré que l'axe de rotation est en D , on peut alors écrire :

Moment des forces de stabilisation en D :

$$\begin{aligned} W_1 &: 149,5 \times 1,50 = 224,3 \\ W_2 &: 224,3 \times 3,00 = 672,9 \\ W'_3 &: 162,5 \times 2,50 = 406,3 \\ P_{1v} &: 179,6 \times 4,00 = 718,4 \\ Q_{1v} &: 30,6 \times 3,50 = 107,1 \\ P_{2v} &: 3,6 \times 5,00 = 18,0 \\ Q_{2v} &: 33,2 \times 5,00 = 166,0 \end{aligned}$$

$$\Sigma M_1 = 2\,313,0 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

Moment des forces de renversement en D :

$$\begin{aligned} P_{1H} &: 125,8 \times 4,67 = 587,5 \\ Q_{1H} &: 21,5 \times 5,75 = 123,6 \\ P_{2H} &: 12,0 \times 0,83 = 10,0 \\ Q_{2H} &: 110,7 \times 1,25 = 138,4 \end{aligned}$$

$$\Sigma M_2 = 859,5 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

Le coefficient de sécurité au renversement dans le cas d'un sol de fondation indéformable serait donc :

$$F_r = \frac{\Sigma M_1}{\Sigma M_2} = \frac{2\,313,0}{859,5} = 2,69 \approx 2,7 > 1,5.$$

F_r est largement supérieur à 1,5 valeur généralement adoptée.

En pratique, cette vérification n'est pas effectuée lorsque la résultante F passe dans le tiers central, mais on s'efforce de la faire passer d'autant plus près du centre que le sol est compressible.

4) Calcul du coefficient de sécurité au glissement

On s'intéresse maintenant aux composantes horizontales.

La composante horizontale F_H de F' doit être équilibrée par les forces de frottement sol-semelle.

Dans le cas général, le coefficient de sécurité au glissement F_g s'exprime par la formule :

$$F_g = \frac{aB + F_v \tan \delta}{F_H}$$

a désignant l'adhérence entre le sol et la semelle ($|a| \leq c$).

δ l'angle de frottement sol-semelle.

14 Murs de soutènement

Pour un milieu pulvérulent, $c = 0$, donc $a = 0$, d'où :

$$F_g = F_v / F_H \tan \delta$$

avec $\delta = \varphi_2 = 25^\circ$, il vient $\tan \delta = 0,466$

$$F_H = 125,8 + 21,5 + 12 + 110,7 = 270 \text{ kN}$$

$$\text{d'où } F_g = \frac{0,466 \times 783,3}{270} = 1,35 < 1,5.$$

Le coefficient de sécurité au glissement F_g est trop faible (il faudrait modifier la géométrie du mur pour obtenir $F_g > 1,5$).

Remarques

1) Les coefficients de sécurité au renversement et au glissement ont été calculés dans un but pédagogique, bien que l'on soit certain de la rupture par poinçonnement du sol de fondation.

2) Le calcul correct de la semelle de fondation consiste à considérer que l'on a une semelle soumise à une charge excentrée et inclinée.

Ce calcul montre que l'excentrement et l'inclinaison de la charge diminuent fortement la contrainte admissible. Il serait très dangereux de comparer la contrainte $\sigma_{\max} = 277 \text{ kPa}$, à la contrainte admissible calculée dans le cas d'une charge verticale centrée (formule habituelle) qui conduirait alors à un coefficient de sécurité illusoire.

Résumé des solutions

- 1) $e = 0,64 \text{ m}$ la résultante passe à l'intérieur du tiers central,
- 2) $\sigma = 2,8 \text{ daN/cm}^2$ (280 kPa),
- 3) $F_r \approx 2,7$,
- 4) $F_g \approx 1,35$.

Le mur périt par poinçonnement du sol de fondation.

**Problème 7.4 Stabilité d'un mur poids sans redans, avec talus incliné

On considère le mur poids représenté sur la figure 7.6 en le supposant limité par le parement rectiligne AB. Calculer P_1 , Q_1 , P_2 , Q_2 avec les mêmes hypothèses que pour le problème précédent, sachant que le terre-plein n'est plus horizontal, mais fait un angle $\beta = 20^\circ$ avec l'horizontale.

Comparer le résultat obtenu avec celui du terre-plein horizontal ($\beta = 0$) traité dans le problème 7.3.

Solution

Cherchons le coefficient de poussée des terres dans le remblai avec $\delta/\varphi = 1$, $\beta/\varphi = 20/30 = 0,67$ et $\lambda = 25^\circ$.

On s'aperçoit que pour $\beta/\varphi = 0,6$ et $\beta/\varphi = 0,8$, les tables de Caquot et Kérisel ne donnent pas de valeur pour le coefficient de poussée pour des angles de parement du mur λ respectivement supérieur à 15° et à 10° pour $\varphi = 30^\circ$.

C'est parce que l'on est dans le cas d'un écran très incliné évoqué dans le paragraphe 5.3.3 page 239 du tome 1 du Costet-Sanglerat. L'équilibre de Boussinesq ne peut se produire et on est donc amené à étudier un équilibre de Rankine (§ 5.2.2 Tome 1).

Le coefficient de poussée (composante normale au parement du mur incliné) est donné par :

$$K_{a\gamma} = \frac{\sin \beta \cos (\theta - \beta)}{\sin \varphi \sin (\omega_{\beta} + \beta)} [1 - \sin \varphi \cos (2 \theta + \omega_{\beta} - \beta)]$$

avec $\theta = \lambda = 25^\circ$
 $\beta = 20^\circ$
 $\varphi = 30^\circ$

$$\begin{aligned} \sin \omega_{\beta} &= \frac{\sin \beta}{\sin \varphi} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 30^\circ} = 0,684 \quad \text{d'où} \quad \omega_{\beta} = 43,16^\circ \\ \sin \beta &= 0,342 \quad \cos (\theta - \beta) = \cos 5^\circ = 0,996 \\ \sin \varphi &= 0,5 \quad \sin (\omega_{\beta} + \beta) = \sin 63,16^\circ = 0,892 \\ \cos (2 \theta + \omega_{\beta} + \beta) &= \cos (50 + 43,16 - 20) = \cos 73,16^\circ = 0,290 \\ \sin (2 \theta + \omega_{\beta} - \beta) &= \sin 73,16^\circ = 0,957 \end{aligned}$$

d'où

$$K_{a\gamma} = \frac{0,342 \times 0,996}{0,5 \times 0,892} [1 - 0,5 \times 0,290] = 0,653 .$$

L'inclinaison de la poussée α sur le parement du mur est donnée par

$$\tan \alpha = \frac{\sin \varphi \sin (2 \theta + \omega_{\beta} - \beta)}{1 - \sin \varphi \cos (2 \theta + \omega_{\beta} - \beta)} = \frac{0,5 \times 0,957}{1 - 0,5 \times 0,290} = 0,560$$

d'où $\alpha = 29,23^\circ$ (α est donc très proche de 30°)

suivant sa direction réelle, le coefficient de poussée des terres est donc égal à :

$$k_{a\gamma} = K_{a\gamma} / \cos \alpha = 0,653 / \cos 29,23^\circ = 0,748 .$$

La poussée P_1 est donc égale à :

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} \gamma_d \cdot l^2 k_{a\gamma} \\ &= \frac{1}{2} \times 18 \times 7,17^2 \times 0,748 = 346,1 \text{ kN} \quad (\text{par mètre de largeur}). \end{aligned}$$

16 Murs de soutènement

La poussée due à la surcharge est calculée en prenant comme coefficient de poussée

$$k_{aq} = k_{ay} / \cos(\beta - \lambda) = 0,748 / \cos 5^\circ = 0,750$$

et $Q_1 = q \cdot k_{aq} \cdot l = 10 \times 0,750 \times 7,17 = 53,8 \text{ kN}$ (par mètre de largeur).

Pour le calcul de P_2 et Q_2 on mène une parallèle à la surface du terrain passant par B et le coefficient de poussée est donné dans les tables de Caquot et Kérisel :

$$\beta / \varphi = 20/25 = 0,8 \quad \delta / \varphi = 2/3 \quad \varphi = 25^\circ \quad \lambda = 0^\circ$$

d'où $k'_{ay} = k'_{aq} = 0,546$.

On obtient, en admettant en première approximation que le milieu est homogène et de poids volumique γ' :

$$P_2 = \frac{1}{2} \gamma' h_2^2 k'_{ay} = \frac{1}{2} \times 11 \times 2,50^2 \times 0,546 = 18,8 \text{ kN (par mètre de largeur)}$$

et $Q_2 = q' \cdot h_2 \cdot k'_{aq} = 127 \times 2,50 \times 0,546 = 173,4 \text{ kN}$ (par mètre de largeur).

Conclusion

On constate donc qu'avec un terre-plein incliné d'angle $\beta = 20^\circ$ les efforts de poussée sont majorés de plus de 50 % par rapport au cas du terre-plein horizontal ($\beta = 0$).

****Problème 7.5 Comparaison des poussées sur un parement vertical avec terre-plein horizontal dans différentes hypothèses de calcul (équilibre de Boussinesq et méthode graphique de Culmann)**

Avec les données du problème 7.1 (mur de 4 m de haut) parement vertical ($\lambda = 0$), sable sec sans cohésion, surface du remblai horizontale ($\beta = 0$),

$\varphi = 36^\circ$ et en supposant $\delta = \frac{2}{3} \varphi$,

- Calculer la poussée par la méthode de Caquot-Kérisel.
- Calculer la poussée en utilisant la construction graphique de Culmann.
- Calculer le rapport des coefficients de poussée de Caquot-Kérisel et de Culmann dans ce cas particulier.

N.B. : Les tables de Caquot-Kérisel donnent :

$$k_{ay} = 0,247 \quad \text{pour } \varphi = 35^\circ \quad \beta = \lambda = 0 \quad \delta = \frac{2}{3} \varphi$$

$$k_{ay} = 0,202 \quad \text{pour } \varphi = 40^\circ \quad \beta = \lambda = 0 \quad \delta = \frac{2}{3} \varphi.$$

On interpolera linéairement pour avoir la valeur de k_{ay} correspondant à $\varphi = 36^\circ$.

Par la base B du mur on mène BD faisant l'angle $\varphi = 36^\circ$ sur l'horizontale et la droite BS qui fait avec BD l'angle ψ que fait la poussée avec la verticale, c'est-à-dire ici $\psi = 90^\circ - \frac{2}{3}\varphi = 90^\circ - \frac{2}{3} \times 36 = 90 - 24 = 66^\circ$.

On trace successivement diverses droites quelconques $BC, BC_1, BC_2,$ etc... puis Cd, C_1d_1, C_2d_2 parallèles à AB et enfin les droites de $d_1e_1, d_2e_2,$ etc... parallèles à BS .

On mesure le maximum de ed , soit $e_m d_m = 2,35$ cm. Avec l'échelle utilisée $e_m d_m = 1,175$ m d'où :

$$E_{\max} = \frac{\gamma}{2} h \times \frac{AD}{BD} \times e_m d_m$$

$$AD/BD = \cos 36^\circ = 0,809$$

d'où :

$$E_{\max} = 0,5 \times 18,3 \times 4,00 \times 0,809 \times 1,175$$

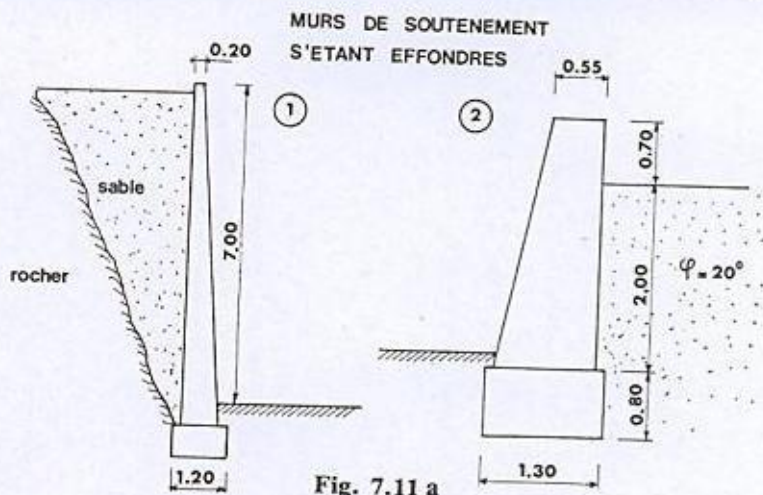
$$E_{\max} = 34,8 \text{ kN (par mètre de longueur).}$$

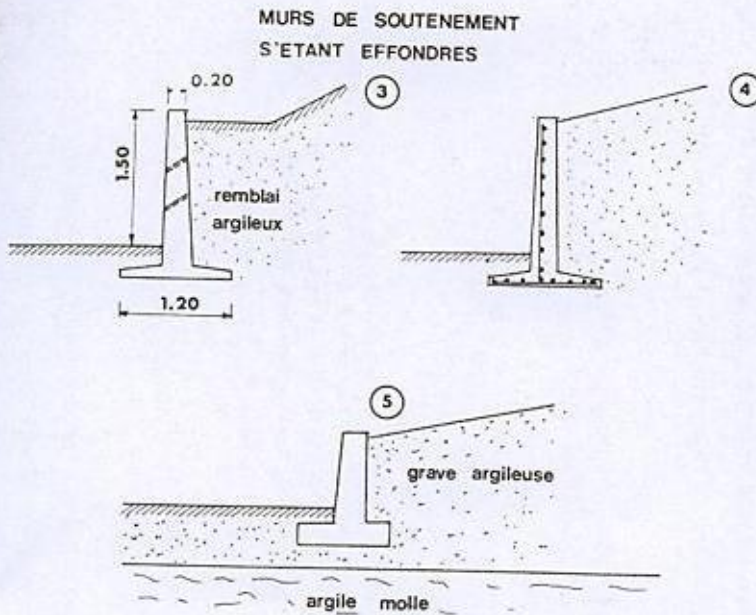
Finalement, on a donc :

$$\frac{k_{ay} \text{ Caquot-Kérisel}}{k_{ay} \text{ Culmann}} \approx 1 \text{ dans le cas étudié.}$$

****Problème 7.6** Détection des erreurs commises dans la conception d'ouvrages de soutènement en béton armé ou maçonnerie s'étant effondrés

Les cinq murs représentés sur la figure 7.11 ont donné lieu à des sinistres (ruptures, renversement, etc.). Pouvez-vous en donner les causes évidentes ?





Solution

- *Mur 1* : Absence de calcul. Semelle de fondation de largeur notablement insuffisante.
Plan de glissement privilégié au contact rocher-remblai.
- *Mur 2* : Absence de drainage du massif et absence de barbicanes. La valeur de l'angle de frottement interne = 20° laisse supposer que le remblai est argileux donc pas très perméable.
- *Mur 3* : Présence de barbicanes mais inefficacité du système (absence de drains dans le remblai argileux et derrière le mur).
- *Mur 4* : Armatures du fût placées de manière incorrecte (vers la face avant au lieu d'être vers la face arrière) d'où : pas d'acier côté fibres tendues d'où rupture du fût.
- *Mur 5* : Rupture par cercle de glissement profond. Stabilité générale du massif non étudiée.

****Problème 7.7** Diagramme des contraintes à l'arrière d'un mur poids. Sol stratifié avec nappe phréatique. Terre-plein uniformément surchargé

On demande d'établir le diagramme de la distribution des composantes horizontales des contraintes s'exerçant sur le parement du mur défini sur la figure 7.12a sachant que :

- le parement de ce mur est rectiligne et incliné de 10° sur la verticale,
- le terre-plein est horizontal et reçoit une surcharge uniformément répartie de 20 kPa,
- le terrain situé derrière le mur est composé de 4 couches stratifiées horizontales dont les caractéristiques sont indiquées sur la figure 7.12, la couche inférieure étant baignée par une nappe phréatique.

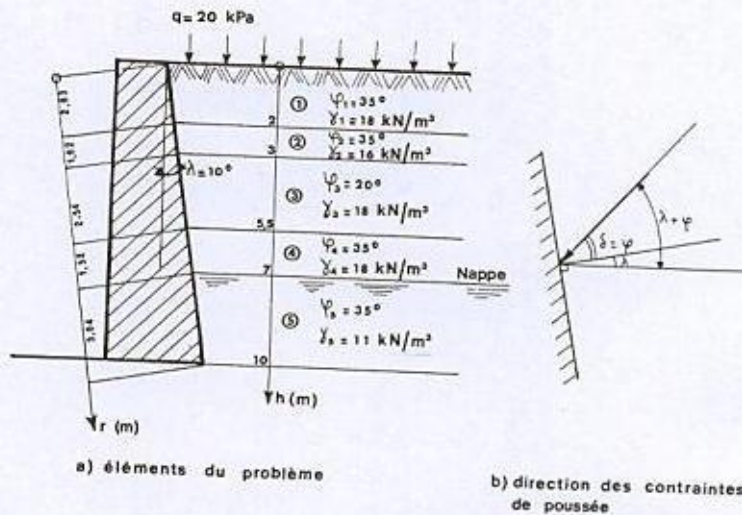


Fig. 7.12

Solution

Le diagramme demandé est reproduit sur la figure 7.13.

On trouvera le détail des calculs dans le Costet-Sanglerat, paragraphe 6.2.5.

Naturellement, à partir du diagramme de la figure 7.13, on peut calculer la stabilité au renversement et au glissement comme dans le cas du problème 7.3, à condition de connaître les dimensions du mur non fournies par l'énoncé.

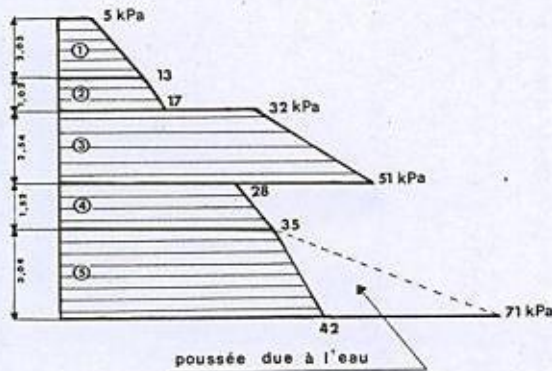


Diagramme de la distribution des composantes horizontales des contraintes

Fig. 7.13

Problème 7.8 Influence des conditions de drainage sur la poussée s'exerçant sur un mur de soutènement

Un mur poids de 5 m de haut ayant un parement intérieur (côté terre) vertical soutient un remblai de sable sans cohésion, dont la surface supérieure est horizontale (Fig. 7.14).

Le mur est suffisamment rugueux pour que l'on puisse prendre une obliquité de la poussée égale à φ (on prendra $k_a = 0,308$).

L'angle de frottement interne φ du sable est égal à 30° .

L'indice des vides est égal à 0,53 et le constituant solide des grains a une densité de 2,7.

Calculez l'intensité de la poussée s'exerçant sur ce mur pour une tranche de 1 m dans les cinq cas suivants :

- 1) Le remblai sableux est sec.
- 2) Le mur et le remblai sont complètement immergés (mur de quai).
- 3) Le remblai seul est immergé.

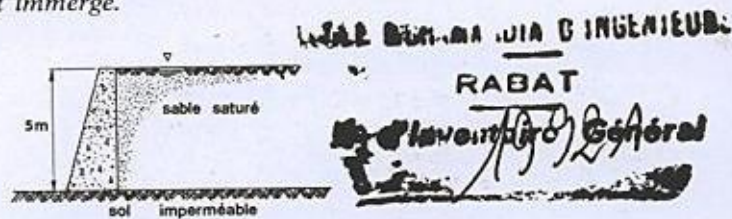


Fig. 7.14. Mur avec remblai immergé sans drainage

22 Murs de soutènement

4) Le remblai est saturé mais il est drainé avec une couche drainante en pente (Fig. 7.15).

5) Le remblai est saturé mais il est drainé avec une couche drainante verticale (Fig. 7.16).

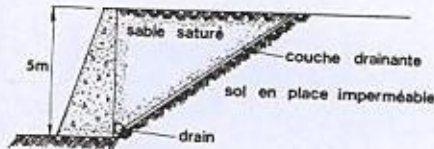


Fig. 7.15. Mur avec remblai établi sur une couche drainante en pente

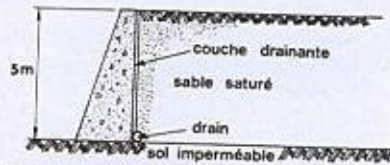


Fig. 7.16. Mur avec remblai et couche drainante verticale

Solution

1) *Le remblai sableux est sec*

On utilise le poids volumique sec du sable.

$$\gamma_d = \frac{\gamma_s}{1 + e} = \frac{27}{1 + 0,53} = 17,6 \text{ kN/m}^3.$$

La poussée des terres est égale à :

$$P = \frac{1}{2} k_a \gamma_d H^2 = \frac{1}{2} \times 0,308 \times 17,6 \times 5^2 = 67,8 \text{ kN}$$

$$P_H = 67,8 \times \cos 30^\circ = 58,7 \text{ kN}$$

$$P_V = 67,8 \times \sin 30^\circ = 33,9 \text{ kN}$$

2) *Le mur et le remblai sont complètement immergés*

On utilise alors le poids volumique déjaugé du remblai

$$\gamma_h = \gamma_d + \frac{e\gamma_w}{1 + e} = 17,6 + \frac{5,3}{1,53} = 21,1 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma' = \gamma_h - \gamma_w = 21,1 - 10 = 11,1 \text{ kN/m}^3.$$

La poussée des terres est égale à :

$$P = \frac{1}{2} k_a \gamma' H^2 = \frac{1}{2} \times 0,308 \times 11,1 \times 5^2 = 42,7 \text{ kN}$$

$$P_H = 42,7 \times \cos 30^\circ = 37 \text{ kN}$$

$$P_V = 42,7 \times \sin 30^\circ = 21,4 \text{ kN}.$$

Dans ce cas les pressions hydrostatiques s'exerçant de part et d'autre du mur s'équilibrent.

3) *Le remblai seul est immergé*

A la poussée précédente, il faut ajouter la poussée de l'eau.

$$P_{eau} = \gamma_w H^2/2 = 10 \times 5^2/2 = 125 \text{ kN (uniquement horizontale)}$$

d'où $P_H = 37 + 125 = 162 \text{ kN}$

$$P_V = 21,4 \text{ kN .}$$

4) *Le remblai est saturé mais il est drainé avec une couche drainante en pente (Fig. 15)*

Dans ce cas, lorsqu'une pluie importante tombe sur la surface du remblai par exemple, il s'établit dans le remblai un réseau d'écoulement tel que celui qui est représenté sur la figure 7.17 avec des lignes de courant verticales et des équipotentielles horizontales. On admet que le drain ne se met pas en charge, donc la pression interstitielle est nulle le long du drain, de même qu'en surface. De ce fait, la pression interstitielle est nulle en tout point du remblai.

Le calcul est donc le même que pour un remblai sec en remplaçant la densité sèche γ_d par la densité humide γ_h .

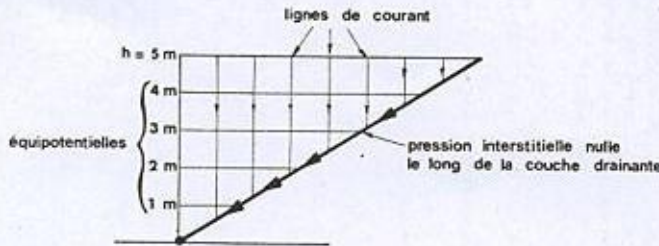


Fig. 7.17. Réseau d'écoulement provoqué par une pluie tombant sur le remblai avec couche drainante en pente

D'où :

$$P = \frac{1}{2} k_a \gamma_h H^2 = \frac{1}{2} \times 0,308 \times 21,1 \times 5^2 = 81,2 \text{ kN}$$

$$P_H = 81,2 \times \cos 30^\circ = 70,3 \text{ kN}$$

$$P_V = 81,2 \times \sin 30^\circ = 40,6 \text{ kN .}$$

5) *Le remblai est saturé, mais il est drainé avec couche drainante verticale*

Dans ce cas, le réseau d'écoulement est donné par la figure 7.18. Une solution mathématique simple ne peut pas être donnée. Différentes positions de la frontière du coin de poussée doivent être envisagées, conformément à la méthode de Coulomb. On doit rechercher les pressions interstitielles sur cette frontière et déterminer ensuite la poussée correspondante à l'aide de la statique graphique, par exemple. On répète alors l'opération pour différents coins de terre, de façon à trouver la poussée maximale.

Du fait que l'on a des pressions interstitielles le long des frontières, la poussée avec une couche drainante verticale sera supérieure à celle trouvée avec une couche drainante en pente.

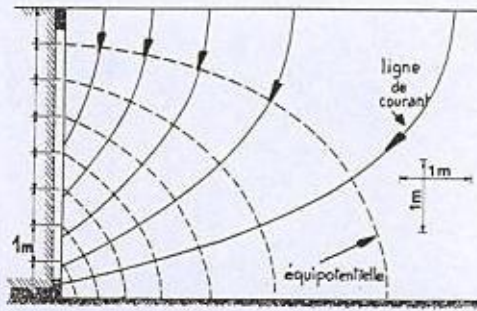


Fig. 7.18. Réseau d'écoulement pour une pluie tombant sur le remblai avec une couche drainante verticale

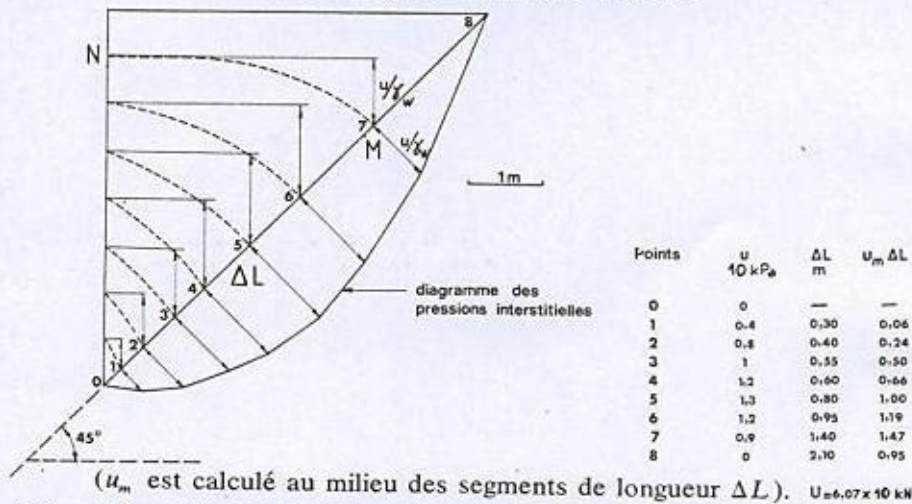


Fig. 7.19. Calcul de la résultante des forces de pression interstitielle pour $\theta = 45^\circ$

La figure 7.19 indique la méthode de détermination du diagramme des pressions interstitielles pour un coin de terre dont la frontière fait un angle de 45° avec l'horizontale.

Considérons une équipotentielle telle que NM , les charges en N et M sont égales ($h_N = h_M$). D'autre part, la pression interstitielle est nulle en N (le drain n'est pas en charge). On a donc :

$$h_M = \frac{u_M}{\gamma_w} + z_M$$

et : $h_N = z_N$

d'où : $z_N - z_M = u_M / \gamma_w$

d'où la détermination du diagramme point par point.

On obtient la résultante des pressions interstitielles $U = 60,7 \text{ kN}$. On étudie alors ensuite l'équilibre du coin de terre (Fig. 7.20). Le calcul est le suivant :

$$W = \frac{1}{2} \times 5^2 \times 21,1 = 263,8 \text{ kN}$$

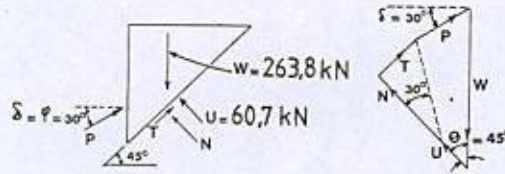


Fig. 7.20. Détermination graphique de la poussée

$$P = \frac{(W - U \cos \theta) \tan(\theta - \varphi) + U \sin \theta}{\sin \delta \tan(\theta - \varphi) + \cos \delta} \quad \text{avec } \delta = \varphi = 30^\circ \text{ et } \theta = 45^\circ$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \cos \theta = 0,707 & \tan(\theta - \varphi) &= \tan 15^\circ = 0,268 \\ \sin \delta &= 0,5 & \cos \delta &= 0,86 \end{aligned}$$

$$P = \frac{(263,8 - 60,7 \times 0,707) \times 0,268 + 60,7 \times 0,707}{0,5 \times 0,268 + 0,866}$$

$$P = 102,1 \text{ kN}$$

$$P_H = 102,1 \cos 30^\circ = 88,4 \text{ kN}$$

$$P_V = 102,1 \sin 30^\circ = 51,1 \text{ kN}$$

On répète l'opération en faisant varier θ .

On obtient la courbe représentée sur la figure 7.21 donnant P en fonction de θ . On s'aperçoit que la valeur maximale est atteinte pratiquement pour $\theta = 45^\circ$. La valeur cherchée de P est donc celle donnée ci-dessus.

Conclusion

Ce problème illustre bien, d'une part, l'importance du drainage lorsque l'on se trouve en présence d'un remblai pouvant être immergé et, d'autre part, l'influence du type de drainage.

La valeur de la poussée croît dans l'ordre suivant :

- | | |
|--|------------------------|
| — mur et remblai complètement immergés | $P = 42,7 \text{ kN}$ |
| — remblai sec | $P = 67,8 \text{ kN}$ |
| — remblai saturé avec couche drainante en pente | $P = 81,2 \text{ kN}$ |
| — remblai saturé avec couche drainante verticale | $P = 102,1 \text{ kN}$ |
| — remblai saturé sans drain | $P = 162,0 \text{ kN}$ |

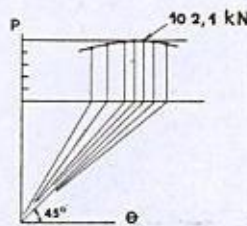


Fig. 7.21. Variation de P en fonction de θ

Talus et digues

★★ Problème 12.1 Glissement dans une fouille verticale

Soit une fouille verticale de hauteur H , taillée dans un matériau argileux de cohésion non drainée c_u , de poids volumique saturé γ_{sat} .

Etudier les diverses surfaces de glissement possibles.

- 1) Etudier la stabilité dans l'hypothèse d'un cercle de glissement centré à mi-hauteur.
- 2) Etudier la stabilité dans l'hypothèse d'un cercle de glissement centré au sommet de la paroi de la fouille.
- 3) Etudier la stabilité dans l'hypothèse d'un glissement plan passant par le fond de fouille.
- 4) Comparer ces diverses hypothèses aux résultats obtenus dans le problème 5.7.

Solution

Tous les calculs qui vont suivre sont faits à court terme, donc en considérant une cohésion de valeur c_u et un angle de frottement $\varphi = 0$.

On considère que le matériau est saturé.

- 1) Cercle de glissement centré à mi-hauteur

Le centre de gravité du demi-cercle AMB (Fig. 12.1) est situé au point G tel que :

$$CG = \frac{4}{3} r \frac{\sin^3(\alpha/2)}{\alpha - \sin \alpha}$$

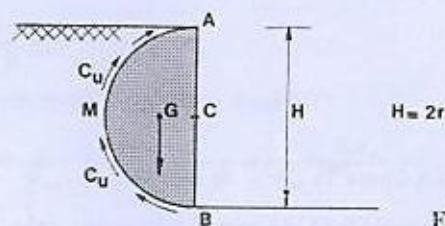


Fig. 12.1

avec $\alpha = \pi$: angle au centre du secteur AMB donc :

$$CG = \frac{4}{3\pi} r.$$

Le moment moteur, dû au poids d'une tranche de terrain d'un mètre d'épaisseur limitée par le demi-cercle AMB , sera donc égal à :

$$M_m = \gamma_{\text{sat}} \pi \frac{r^2}{2} \frac{2H}{3\pi} = \gamma_{\text{sat}} \frac{H^3}{12}.$$

Le moment résistant, dû à la cohésion sur la surface de glissement, est égal à :

$$M_r = \pi c_u r^2 = \pi c_u \frac{H^2}{4}.$$

Le coefficient de sécurité dans ce cas est donc égal à :

$$F = \frac{M_r}{M_m} = \frac{3\pi c_u H^2}{\gamma_{\text{sat}} H^3} = 3\pi \frac{c_u}{\gamma_{\text{sat}} H}.$$

2) Cercle de glissement centré au sommet de la paroi de la fouille (Fig. 12.2)

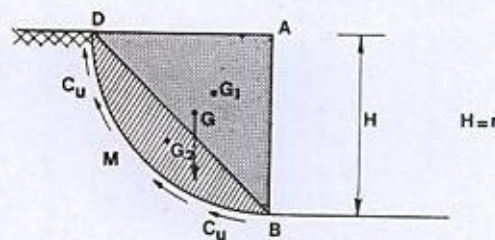


Fig. 12.2

Le centre de gravité de la portion de cercle hachurée DMB est situé au point G_2 tel que $AG_2 = \frac{4}{3} r \frac{\sin^3(\alpha/2)}{\alpha - \sin \alpha}$

$$\alpha = \widehat{DAB} = \pi/2$$

donc :
$$AG_2 = \frac{4}{3} r \frac{0,353}{0,570} = 0,826 r.$$

Le centre de gravité du triangle ADB est situé en G_1 tel que :

$$AG_1 = \frac{2}{3} r \frac{\sqrt{2}}{2} = r \frac{\sqrt{2}}{3}$$

le centre de gravité du secteur global $ADMB$ sera donc situé au point G tel que :

$$AG \frac{\pi r^2}{4} = AG_1 \frac{r^2}{2} + AG_2 \left(\pi \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{2} \right)$$

donc : $AG = \frac{4}{\pi} \left[r \frac{\sqrt{2}}{6} + 0,826 \left(\frac{\pi}{4} - 0,5 \right) r \right]$

$AG = 0,6 r.$

Le moment moteur dû au poids du secteur *ADMB* est égal à :

$M_m = \gamma_{sat} \frac{\pi r^2}{4} AG \sin \frac{\pi}{4} = 0,33 \gamma_{sat} r^3.$

Le moment résistant dû à la cohésion sur la surface de glissement est égal à :

$M_r = c_u \pi \frac{r^2}{2} = 1,57 c_u r^2.$

Le coefficient de sécurité sera donc égal à :

$F = \frac{M_r}{M_m} = \frac{1,57}{0,33} \frac{c_u}{\gamma_{sat} r} = 4,75 \frac{c_u}{\gamma_{sat} H}.$

3) *Surface de glissement plane*

Soit une surface de glissement plane issue de *B*, pied de la fouille. Le poids du triangle *AEB* (Fig. 12.3) est égal à :

$W = \gamma_{sat} \frac{H^2}{2} \tan \beta.$

La force motrice projetée sur la surface de glissement *EB* sera donc :

$T_m = W \cos \beta$

donc : $T_m = \gamma_{sat} \frac{H^2}{2} \tan \beta \cos \beta = \gamma_{sat} \frac{H^2}{2} \sin \beta.$

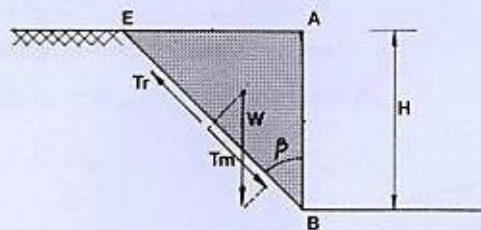


Fig. 12.3

La force résistante dans le plan de glissement est égale à :

$T_r = \frac{H}{\cos \beta} c_u.$

Le coefficient de sécurité sera donc égal à :

$F = \frac{T_r}{T_m} = \frac{2 H c_u}{\gamma_{sat} \cos \beta H^2 \sin \beta} = \frac{4 c_u}{\gamma_{sat} H \sin (2 \beta)}.$

Le coefficient *F* sera minimum pour $\sin (2 \beta)$ maximum, donc pour $\beta = \pi/4.$

Le coefficient de sécurité vaudra alors :

$$F = 4 c_u / \gamma_{\text{sat}} H.$$

4) Conclusion

On pourra tout d'abord remarquer que dans les trois calculs le facteur $c_u / \gamma_{\text{sat}} H$ intervient dans l'expression du coefficient de sécurité. Cela explique que certains abaques de stabilité de pente soient tracés en fonction de ce paramètre.

On peut remarquer que le cercle de glissement le plus défavorable des deux cas traités est le cercle centré en A sommet de la fouille.

On peut constater que la valeur du coefficient de sécurité est alors légèrement supérieure à celle obtenue pour la surface de glissement plane.

Toutefois, le cercle centré au sommet de la fouille n'est certainement pas le cercle le plus défavorable, un calcul plus complexe montrerait que celui-ci est centré au-dessus du sommet de la paroi de la fouille.

Dans le problème 5.7 nous avons déterminé la hauteur maximale d'une fouille : $H = 4 c_u / \gamma_{\text{sat}}$, ce qui correspond au coefficient de sécurité $F = 1$ dans le cas d'une rupture plane. Les deux types de calcul effectués conduisent donc au même résultat.

Remarque

Dans le cas d'une excavation, il y a lieu de se préoccuper du risque de soulèvement en fonds de fouille.

***Problème 12.2 Glissement plan

Dans une pente naturelle faisant un angle $\theta = 15^\circ$ avec l'horizontale, des sondages ont montré l'existence d'une couche de silt argileux limitée par du calcaire fracturé (Fig. 12.4).

La nappe phréatique est parallèle à la surface du sol à une profondeur de 2 m.

- 1) Dans l'hypothèse d'un glissement plan, démontrer que la surface de glissement la plus probable se situe à 8 m de profondeur.
- 2) Pour faire passer une route, on est amené à ouvrir une tranchée dans la couche de silt argileux jusqu'au calcaire.

Calculer alors le coefficient de sécurité au glissement dans l'hypothèse d'un glissement plan.

Les caractéristiques du silt argileux sont les suivantes :

- poids volumiques :
 - au-dessus de la nappe $\gamma_n = 18 \text{ kN/m}^3$
 - au-dessous de la nappe $\gamma_{\text{sat}} = 20 \text{ kN/m}^3$
- cohésion et angle de frottement effectifs : (essai triaxial drainé)
 - $c' = 20 \text{ kPa}$
 - $\varphi' = 15^\circ$.

- 3) Dans le cas où ce coefficient de sécurité ne serait pas suffisant, déterminer une solution permettant d'améliorer sensiblement sa valeur.

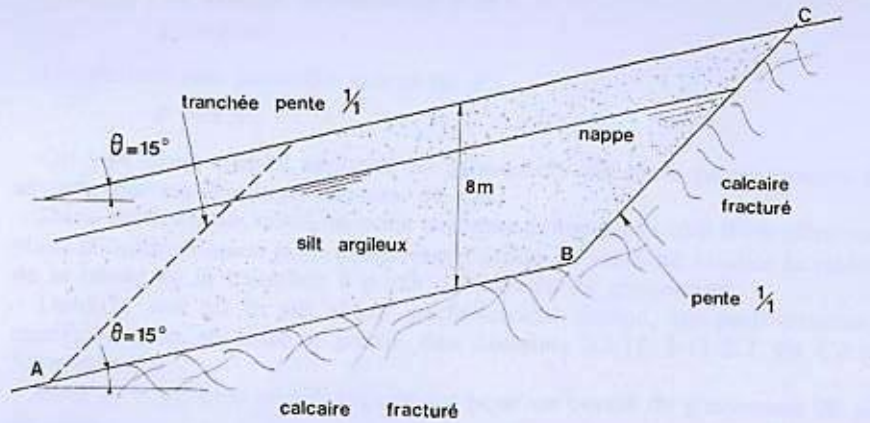


Fig. 12.4

Solution

1) Le calcul de stabilité se fait à long terme avec les caractéristiques drainées du matériau c' et φ' .

Plaçons-nous en un point P situé à la profondeur z (Fig. 12.5).

Soit σ la contrainte verticale totale s'exerçant sur une facette orientée parallèlement à la surface libre :

$$\sigma = [\gamma_h z_w + \gamma_{sat}(z - z_w)] \cos \theta$$

la contrainte normale sur cette facette σ_N est égale à :

$$\sigma_N = [\gamma_h z_w + \gamma_{sat}(z - z_w)] \cos^2 \theta$$

et la contrainte tangentielle τ a pour valeur :

$$\tau = [\gamma_h z_w + \gamma_{sat}(z - z_w)] \cos \theta \sin \theta.$$

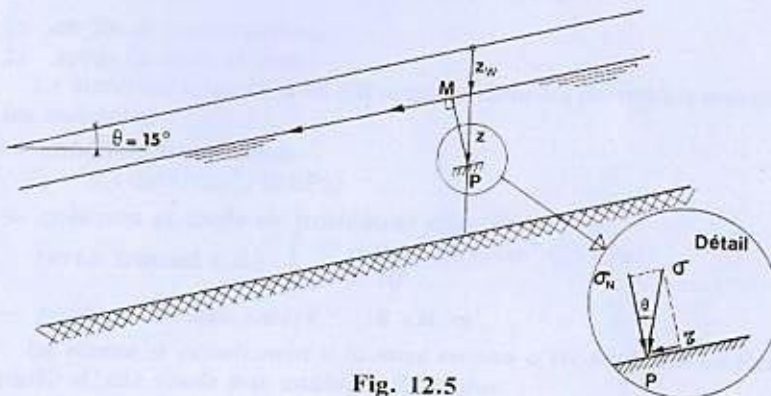


Fig. 12.5

Déterminons la pression interstitielle en P , soit u_p . La surface libre de la nappe est une ligne de courant, donc la droite MP perpendiculaire à la surface libre est une équipotentielle (Fig. 12.5). Donc :

$$h_M = h_p = \frac{u_M}{\gamma_w} - z_M = \frac{u_p}{\gamma_w} - z_p$$

par suite, puisque $u_M = 0$

$$\begin{aligned} u_p &= \gamma_w (z_p - z_M) = \gamma_w PM \cos \theta \\ &= \gamma_w (z - z_w) \cos^2 \theta \end{aligned}$$

donc la contrainte normale effective au point P sur une facette parallèle à la surface libre est égale à :

$$\begin{aligned} \sigma'_N &= [\gamma_h z_w + \gamma_{sat}(z - z_w) - (z - z_w) \gamma_w] \cos^2 \theta \\ \sigma'_N &= [\gamma_h z_w + \gamma'(z - z_w)] \cos^2 \theta \end{aligned}$$

γ' étant le poids volumique déjaugé du silt argileux.

La contrainte de cisaillement maximale admissible dans le silt argileux est égale à :

$$\begin{aligned} \tau_M &= c' + \sigma'_N \tan \varphi' \\ &= c' + [\gamma_h z_w + \gamma'(z - z_w)] \cos^2 \theta \tan \varphi' . \end{aligned}$$

Le coefficient de sécurité au glissement plan est donc égal à :

$$F = \frac{\tau_M}{\tau} = \frac{c' + [\gamma_h z_w + \gamma'(z - z_w)] \cos^2 \theta \tan \varphi'}{[\gamma_h z_w + \gamma_{sat}(z - z_w)] \cos \theta \sin \theta}$$

ou encore :

$$F = \frac{c'}{[\gamma_h z_w + \gamma_{sat}(z - z_w)] \cos \theta \sin \theta} + \frac{[\gamma_h z_w + \gamma'(z - z_w)] \tan \varphi'}{[\gamma_h z_w + \gamma_{sat}(z - z_w)] \tan \theta} .$$

Le premier terme est une fonction décroissante de z (z au dénominateur).

Le deuxième terme est aussi une fonction décroissante de z car $\gamma_{sat} > \gamma'$ donc F diminue quand z augmente.

Donc la ligne de glissement la plus probable se situe au bas de la couche de silt argileux, c'est-à-dire, à 8 m de profondeur.

2) Lorsque la tranchée sera creusée, si on néglige les forces d'adhésion entre le silt et le calcaire le long de la surface BC , la valeur du coefficient de sécurité précédemment calculée restera valable donc :

$$F = \frac{c' + [\gamma_h z_w + \gamma'(z - z_w)] \tan \varphi'}{[\gamma_h z_w + \gamma_{sat}(z - z_w)] \tan \theta}$$

avec : $\varphi' = 15^\circ$, $c' = 20 \text{ kPa}$, $\theta = 15^\circ$,
on obtient : $F = 1,12$.

Ce coefficient de sécurité est un peu faible.

3) Pour améliorer la sécurité au glissement on peut drainer le silt de façon à abaisser le niveau de la nappe phréatique.

Ainsi si l'on abaisse la nappe de 4 m :

$$z_w = 6 \text{ m.}$$

On obtient une nouvelle valeur de F

$$F = 1,4.$$

On voit donc que la sécurité au glissement de cette pente pourra être assurée par un drainage efficace du silt.

Dans cette étude, nous ne nous sommes préoccupés que d'un glissement plan. Il faudrait aussi pour compléter l'étude de stabilité étudier la stabilité de la pente de la tranchée à partir de cercles de glissement.

Dans le cas où le silt serait parfaitement drainé, on peut estimer le coefficient de sécurité à partir des abaques XI-12 § 11.2.2 du Costet-Sanglerat.

Pour $\beta = 45^\circ$ et $\varphi = 15^\circ$, on obtient pour un cercle de glissement de pied de talus :

$$c''/\gamma H = 0,08.$$

Pour éviter toute confusion avec les caractéristiques drainées c' et φ' , on désignera par c'' et φ'' les caractéristiques réduites $c'' = c'/F$ et $\tan \varphi'' = \frac{\tan \varphi}{F}$.

Si on prend

$$\gamma = \gamma_s = 18 \text{ kN/m}^3$$

on obtient la stabilité pour une cohésion c'' égale à :

$$c'' = 11,5 \text{ kPa.}$$

Il en résulte que, dans ce cas (silt drainé), le coefficient de sécurité sera égal à : $20/11,5 = 1,74$ donc suffisant.

*** Problème 12.3 Stabilité d'une digue (méthode globale)

On projette de construire une digue destinée à limiter une petite retenue d'eau dans une région touristique.

La digue sera réalisée dans un matériau homogène fortement compacté.

On demande d'étudier la stabilité du barrage :

- 1) en fin de construction,
- 2) après la mise en eau.

Le matériau retenu est un silt argileux dont les propriétés mécaniques sont les suivantes :

- cohésion non drainée
 $c_u = 0,4 \text{ daN/cm}^2$ (40 kPa)
- cohésion et angle de frottement effectifs :
(essai triaxial c.d.) $\begin{cases} c' = 0,25 \text{ daN/cm}^2$ (25 kPa) \\ $\varphi' = 10^\circ$ \end{cases}
- poids volumique saturé : 18 kN/m^3 .

Le réseau d'écoulement à la mise en eau a été tracé sur la figure 12.6 à partir d'une étude par analogie électrique.

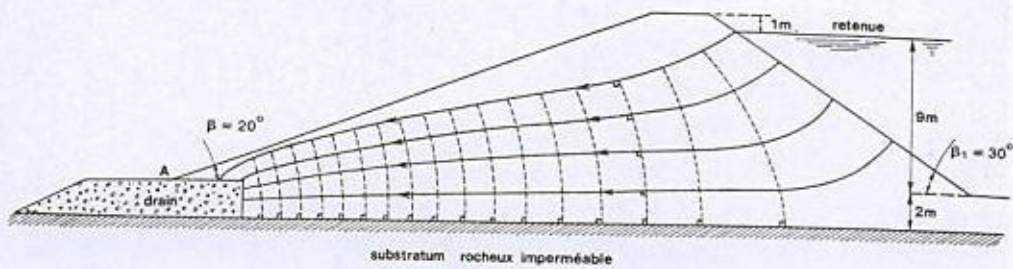


Fig. 12.6. Caractéristiques de la digue et réseau d'écoulement après la mise en eau

Solution

1) En fin de construction

C'est évidemment la stabilité de la pente amont qu'il faut vérifier. Il faut faire un calcul à court terme, car en fin de construction les pressions interstitielles, dans ce matériau fin n'auront pas eu le temps de s'annuler.

On peut voir (abaques XI-14 § 11.2.2 du Costet-Sanglerat), que si l'on a un cercle de glissement profond :

$$n_D = (9 + 2 + 1)/(9 + 1) = 1,20$$

donc : $c''/\gamma H = 0,15$

avec : c'' cohésion correspondant strictement à la stabilité :

$$c'' = 0,15 \times 18 \times 10 = 27 \text{ kPa} = 0,27 \text{ daN/cm}^2.$$

Le coefficient de sécurité obtenu avec la cohésion non drainée sera donc : $F = 4/2,7 = 1,5$.

Cette valeur du coefficient de sécurité est satisfaisante.

2) Après la mise en eau du barrage

C'est l'équilibre de la pente aval qui sera ici étudié, nous ferons un calcul à long terme (en effet, on peut alors considérer que l'excès de pression interstitielle dû à la construction s'est dissipé).

L'abaque XI-13 § 11.2.2 du Costet-Sanglerat permet de déterminer le cercle de glissement critique passant par le pied du talus.

$$\beta = 20^\circ, \quad \varphi' = 10^\circ \quad \text{donc} \quad \alpha = 40^\circ \quad \beta_0 = 18^\circ.$$

La construction graphique du cercle conduit à un rayon $R = 25,2 \text{ m}$ (Fig. 12.7).

Définissons le coefficient de sécurité F par :

$$\tan \varphi'' = \tan \varphi' / F \quad \text{et} \quad c'' = c' / F$$

c'' et φ'' étant les valeurs de la cohésion et de l'angle de frottement assurant juste la stabilité.

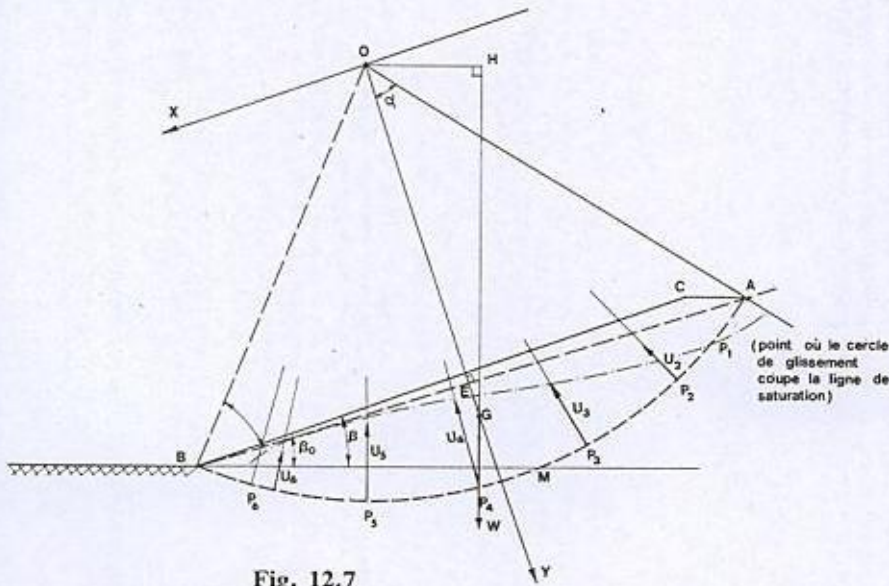


Fig. 12.7

Les forces agissant sur le massif ACBM (Fig. 12.7) sont :

Le poids W appliqué au centre de gravité G du massif.

La résultante U des forces dues à la pression interstitielle s'appliquant sur BMA .

La résultante des forces de contact sur le cercle ABM .

Considérons la facette de glissement en un point situé sur le cercle de glissement (Fig. 12.8).

La contrainte σ appliquée sur cette facette a pour composantes :

$$\begin{cases} \sigma_N \\ \tau = c' + \sigma_N \tan \varphi' \end{cases}$$

La résultante des forces de contact sera donc une force Q telle que :

$$Q = \int_{-\alpha}^{+\alpha} R (c' + \sigma_N \tan \varphi') \tau d\delta + \int_{-\alpha}^{+\alpha} R \sigma_N d\delta$$

où δ est la variable d'intégration.

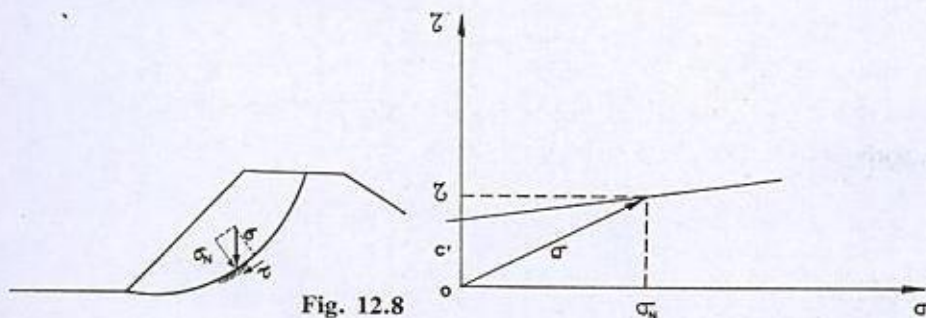


Fig. 12.8

Soit C la force définie par :

$$|C| = \int_{-\alpha}^{+\alpha} R c' \tau d\delta = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{c' R \cos \delta}{F} d\delta = \frac{2 c' R \sin \alpha}{F}$$

et dont la direction est OX , perpendiculaire à la bissectrice OY de l'angle OAB .

Soit en outre :

$$R_N = \int_{-\alpha}^{+\alpha} R \sigma_N d\delta$$

$$R_T = \int_{-\alpha}^{+\alpha} R (\sigma_N \tan \varphi'') \tau d\delta$$

R_N et R_T sont perpendiculaires et $|R_T| = |R_N| \tan \varphi''$.

Q étant la résultante des forces de contact sur ABM , on a donc :

$$Q = C + R_N + R_T.$$

Ecrivaint l'équilibre des forces, on obtient :

$$W + U + C + R_N + R_T = 0.$$

Ecrivons maintenant que la somme des moments par rapport à O , appliqués au massif $ACBM$, est nulle.

— Moment dû au poids W : $W \times OH$, OH étant le bras de levier du poids W par rapport à O .

— Moment dû aux pressions interstitielles = 0.

— Moment dû aux contraintes normales de contact = 0.

— Moment dû aux contraintes tangentielles = M_T .

— En chaque point du cercle de glissement la contrainte tangentielle vaut :

$$c'' + \sigma_N \tan \varphi'' = \frac{c'}{F} + \sigma_N \cdot \frac{\tan \varphi'}{F}.$$

Soit M_c , le moment dû au terme c'' :

$$M_c = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{c' R^2}{F} d\delta = \frac{2 c' \alpha R^2}{F}$$

et soit M_σ , le moment dû au terme $\sigma_N \tan \varphi''$:

$$M_\sigma = \int_{-\alpha}^{+\alpha} R^2 |\sigma_N| \tan \varphi'' d\delta$$

$$M_\sigma = R \tan \varphi'' \int_{-\alpha}^{+\alpha} |\sigma_N| R d\delta = R \frac{\tan \varphi'}{F} \int_{-\alpha}^{+\alpha} |\sigma_N| R d\delta$$

le terme $\int_{-\alpha}^{+\alpha} |\sigma_N| R d\delta$ correspondant au dynamique des contraintes normales est difficile à déterminer, mais on peut écrire que :

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} |\sigma_N| R d\delta \leq \left| \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sigma_N R d\delta \right| = |R_N|$$

donc R_N est le minimum du terme $\int_{-\alpha}^{+\alpha} |\sigma_N| R d\delta$.

M_e étant un moment stabilisant, on peut prendre dans le calcul une valeur minimale de M_e (ce qui est dans le sens de la sécurité).

L'équilibre des moments par rapport à 0 s'écrit donc :

$$|W| \cdot OH = \frac{R \tan \varphi' |R_N|}{F} + \frac{2 c' \alpha R^2}{F} \quad (1)$$

L'équilibre des forces donne en outre :

$$W + U + \frac{2 c' R \sin \alpha}{F} + R_N + R_T = 0 \quad (2)$$

avec de plus : $|R_T|/|R_N| = \tan \varphi'/F$.

La résolution de ces deux équations se fait par approximations successives.

On se fixe une valeur de F arbitraire (1 par exemple) on résoud alors graphiquement l'équation (2), on en tire une valeur de R_N qu'on reporte dans l'équation (1) ce qui permet de déterminer une nouvelle valeur de F . Si celle-ci est très différente de la première valeur adoptée, on recommence le processus.

Application numérique

$$W = W_1 + W_2 .$$

W_1 = poids de la tranche de terrain unitaire correspondant à la portion de cercle ABM .

W_2 = poids de la tranche de terrain unitaire correspondant au triangle ACB .

$$W_1 = \left(\frac{2 \pi \alpha}{180} - \sin 2 \alpha \right) \frac{R^2}{2} \gamma = \left(2 \pi \frac{40}{180} - 0,985 \right) \frac{(25,2)^2}{2} \times 18 \cdot 10^3 = 235 \times 10^4 \text{ N} .$$

$$W_2 = 30 \times 10^4 \text{ N}$$

d'où :

$$W = 265 \times 10^4 \text{ N} .$$

Le centre de gravité de la portion de cercle ABM est G_1 , tel que :

$$OG_1 = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - (\sin 2 \alpha / 2)} = 21,7 \text{ m} .$$

On détermine la position du centre de gravité global à partir de la position de G_1 et G_2 (centre de gravité du triangle ACB).

OH est la projection de OG sur l'horizontale, d'où : $OH = 6,8 \text{ m}$.

Détermination de U

Les pressions interstitielles vont donner lieu à des forces s'exerçant sur la surface de glissement entre les points B et P_1 (Fig. 12.7).

Divisons l'arc de cercle BP_1 en 5 segments égaux, sur lesquels nous considérerons que la pression interstitielle est constante et prend pour valeur la valeur déterminée au centre du segment, soit P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 les centres des 5 segments.

200 Talus et digues

On détermine la valeur de u à partir du tracé des équipotentiellles

$$u = (h - z) \gamma_w.$$

h = charge hydraulique.

z = cote par rapport à un plan de référence (plan horizontal passant par B par exemple).

On aura donc :

$$u(P_2) = (7,7 - 5,0) \gamma_w = 0,27 \text{ daN/cm}^2 \text{ (27 kPa)}$$

$$u(P_3) = 0,55 \text{ daN/cm}^2 \text{ (55 kPa)}$$

$$u(P_4) = 0,615 \text{ daN/cm}^2 \text{ (61,5 kPa)}$$

$$u(P_5) = 0,45 \text{ daN/cm}^2 \text{ (45 kPa)}$$

$$u(P_6) = 0,1 \text{ daN/cm}^2 \text{ (10 kPa)}$$

le segment sur lequel s'appliquent ces pressions a une longueur égale à :
 $P_2 P_3 = 7 \text{ m}$.

Donc les forces correspondantes seront :

$$U_2 = 18,9 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$U_3 = 38,5 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$U_4 = 43 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$U_5 = 31,5 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$U_6 = 7 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

Les directions des diverses forces U_i sont déterminées par le rayon du cercle aboutissant au point P_i .

En prenant pour valeur de $F = 1$ on peut résoudre l'équation (2) graphiquement (Fig. 12.9).

$$|W| = 265 \times 10^4 \text{ N (direction verticale)}$$

$$|C| = \frac{2 c' R \sin \alpha}{F} = 83 \times 10^4 \text{ N (direction suivant } OX).$$

La construction graphique (Fig. 12.9) conduit à $R_N = 116 \cdot 10^4 \text{ N}$. Reportons cette valeur dans l'équation (1), on obtient :

$$F = \frac{R \tan \varphi' |R_N| + 2 c' \alpha R^2}{|W| OH} = \frac{25,2 \times 0,176 \times 116 + 2,5 \times 2 \times 0,698 \times (25,2)^2}{267 \times 6,8}$$

d'où : $F = 1,50$.

On reprend cette valeur de $F = 1,53$, et on retrace un autre diagramme des forces semblable à celui tracé précédemment.

On obtient $R_N = 120 \times 10^4 \text{ N}$.

On reporte cette valeur dans l'équation :

$$F = \frac{R \tan \varphi' |R_N| + 2 c' \alpha R^2}{|W| OH}.$$

On obtient finalement : $F = 1,51$.

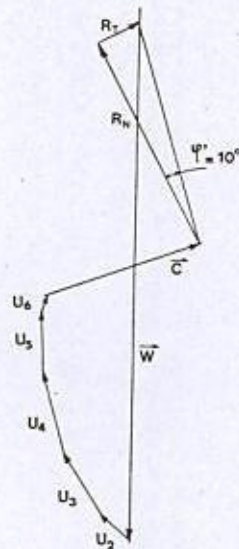


Fig. 12.9. Détermination de R_N d'après l'équation (2)

Cette valeur très proche de la valeur précédente (1,53) peut être considérée comme la solution du système des 2 équations précédentes.

Cette valeur voisine de 1,50 peut être considérée comme acceptable au point de vue de la sécurité au glissement.

★ Problème 12.4 Stabilité d'une digue (méthode des tranches)

Reprendre l'étude de stabilité de la pente aval du barrage du problème n° 12.3 en utilisant cette fois une méthode par tranches (Méthode de Fellenius par exemple).

Solution

Utilisons la méthode de Fellenius. Le cercle de glissement est déterminé de la même manière que dans le problème n° 12.3 (Fig. 12.7).

Nous découperons dans la zone de glissement, 5 tranches de même largeur b . On a :

$$BA = 2 R \sin \alpha = 2 R \sin (40^\circ) = 32,4 \text{ m .}$$

La projection horizontale de BA vaut donc :

$$BA \cos \beta_0 = BA \cos (18^\circ) = 30,8 \text{ m}$$

nous considérerons donc 5 tranches de 6,15 m de largeur horizontale (Fig. 12.10).

Dans la méthode de Fellenius on fait l'hypothèse que chaque tranche est

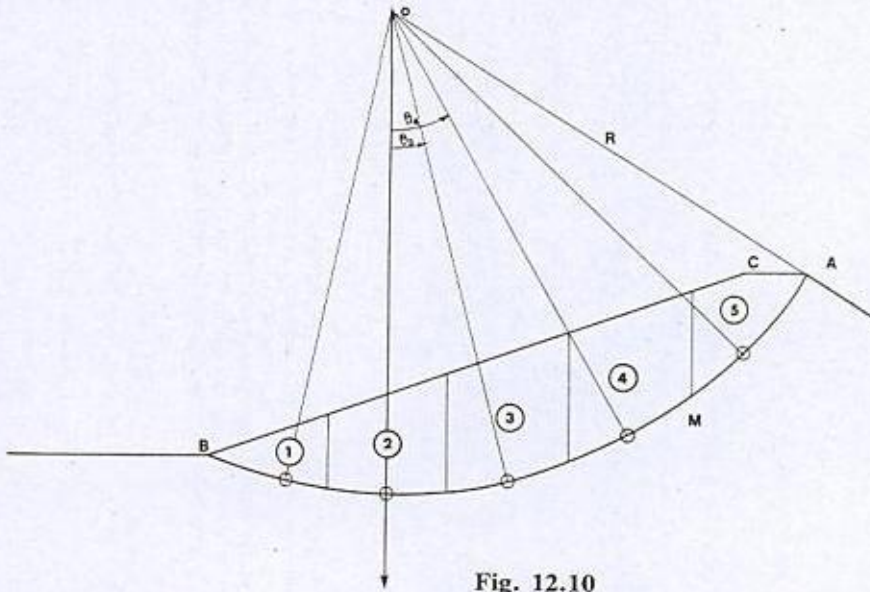


Fig. 12.10

en équilibre sous l'action de son poids, des forces latérales (qui s'annulent deux à deux) et de la réaction le long de la ligne de glissement.

Le coefficient de sécurité est calculé uniquement à partir de l'équilibre des moments par rapport au centre du cercle de glissement.

Soit la tranche i (Fig. 12.11).

Le moment moteur dû à cette tranche est égal à :

$$M_{mi} = W_i \sin \theta_i R. \quad \text{---}$$

Le moment résistant dû à cette tranche a pour valeur :

$$M_{ri} = \left(\frac{cb}{\cos \theta_i} + N_i \tan \varphi \right) R$$

avec

N_i : composante normale de la réaction sur le plan de glissement.

$$N_i = W_i \cos \theta_i - u_i \frac{b}{\cos \theta_i}$$

u_i étant la pression interstitielle, qui est normale à la surface de glissement.

On la calcule au centre de chacune des bases des tranches à partir du réseau d'écoulement. On aura donc :

$$u_i = (h_i + z_i) \gamma_w.$$

On obtiendra donc globalement le facteur de sécurité par la formule :

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n \left[\frac{cb + (W_i \cos^2 \theta_i - u_i b) \tan \varphi}{\cos \theta_i} \right]}{\sum_{i=1}^n W_i \sin \theta_i}.$$

Ce coefficient sera calculé à partir du tableau 12A dans lequel les valeurs de θ_i et de W_i ont été déterminées graphiquement sur la figure 12.10.

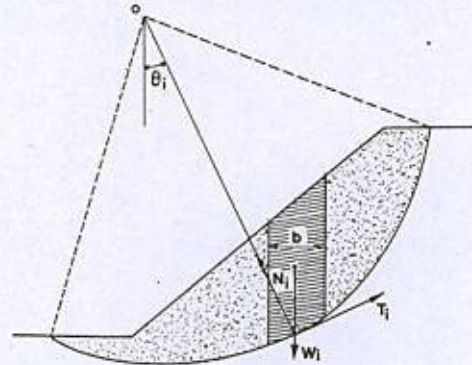


Fig. 12.11

Tableau 12A

tranche n°	1	2	3	3	5	Total (10 ⁴ N)
θ_i en degrés	- 13,5	0	13,5	28	44	—
W_i (10 ⁴ N)	20,5	56	76,4	75	41,2	—
u_i (kN/m ²) ou kPa	0	22,5	60	52,5	20	—
$(W_i \cos^2 \theta_i - u_i b)$ (10 ⁴ N)	19,4	42	35,4	26,2	9	—
$[cb + (W_i \cos^2 \theta_i - u_i b) \tan \varphi] \frac{1}{\cos \theta_i}$	19,3	22,8	22,2	22,7	23,6	110,6
$W_i \sin \theta_i$ (10 ⁴ N)	- 4,8	0	17,8	35	28,6	76,6

On obtient finalement : $F = 110,6/76,6 = 1,44$.

Cette valeur est en bon accord avec la valeur trouvée dans le problème n° 11-3 par une méthode globale.

Le léger écart entre les deux résultats s'explique par les hypothèses différentes faites dans chacun des calculs, et par l'imprécision des déterminations graphiques.

Cette valeur de F peut sembler un peu faible, on admet souvent $F \geq 1,5$.

Deux solutions peuvent être envisagées pour améliorer éventuellement cette valeur de F , soit diminuer légèrement la pente aval (de l'ordre de 1° à 2°), soit utiliser un matériau dont les propriétés mécaniques seraient légèrement meilleures que celles du matériau envisagé.

*** **Problème 12.5** Calcul de la stabilité d'une digue à noyau étanche. Comparaison des résultats obtenus sur ordinateur et par la méthode des tranches

Vérifier la stabilité de la digue à noyau étanche représentée sur la figure 12.12 qui indique ses dimensions ainsi que les caractéristiques des matériaux utilisés.

Les deux vérifications suivantes sont à effectuer :

- stabilité du talus aval la retenue étant pleine ;
- stabilité du talus amont en cas de vidange rapide.

Pour simplifier la vérification on trouvera pour chaque cas sur les figures 12.13 et 12.15 les coordonnées des centres ainsi que les rayons des cercles de glissement les plus défavorables déterminés par calcul sur ordinateur. Les lignes de saturation sont représentées sur ces figures.

Il s'agira donc « simplement » de calculer les coefficients de sécurité correspondant à chacun de ces deux cercles par la méthode de Fellenius et de les comparer aux résultats obtenus par ordinateur.

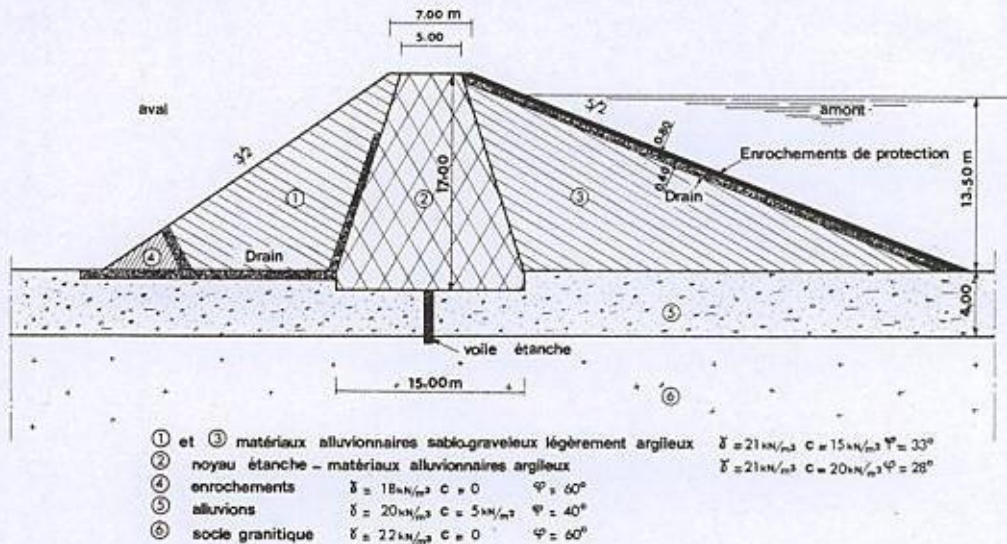
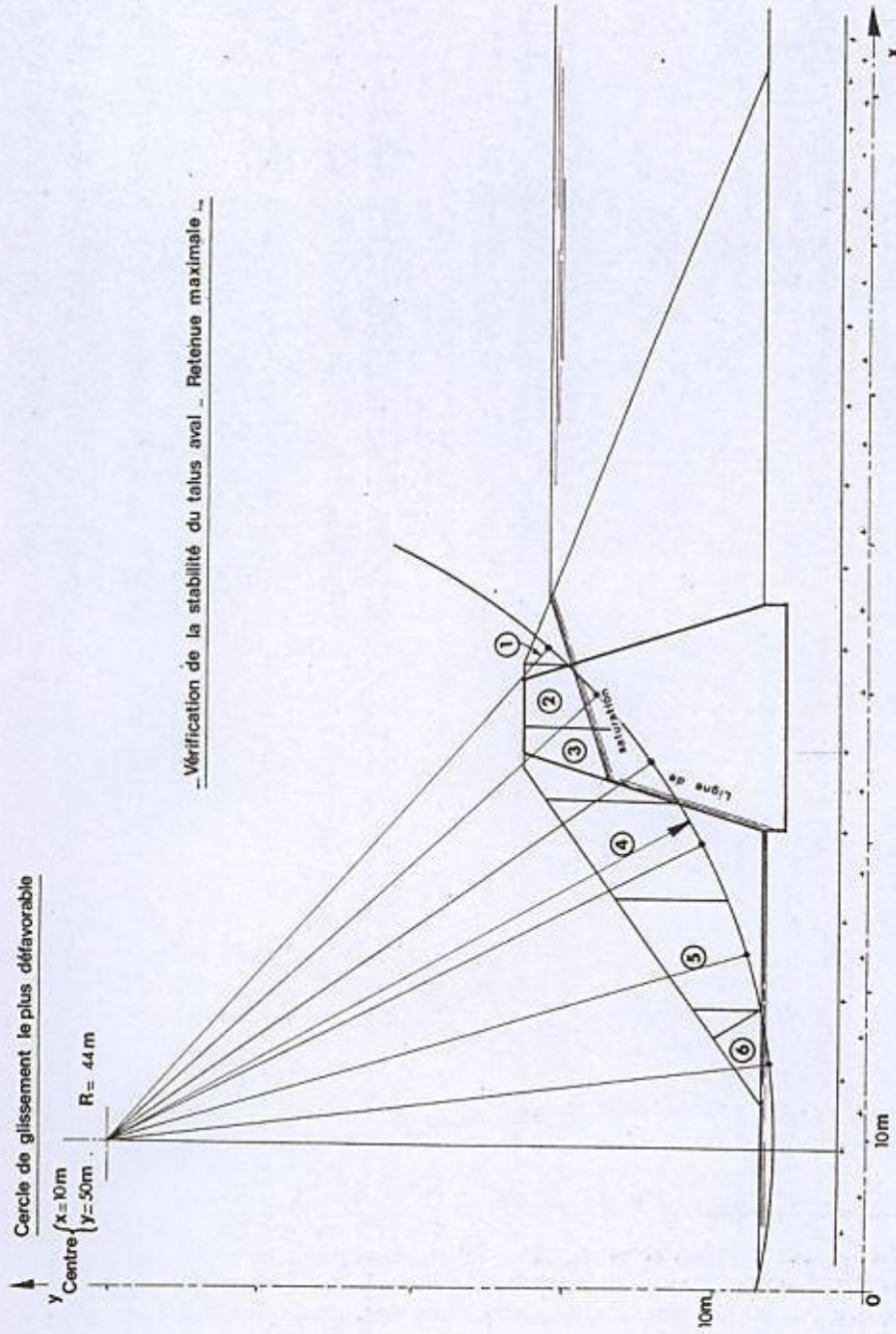


Fig. 12.12. Coupe type de la digue. Caractéristiques mécaniques des matériaux constitutifs (échelle 1/600)

Calcul sur ordinateur

Nous avons utilisé le programme IBM « Lease » basé, d'une part, sur la méthode de Bishop simplifiée et, d'autre part, sur la méthode « normale ».

L'avantage de l'ordinateur est qu'il permet de tracer un très grand nombre de cercles de glissement (par exemple 100 à 200) et de trouver ainsi avec une très bonne approximation et très rapidement, le cercle le plus défavorable.



Dans les deux cas envisagés le coefficient de sécurité minimal a été trouvé respectivement égal à :

- 1,45 pour le talus amont lors d'une vidange rapide.
- 1,69 pour le talus aval avec retenue maximale.

Solution

a) Stabilité du talus aval la retenue étant pleine

La digue étant hétérogène, l'étude de stabilité se fera par une méthode par tranches.

Nous allons utiliser la méthode de Fellenius qui reste traitable manuellement.

Divisons la portion de talus limitée par le cercle de glissement en 6 tranches comme indiqué sur la figure (Fig. 12.13).

De la même façon que dans le problème précédent, le coefficient de sécurité sera déterminé par la formule :

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n \left[[c_i b_i + (W_i \cos^2 \theta_i - u_i b_i) \tan \varphi] \frac{1}{\cos \theta_i} \right]}{\sum_{i=1}^n W_i \sin \theta_i}$$

Nous ne disposons pas du réseau d'écoulement mais seulement de la surface libre. On supposera pour simplifier que les lignes de courant sont parallèles à la surface libre.

AB étant une équipotentielle (perpendiculaire à la surface libre (Fig. 12.14)), la pression interstitielle en un point A sera donc calculée de la manière suivante :

$$h_B = h_A = z_A + u_A / \gamma_w = z_B + u_B / \gamma_w$$

$$u_B = 0$$

Donc :

$$u_A = (z_B - z_A) \gamma_w$$



Fig. 12.14

On fera le calcul de F à partir du tableau 12B.

N.B. Pour la tranche n° 6, nous avons négligé la partie du cercle de glissement situé à l'aval du barrage, car la surface de glissement se trouve très proche de la surface du terrain naturel ; dans la réalité la ligne de glissement n'étant jamais un cercle parfait, débouchera certainement très près du pied du talus (cette hypothèse est dans le sens de la sécurité).

Tableau 12B

Tranche n°	1	2	3	4	5	6	Total 10 ⁴ N
<i>b</i> , (m)	2,08	4,18	4,78	6,50	7,16	7,46	
<i>θ</i> , en degrés	48,5	43	35	28,2	17	7	
<i>W_i</i> (10 ⁴ N)	6,08	43,22	82,64	110	90	31	
<i>u</i> (10 ⁴ Pa)	0	0,9	0,6	0	0	0	
<i>W_i cos² θ_i - u_i b_i</i> (10 ⁴ N)	2,67	19,35	52,6	85,45	82,30	30,53	
$[c_i b_i + (W_i \cos^2 \theta_i - u_i b_i) \tan \varphi] \frac{1}{\cos \theta_i}$ (10 ⁴ N)	7,3	24,4	45,8	74	67	26	246
<i>W_i sin θ_i</i> (10 ⁴ N)	4,55	29,47	47,4	52,48	26,3	3,78	164

d'où : $F = 246/164 = 1,5$.

Cette valeur trouvée manuellement est, compte tenu des hypothèses simplificatrices retenues, en bon accord avec la valeur $F = 1,64$ trouvée numériquement par ordinateur.

Ces valeurs de F sont suffisantes pour assurer la stabilité de la pente ($F \geq 1,5$).

b) Stabilité de la pente aval en vidange rapide

La digue étant hétérogène, nous utiliserons une méthode par tranches. Nous reprendrons ici la méthode de Fellenius.

Divisons la portion de talus limitée par le cercle de glissement, en cinq tranches comme indiqué sur la figure (Fig. 12.15).

De la même façon que dans le problème précédent, le facteur de sécurité sera déterminé par la formule :

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n \left[[c_i b_i + (W_i \cos^2 \theta_i - u_i b_i) \tan \varphi] \frac{1}{\cos \theta_i} \right]}{\sum_{i=1}^n W_i \sin \theta_i}$$

Nous ne disposons pas du réseau d'écoulement mais seulement de la surface libre.

En ce qui concerne les pressions après vidange rapide, nous faisons l'hypothèse de Bishop, c'est-à-dire que :

$$u_A \text{ (après vidange rapide)} = u_A \text{ (avant vidange rapide)} - \gamma_w h_w \text{ (Fig. 12.16)}.$$

Nous considérons que lorsque la retenue est pleine, les pressions dans le matériau (3) sablo-graveleux correspondent aux pressions hydrostatiques (le matériau étant relativement perméable, les pertes de charge à travers ce matériau seront négligées en première approximation).

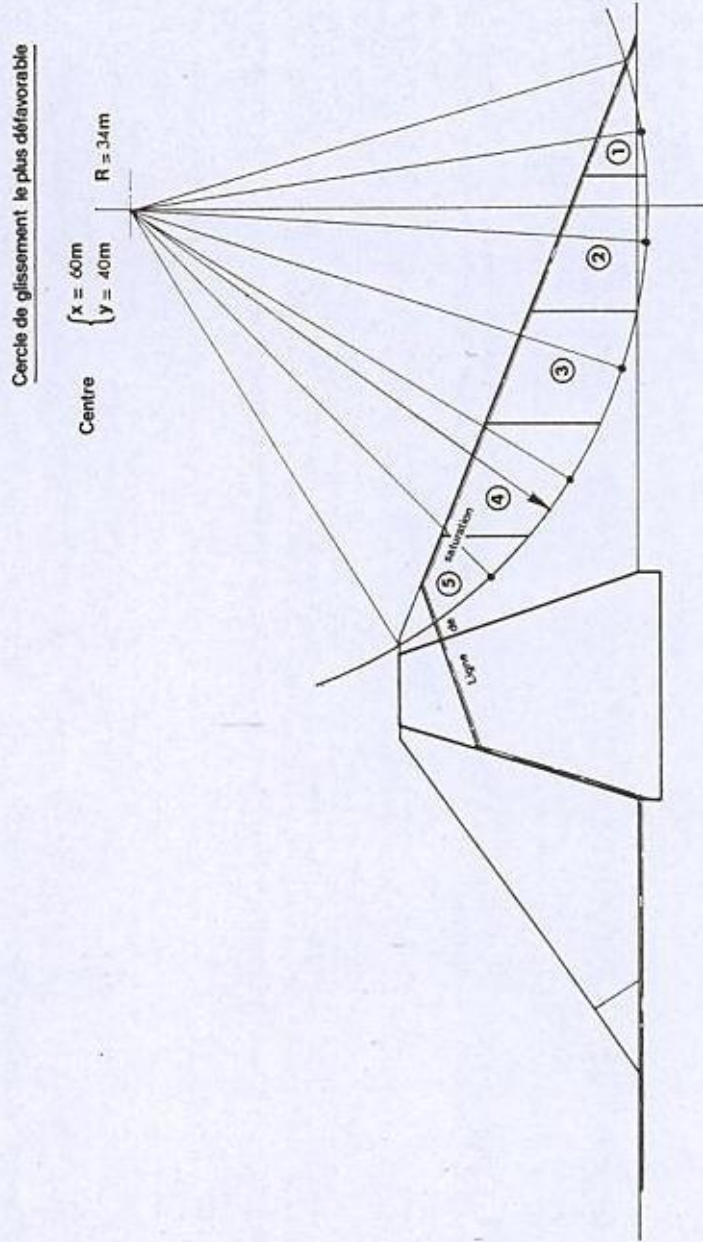


Fig. 12.15. Vérification de la stabilité du talus amont. Vidange rapide

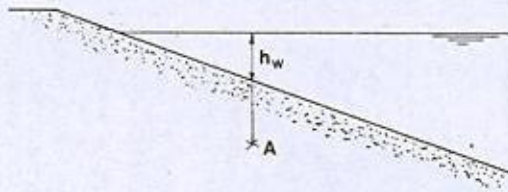


Fig. 12.16

Il est alors facile de déterminer les pressions interstitielles avant et après vidange rapide.

Le calcul global de F sera conduit comme précédemment à partir du tableau 12C.

Tableau 12C

Tranche n°	1	2	3	4	5	Total 10 ⁴ N
b_i (m)	7,46	8,96	7,46	7,31	7,22	
θ_i en degré	- 8	4	18	32	46	
W_i (10 ⁴ N)	37,42	109,5	114,6	103	42,7	
u_i (10 ⁴ Pa)	3	6,1	7,5	6,9	3	
$W_i \cos^2 \theta_i - u_i b_i$ (10 ⁴ N)	14,3	54,3	47,5	23,9	1,1	
$[c_i b_i + (w_i \cos^2 \theta_i - u_i b_i) \tan \varphi] \frac{1}{\cos \theta_i}$	16	50	44	31,2	17,6	159
$W_i \sin \theta_i$ (10 ⁴ N)	- 5,2	7,6	35,4	54,5	30,7	123

d'où finalement : $F = 159/123 = 1,29$.

Dans le calcul, nous avons négligé l'influence des enrochements de protection aval dont l'angle de frottement est élevé (60°), donc le coefficient de sécurité réel est certainement légèrement supérieur à 1,29, on pourra considérer que $F = 1,30$.

Le calcul plus élaboré réalisé sur ordinateur avec des hypothèses plus proches de la réalité a conduit à :

$$F = 1,45$$

Compte tenu des hypothèses simplificatrices du calcul manuel on peut considérer que les deux valeurs sont en accord relativement satisfaisant.

Habituellement on cherche à avoir un coefficient de sécurité au glissement supérieur à 1,5.

Dans ce cas-là cependant on pourra se contenter de cette valeur de F (F de l'ordre de 1,3 à 1,45) car le calcul a été fait dans le cas d'une vidange rapide, circonstance très rare dans la vie d'un barrage. Dans ces conditions,

on peut accepter un risque légèrement plus élevé que pour le calcul retenue pleine, puisque la retenue est vide par définition (la rupture occasionnerait alors moins de dégâts).

Remarque

Dans chacun des calculs réalisés le résultat obtenu par la méthode de Fellenius est inférieur d'environ 0,15 au résultat obtenu par ordinateur.

**** **Problème 12.6** Calcul d'un mur de soutènement sur versant instable

Soit un versant naturel de pente $\theta = 25^\circ$, constitué par une couche de limon argileux d'épaisseur verticale $h = 8$ m, surmontant le substratum rocheux parallèle à la surface libre. Les caractéristiques de ce limon ont été mesurées au laboratoire et ont pour valeurs :

- | | |
|---|--------------------------------------|
| — poids volumique humide | : $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ |
| — angle de frottement interne effectif de pic | : $\varphi'_{\text{pic}} = 20^\circ$ |
| — cohésion effective de pic | : $c' = 25 \text{ kPa}$ |
| — angle de frottement interne résiduel | : $\varphi_{\text{res}} = 18^\circ$ |
| — cohésion résiduelle | : $c_{\text{res}} = 10 \text{ kPa}$ |

L'implantation d'un axe autoroutier impose l'exécution d'un ouvrage de soutènement fondé sur le rocher pour obtenir l'emprise nécessaire. La longueur L de la pente, mesurée obliquement entre le sommet du mur et la crête du talus est de 100 m (Fig. 12.17).

- 1) Vérifier la stabilité du versant naturel avant l'exécution des travaux.
- 2) L'exécution des fouilles du mur de soutènement pouvant provoquer des déplacements au sein de la couche de limon, on prendra en compte pour le calcul de l'ouvrage, les caractéristiques résiduelles.
 - a) Montrer que le versant naturel dans ces conditions devient instable.
 - b) Calculer la profondeur limite z_1 à laquelle devrait se situer le substratum pour que la stabilité soit juste assurée.

Les calculs afférents à cette question seront faits en faisant abstraction du mur.

c) Calculer la valeur minimum d'une force Q_m parallèle à la surface libre, s'appliquant sur un écran fictif vertical qui permettrait d'assurer l'équilibre de la pente.

3) On peut penser que la construction du mur va permettre de mobiliser cette force Q_m . Montrer, en proposant un schéma d'équilibre plastique à l'amont du mur, que la force mobilisable est limitée par une force de butée B que l'on explicitera. La stabilité est-elle assurée quelle que soit la valeur de L ? Analyser les différents cas possibles.

4) Calculer l'effort exercé par le massif sur le mur. Quelles conclusions peut-on en tirer ?

Equation (11.30) is Bishop's simplified equation for an ESA. If groundwater is below the slip surface, $r_u = 0$ and

$$FS = \frac{\sum W_j \tan(\phi') b_j}{\sum W_j \sin \theta_j} \quad (11.31)$$

Let us now consider a TSA. The mobilized shear force on the slip surface is

$$T_j = \frac{(s_u)_j l_j}{FS} \quad (11.32)$$

where $(s_u)_j$ is the undrained shear strength of the soil along the slip surface within the slice. Combining Eqs. (11.20) and (11.32) yields

$$FS = \frac{\sum (s_u)_j l_j}{\sum W_j \sin \theta_j} \quad (11.33)$$

Since $b_j = l_j \cos \theta_j$, Eq. (11.33) becomes

$$FS = \frac{\sum (s_u)_j \frac{b_j}{\cos \theta_j}}{\sum W_j \sin \theta_j} \quad (11.34)$$

11.8.2 Janbu's Method

Janbu (1973) assumed a noncircular slip surface (Fig. 11.6a). The forces acting on a slice are as shown in Fig. 11.6b. Janbu considered equilibrium of horizontal forces and assumed that $E_j - E_{j+1} = 0$.

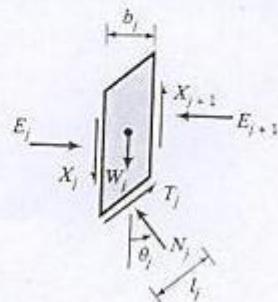
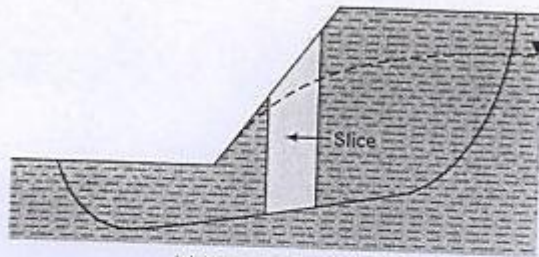


FIGURE 11.6 Failure surface proposed by Janbu and forces on a slice of soil.

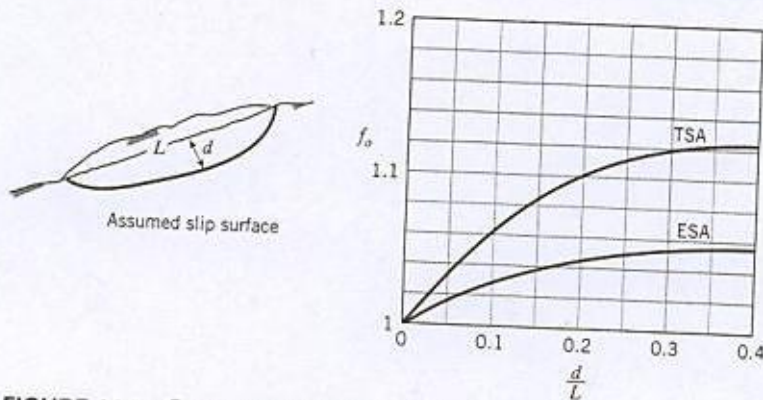


FIGURE 11.7 Correction factor for Janbu's method.

The factor of safety, defined with respect to equilibrium of horizontal forces, is

$$FS = \frac{\sum \text{Resisting forces}}{\sum \text{Disturbing forces}} = \frac{\sum (T_j)_i \cos \theta_j}{\sum [W_j + (X_j - X_{j+1})] \tan \theta_j} \quad (11.35)$$

Noting that $(T_j)_i = T_j(FS) = N_j \tan(\phi')$, FS, we can combine Eqs. (11.35) and (11.27) to yield, for an ESA,

$$FS = \frac{\sum [W_j(1 - r_u) + (X_j - X_{j+1})] m_j \tan \theta_j \cos \theta_j}{\sum [W_j + (X_j - X_{j+1})] \tan \theta_j} \quad (11.36)$$

Janbu (1973) then replaced the interslice shear forces (X_j and X_{j+1}) by a correction factor f_0 as shown in Fig. 11.7. The simplified form of Janbu's equation for an ESA is

$$FS = \frac{f_0 \sum W_j (1 - r_u) m_j \tan \phi'_j \cos \theta_j}{\sum W_j \tan \theta_j} \quad (11.37)$$

If the groundwater is below the slip surface, $r_u = 0$, and

$$FS = f_0 \frac{\sum W_j m_j \tan \phi'_j \cos \theta_j}{\sum W_j \tan \theta_j} \quad (11.38)$$

For a TSA,

$$FS = \frac{\sum (s_u)_j b_j}{\sum [W_j + (X_j - X_{j+1})] \tan \theta_j} \quad (11.39)$$

Replacing $(X_j - X_{j+1})$ by a correction factor f_0 (Fig. 11.7), we get

$$FS = f_0 \frac{\sum (s_u)_j b_j}{\sum W_j \tan \theta_j} \quad (11.40)$$

The essential points are:

1. *Bishop (1955) assumed a circular slip plane and considered only moment equilibrium. He neglected seepage forces and assumed that the lateral normal forces are collinear. In Bishop's simplified method, the resultant interface shear is assumed to be zero.*

2. Janbu (1973) assumed a noncircular failure surface and considered equilibrium of horizontal forces. He made similar assumptions to Bishop (1955), except that a correction factor is applied to replace the interface shear.
3. For slopes in fine-grained soils, you should conduct both an ESA and a TSA for short-term loading and an ESA for long-term loading. For slopes in coarse-grained soils, only an ESA is necessary for short-term and long-term loading provided the loading is static. In most problems, you would find that an effective stress analysis would yield the minimum factor of safety.

11.9 APPLICATION OF THE METHOD OF SLICES

The shear strength parameters are of paramount importance in slope stability calculations. The soils at the slip surface are at or near the critical or the residual state. You should use $\phi' = \phi'_{cs}$ in all slope stability calculations except for fissured overconsolidated clays. Progressive failure usually occurs in fissured overconsolidated clays. The appropriate value of ϕ' to use is ϕ'_r —the residual friction angle. The measured undrained shear strength is often unreliable. You should use conservative values of s_u for a TSA.

Tension cracks in fine-grained soils tend to develop on the crest and the face of slopes in fine-grained soils. There are three important effects of tension cracks. First, they modify the slip surface. The slip surface does not intersect the ground surface but stops at the base of the tension crack (Fig. 11.8). Recall from Chapter 10 that the depth of a tension crack is $z_{cr} = 2s_u/\gamma$.

Second, the tension crack may be filled with water. In this case, the critical depth is $z'_{cr} = 2s_u/\gamma'$ and a hydrostatic pressure is applied along the depth of the crack. The net effect is a reduction in the factor of safety because the disturbing moment is increased. The additional disturbing moment from the hydrostatic pressure is $\frac{1}{2}\gamma_w z_{cr}^2(z_s + \frac{2}{3}z_{cr})$, where z_s is the vertical distance from the top of the

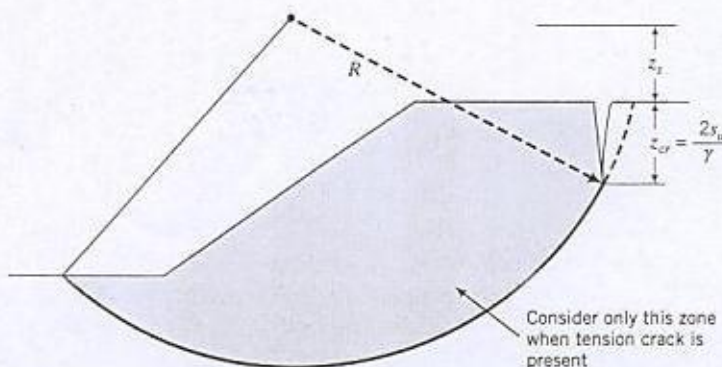


FIGURE 11.8 Effect of tension crack on the slip surface.

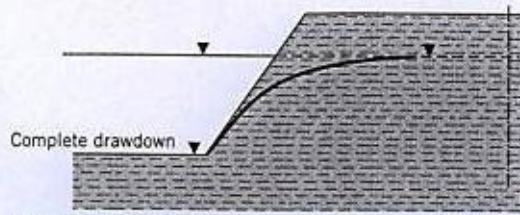


FIGURE 11.9 Drawdown in a reservoir.

tension crack to the center of rotation. The factor of safety using Bishop's simplified method becomes

$$\text{ESA: } FS = \frac{\sum W_j (1 - r_u) (\tan \theta'_j) m_j}{\sum W_j \sin \theta_j + \frac{\frac{1}{2} \gamma_w z_{cr}^2 (z_s + \frac{2}{3} z_{cr})}{R}} \quad (11.41)$$

$$\text{TSA: } FS = \frac{\sum (s_u)_j \frac{b_j}{\cos \theta_j}}{\sum W_j \sin \theta_j + \frac{\frac{1}{2} \gamma_w z_{cr}^2 (z_s + \frac{2}{3} z_{cr})}{R}} \quad (11.42)$$

Third, the tension crack provides a channel for water to reach underlying soil layers. The water can introduce seepage forces and weaken these layers. The locations of the tension crack and the critical slip plane are not sensitive to the location of the phreatic surface.

Dams and cuts supporting reservoirs can be subjected to rapid drawdown. Consider the earth dam shown in Fig. 11.9. When the reservoir is full, the groundwater level within the dam will equilibrate with the reservoir water level. If water is withdrawn rapidly, the water level in the reservoir will drop but very little change in the groundwater level in the dam will occur. In fine-grained soils, a few weeks of drawdown can be rapid because of the low permeability of these soils. Because the restraining lateral force of the water in the reservoir is no longer present and the pore water pressure in the dam is high, the FS will be reduced. The worst case scenario is rapid, complete drawdown. If a partial drawdown occurs and is maintained, then the phreatic surface will keep changing and seepage forces (resulting from pore water pressure gradients) are present in addition to the pore water pressures.

11.10 PROCEDURE FOR THE METHOD OF SLICES

The procedure to determine the factor of safety of slopes using the method of slices, with reference to Fig. 11.10, is as follows:

1. Draw the slope to scale and note the positions and magnitudes of any external loads.
2. Draw a trial slip surface and identify its point of rotation.
3. Draw the phreatic surface, if necessary (Chapter 9).

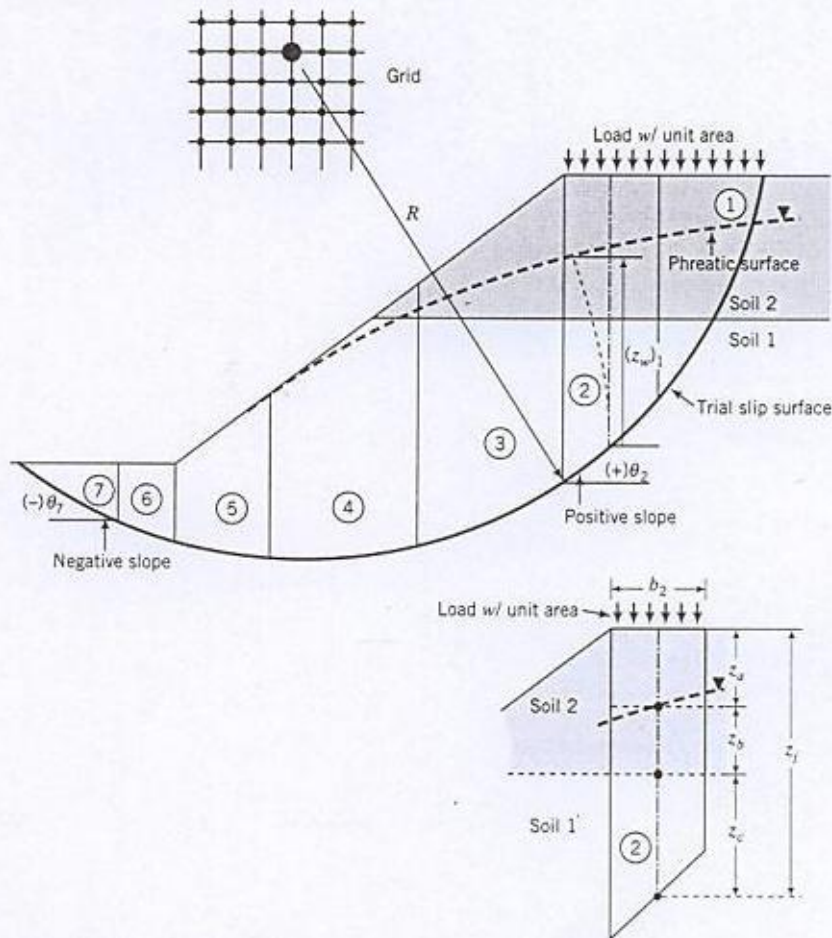


FIGURE 11.10 Method of slices.

4. If the soil is fine-grained, calculate the depth of the tension crack and sketch in a possible location of the tension crack. You can start at the crest and locate a point on your slip surface where the depth matches the depth of the tension crack.
5. Divide the soil mass above the slip surface into a convenient number of slices. More than five slices are needed for most problems.
6. For each slice:
 - (a) Measure the width, b_j .
 - (b) Determine W_j —the total weight of a slice including any external load. For example, for the two-layer soil profile shown in Fig. 11.10, the weight of slice ② ($j = 2$) is $W_2 = b_2(q_s + z_a(\gamma)_{s2} + z_b(\gamma_{sat})_{s2} + z_c(\gamma_{sat})_{s1})$, where s_1 and s_2 denote soil layers 1 and 2, q_s is the surface load per unit area, and z_a , z_b , z_c are the mean heights as shown in Fig. 11.10.
 - (c) Measure the angle θ_j for each slice or you can calculate it if you measure the length, l_j [$\theta_j = \cos^{-1}(b_j/l_j)$]. The angle θ_j can be negative. Angles left of the center of rotation are negative. For example, the value of θ for slice ⑦ is negative but for slice ②, θ is positive.

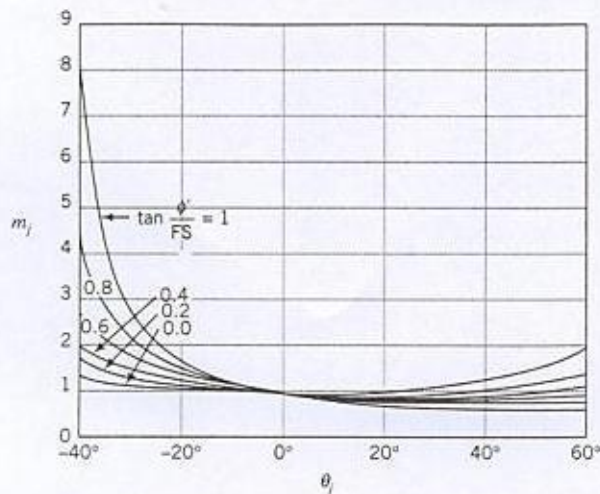


FIGURE 11.11 The m_j to be used in Bishop's method.

Alternatively, negative values of the slope of the slip surface in a slice give negative values of θ_j .

- (d) Sketch an equipotential line starting from the intersection of the vertical center line and the slip surface to intersect the phreatic surface at $\sim 90^\circ$. The vertical projection of the equipotential line is the pore water pressure head, $(z_w)_j$.
 - (e) Calculate $r_u = \gamma_w(z_w)_j / \gamma_j z_j$.
7. You now have values for all the required parameters to calculate the factor of safety. Prepare a table or use a spreadsheet program to carry out the calculations. To facilitate calculations, using a nonprogrammable calculator, a chart for m_j is shown in Fig. 11.11. You have to guess a value of FS and then iterate until the guessed value of FS and the calculated value of FS are the same or within a small tolerance (≈ 0.01). If a tension crack is present, set the term $W_j(1 - r_u)(\tan \phi'_j)m_j$ to zero but keep the term $W \sin \theta_j$ for the slices above the tension crack when you are considering an ESA; for a TSA, set $s_u = 0$ for the slices above the tension crack but keep the term $W_j \sin \theta_j$.
 8. Repeat the procedure from item 2 to item 7 until the smallest factor of safety is found. There are several techniques that are used to reduce the number of trial slip surfaces. One simple technique is to draw a grid and selectively use the nodal points as centers of rotation. Commercially available programs use different methods to optimize the search for the slip plane with the least factor of safety.

The essential points are:

1. The appropriate value of ϕ' to use is ϕ'_{cs} , except for fissured overconsolidated fine-grained soils, where you should use $\phi' = \phi'_c$.
2. Tension cracks in fine-grained soils reduce the factor of safety of a slope. Tension cracks may also provide channels for water to introduce seepage forces and weaken underlying soil layers.
3. For slopes adjacent to bodies of water, you should consider the effects of operating and environmental conditions on their stability.

4

EXAMPLE 11.3

Use Bishop's simplified method for the factors of safety of the slope shown in Fig. E11.3a. Assume the soil above the phreatic surface to be saturated. Consider three cases: Case 1—no tension crack; Case 2—tension crack; and Case 3—the tension crack in Case 2 is filled with water.

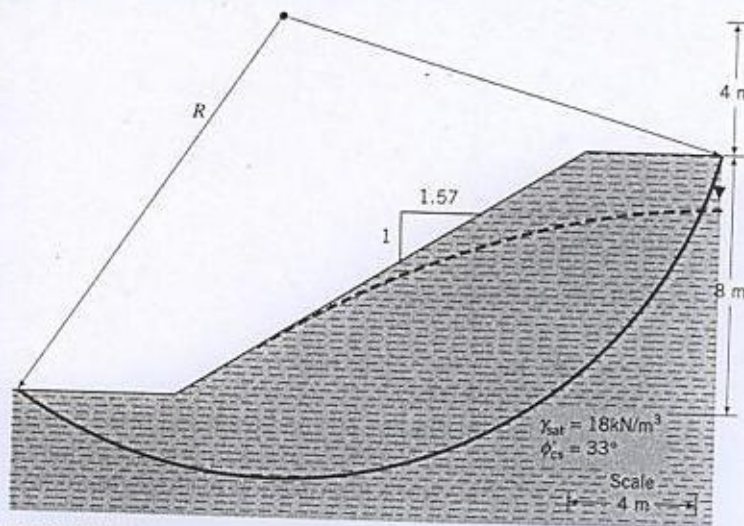


FIGURE E11.3a

Strategy Set up a table to carry out the calculations following the procedure in Section 11.10. If you have access to a spreadsheet program, use it. For the solution of this example, the author used Excel. Before dividing the sliding mass into slices, determine the depth of the tension crack and locate it on the crest of the slope as a side of a slice.

Solution 11.3

Step 1: Redraw the figure to scale.
See Fig. E11.3b.

Step 2: Find the depth of the tension crack.

$$z_{cr} = \frac{2s_u}{\gamma} = \frac{2 \times 30}{18} = 3.33 \text{ m}$$

Step 3: Divide the sliding mass into slices.
Find a height from the crest to the failure surface that equals z_{cr} and sketch in the tension crack. Use this location of the tension crack as a side of a slice. In Fig. E11.3b, the sliding mass is divided into six slices.

Step 4: Set up a spreadsheet.
See Table E11.3.

Step 5: Extract the required values.
Follow the procedure in Section 11.10. The weight $W = \gamma_{sat}bz$. When the tension crack is considered, the shear resistance of slice (3) is

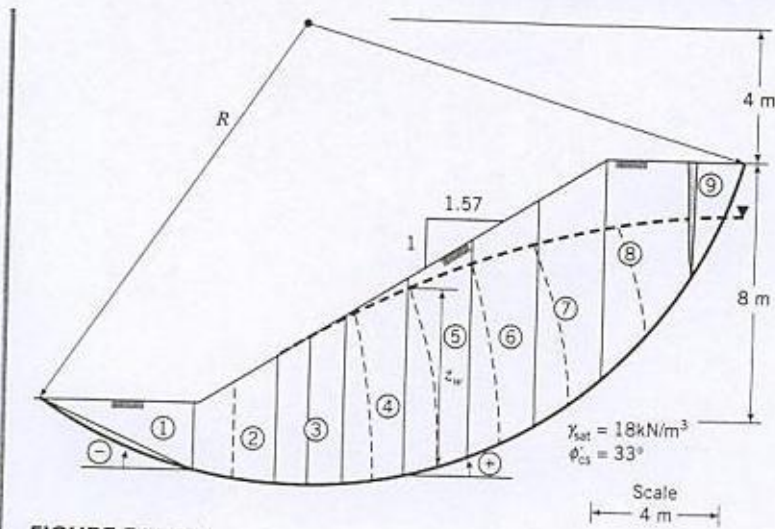


FIGURE E11.3b

neglected. When water fills the tension crack, the moment of the hydrostatic pressure in the tension crack is

$$TCM = \frac{1}{2} \gamma_w z_{cr}^2 (z_c + \frac{2}{3} z_{cr})$$

For an ESA, assume a value of FS and then change this value until it becomes equal to the calculated value.

TABLE E11.3 Bishop's Simplified Method

Homogeneous soil
 s_u 30 kPa
 ϕ' 33°
 γ_w 9.8 kN/m³
 γ_{sat} 18 kN/m³
 z_{cr} 3.33 m
 FS 1.05 assumed

No tension crack

Slice	b (m)	z (m)	W = $\gamma b z$ (kN)	z_w (m)	r_u	θ (deg)	m_j	W sin θ	ESA	TSA
									$W[1 - r_u(\tan \phi') m_j]$	$s_u b / \cos \theta$
1	4.9	1	88.2	1	0.54	-23	1.47	-34.5		
2	2.5	3.6	162.0	3.6	0.54	-10	1.14	-28.1	38.3	159.7
3	2	4.6	165.6	4.6	0.54	0	1.00	0.0	54.6	76.2
4	2	5.6	201.6	5	0.49	9	0.92	31.5	49.0	60.0
5	2	6.5	234.0	5.5	0.46	17	0.88	68.4	62.1	60.7
6	2	6.9	248.4	5.3	0.42	29	0.85	120.4	72.2	62.7
7	2	6.8	244.8	4.5	0.36	39.5	0.86	155.7	80.1	68.6
8	2.5	5.3	238.5	2.9	0.30	49.5	0.90	181.4	87.6	77.8
9	1.6	1.6	46.1	0.1	0.03	65	1.02	41.8	97.5	115.5
									29.6	113.6
							Sum	536.6	570.9	794.8
							FS		1.06	1.48

4

EXAMPLE 11.4

Determine the factor of safety of the slope shown in Fig. E11.4a. Assume no tension crack.

Strategy Follow the same strategy as described in Example 11.3.

Solution 11.4

Step 1: Redraw the figure to scale.
See Fig. E11.4b.

Step 2: Divide the sliding mass into slices as shown in Fig. E11.4b.

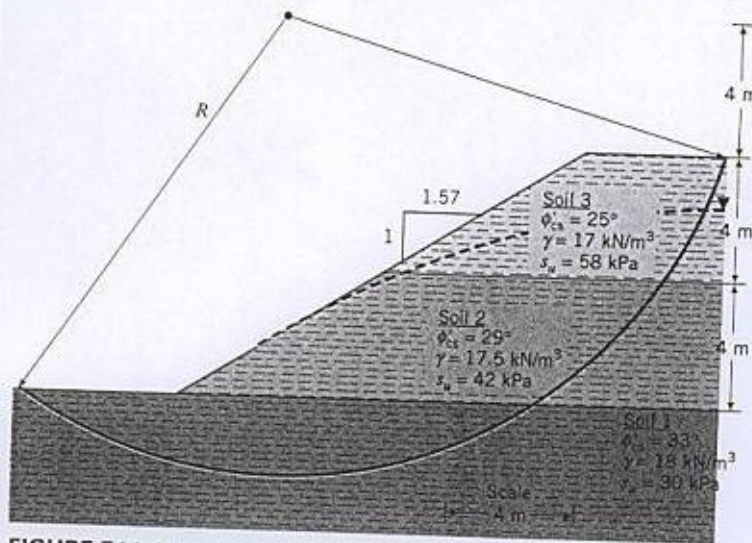


FIGURE E11.4a

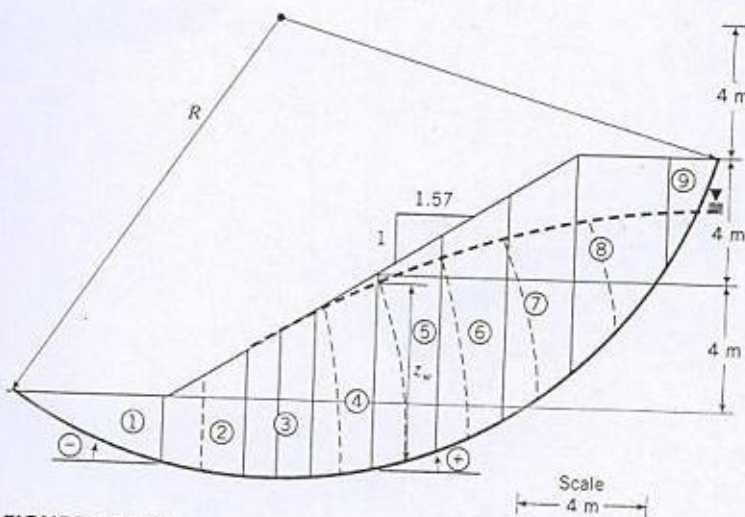


FIGURE E11.4b

TABLE E11.4 Three Soil Layers

	Soil 1	Soil 2	Soil 3	
s_u	30	42	58	kPa
ϕ'	33°	29°	25°	
γ_w	9.8			kN/m ³
γ_{sat}	18	17.5	17	kN/m ³
FS	1.01	assumed		

Slice	b (m)	z_1 (m)	z_2 (m)	z_3 (m)	$W = \gamma_b z$ (kN)	z_w (m)	r_u	θ (deg)	m_f	$W \sin \theta$	ESA	TSA
											$W[1 - r_u]/(\tan \phi') m_f$	$s_u b / \cos \theta$
1	4.9	1	0	0	88.2	1	0.54	-23	1.49	-34.5		
2	2.5	2.3	1.3	0	160.4	3.6	0.55	-10	1.15	-27.8	39.0	159.7
3	2	2.4	2.2	0	163.4	4.6	0.55	0	1.00	0.0	53.7	76.2
4	2	2	3.6	0	198.0	5	0.49	9	0.92	31.0	47.6	60.0
5	2	0.9	4.1	1.5	226.9	5.5	0.48	17	0.87	66.3	59.7	60.7
6	2	0.8	4.1	2	240.3	5.3	0.43	29	0.84	116.5	67.6	62.7
7	2	0	3.7	3.1	234.9	4.5	0.38	39.5	0.89	149.4	74.7	68.6
8	2.5	0	1.5	3.8	227.1	2.9	0.31	49.5	0.94	172.7	72.6	108.9
9	1.6	0	0	1.6	43.5	0.1	0.04	65	1.19	39.4	81.1	161.7
											23.3	219.6
									Sum	513.1	519.1	978.1
									FS		1.01	1.91

Step 3: Set up a spreadsheet.
See Table E11.4.

Step 4: Extract the required values and perform the calculations. Let z_1 , z_2 , and z_3 be the heights of soil 1, 2, and 3, respectively, in each slice. Slice ①, for example, only contains soil 1 while slice ⑥ contains each soil. Use the appropriate value of ϕ'_{cs} and s_u for each of the slices. For example, $\phi'_{cs} = 33^\circ$ and $s_u = 30$ kPa for soil 1 are applicable to slices ① through ⑥, while $\phi'_{cs} = 24^\circ$ and $s_u = 58$ kPa are applicable to slice ⑨.

4

EXAMPLE 11.5

A coarse-grained fill was placed on saturated clay. A noncircular slip surface was assumed, as shown in Fig. E11.5a. Determine the factor of safety of the slope using an ESA. The groundwater level is below the assumed slip surface.

Strategy Since a noncircular slip surface is assumed, you should use Janbu's method. Groundwater is below the slip surface; that is, $r_u = 0$.

Solution 11.5

Step 1: Redraw the figure to scale.
See Fig. E11.5b.

Step 2: Divide the sliding mass into a number of slices.
In this case, four slices are sufficient.

Step 3: Extract the required parameters.

Step 4: Carry out the calculations.
Use a spreadsheet as shown in Table E11.5.

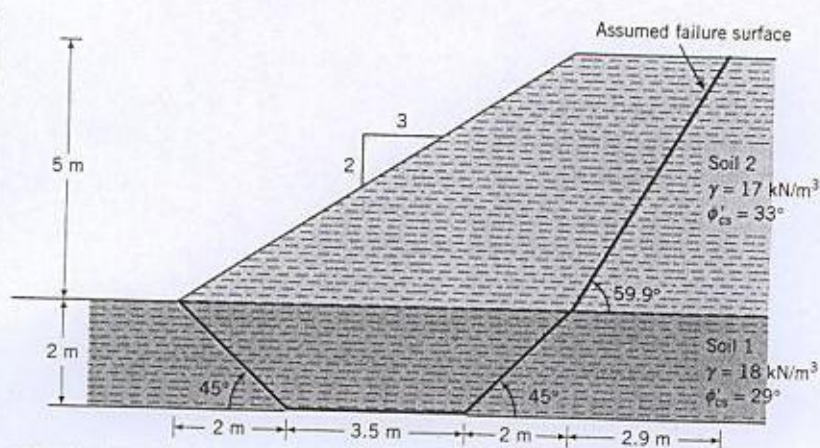


FIGURE E11.5a

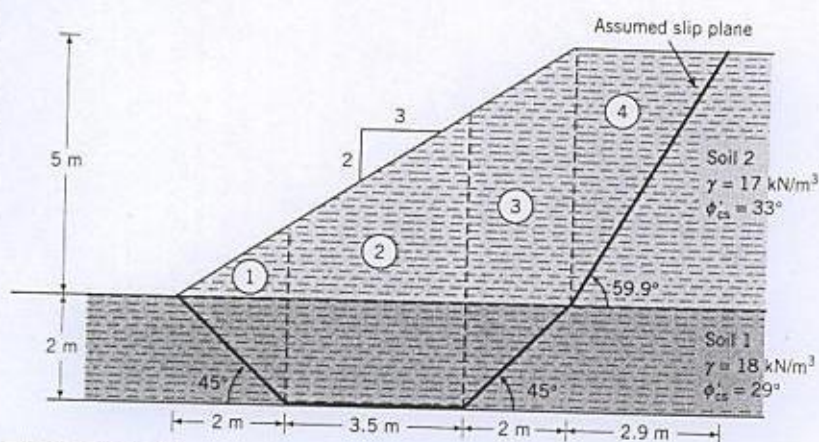


FIGURE E11.5b

TABLE E11.5 Janbu's Method

	Soil 1	Soil 2							
ϕ'	29°	33.5°							
γ_w	9.8		kN/m ³						
γ_{sat}	18	17	kN/m ³						
d	4.5		m						
l	11.5								
d/l	0.39	f_o	1.06						
FS	1.04	assumed							

								ESA	
Slice	b (m)	z_1 (m)	z_2 (m)	$W = \gamma b z$ (kN)	θ (deg)	m_f	$W \tan \theta$	$W \tan \phi'(\cos \theta)m_f$	
1	2	1	0.7	59.8	-45	3.03	-59.8	71.0	
2	3.5	2	2.5	274.8	0	1.00	0.0	152.3	
3	2	1	4.3	182.2	45	0.92	182.2	65.9	
4	2.9	0	2.5	123.3	59.9	0.95	212.6	38.9	
Sum							335.0	328.0	
							FS	1.04	

What's next . . . Charts can be prepared to allow you to quickly estimate the stability of slopes with simple geometry in homogeneous soils. In the next section, we present some of the popular charts.

11.11 STABILITY OF SLOPES WITH SIMPLE GEOMETRY

11.11.1 Taylor's Method

Let us reconsider the stability of a slope using a TSA as expressed by Eq. (11.34). We can rewrite Eq. (11.34) as

$$FS = N_o \frac{\sum(s_u)_j}{\sum(\gamma z)_j} \quad (11.43)$$

where N_o is called stability number and depends mainly on the geometry of the slope. Taylor (1948) used Eq. (11.43) to prepare a chart to determine the stability of slopes in a homogeneous deposit of soil underlain by a much stiffer soil or rock. He assumed no tension crack, failure occurring by rotation, no surcharge or external loading, and no open water outside the slope.

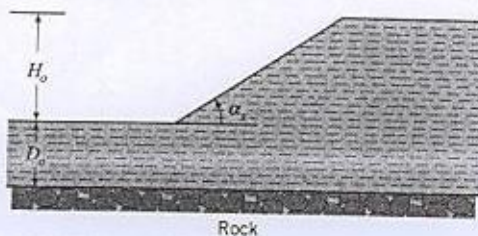
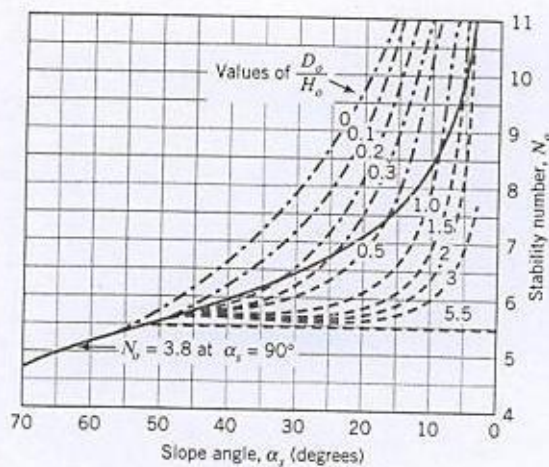


FIGURE 11.12 Taylor's curves for determining the stability of simple slopes.

The procedure to use Taylor's chart to determine the safe slope in a homogeneous deposit of soil using a TSA, with reference to Fig. 11.12, is as follows:

1. Calculate $n_d = D_o/H_o$, where D_o is the depth from the toe to the top of the stiff layer and H_o is the height of the slope.
2. Calculate $N_o = FS(\gamma H_o/s_u)$.
3. Read the value of α_s at the intersection of n_d and N_o .

If you wish to check the factor of safety of an existing slope or a desired slope, the procedure is as follows:

1. Calculate $n_d = D_o/H_o$.
2. Read the value of N_o at the intersection of α_s and n_d .
3. Calculate $FS = N_o s_u / \gamma H_o$.

11.11.2 Bishop–Morgenstern Method

Bishop and Morgenstern (1960) prepared a number of charts for homogeneous soil slopes with simple geometry using Bishop's simplified method. Equation (11.30) was written as

$$FS = m - nr_u \quad (11.44)$$

where m and n are stability coefficients (Fig. 11.13) that depend on the friction angle and the geometry of the slope.

The procedure to use the Bishop–Morgenstern method is as follows:

1. Assume a circular slip surface.
2. Draw the phreatic surface (Chapter 9).
3. Calculate $r_u = \gamma_w(z_w)/\gamma_j z_j$ (see Fig. 11.10). Use a weighted average value of r_u within the sliding mass. A practical range of values of r_u is $\frac{1}{3}$ to $\frac{1}{2}$.
4. With $\phi' = \phi'_{cs}$ and the assumed slope angle, determine the values of m and n from Fig. 11.13.
5. Calculate FS using Eq. (11.44).

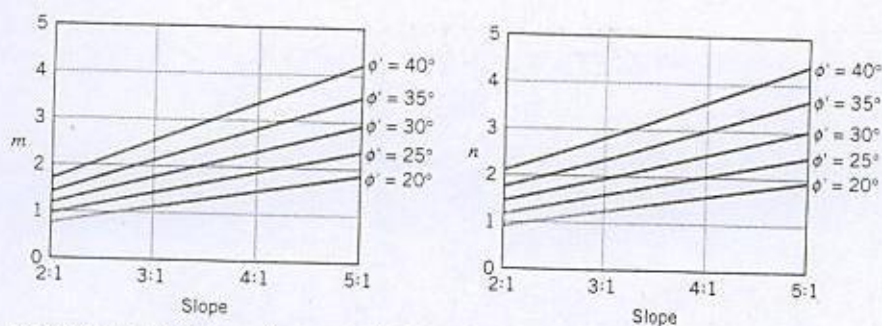


FIGURE 11.13 Values for m and n for the Bishop–Morgenstern method.

EXAMPLE 11.6

Determine the factor of safety of the slope shown in Fig. E11.6.

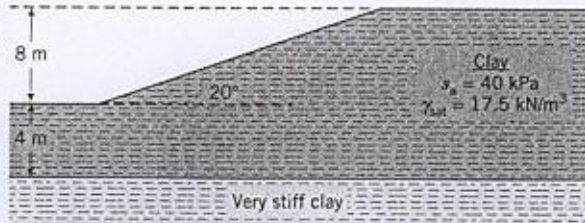


FIGURE E11.6

Strategy Follow the procedures in Section 11.11.

Solution 11.6

Step 1: Calculate n_d .

$$H_o = 8 \text{ m}, D_o = 4 \text{ m.}$$

$$n_d = \frac{D_o}{H_o} = \frac{4}{8} = 0.5$$

Step 2: Determine N_o .

From Fig. 11.12, for $\alpha_r = 20^\circ$ and $n_d = 0.5$, we get
 $N_o = 6.8$.

Step 3: Calculate FS.

$$FS = \frac{N_o c_u}{\gamma H_o} = \frac{6.8 \times 40}{17.5 \times 8} = 1.94$$

EXAMPLE 11.7

Determine the factor of safety of the slope shown in Fig. E11.7.

Strategy Use the Bishop and Morgenstern (1960) charts and equations. Follow the procedures in Section 11.11. Since you are given r_u , you only need to do Steps 4 and 5.

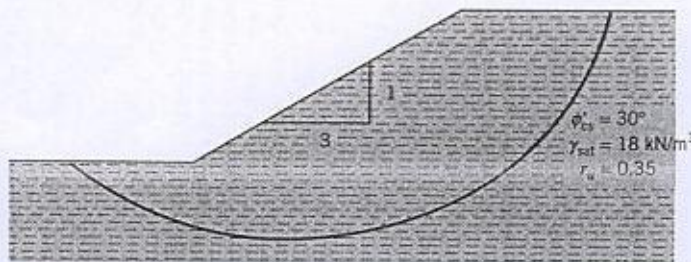


FIGURE E11.7

Solution 11.7

Step 1: Determine m and n .

From Fig. 11.13, $m = 1.73$ and $n = 1.92$ for a slope of 3:1 and $\phi'_{cs} = 30^\circ$.

Step 2: Calculate FS.

$$FS = m - nr_u = 1.73 - 1.92 \times 0.35 = 1.06$$

11.12 SUMMARY

In this chapter, we examined the stability of simple slopes. Slope failures are often catastrophic and may incur extensive destruction and deaths. Slopes usually fail from natural causes (erosion, seepage, and earthquakes) and by construction activities (excavation, change of land surface, etc.). The analyses we considered were based on limit equilibrium, which requires simplifying assumptions. Careful judgment and experience are needed to evaluate slope stability. The geology of a site is of particular importance in determining slope stability. You should consider both an effective stress analysis and a total stress analysis for slopes in fine-grained soils and an effective stress analysis for slopes in coarse-grained soils. The main sources of errors in slope stability analysis are the shear strength parameters, especially s_u , and the determination of the pore water pressures.

EXERCISES**Theory**

- 11.1 A slope fails as shown in Fig. P11.1. Derive an equation for the undrained shear strength of the soil.

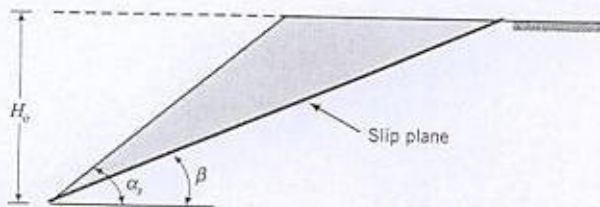


FIGURE P11.1

- 11.2 Derive an equation for the factor of safety of the slope in Fig. P11.2 using the mechanism shown.

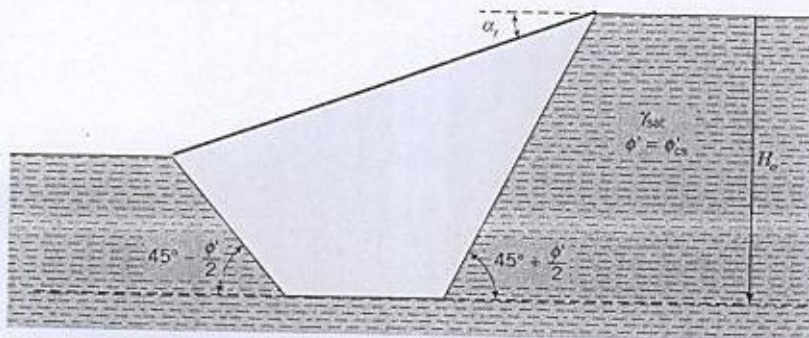


FIGURE P11.2

- 11.3 Figure P11.3 shows the profile of a beach on a lake. It is proposed to drawdown the lake by 2 m. Determine the slope angle of the beach below the high water level after the drawdown. You may assume an infinite slope failure mechanism.

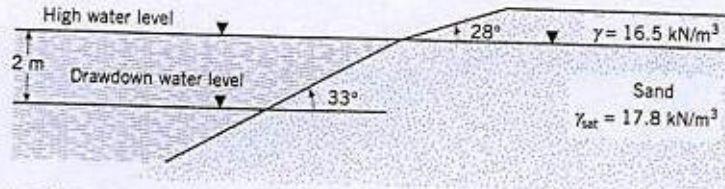


FIGURE P11.3

Problem Solving

- 11.4 A cut for a highway is shown in Fig. P11.4. Determine the factor of safety of the slope using an ESA and a TSA. Assume a center of rotation, O , such that the slip surface passes through the toe of the slope.

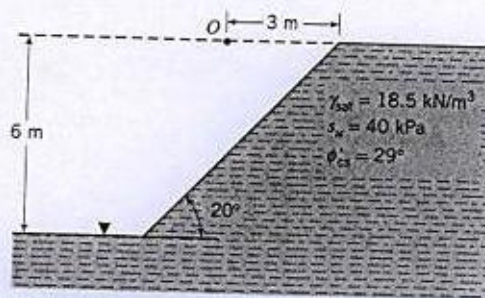


FIGURE P11.4

- 11.5 Determine the factor of safety of the slope shown in Fig. P11.5 using an ESA and a TSA. The point of rotation is indicated by O and the line representing the top of the stiff soil is a tangent to the slip plane.

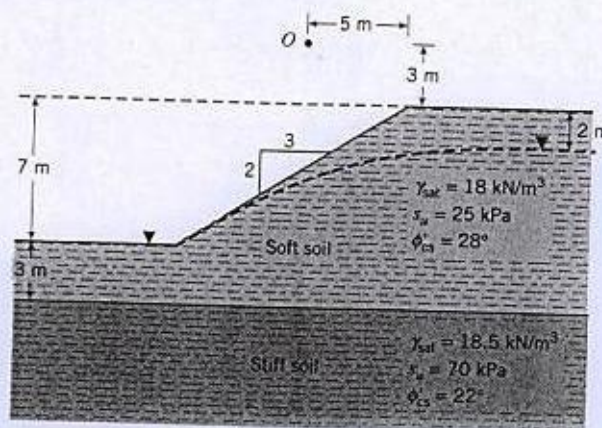


FIGURE P11.5

- 11.6 A compacted earth fill is constructed on a soft, saturated clay (Fig. P11.6). The fill was compacted to an average dry unit of 19 kN/m^3 and water content of 15%. The shearing strength of the fill was determined by CU tests on samples compacted to representative field conditions. The shear strength parameters are $s_u = 35 \text{ kPa}$, $\phi'_p = 34^\circ$, and $\phi'_{cs} = 28^\circ$. The variation of undrained shear strength of the soft clay with depth as determined by simple shear tests is shown in Fig. P11.6 and the friction angle at the critical state is $\phi'_{cs} = 30^\circ$. The average water content of the soft clay is 55%. Compute the factor of safety using Bishop's simplified method. Assume that a tension crack will develop in the fill.

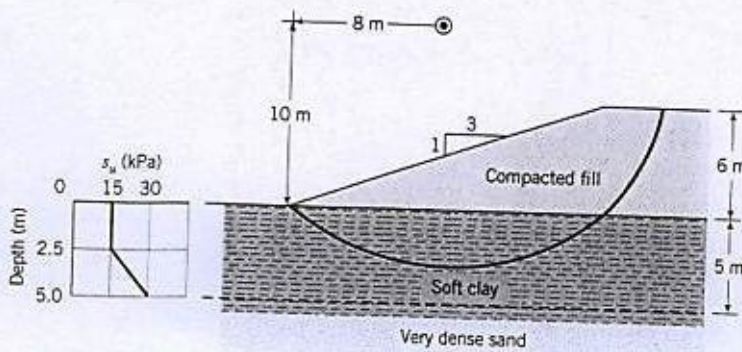


FIGURE P11.6

- 11.7 A cross section of a canal is shown in Fig. P11.7. Determine the factor of safety for (a) the existing condition and (b) a rapid drawdown of the water level in the canal. Use Bishop's method. The center of rotation of the sliding mass is at coordinates $x = 113 \text{ m}$ and $y = 133 \text{ m}$. The rock surface is tangent to the slip plane. The properties of the soil are as follows:

Soil	Description	$\gamma_{sat} \text{ (kN/m}^3\text{)}$	$s_u \text{ (kPa)}$	ϕ'_{cs}
A	Clay	17.8	34	30
B	Clay	18.0	21	28

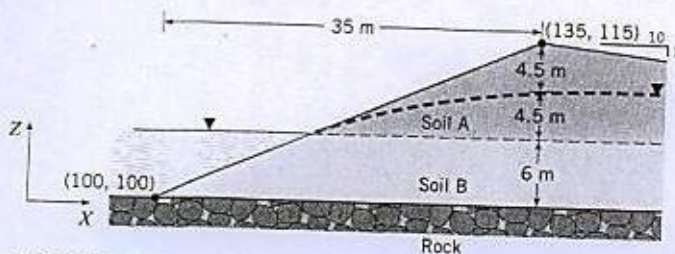


FIGURE P11.7

11.8 Use Janbu's method to determine the factor of safety of the slope shown in Fig. P11.8.

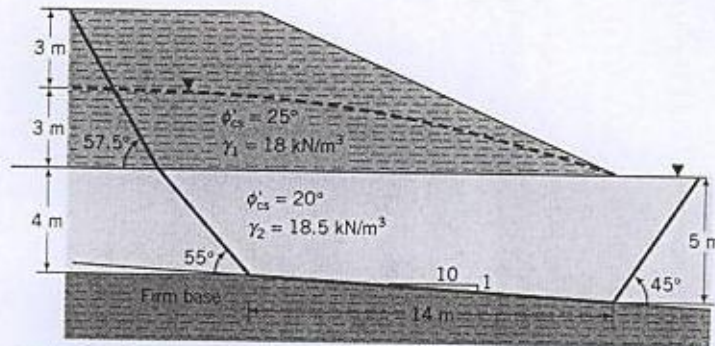


FIGURE P11.8

11.9 Use Taylor's method to determine the factor of safety of the slope shown in Fig. P11.9.

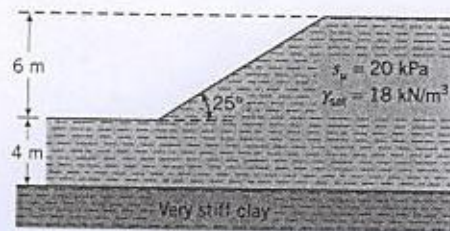


FIGURE P11.9

11.10 Use Taylor's method to determine the slope in Fig. P11.10 for $FS = 1.25$.

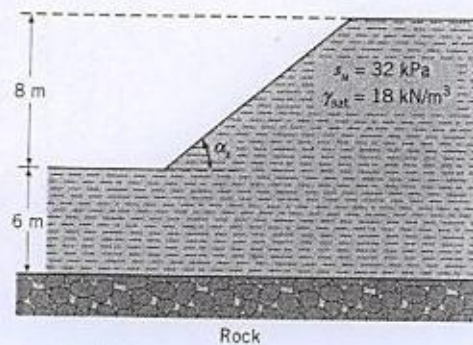


FIGURE P11.10

11.11 Determine the factor of safety of a 2:1 slope with $r_u = 0.25$, $\phi'_{cs} = 27^\circ$ using the Bishop-Morgenstern method.

Practical

11.12 The soil at a site is shown in Fig. P11.12. A cut was made as shown and one possible slip plane is shown. Determine the factor of safety.

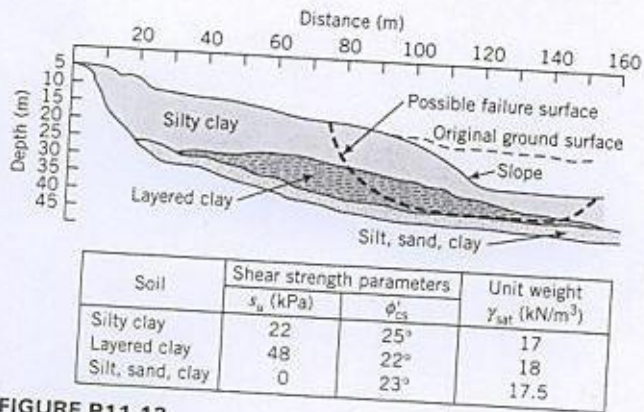


FIGURE P11.12

Step 4: Calculate the anchor forces for $(FS)_r = 1$.
For $(FS)_r = 1$, $d = 4.62$ m. Substituting $d = 4.62$ m, we get

Active zone

$$j_s = \left(\frac{5}{5 + 2 \times 4.62} \right) 9.8 = 3.44 \text{ kN/m}^3$$

$$R_x = 56.3 + (3.8 \times 3.27) + (16.5 + 1.4 \times 3.44)4.62 + \frac{49 \times 4.62(5 + 4.62)}{5 + 2 \times 4.62}$$

$$= 320.1 \text{ kN}$$

Passive

$$\text{Passive lateral force} = (17.7 - 2.4 \times 3.44)4.62^2 = 201.6 \text{ kN}$$

$$T_a = \text{Active lateral force} - \text{Passive lateral force} = 320.1 - 201.6$$

$$= 118.5 \text{ kN}$$

$$\text{Design anchor force} = 2T_a = 237 \text{ kN}$$

What's next . . . Sometimes, it is not possible to use an anchored sheet pile wall for an excavation. For example, an existing building near a proposed excavation can preclude the use of anchors. You may have to brace your sheet piles within the excavation using struts. The analysis of braced excavation (also called cofferdam) is presented in the next section.

10.11 BRACED EXCAVATION

Braced excavations consist of sheet piles driven into the soil to form the sides of an excavation (Fig. 10.26a) such as in the construction of bridge piers and abutments. As excavation proceeds within the area enclosed by the sheet piles, struts are added to keep the sheet piles in place.

The top struts are installed followed by others at lower depths. The wall displacements before the top struts are installed are usually very small but get larger as the excavation gets deeper. The largest wall displacement occurs at the base of the excavation (Fig. 10.26a). Wall displacements are inconsistent with all the earth pressure theories.

The critical design elements in a braced excavation are the loads on the struts, which are usually different because of different lateral loads at different depths, the time between excavations, and the installation procedure. Failure of a single strut can be catastrophic because it can lead to the collapse of the whole system. The analysis for the forces and deflection in braced excavation should ideally consider the construction sequence, and numerical methods such as the finite element method are preferred. Semi-empirical methods are often used for shallow braced excavations and in the preliminary design of deep braced excavations. The finite element method is beyond the scope of this book. We will only discuss a semi-empirical method.

Lateral stress distributions for use in the semi-empirical method are approximations from field measurements of strut loads in different types of soil. The lateral stress distributions used for coarse-grained and fine-grained soils are shown in Figs. 10.26b–d. These lateral stress distributions are not real but average

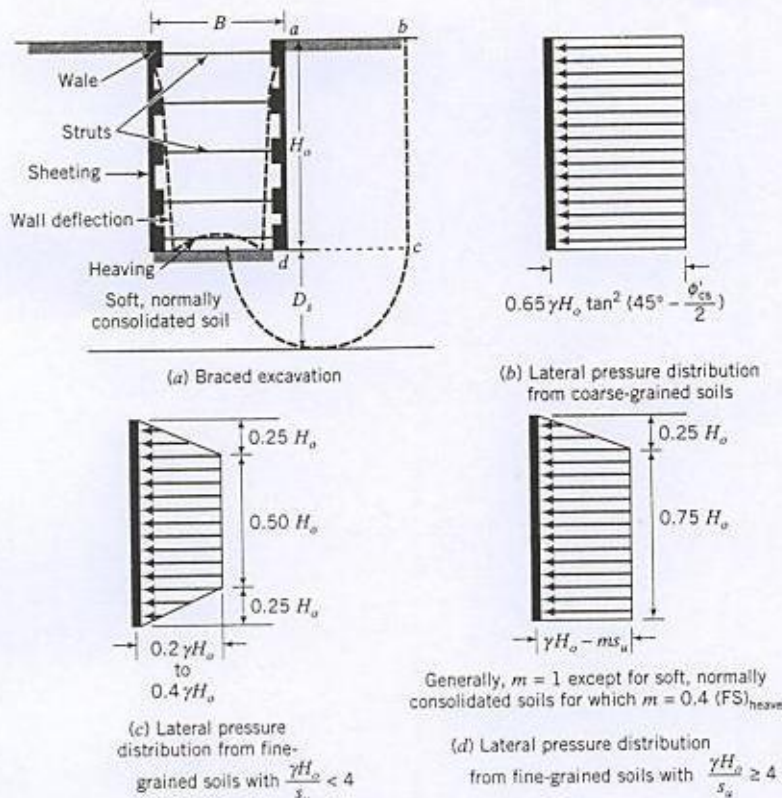


FIGURE 10.26 Braced excavations.

approximate stress distributions. The lateral stress distribution for coarse-grained soils (Fig. 10.26b) was extrapolated from strut loads measured for dense sand adjacent to the excavation. The appropriate value of friction angle is ϕ'_p but because we cannot rely on dilation, the design friction angle should be ϕ'_{cs} . For fine-grained soils, a total stress analysis is used and the lateral stress distribution depends on the stability number, $\gamma H_o/s_u$ (Peck, 1969). If the stability number is less than 4, the stress state of the soil adjacent to the excavation can be assumed to be elastic and the recommended lateral stress distribution is depicted in Fig. 10.26c. However, if the stability number is greater than or equal to 4, the stress state of the soil adjacent to the bottom of the excavation is expected to be plastic and the recommended lateral stress distribution is depicted in Fig. 10.26d.

If the soil below the base of the excavation is a soft, normally consolidated soil, it is possible that heaving can occur. The column of soil, $abcd$ (Fig. 10.26a), above the base acts as a surcharge on the soil below the excavation level. This surcharge load may exceed the bearing capacity of the soft, normally consolidated soil, resulting in heaving. Bjerrum and Eide (1956) suggested that the excavation could be viewed as a footing of width B and embedment depth H_o . They showed that the factor of safety against bottom heave is

$$(FS)_{\text{heave}} = N_c \frac{s_u}{\gamma H_o + q_s} \quad (10.61)$$

where N_c is a bearing capacity coefficient given by Skempton (1951). The coefficient N_c can be approximated, for practical purposes, by

$$N_c = 6 \left(1 + 0.2 \frac{H_o}{B} \right) \text{ for } \frac{H_o}{B} \leq 2.5 \quad \text{and} \quad N_c = 9 \text{ for } \frac{H_o}{B} > 2.5 \quad (10.62)$$

where H_o/B is the depth to width ratio.

If $(FS)_{\text{heave}} < 1.5$, the sheeting should be extended below the base of the excavation for stability. The value of the coefficient m (Fig. 10.26d) is usually 1 except when the soil below the excavation is a deep, soft, normally consolidated soil, in which case $m \approx 0.4(FS)_{\text{heave}}$.

The strut loads at each level are found by assuming hinged connections of the struts to the sheet piles. A free-body diagram is drawn for each level and the forces imposed on the struts are determined using static equilibrium. Displacements of the walls are an important design consideration as adjacent structures may be affected. The method discussed above does not consider displacements. Analyses using numerical methods (e.g., finite element method) are better suited for the overall analysis of braced excavation.

The procedure for analysis of braced excavation is as follows:

1. Check the stability against bottom heave using Eq. (10.61). If $(FS)_{\text{heave}} < 1.5$, the walls should be extended below the base.
2. Determine the lateral stress on the walls for your soil type (Figs. 10.26b–d).
3. Treat the connections of the wall (sheet pile) to the struts as hinges.
4. Draw a free-body diagram at each level of the excavation.
5. Solve for the forces in the struts using the static equilibrium equations on each free-body diagram.

EXAMPLE 10.8

Determine the forces on the struts for the braced excavation in soft, normally consolidated clay as shown in Fig. E10.8a.

Strategy You need to determine the approximate lateral stress distribution by calculating $\gamma H_o/s_u$. To find the forces on the struts, draw free-body diagrams—one at each level—and use statics.

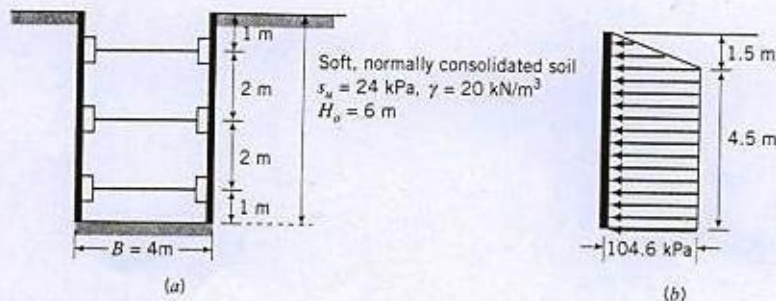


FIGURE E10.8a,b

Solution 10.8

Step 1: Check for stability against bottom heave.

$$\frac{H_o}{B} = \frac{6}{4} = 1.5, \quad N_c = 6 \left(1 + 0.2 \frac{H_o}{B} \right) = 6(1 + 2 \times 0.15) = 7.6,$$

$$q_r = 0$$

$$(\text{FS})_{\text{heave}} = N_c \frac{s_u}{\gamma H_o + q_s} = 7.6 \frac{24}{20 \times 6} = 1.52 > 1.5;$$

therefore, excavation is safe against bottom heave

Step 2: Determine the lateral pressure diagram.

$$\frac{\gamma H_o}{s_u} = \frac{20 \times 6}{24} = 5; \quad \text{use Fig. 10.26d}$$

$$m = 0.4(\text{FS})_{\text{heave}} = 0.4 \times 1.6 = 0.64$$

The maximum lateral pressure is

$$\gamma H_o - m s_u = 20 \times 6 - 0.64 \times 24 = 104.6 \text{ kPa}$$

Step 3: Draw the pressure diagram.
See Fig. E10.8b.

Step 4: Calculate the forces on the struts at each level.
All loads are per meter length of wall.

Level 1 (Fig. E10.8c)

$$\Sigma M_{B_1} = 0 = 2.0A$$

$$- \left[\frac{1}{2} \times 104.6 \times 1.5 \times \left(\frac{1.5}{3} + 1.5 \right) + 1.5 \times 104.6 \times 0.75 \right]$$

$$\therefore A = 137.3 \text{ kN/m}$$

$$\Sigma F_x = 0: \quad A + B_1 = \frac{1}{2} \times 104.6 \times 1.5 + 1.5 \times 104.6 = 235.4 \text{ kN/m}$$

$$\therefore B_1 = 235.4 - 137.3 = 98.1 \text{ kN/m}$$

Level 2 (Fig. E10.8d)

$$B_2 = C_1 = \frac{104.6 \times 2}{2} = 104.6 \text{ kN/m}$$

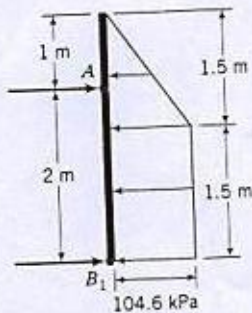


FIGURE E10.8c

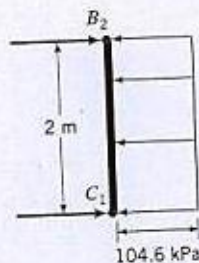


FIGURE E10.8d

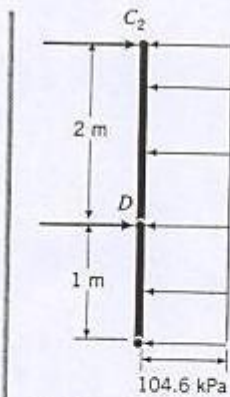


FIGURE E10.8e

Level 3 (Fig. E10.8e)

$$\Sigma M_{C_2} = 2D - 104.6 \times 3 \times 1.5 = 0$$

$$\therefore D = 235.4 \text{ kN/m}$$

$$\Sigma F_x = 0: D + C_2 = 104.6 \times 3 = 313.8 \text{ kN/m}$$

$$\therefore C_2 = 313.8 - 235.4 = 78.4 \text{ kN/m}$$

Step 5: Calculate the forces on each strut.

$$A = 137.3 \text{ kN/m}$$

$$B = B_1 + B_2 = 98.1 + 104.6 = 202.7 \text{ kN/m}$$

$$C = C_1 + C_2 = 104.6 + 78.4 = 183 \text{ kN/m}$$

$$D = 235.4 \text{ kN/m}$$

What's next . . . Soils reinforced by metal strips or geotextiles have become popular earth retaining structures because they are generally more economical than gravity retaining walls. These walls are called mechanical stabilized earth (MSE) walls. A brief introduction to MSE walls is presented next.

10.12 MECHANICAL STABILIZED EARTH WALLS

Mechanical stabilized earth (MSE) walls (Fig. 10.27a) are used for a variety of retaining structures. Metal strips (Fig. 10.27b), geotextiles (Fig. 10.27c), or geogrids (Fig. 10.27d) reinforce the soil mass. A geotextile is a planar, textile, polymeric product. A geogrid is a polymeric product formed by joining intersecting ribs. MSE walls are generally more economical than gravity walls. The basic mechanics of MSE walls is described in the next section.

10.12.1 Basic Concepts

You should recall from Chapter 5 that if a load is applied to a soil mass under axisymmetric undrained conditions, the lateral strain (ϵ_3) is one-half the axial strain (ϵ_1) as expressed by Eq. (5.42). If the undrained restriction is lifted, then

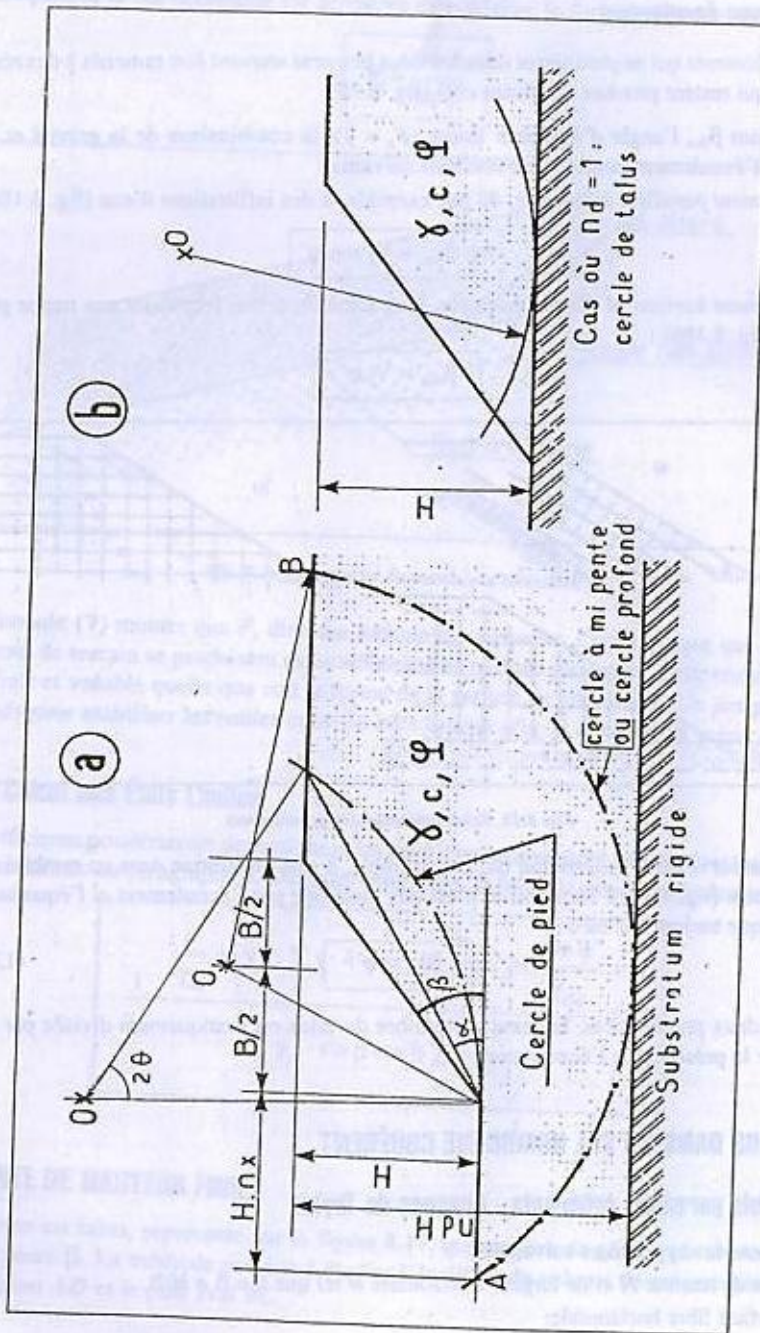


Fig. 8.19. Abaques de Taylor - Définition des paramètres

- un sol homogène et purement élastique
- poids volumique γ ,
- cohésion $c \neq 0$,
- angle de frottement interne φ
- la présence d'un substratum rigide

La formule (2) devient :

avec L : longueur totale de l'arc de cercle

Or, L est proportionnel à H et γ est constant, donc à H^2 et γ .

D'où :

Or, l'expression $\gamma \cdot H/c$ est donnée, le coefficient de sécurité N_s , dont l'expression est :

L'abaque de la figure 8.20 permet de déterminer le coefficient de sécurité de 1, connaissant :

- les cercles de talus tangents à la surface du talus
- si $\beta > 53^\circ$, le cercle critique est celui qui est tangent à la surface du talus
- si $\beta < 53^\circ$, le cercle critique est celui qui est tangent à la surface du talus et au substratum rigide

Si le cercle critique est un cercle de talus, les angles 2θ et α (fig. 8.19a). La figure 8.21a permet de déterminer le coefficient de sécurité N_s et de n_{β} .

Si le cercle critique est un cercle de substratum rigide, la figure 8.21b permet de déterminer le coefficient de sécurité N_s et de n_{β} .

Ces abaques permettent soit de déterminer le coefficient de sécurité N_s pour un talus donné, soit de déterminer le coefficient de sécurité N_s égal à 1 pour un talus donné, soit de déterminer le coefficient de sécurité N_s égal à 1 pour un talus donné, soit de déterminer le coefficient de sécurité N_s égal à 1 pour un talus donné.

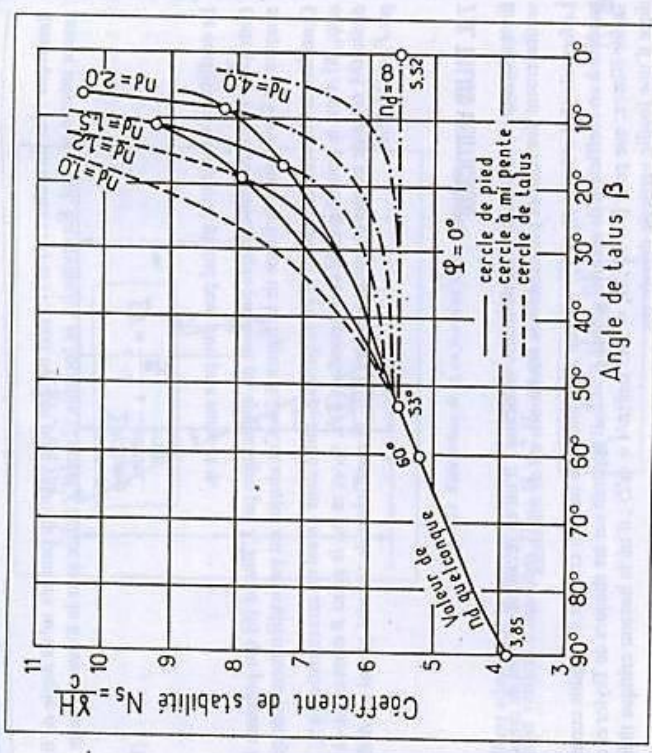
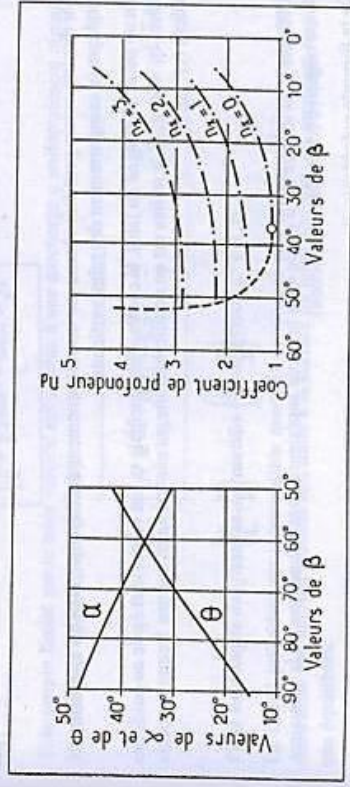


Fig. 8.20. Valeur de N_s pour les sols purement cohérents



a) Détermination de α et de θ b) Détermination de n_s

Fig. 8.21. Détermination de α , θ et n_s

Le coefficient de sécurité global se détermine par la formule (15) ou encore la formule (15 bis).

$$F_s = \frac{H_c}{H} \quad (15)$$

$$F_s = \frac{c}{c_{\min}} \quad (15 \text{ bis})$$

7.2.2. Soils cohérents à frottement interne

Si $\phi > 3^\circ$, le cercle critique est toujours un cercle de pied.

Le coefficient de sécurité global F_s dépend toujours du coefficient de stabilité N_s , de β mais également de ϕ . La figure 8.22, due également à Taylor, donne la valeur de N_s en fonction de β et ϕ , toujours pour un coefficient de sécurité égal à 1.

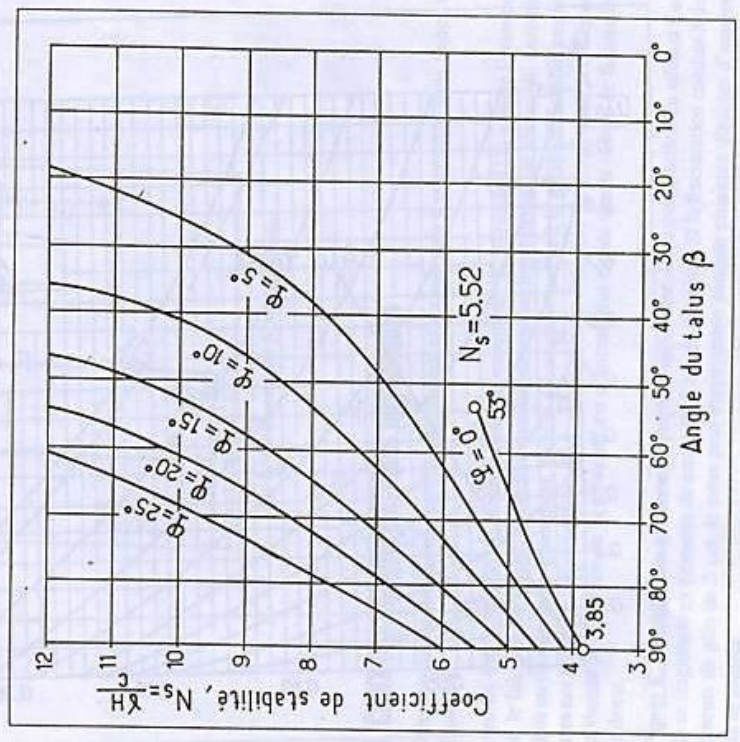


Fig. 8.22. Valeurs de N_s pour les soils cohérents

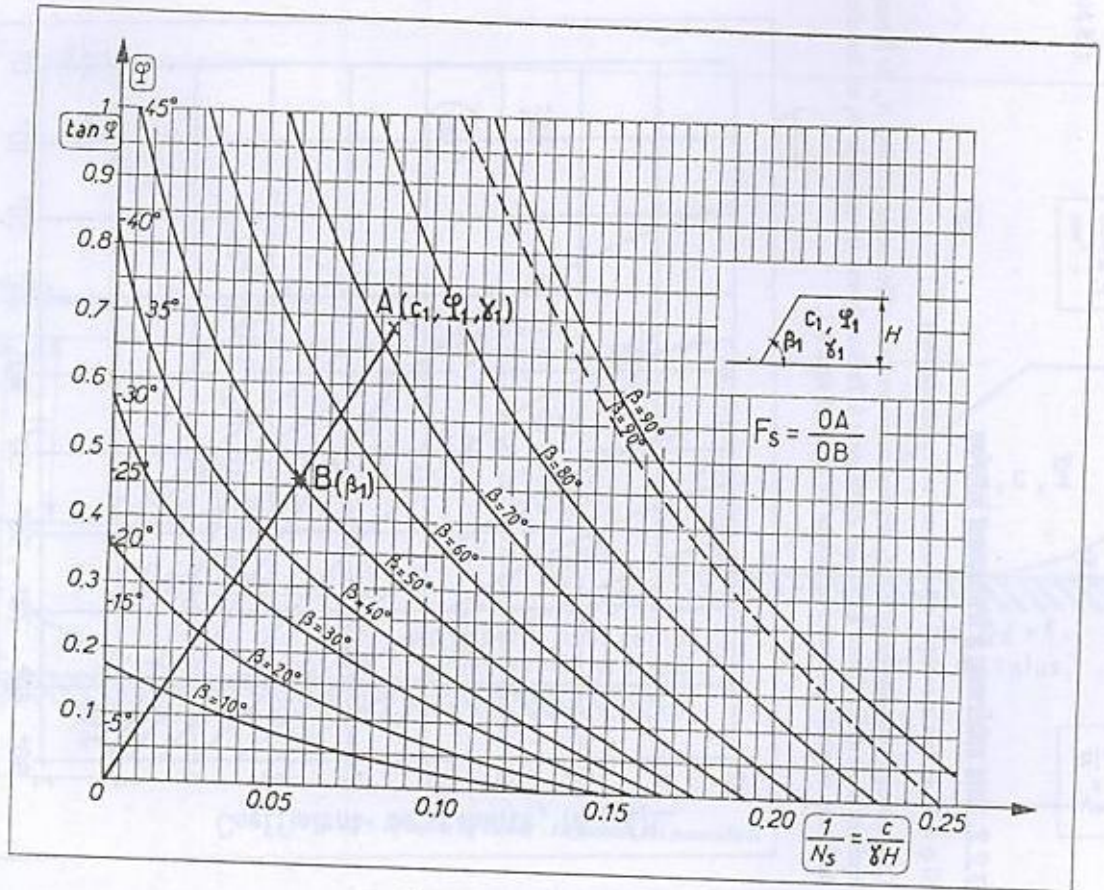


Fig. 8.23. Abaque de Taylor-Biarez