

# Plasticité appliquée au calcul des structures

par **Jean COURBON**

Ingénieur Général Honoraire des Ponts et Chaussées  
Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées

<b>1. États limites d'équilibre des sections d'une poutre</b> .....	C 2 050 - 2
1.1 Compression ou traction.....	— 2
1.2 Flexion pure .....	— 2
1.3 Flexion composée.....	— 4
1.4 Flexion avec effort tranchant.....	— 5
1.5 Torsion .....	— 7
1.6 Torsion et effort normal .....	— 9
1.7 Torsion et flexion .....	— 9
<b>2. Comportement élastoplastique des structures réticulées hyperstatiques</b> .....	— 9
2.1 Notations et formules préliminaires .....	— 9
2.2 Structures une fois hyperstatiques soumises à des forces extérieures proportionnelles à des forces fixes .....	— 10
2.3 Structures $n$ fois hyperstatiques soumises à des forces extérieures, fonctions linéaires et homogènes de $m$ paramètres.....	— 12
<b>3. Comportement élastoplastique des structures composées de poutres fléchies</b> .....	— 13
3.1 Notations et formules préliminaires .....	— 13
3.2 Structures une fois hyperstatiques soumises à des forces extérieures proportionnelles à des forces fixes .....	— 14
3.3 Structures $n$ fois hyperstatiques soumises à des forces extérieures, fonctions linéaires et homogènes de $m$ paramètres.....	— 16
<b>4. Détermination des charges limites</b> .....	— 18
4.1 Considérations préliminaires.....	— 18
4.2 Méthode statique de détermination des charges limites.....	— 18
4.3 Méthode cinématique de détermination des charges limites .....	— 19
4.4 Calcul des déformations avant la ruine .....	— 20
4.5 Charges limites des structures réticulées.....	— 21
4.6 Charges limites des poutres droites hyperstatiques .....	— 22
4.7 Charges limites des structures composées de poutres droites fléchies.	— 25
4.8 Charges limites des arcs hyperstatiques .....	— 27
<b>5. Application du théorème fondamental de l'adaptation</b> .....	— 28
5.1 Rappel du théorème.....	— 28
5.2 Possibilité d'adaptation d'une structure .....	— 28
5.3 Exemples d'application .....	— 29
<b>Références bibliographiques</b> .....	— 31

**L**orsque le critère de plasticité local, exprimé en fonction des composantes du tenseur contrainte (article **Théorie de la plasticité** [A 350] dans le traité *Sciences fondamentales*), est vérifié en tout point d'une section  $\Sigma$  d'une poutre, les composantes du système des forces extérieures relatif à la section  $\Sigma$  (effort normal, efforts tranchants, couple de torsion et moments fléchissants), que l'on peut considérer comme les composantes généralisées de la contrainte s'exerçant sur la section  $\Sigma$ , vérifient une relation appelée critère de plasticité global, ou simplement **critère de plasticité** lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

Nous examinerons les sollicitations particulières d'une section le plus souvent rencontrées, et nous déterminerons les critères de plasticité correspondants. Nous supposerons le matériau constitutif de la poutre élastoplastique parfait.

# 1. États limites d'équilibre des sections d'une poutre

## 1.1 Compression ou traction

Soit  $S$  l'aire de la section  $\Sigma$  soumise à l'effort normal  $N$  (compté positivement en compression) ; la contrainte normale  $\sigma$  en tout point de la section est limitée si elle est égale à la limite d'élasticité  $-\sigma'_e$  en traction, ou à la limite d'élasticité  $\sigma''_e$  en compression ( $\sigma'_e$  et  $\sigma''_e$  sont positifs). Le critère de plasticité est donc :

$$N = N'_1 = -\sigma'_e S \text{ ou } N = N''_1 = \sigma''_e S \quad (1)$$

Dans le cas où  $\sigma'_e = \sigma''_e$ , on a  $-N'_1 = N''_1 = N_1$ , et le critère de plasticité peut s'écrire sous la forme :

$$\left| \frac{N}{N_1} \right| = 1$$

## 1.2 Flexion pure

### 1.2.1 Poutre de section rectangulaire ( $\sigma'_e = \sigma''_e = \sigma_e$ )

Supposons les limites élastiques à la compression et à la traction égales en valeur absolue ( $\sigma'_e = \sigma''_e = \sigma_e$ ), et soit  $b$  et  $2h$  la largeur et la hauteur de la section. Le diagramme de la figure 1a montre que le plus grand moment fléchissant positif que peut supporter la section en équilibre élastique est :

$$M' = \frac{2}{3} bh^2 \sigma_e$$

tandis que le diagramme de la figure 1c montre que le moment limite positif, lorsque la section est entièrement plastifiée, est :

$$M_1 = bh^2 \sigma_e = \frac{3}{2} M'$$

On obtiendrait les valeurs  $-M'$  et  $-M_1$  lorsque le moment fléchissant est négatif.

Étudions la relation entre le moment fléchissant  $M$  et la courbure  $\chi$  de la fibre moyenne de la poutre. En équilibre élastique ( $M < M'$ ) nous avons :

$$M = EI\chi = \frac{2}{3} bh^3 E\chi = M' \frac{\chi}{\chi'} \quad (2)$$

avec  $\chi' = \frac{\sigma_e}{Eh}$  courbure provoquée par le moment  $M'$ .

Supposons  $M' < M < M_1$  ; nous obtenons un état d'équilibre élastoplastique. Soit  $2\lambda$  la hauteur de la partie de la section en équilibre élastique. Le diagramme de la figure 1b montre que l'on a :

$$M = \frac{2}{3} b\lambda^2 \sigma_e + b(h^2 - \lambda^2) \sigma_e = M_1 \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{\lambda^2}{h^2} \right); \quad \chi = \frac{\sigma_e}{E\lambda}$$

En éliminant  $\lambda$  entre les deux équations précédentes, nous trouvons :

$$M = M_1 \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{\chi'^2}{\chi'^2} \right) \quad (3)$$

Le moment fléchissant tend donc vers la valeur limite  $M_1$  lorsque  $\chi$  augmente indéfiniment. La figure 2 représente la courbe  $M = f(\chi)$  définie par les équations (2) et (3).

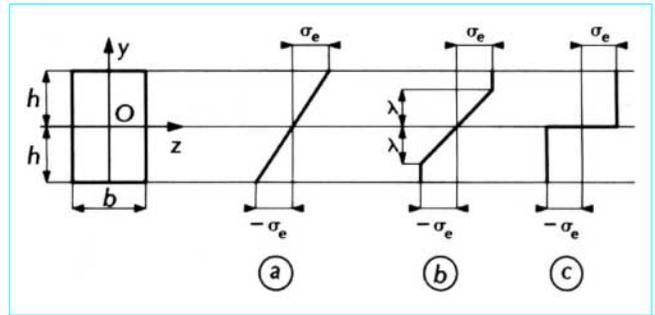


Figure 1 - Poutre de section rectangulaire soumise à la flexion pure ( $\sigma'_e = \sigma''_e = \sigma_e$ )

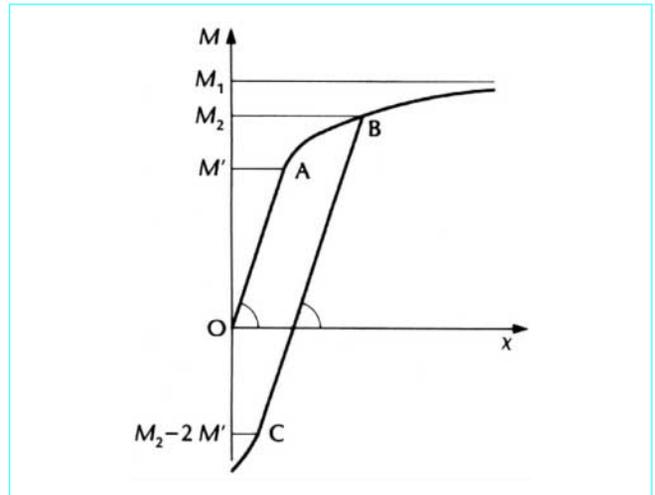


Figure 2 - Moment fléchissant, en fonction de la courbure, d'une poutre de section rectangulaire

Supposons qu'après avoir fait croître le moment fléchissant de  $O$  jusqu'à  $M_2 > M'$  correspondant à la distribution de contraintes indiquées sur le diagramme de la figure 1b :

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_e \frac{y}{\lambda} & \text{pour } |y| < \lambda \\ \varepsilon \sigma_e & \text{pour } |y| > \lambda \end{cases}$$

$\varepsilon$  ayant pour module l'unité et pour signe celui de  $y$ , on fasse décroître le moment fléchissant. Lorsque le moment aura la valeur  $M_1 - M''$ , les contraintes seront, en remarquant que la décharge s'effectue d'abord élastiquement et en posant  $\sigma'' = M''/hI$  :

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_e \frac{y}{\lambda} - \sigma'' \frac{y}{h} & \text{pour } |y| < \lambda \\ \varepsilon \sigma_e - \sigma'' \frac{y}{h} & \text{pour } |y| > \lambda \end{cases}$$

Si nous prenons  $M'' = M_2$ , les formules précédentes donnent les **contraintes résiduelles** après décharge complète. Si nous continuons à faire décroître le moment fléchissant, les formules précédentes sont valables tant que  $\sigma'' < 2\sigma_e$ ; autrement dit, le comportement est élastique tant que  $M'' < 2M'$ . Sur la figure 2, le point figuratif décrit OAB pendant la charge, et le segment de droite BC = 2 OA pendant la décharge. Nous retrouvons ainsi l'écrouissage et l'effet Bauschinger.

### 1.2.2 Application au calcul des flèches en équilibre élastoplastique

Supposons les déformations de poutre assez petites pour que l'on puisse assimiler la courbure  $\chi$  à la dérivée seconde de la flèche. Il résulte des formules (2) et (3) que nous avons, lors d'une première mise en charge :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \begin{cases} \chi' \frac{M}{M'} & \text{pour } |M| \leq M' \\ \varepsilon \chi' \sqrt{\frac{M_1}{3M_1 - 3|M|}} & \text{pour } M' \leq |M| \leq M_1 \end{cases} \quad (4)$$

$\varepsilon$  ayant pour module l'unité et pour signe celui de  $M$ .

Par exemple, considérons une poutre rectangulaire sur appuis simples de portée  $2a$  soumise à une charge concentrée  $P = 2M_1/a$  appliquée dans la section médiane ; le moment fléchissant dans la section d'abscisse  $x > 0$  comptée à partir de la section médiane a pour valeur :

$$M(x) = M_1 \left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

Nous pouvons en effet nous borner, en raison de la symétrie, à l'intervalle  $(0, a)$ . Puisque  $M' = \frac{2}{3} M_1 = \frac{1}{3} Pa$ ,  $M(x)$  est inférieur à  $M'$  pour  $x > a/3$ , et supérieur à  $M'$  pour  $x < a/3$ . Nous avons donc, d'après l'équation (4) :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \begin{cases} \chi' \sqrt{\frac{a}{3x}} & \text{pour } 0 < x < \frac{a}{3} \\ \frac{3}{2} \chi' \left(1 - \frac{x}{a}\right) & \text{pour } \frac{a}{3} < x < a \end{cases}$$

Une première intégration donne,  $\frac{dv}{dx}$  étant nul pour  $x = 0$  et continu pour  $x = a/3$  :

$$\frac{dv}{dx} = \begin{cases} 2a \chi' \sqrt{\frac{x}{3a}} & \text{pour } 0 < x < \frac{a}{3} \\ \frac{1}{4} a \chi' \left(1 + 6 \frac{x}{a} - 3 \frac{x^2}{a^2}\right) & \text{pour } \frac{a}{3} < x < a \end{cases}$$

Une deuxième intégration donne,  $v$  étant nul pour  $x = a$  et continu pour  $x = a/3$  :

$$v = \begin{cases} \frac{4}{3} a^2 \chi' \sqrt{\frac{x^3}{3a^3}} - \frac{20}{27} a^2 \chi' & \text{pour } 0 < x < \frac{a}{3} \\ \frac{1}{4} a^2 \chi' \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(\frac{x}{a} - 3\right) & \text{pour } \frac{a}{3} < x < a \end{cases}$$

Compte tenu de ce que  $\chi' = \frac{M'}{EI} = \frac{Pa}{3EI}$ , la rotation  $\omega_1$  de l'extrémité  $x = a$  et la flèche  $v(0)$  dans la section médiane ont pour valeurs :

$$\omega_1 = a \chi' = \frac{Pa^2}{3EI} \quad \text{et} \quad v(0) = -\frac{20}{27} a^2 \chi' = -\frac{20}{81} \frac{Pa^3}{EI}$$

Comparons ces valeurs aux valeurs  $\omega_1'$  et  $v'(0)$  que l'on aurait trouvées en supposant le comportement de la poutre entièrement élastique :

$$\omega_1' = \frac{Pa^2}{4EI} \quad \text{et} \quad v'(0) = -\frac{Pa^3}{6EI}$$

Nous avons donc  $\frac{\omega_1}{\omega_1'} = \frac{4}{3} \approx 1,333$  et  $\frac{v(0)}{v'(0)} = \frac{40}{27} \approx 1,481$ .

### 1.2.3 Poutre de section rectangulaire ( $\sigma'_e < \sigma''_e$ )

Considérons la même section rectangulaire. Supposons, ce qui est le cas des matériaux fragiles comme le béton, que  $\sigma'_e < \sigma''_e$  et posons  $\beta = \frac{\sigma''_e}{\sigma'_e}$ . Bornons-nous à donner les résultats suivants, faciles à démontrer.

Lorsque l'on fait croître le moment fléchissant à partir de zéro, le comportement demeure élastique jusqu'à ce que la contrainte de traction de la fibre inférieure atteigne la valeur  $-\sigma'_e$ . À ce moment, le diagramme de la figure 3a donne les valeurs suivantes du moment fléchissant et de la courbure :

$$M' = \frac{2}{3} bh^2 \sigma'_e \quad \text{et} \quad \chi' = \frac{\sigma'_e}{Eh}$$

Puis, la partie inférieure de la section se plastifie en traction jusqu'à ce que la contrainte de compression de la fibre supérieure atteigne la valeur  $\sigma''_e$ . À ce moment, le diagramme de la figure 3b donne les valeurs suivantes du moment fléchissant et de la courbure :

$$M'' = \frac{2}{3} bh^2 \left(\frac{3\beta - 1}{\beta + 1}\right) \sigma'_e \quad \text{et} \quad \chi'' = \frac{\sigma'_e}{Eh} \frac{(\beta + 1)^2}{4}$$

L'axe neutre a alors une excentricité :

$$e'' = h \left(\frac{\sigma''_e - \sigma'_e}{\sigma''_e + \sigma'_e}\right)^2 = h \left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1}\right)^2$$

Enfin les zones plastiques en compression et en traction se développent jusqu'au diagramme limite de la figure 3c. Le moment fléchissant limite a pour valeur :

$$M_1 = bh^2 \frac{2\sigma'_e \sigma''_e}{\sigma'_e + \sigma''_e} = bh^2 \frac{2\beta}{1 + \beta} \sigma'_e$$

l'excentricité de l'axe neutre étant alors :

$$e_1 = h \frac{\sigma''_e - \sigma'_e}{\sigma''_e + \sigma'_e} = h \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

Le rapport du moment limite  $M_1$  au plus grand moment élastique est :

$$\rho = \frac{M_1}{M'} = \frac{3\beta}{1 + \beta}$$

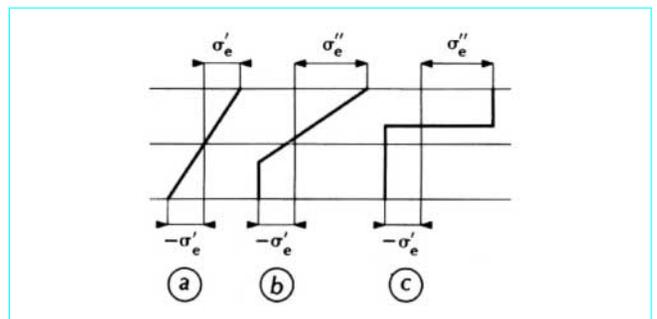


Figure 3 - Poutre de section rectangulaire soumise à la flexion pure ( $\sigma'_e < \sigma''_e$ )

Pour  $\beta = 1$  nous retrouvons la valeur  $\rho = 3/2$  ; pour  $\beta = 2$  nous avons  $\rho = 2$ , et pour  $\beta = 5$  nous avons  $\rho = 2,5$ .

**1.2.4 Poutres de sections diverses**

Donnons les valeurs du moment élastique maximal  $M'$ , du moment limite  $M_1$  et du rapport  $\rho = M_1/M'$  pour diverses sections, en supposant  $\sigma'_e = \sigma''_e = \sigma_e$ .

Pour une **section en forme de losange** dont les diagonales verticale et horizontale ont pour longueurs respectives  $2h$  et  $b$ , nous trouvons :

$$M' = \frac{1}{6}bh^2\sigma_e \quad M_1 = \frac{1}{3}bh^2\sigma_e \quad \rho = 2$$

Pour une **section circulaire pleine** de rayon  $R$ , nous trouvons :

$$M' = \frac{1}{4}\pi R^3\sigma_e \quad M_1 = \frac{4}{3}R^3\sigma_e \quad \rho = \frac{16}{3\pi} \approx 1,698$$

Pour une **section tubulaire mince** de rayon  $R$  et d'épaisseur  $e$ , nous trouvons :

$$M' = \pi R^2e\sigma_e \quad M_1 = 4R^2e\sigma_e \quad \rho = \frac{4}{\pi} \approx 1,273$$

Enfin, pour une **section en double té** à parois minces de hauteur  $2h$ , nous trouvons, en désignant par  $s$  la section de l'âme et par  $s'$  la section d'une membrure :

$$M' = h\left(2s' + \frac{1}{3}s\right)\sigma_e \quad \text{et} \quad M_1 = h\left(2s' + \frac{1}{2}s\right)\sigma_e$$

de sorte qu'en posant  $\lambda = s/s'$  :

$$\rho = \frac{1 + \frac{1}{4}\lambda}{1 + \frac{1}{6}\lambda}$$

Pour  $\lambda = 1$ , nous avons  $\rho = \frac{15}{14} \approx 1,071$ .

**1.2.5 Rotule plastique. Critère de plasticité**

Dans tous les cas, le diagramme moment-courbure a la forme indiquée sur la figure 4. En pratique, on remplace le diagramme réel B'A'OAB par le diagramme élastoplastique parfait D'C'OCD très voisin. Il en résulte que le comportement demeure élastique tant que  $-M''_1 < M < M'_1$ . Lorsque  $M$  atteint la valeur limite  $M'_1$  ou la valeur limite  $-M''_1$ , il se forme dans la section une **rotule plastique** qui est une articulation transmettant le moment limite  $M'_1$  lorsqu'elle tourne d'un angle  $\theta$  positif, et le moment limite  $-M''_1$  lorsqu'elle tourne d'un angle négatif (figure 5). Le critère de plasticité est donc :

$$M = M'_1 \quad \text{ou} \quad M = -M''_1 \quad (5)$$

La loi de déformation plastique est définie par les formules :

$$\begin{cases} -M''_1 < M < M'_1 & \text{entraîne} \quad \delta\theta = 0 \\ M = M'_1 & \text{entraîne} \quad \delta\theta \geq 0 \\ M = -M''_1 & \text{entraîne} \quad \delta\theta \leq 0 \end{cases}$$

Dans le cas où  $M''_1 = M'_1 = M_1$  le critère de plasticité peut s'écrire :

$$\left| \frac{M}{M_1} \right| = 1$$

**1.3 Flexion composée**

**1.3.1 Poutre de section rectangulaire de largeur  $b$  et de hauteur  $2h$**

Le critère de plasticité est la relation entre le moment fléchissant  $M$  et l'effort normal  $N$  lorsque la section est entièrement plastifiée (figure 6). En supposant  $\sigma'_e = \sigma''_e = \sigma_e$  et  $M > 0$ , nous avons,  $x$  désignant la distance de l'axe neutre au centre de gravité de la section :

$$M = b(h^2 - x^2)\sigma_e \quad \text{et} \quad N = -2bx\sigma_e$$

Si  $M_1$  est le plus grand moment fléchissant (obtenu pour  $x = 0$ ) et  $N_1$  le plus grand effort normal (obtenu pour  $x = -h$ ) que peut supporter la section :

$$M_1 = bh^2\sigma_e \quad \text{et} \quad N_1 = 2bh\sigma_e$$

de sorte que nous avons :

$$\frac{M}{M_1} = 1 - \frac{x^2}{h^2}, \quad \frac{N}{N_1} = -\frac{x}{h}$$

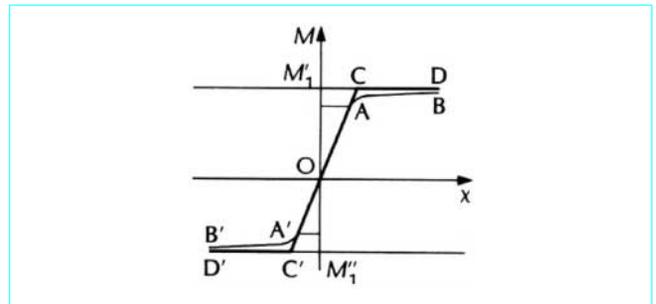


Figure 4 - Moment fléchissant en fonction de la courbure : diagramme simplifié

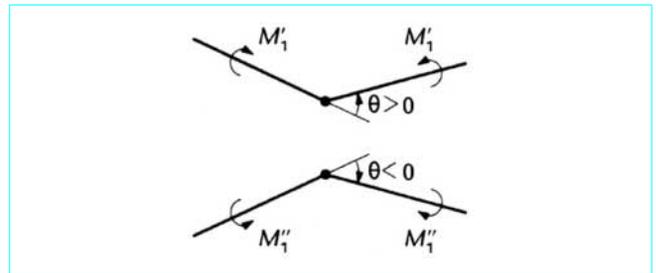


Figure 5 - Rotule plastique

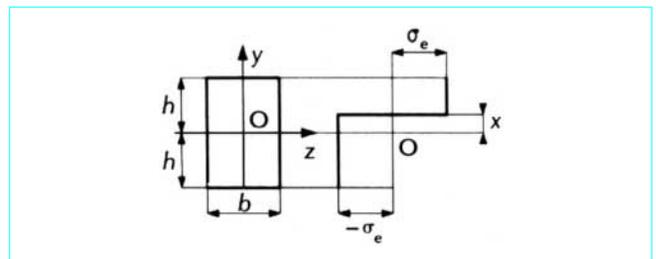


Figure 6 - Poutre de section rectangulaire soumise à la flexion composée

Nous en déduisons le critère de plasticité lorsque  $M > 0$  :

$$\frac{M}{M_1} + \left(\frac{N}{N_1}\right)^2 - 1 = 0 \tag{6}$$

De même, lorsque  $M < 0$ , le critère de plasticité s'écrit :

$$-\frac{M}{M_1} + \left(\frac{N}{N_1}\right)^2 - 1 = 0$$

Le comportement est donc élastique lorsque le point de coordonnées  $(M/M_1, N/N_1)$  est à l'intérieur du domaine limité par les arcs de parabole CAD et CBD (figure 7).

**Remarque**

Lorsque  $\sigma'_e \neq \sigma''_e$ , il est aisé de montrer que le critère de plasticité peut s'écrire :

$$|M| = \frac{1}{2} bh^2(\sigma''_e + \sigma'_e) \left\{ 1 - \left[ \frac{N - bh(\sigma''_e - \sigma'_e)}{bh(\sigma''_e + \sigma'_e)} \right]^2 \right\}$$

Lorsque  $N = 0$ , on trouve :

$$|M| = M_1 = bh^2 \frac{2\sigma''_e \sigma'_e}{\sigma''_e + \sigma'_e}$$

et, lorsque  $M = 0$ , on trouve :

$$N = N'_1 = -2bh\sigma'_e \text{ ou } N = N''_1 = 2bh\sigma''_e$$

**1.3.2 Poutres de sections diverses**

Bornons-nous à donner quelques résultats faciles à établir. Supposons  $\sigma'_e = \sigma''_e = \sigma_e$ .

Pour une **section circulaire pleine** de rayon  $R$  :

$$M_1 = \frac{4}{3} R^3 \sigma_e \text{ et } N_1 = \pi R^2 \sigma_e$$

L'angle  $\theta$  définissant la position de l'axe neutre (figure 8), nous pouvons, en supposant  $M$  et  $N$  positifs, donc  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , définir paramétriquement le critère de plasticité :

$$\frac{M}{M_1} = \cos^3 \theta, \quad \frac{N}{N_1} = \frac{2}{\pi} (\theta + \sin \theta \cos \theta)$$

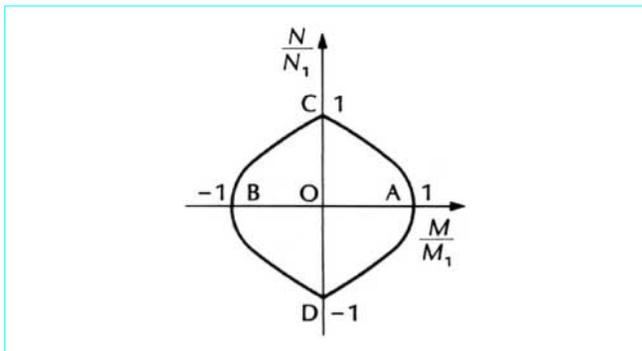


Figure 7 - Limite du domaine élastique en flexion composée

■ Pour une **section tubulaire mince** de rayon  $R$  et d'épaisseur  $e$  :

$$M_1 = 4R^2 e \sigma_e \text{ et } N_1 = 2\pi R e \sigma_e$$

En supposant toujours  $M$  et  $N$  positifs, et  $\theta$  définissant la position de l'axe neutre, le critère de plasticité s'exprime paramétriquement en fonction de  $\theta$  :

$$\frac{M}{M_1} = \cos \theta \text{ et } \frac{N}{N_1} = \frac{2\theta}{\pi} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

Dans ces deux cas, on complète par symétrie le critère de plasticité lorsque  $M$  et  $N$  sont de signes quelconques.

■ Dans le cas d'une **section en double té** à parois minces de hauteur  $2h$ , nous avons,  $s$  désignant la section de l'âme et  $s'$  celle d'une membrure :

$$M_1 = \frac{1}{2} hs\sigma_e + 2hs'\sigma_e = M_0 + M'_0$$

$$N_1 = s\sigma_e + 2s'\sigma_e = N_0 + N'_0$$

$M_0$  et  $N_0$  sont les parts de  $M_1$  et de  $N_1$  relatives à l'âme ;  $M'_0$  et  $N'_0$  sont les parts de  $M_1$  et de  $N_1$  relatives aux membrures.

Si l'axe neutre coupe l'âme à la distance  $x$  au-dessous du centre de gravité, nous trouvons ( $0 \leq x \leq h$ ) :

$$M = M_0 \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right) + M'_0 \text{ et } N = N_0 \frac{x}{h}$$

et, si l'axe neutre coupe la membrure inférieure dont une partie  $ks'$  est comprimée et l'autre  $(1-k)s'$  est tendue ( $0 \leq k \leq 1$ ), nous trouvons :

$$M = (1-k)M'_0 \text{ et } N = N_0 + kN'_0$$

Il résulte des relations précédentes que le domaine d'élasticité est limité par deux arcs de parabole BAH et DEF et par quatre segments de droite BC, CD, FG et GH tangents aux arcs de parabole aux points B, D, F et H de coordonnées  $(\pm M'_0, \pm N_0)$  (figure 9).

**Nota :** dans tous les cas, un effort normal, même notable, ne diminue que faiblement le moment fléchissant que peut supporter la section.

**1.4 Flexion avec effort tranchant**

**1.4.1 Poutre de section rectangulaire mince**

Nous pouvons admettre que la contrainte de cisaillement  $\tau$ , parallèle aux grands côtés du rectangle (figure 10) et la contrainte normale  $\sigma$  ne dépendent que de  $y$ . La section supporte donc un moment fléchissant  $M$  et un effort tranchant  $T$  égaux à :

$$M = b \int_{-h}^h \sigma y dy \text{ et } T = b \int_{-h}^h \tau dy \tag{7}$$

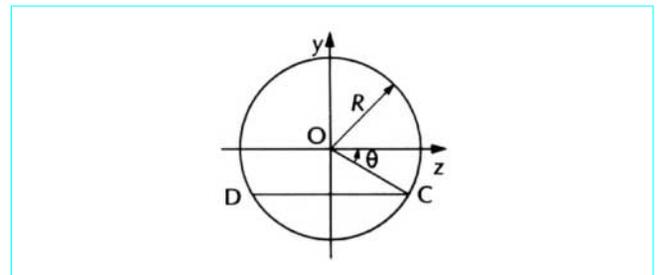


Figure 8 - Poutre de section circulaire pleine

La section est en équilibre limite, si  $\sigma$  et  $\tau$  satisfont en tout point de la section au critère de plasticité local :

$$\sigma^2 + k^2 \tau^2 = \sigma_e^2 \tag{8}$$

$k^2$  étant une constante ; il est aisé de vérifier que  $k^2 = 3$  donne le critère de Von Mises et que  $k^2 = 4$  donne le critère de Tresca (article *Théorie de la plasticité* [A 350] dans le traité Sciences fondamentales). Le maximum de  $\sigma$  est  $\sigma_e$ , et celui de  $\tau$  est  $\tau = \sigma_e/k$ . Donc le plus grand moment fléchissant  $M_1$  et le plus grand effort tranchant  $T_1$  que peut supporter la section ont pour valeurs :

$$M_1 = bh^2 \sigma_e \text{ et } T_1 = \frac{2bh \sigma_e}{k}$$

Les relations (7) donnent une infinité de champs de contrainte statiquement admissibles lorsque  $\tau = \frac{1}{k} \sqrt{\sigma_e^2 - \sigma^2}$ . Pour trouver le critère de plasticité global, nous cherchons le maximum de  $M$  lorsque  $T$  est donné :

$$T = \frac{b}{k} \int_{-h}^h \sqrt{\sigma_e^2 - \sigma^2} dy$$

Pour cela, nous devons annuler la variation  $\delta J$  de l'intégrale  $J = M + \lambda k T$ ; nous trouvons ainsi, quelle que soit la variation  $\delta \sigma$  :

$$\delta J = b \int_{-h}^h \left[ y - \frac{\lambda \sigma}{\sqrt{\sigma_e^2 - \sigma^2}} \right] \delta \sigma dy$$

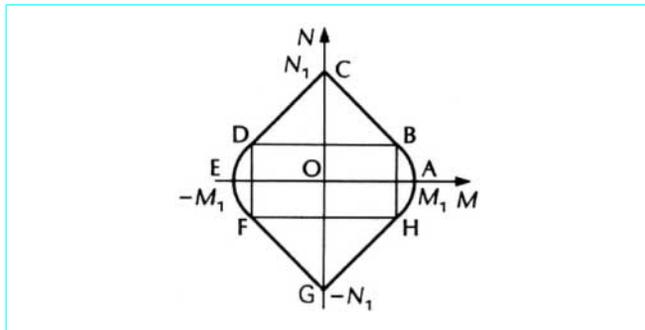


Figure 9 – Limite du domaine élastique d'une poutre en double té soumise à la flexion composée

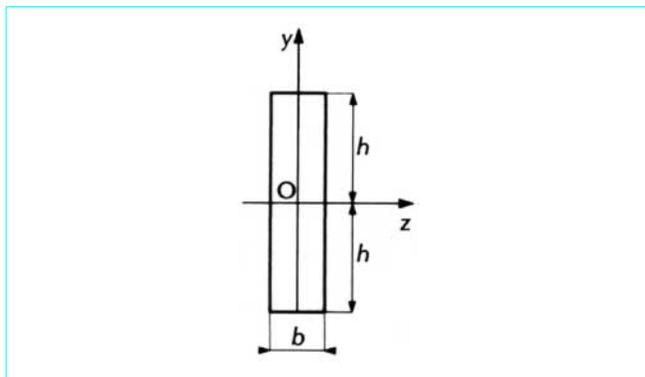


Figure 10 – Poutre de section rectangulaire mince soumise à la flexion avec effort tranchant

Il en résulte que nous avons nécessairement :

$$y - \frac{\lambda \sigma}{\sqrt{\sigma_e^2 - \sigma^2}} = 0 \text{ soit } \sigma = \frac{\sigma_e y}{\sqrt{\lambda^2 + y^2}}$$

$\lambda$  étant un paramètre qui a les dimensions d'une longueur. Nous en déduisons les expressions de  $M$  et de  $T$  en fonction de  $\lambda$  :

$$M = b \sigma_e \int_{-h}^h \frac{y^2 dy}{\sqrt{\lambda^2 + y^2}} \text{ et } T = \frac{\lambda b \sigma_e}{k} \int_{-h}^h \frac{dy}{\sqrt{\lambda^2 + y^2}}$$

Introduisons le paramètre sans dimension  $\beta$  défini par  $\lambda = \beta h$ , et effectuons le changement de variable  $y = hu$ , nous obtenons :

$$\frac{M}{M_1} = 2 \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{\beta^2 + u^2}} \text{ et } \frac{T}{T_1} = \beta \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\beta^2 + u^2}}$$

Pour  $\beta = 0$  nous avons  $M = M_1$  et  $T = 0$  ; pour  $\beta = \infty$  nous avons  $T = T_1$  et  $M = 0$ . En calculant les intégrales, nous trouvons :

$$\begin{cases} \frac{M}{M_1} = \sqrt{1 + \beta^2} - \beta^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \beta^2}}{\beta} \\ \frac{T}{T_1} = \beta \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \beta^2}}{\beta} \end{cases}$$

Les équations précédentes donnent une représentation paramétrique de la frontière du domaine d'élasticité lorsque  $M$  et  $T$  sont positifs ; cette frontière, que l'on complète par symétrie lorsque  $M$  et  $T$  sont de signes quelconques, est très voisine et à l'extérieur de l'ellipse :

$$\left(\frac{M}{M_1}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_1}\right)^2 - 1 = 0 \tag{9}$$

L'équation (9) représente donc le critère de plasticité avec une très bonne approximation dans le sens de la sécurité.

### 1.4.2 Poutre dont la section est un profil mince

Soit  $x = x(s)$  et  $y = y(s)$  les coordonnées du point courant de la ligne moyenne  $\Gamma$  du profil d'abscisse curviligne  $s$  (figure 11). L'épaisseur  $e$  du profil, la contrainte normale  $\sigma$  et la contrainte de cisaillement  $\tau$ , parallèle à la tangente à  $\Gamma$ , sont des fonctions de  $s$ . Le moment fléchissant  $M$  et l'effort tranchant  $T$  ont pour valeurs  $(\cos \theta = dy/ds)$  :

$$M = \int_{\Gamma} \sigma y e ds \text{ et } T = \int_{\Gamma} \tau e \cos \theta ds$$

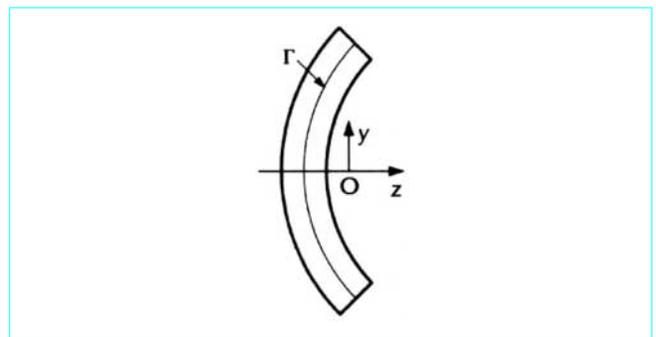


Figure 11 – Poutre dont la section est un profil mince, soumise à la flexion avec effort tranchant

En conservant le critère (8), et en procédant comme pour la section rectangulaire mince, nous trouvons :

$$\sigma = \frac{\sigma_e y}{\sqrt{y^2 + \lambda^2 \cos^2 \theta}}$$

de sorte que  $M$  et  $T$  s'expriment en fonction du paramètre  $\lambda$  :

$$M = \sigma_e \int_{\Gamma} \frac{y^2 e ds}{\sqrt{y^2 + \lambda^2 \cos^2 \theta}} \quad \text{et} \quad T = \frac{\lambda \sigma_e}{k} \int_{\Gamma} \frac{e \cos^2 \theta ds}{\sqrt{y^2 + \lambda^2 \cos^2 \theta}} \quad (10)$$

Nous obtenons ainsi une représentation paramétrique du critère de plasticité. Pour  $\lambda = 0$  nous avons  $M = M_1$  et  $T = 0$  ; pour  $\lambda = \infty$  nous avons  $T = T_1$  et  $M = 0$ .

Appliquons les résultats précédents au cas d'une section tubulaire mince de rayon  $R$  et d'épaisseur  $e$ . Nous avons :

$$M_1 = 4R^2 e \sigma_e \quad \text{et} \quad T_1 = \frac{4Re \sigma_e}{k}$$

et les formules (10) deviennent, compte tenu de  $ds = R d\theta$  et  $y = R \sin \theta$  et en remplaçant  $\lambda$  par  $\lambda R$  :

$$\frac{M}{M_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \lambda^2 \cos^2 \theta}} \quad \text{et} \quad \frac{T}{T_1} = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \lambda^2 \cos^2 \theta}}$$

En posant :

$$f(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \lambda^2 \cos^2 \theta}}$$

les formules précédentes peuvent s'écrire :

$$\frac{M}{M_1} = f(\lambda) \quad \text{et} \quad \frac{T}{T_1} = f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

La fonction  $f(\lambda)$  s'exprime au moyen des intégrales elliptiques complètes :

$$E(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta} d\theta \quad \text{et} \quad F(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}}$$

Lorsque  $\lambda < 1$ , en posant  $\lambda = \cos \alpha$  et en changeant  $\theta$  en  $\frac{\pi}{2} - \theta$ , on trouve :

$$f(\lambda) = \frac{E(\alpha) - F(\alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

Lorsque  $\lambda > 1$ , en posant  $\lambda = 1/\cos \alpha$ , on trouve :

$$f(\lambda) = \frac{[F(\alpha) - E(\alpha)] \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

On peut vérifier que le critère de plasticité est encore donné, avec une très bonne approximation, par la formule (9).

### 1.4.3 Poutre de section en double té

Le moment fléchissant maximal que peut supporter la section est la somme du moment maximal supporté par l'âme  $M_0$  et du moment maximal supporté par les membrures  $M'_0$ . Si  $s$  et  $s'$  sont les sections respectives de l'âme et d'une membrure, nous avons,  $2h$  étant la hauteur de la section :

$$M_1 = M_0 + M'_0 \quad M_0 = \frac{1}{2} h s \sigma_e \quad M'_0 = 2 h s' \sigma_e$$

Seule la contrainte de cisaillement de l'âme contribue à la résistance à l'effort tranchant. En conservant le critère (8), l'effort tranchant maximal que peut supporter la section est :

$$T = \frac{s \sigma_e}{k}$$

Si l'on conserve l'approximation qui permet d'écrire le critère de plasticité (9) pour la section rectangulaire mince, nous trouvons le critère de plasticité :

$$\begin{cases} |T| = T_1 & \text{si } |M| < M'_0 \\ \left(\frac{M - M'_0}{M_1 - M'_0}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_1}\right)^2 - 1 = 0 & \text{si } |M| > M'_0 \end{cases}$$

Le domaine d'élasticité est donc limité par deux demi-ellipses BAF et CDE et par deux segments de droite BC et EF (figure 12).

## 1.5 Torsion

### 1.5.1 Poutre de section circulaire

Le plus grand couple de torsion que peut supporter la section en équilibre élastique a lieu lorsque la contrainte de cisaillement atteint la valeur  $\tau_e = \sigma_e/k$  sur le contour. Il a pour valeur,  $R$  désignant le rayon de la section :

$$C' = \frac{1}{2} \pi R^3 \tau_e$$

et la valeur correspondante de l'angle de torsion  $\psi = d\theta/dx$  par unité de longueur est,  $G$  désignant le module d'élasticité transversal :

$$\psi' = \frac{\tau_e}{GR}$$

Lorsque la section est entièrement plastifiée, en tout point P la contrainte de cisaillement, normale à OP, a la valeur  $\tau_e$  (figure 13). Le couple de torsion limite que peut supporter la section a donc pour valeur :

$$C_1 = \tau_e \int_0^R 2\pi r^2 dr = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_e = \frac{4}{3} C'$$

Étudions la relation entre le couple de torsion  $C$  et l'angle de torsion  $\psi$  par unité de longueur. En équilibre élastique ( $C < C'$ ) nous avons :

$$C = C' \frac{\psi}{\psi'}$$

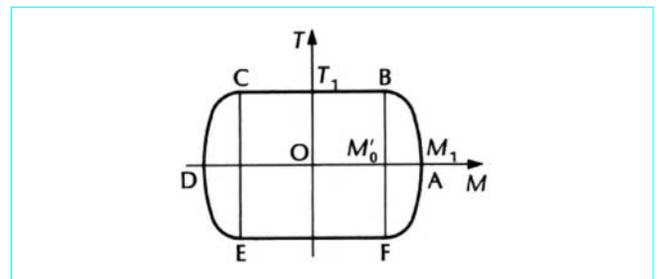


Figure 12 – Limite du domaine élastique d'une poutre en double té soumise à la flexion avec effort tranchant



Le tableau suivant donne quelques valeurs de  $\rho$  en fonction de  $\alpha$ .

$\alpha$	1	2	5	10	20	$\infty$
$\rho$	1,601 3	1,694 6	1,600 9	1,547 5	1,523 0	1,5

### 1.6 Torsion et effort normal

On peut trouver une expression simple approchée du critère de plasticité de la façon suivante. Supposons que  $\sigma$  et  $\tau$  satisfassent au critère (8).

Lorsque  $\sigma = 0$ , on a  $\tau = \tau_e = \sigma_e/k$ ; dans ce cas la section supporte le couple de torsion limite  $C_1$ .

Lorsque  $\tau = 0$ , on a  $\sigma = \sigma_e$ ; dans ce cas la section supporte l'effort normal limite  $N_1$ .

Prenons alors, en tout point de la section,  $\tau$  constant et inférieur à  $\tau_e$ , et  $\sigma = \sqrt{\sigma_e^2 - k^2\tau^2}$ . La section, entièrement plastifiée, supporte un couple de torsion  $C$  et un effort normal  $N$  tels que :

$$\frac{C}{C_1} = \frac{\tau}{\tau_e} \text{ et } \frac{N}{N_1} = \frac{\sqrt{\sigma_e^2 - k^2\tau^2}}{\sigma_e} = \sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\tau_e}\right)^2}$$

Nous obtenons ainsi l'expression approchée du critère de plasticité :

$$\left(\frac{C}{C_1}\right)^2 + \left(\frac{N}{N_1}\right)^2 - 1 = 0 \tag{15}$$

Puisqu'on peut trouver un champ de contraintes stable et statiquement admissible infiniment voisin du champ considéré, l'ellipse d'équation (15) est intérieure à la courbe représentant le critère de plasticité exact. Il est possible de déterminer exactement le critère de plasticité pour certaines sections : tube circulaire mince, section circulaire et section rectangulaire mince ; on constate dans chaque cas que le critère exact diffère très peu du critère approché (15).

### 1.7 Torsion et flexion

On peut trouver une expression simple approchée du critère de plasticité de la façon suivante. Supposons que  $\sigma$  et  $\tau$  satisfassent au critère (8).

Lorsque  $\sigma = 0$ , on a  $\tau = \tau_e = \sigma_e/k$ ; dans ce cas la section supporte le couple de torsion limite  $C_1$ .

Lorsque  $\tau = 0$ , on a  $\sigma = \pm \sigma_e$ ; si l'on prend  $\sigma = \sigma_e$  au-dessus de l'axe neutre et  $\sigma = -\sigma_e$  au-dessous de l'axe neutre, la section supporte le moment fléchissant limite  $M_1$ .

Prenons alors, en tout point de la section,  $\tau$  constant et inférieur à  $\tau_e$ ,  $\sigma = \sqrt{\sigma_e^2 - k^2\tau^2}$  au-dessus de l'axe neutre et  $\sigma = -\sqrt{\sigma_e^2 - k^2\tau^2}$  au-dessous de l'axe neutre. La section entièrement plastifiée supporte un couple de torsion  $C$  et un moment fléchissant  $M$  tels que :

$$\frac{C}{C_1} = \frac{\tau}{\tau_e} \text{ et } \frac{M}{M_1} = \frac{\sqrt{\sigma_e^2 - k^2\tau^2}}{\sigma_e} = \sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\tau_e}\right)^2}$$

Nous obtenons ainsi l'expression approchée du critère de plasticité :

$$\left(\frac{C}{C_1}\right)^2 + \left(\frac{M}{M_1}\right)^2 - 1 = 0 \tag{16}$$

pour laquelle on peut faire la même remarque que pour l'expression (15). Il est possible de déterminer exactement le critère de plasticité

pour certaines sections : tube circulaire mince et section circulaire. On constate dans chaque cas que le critère exact diffère très peu du critère approché (16) et est représenté par une courbe extérieure à l'ellipse d'équation (16).

## 2. Comportement élastoplastique des structures réticulées hyperstatiques

### 2.1 Notations et formules préliminaires

#### 2.1.1 Critère de plasticité

Considérons une structure réticulée  $\Sigma$  composée de barres  $B_i$  de section  $S_i$  et de longueur  $\ell_i$ . Nous désignons par  $F_i$  l'effort dans la barre  $B_i$ , positif si la barre est comprimée, et par  $\beta_i = \ell_i/(ES_i)$  le raccourcissement élastique de la barre soumise à un effort  $F_i = 1$ .

Lorsque les efforts dans toutes les barres de la structure restent compris entre deux limites  $-F_i^-$  et  $F_i^+$  (limites d'écoulement), le comportement de la structure est élastique, et les barres  $B_i$  se raccourcissent de  $\beta_i F_i$ .

Lorsque l'effort dans l'une au moins des barres, la barre  $B_i$  par exemple, est égal à l'une des valeurs limites  $-F_i^-$  ou  $F_i^+$ , la barre  $B_i$  peut subir, outre son raccourcissement élastique, un raccourcissement plastique  $\lambda_i$ , positif ou nul lorsque  $F_i = F_i^+$ , négatif ou nul lorsque  $F_i = -F_i^-$ . Ces raccourcissements plastiques créent un état d'autocontrainte de la structure hyperstatique qui n'est pas strictement indéformable.

#### 2.1.2 Calcul de la structure dans le domaine élastique

Supposons la structure  $n$  fois hyperstatique. Désignons par  $Y_k$  les inconnues hyperstatiques qui résultent de liaisons et de barres surabondantes, et par  $F_i^0$  les efforts dans les barres de la structure isostatique obtenue en supprimant les liaisons et les barres surabondantes. Les efforts  $F_i'$  dans la structure hyperstatique  $\Sigma$  sont des fonctions linéaires des inconnues  $Y_k$  :

$$F_i' = F_i^0 + \sum_k F_{ik}'' Y_k \tag{17}$$

avec  $F_{ik}''$  effort dans la barre  $B_i$  de la structure  $\Sigma_0$  soumise à la force extérieure  $Y_k = 1$ .

Le théorème de Menabrea (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales) permet de calculer les inconnues  $Y_k$ . L'énergie de déformation de la structure  $\Sigma_0$  s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \beta_i F_i'^2$$

et le théorème de Menabrea nous donne les équations :

$$\frac{\partial W}{\partial Y_j} = \sum_i \beta_i F_i' F_{ij}'' = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

En remplaçant  $F'_j$  par sa valeur donnée par l'équation (17), et en posant :

$$a_{jk} = \sum_i \beta_i F''_{ij} F''_{ik} \quad \text{et} \quad a_j = \sum_i \beta_i F''_{ij} F''_{ij}$$

nous obtenons le système d'équations linéaires :

$$\sum_k a_{jk} Y_k + a_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

qui permet de calculer les inconnues  $Y_k$ . On notera que  $a_{jk} = a_{kj}$ .

Les équations (17) et (18) sont exactes quel que soit l'ensemble des efforts  $F_i^0$  choisis, pourvu qu'il soit en équilibre avec les forces extérieures. En particulier, nous pouvons prendre  $F_i^0 = F'_i$  efforts dans les barres de la structure hyperstatique ; nous devons avoir dans ce cas  $Y_k = 0$  quel que soit  $k$  ; donc :

$$a_j = \sum_i \beta_i F'_i F''_{ij} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Pour toute valeur de  $j$ , les efforts  $F''_{ij}$  constituent un état d'autocontrainte de la structure hyperstatique  $\Sigma$ . Les relations précédentes expriment que *tout état d'équilibre élastique est orthogonal à tout état d'autocontrainte*. Nous retrouvons ainsi un résultat connu (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales).

### 2.1.3 Efforts dans les barres dus à des déformations imposées

Imposons des raccourcissements donnés  $\lambda_i$  aux barres  $B_i$  de la structure  $\Sigma$ . La structure étant hyperstatique, il apparaît dans les barres des efforts  $F''_i$  constituant un état d'autocontrainte qui est une combinaison linéaire et homogène des états d'autocontrainte  $F''_{ik}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) :

$$F''_i = \sum_k F''_{ik} Y_k \quad (19)$$

Le théorème fondamental de Colonnetti (article *Théorie de l'élasticité* [A 305]) permet de calculer les inconnues  $Y_k$ . En effet, la fonction de Colonnetti :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i \beta_i F''_i{}^2 + \sum_i \lambda_i F''_i$$

est minimale lorsque :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Y_j} = \sum_i \beta_i F''_i F''_{ij} + \sum_i \lambda_i F''_{ij} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

En remplaçant  $F''_i$  par sa valeur donnée dans l'équation (19), nous obtenons le système d'équations linéaires :

$$\sum_k a_{jk} Y_k + \sum_i \lambda_i F''_{ij} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (20)$$

qui permet de calculer les inconnues  $Y_k$ .

## 2.2 Structures une fois hyperstatiques soumises à des forces extérieures proportionnelles à des forces fixes

### 2.2.1 Représentation géométrique de l'état de contrainte

Considérons une structure réticulée une fois hyperstatique soumise à des forces extérieures  $X\Phi_1, X\Phi_2, X\Phi_3, \dots$  proportionnelles à des forces fixes  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$  ;  $X$  est un paramètre variable. Dans l'hypothèse du comportement élastique, les forces extérieures produisent dans les barres  $B_i$  des efforts  $X F'_i$ . Puisque la structure est une seule fois hyperstatique, l'état d'autocontrainte est défini par les efforts  $Y F''_i$ . Il en résulte que, dans tout état d'équilibre élastoplastique, les efforts dans les barres de la structure sont de la forme :

$$F_i = X F'_i + Y F''_i$$

et que le travail de déformation élastique  $W$  correspondant aux efforts  $F_i$  a pour valeur, les états de contrainte définis par  $F'_i$  et  $F''_i$  étant orthogonaux :

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \beta_i F_i^2 = \frac{1}{2} X^2 \sum_i \beta_i F_i'^2 + \frac{1}{2} Y^2 \sum_i \beta_i F_i''^2$$

Les états de contrainte de la structure dépendent de deux paramètres  $X$  et  $Y$ . Nous pouvons les représenter par les points d'un plan  $O\xi\eta$  dont les coordonnées  $\xi$  et  $\eta$  sont définies par :

$$\xi = X \sqrt{\sum_i \beta_i F_i'^2} \quad \text{et} \quad \eta = Y \sqrt{\sum_i \beta_i F_i''^2}$$

de sorte que le travail de déformation élastique  $W$  s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2)$$

Donc, si  $P(\xi, \eta)$  représente un état de contrainte de la structure, la projection  $\overline{OQ}$  de  $OP$  sur  $O\xi$  définit la sollicitation de la structure, et la projection  $\overline{OR}$  de  $OP$  sur  $O\eta$  définit l'état d'autocontrainte de la structure ;  $\overline{OP}^2$  est égal au double du travail de déformation élastique.

Mais tous les points du plan  $O\xi\eta$  ne sont pas des points représentatifs d'états de contrainte, car nous devons avoir :

$$-F_i^- \leq F_i \leq F_i^+$$

soit, compte tenu de la définition de  $\xi$  et de  $\eta$  :

$$-F_i^- \leq \frac{\xi F'_i}{\sqrt{\sum_i \beta_i F_i'^2}} + \frac{\eta F''_i}{\sqrt{\sum_i \beta_i F_i''^2}} \leq F_i^+$$

Les points du plan  $O\xi\eta$  qui satisfont aux inégalités relatives à la barre  $B_i$  appartiennent à une bande limitée par deux droites parallèles appelée bande d'élasticité de la barre  $B_i$  ; cette bande contient l'origine  $O$ . L'ensemble des inégalités définit un **domaine convexe** appelé **domaine d'élasticité**, qui est l'intersection des bandes d'élasticité des barres. Ce domaine est limité par un polygone convexe appelé **polygone d'écoulement**. Lorsque  $F_i^- = F_i^+$  pour toutes les barres, le polygone d'écoulement est symétrique par rapport à l'origine  $O$ .

Cette représentation géométrique, qui permet une étude complète du comportement mécanique de la structure, est due à Rjanitsyn [3].

### 2.2.2 Comportement mécanique de la structure

Supposons que le polygone d'écoulement de la structure soit le polygone ABCDEFGHIJ représenté sur la figure 16. Deux côtés parallèles opposés (a') et (a'') correspondent l'un à la limite supérieure  $F_a^+$  et l'autre à la limite inférieure  $-F_a^-$  de l'effort dans la barre  $B_a$ . L'état naturel est représenté par le point O.

L'état initial étant l'état naturel, faisons croître les forces extérieures, donc la variable  $\xi$ . Le point figuratif décrit d'abord l'axe Oξ jusqu'à son point de rencontre K avec le côté JA du polygone d'écoulement, puis KA correspondant à un raccourcissement plastique de la barre  $B_a$ , et enfin le côté AB. Au cours de ce dernier trajet, l'effort dans la barre  $B_a$  diminue, car le point figuratif s'éloigne de la frontière AJ de la bande d'élasticité de la barre  $B_a$ . **Des forces extérieures constamment croissantes peuvent entraîner des diminutions momentanées des efforts dans certaines barres.**

Au cours de l'augmentation des forces extérieures, pour toute valeur donnée de  $\xi$ , le point figuratif est, parmi les points intérieurs ou sur le polygone d'écoulement, celui qui est le plus près de l'origine. Donc, **tant qu'il n'y a pas de décharge, l'état d'équilibre qui se réalise rend minimal le travail de déformation élastique, sans entraîner de dépassements des valeurs limites des efforts dans les barres.**

Le point B correspond au plus grand système de forces extérieures possible appelé **charge limite supérieure**. On obtient des résultats analogues en faisant décroître  $\xi$  à partir de zéro (ce qui revient à changer le signe des forces extérieures) ; le point figuratif décrit le trajet OLG jusqu'au point G qui correspond à la **charge limite inférieure**.

Supposons maintenant que les forces extérieures ne varient pas toujours dans le même sens. Partons de l'état naturel et faisons croître  $\xi$  : le point figuratif décrit le trajet OKAM ; puis déchargeons la structure : le point figuratif décrit le segment MN parallèle à l'axe Oξ. Le point N définit l'état d'autocontrainte résiduel qui résulte des déformations plastiques irréversibles subies par la structure durant le trajet KAM (Si l'on avait chargé la structure jusqu'au point B, pendant la décharge le point figuratif aurait suivi le trajet BPQ et non le trajet BPR ; le point Q définit l'état d'autocontrainte résiduel qui est différent de l'état d'autocontrainte existant en B défini par le point R situé en dehors du polygone d'écoulement). Puisque deux points de OK et de MN qui ont même abscisse correspondent à deux états de contrainte différents sous l'effet des mêmes forces extérieures, **l'état de contrainte de la structure à un moment donné ne dépend pas seulement des forces extérieures appliquées à ce moment, mais également de la succession des forces qui lui ont été appliquées depuis l'état naturel.** Cependant, l'état de contrainte des états limites d'équilibre définis par les points B et G est unique. Les charges limites peuvent donc être calculées indépendamment de l'histoire de la structure.

Examinons enfin le cas de sollicitations variant périodiquement entre deux sollicitations extrêmes définies par les valeurs  $\xi_1 > \xi_m$  et  $\xi_2 < \xi_m$  ;  $\xi_m$  désigne l'abscisse de G et  $\xi_m$  l'abscisse de B. Plusieurs éventualités peuvent se produire suivant les valeurs de  $\xi_1$  et de  $\xi_2$ .

Si par exemple  $\xi_1$  est l'abscisse du point F et  $\xi_2$  l'abscisse du point A, le point figuratif décrira à chaque période le circuit fermé FTASF ; au cours de chaque période la barre  $B_a$  se raccourcit plastiquement pendant le trajet TA et s'allonge plastiquement pendant le trajet SF. Cette **alternance** de déformation plastique entraînera inévitablement la rupture de la barre  $B_a$  au bout d'un nombre plus ou moins grand de périodes.

Supposons que  $\xi_1$  soit l'abscisse du point L et  $\xi_2$  l'abscisse du point T ; le point figuratif décrira à chaque période le circuit fermé LKTFL ; au cours de chaque période la barre  $B_a$  se raccourcit plastiquement pendant le trajet KT et la barre  $B_b$  s'allonge plastiquement pendant le trajet FL. Le **cumul** des déformations plastiques, toutes de même sens, entraînera inévitablement la rupture des barres  $B_a$  et  $B_b$  au bout d'un nombre plus ou moins grand de périodes.

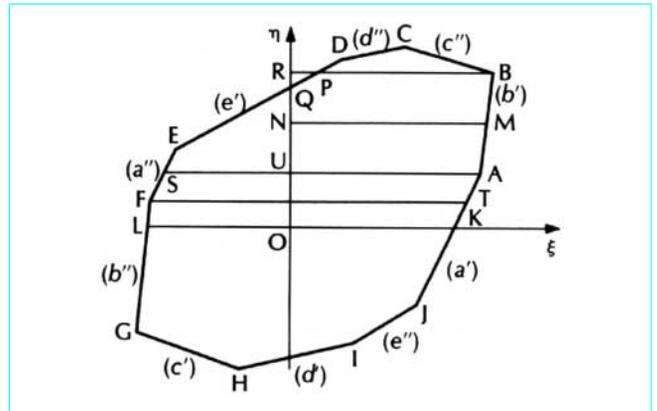


Figure 16 – Polygone d'écoulement d'une structure réticulée

Supposons enfin que  $\xi_1$  soit l'abscisse du point S et  $\xi_2$  l'abscisse du point A ; le point figuratif décrira à chaque période le trajet SA, puis le trajet AS, et ces trajets n'entraînent aucune déformation plastique. La seule déformation plastique est celle qui s'est produite pendant le trajet KA lors du premier chargement à partir de l'état naturel ; cette déformation plastique *limitée* a entraîné l'état d'autocontrainte d'adaptation défini par le point U où le segment SA coupe l'axe Oη. La structure s'est adaptée pour résister indéfiniment aux charges envisagées. Nous obtenons ainsi un cas particulier du théorème fondamental de l'adaptation (article *Théorie de la plasticité* [A 350] dans le traité Sciences fondamentales) : les sollicitations extrêmes  $\xi_1$  et  $\xi_2$  étant données, si l'on peut trouver un état d'autocontrainte d'adaptation défini par η tel que le segment dont les extrémités ont pour coordonnées ( $\xi_1, \eta$ ) et ( $\xi_2, \eta$ ) soit tout entier à l'intérieur du polygone d'écoulement, la structure demeurera stable quelle que soit la sollicitation définie par ξ variant entre les limites  $\xi_1$  et  $\xi_2$ .

### 2.2.3 Calcul des déformations plastiques des barres

Supposons qu'au cours de ses déplacements consécutifs à la variation des forces extérieures, le point figuratif de l'état de contrainte décrive un segment ( $\Delta\xi, \Delta\eta$ ) appartenant au côté relatif à la barre  $B_j$  du polygone d'écoulement. La barre  $B_j$  subit un raccourcissement plastique que nous nous proposons de calculer. D'après la définition de η (§ 2.2.1), la réaction hyperstatique subit une variation  $\Delta Y$  définie par :

$$\Delta\eta = \Delta Y \sqrt{\sum_i \beta_i F_i'^2}$$

La variation  $\Delta Y$  de l'état d'autocontrainte de la structure résulte du seul raccourcissement plastique  $\Delta\lambda_j$  de la barre  $B_j$  ; dans ce cas particulier, les équations (20) se réduisent à la seule équation :

$$\Delta Y \sum_i \beta_i F_i'^2 + \Delta\lambda_j F_j'' = 0$$

Nous déduisons des deux équations précédentes la valeur de  $\Delta\lambda_j$  :

$$\Delta\lambda_j = - \frac{\Delta\eta}{F_j''} \sqrt{\sum_i \beta_i F_i'^2}$$

## 2.3 Structures $n$ fois hyperstatiques soumises à des forces extérieures, fonctions linéaires et homogènes de $m$ paramètres

### 2.3.1 Représentation géométrique de l'état de contrainte

Considérons une structure  $n$  fois hyperstatique  $\Sigma$  comportant  $b$  barres  $B_j$  soumise à un système de forces extérieures ( $S$ ) qui est une combinaison linéaire et homogène de  $n$  systèmes indépendants ( $S_j$ ). Désignons par  $F_{ij}$  les efforts dans les barres sous l'effet du système ( $S_j$ ) dans l'hypothèse du comportement élastique. Tout état d'autocontrainte de la structure est une combinaison linéaire et homogène des  $n$  états d'autocontrainte  $F''_{ik}$  linéairement indépendants correspondant aux  $n$  liaisons surabondantes. Dans l'état d'équilibre élastoplastique le plus général, les efforts dans les barres ont pour expressions :

$$F_i = \sum_{j=1}^m X_j F'_{ij} + \sum_{k=1}^n Y_k F''_{ik}$$

Nous allons substituer aux variables  $X_j$ , qui définissent l'état de sollicitation, et aux variables  $Y_k$ , qui définissent l'état d'autocontrainte, des **variables normales**  $\xi_j$  et  $\eta_k$ .

Dans l'espace vectoriel des efforts dans les barres, les efforts  $\sum_j X_j F'_{ij}$  constituent un sous-espace vectoriel à  $m$  dimensions dont une base est définie par les  $m$  vecteurs de composantes  $F'_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). Nous pouvons choisir dans ce sous-espace  $\mathcal{E}_m$  une base définie par  $m$  vecteurs dont les composantes  $\bar{F}'_{ij}$  vérifient les relations :

$$\sum_i \beta_i F'^2_{ij} = 1 \text{ et } \sum_i \beta_i \bar{F}'_{ij} \bar{F}'_{ir} = 0 \quad (j \neq r) \tag{21}$$

Il suffit, par exemple, d'utiliser le procédé classique d'orthogonalisation de Schmidt (article *Analyse fonctionnelle* [A 101] dans le traité Sciences fondamentales) consistant à définir la nouvelle base par les formules :

$$\begin{cases} \bar{F}'_{i1} = \lambda_1^1 F'_{i1} \\ \bar{F}'_{i2} = \lambda_2^1 F'_{i1} + \lambda_2^2 F'_{i2} \\ \bar{F}'_{i3} = \lambda_3^1 F'_{i1} + \lambda_3^2 F'_{i2} + \lambda_3^3 F'_{i3} \\ \dots \end{cases}$$

et à calculer les coefficients  $\lambda$  au moyen des relations (21).

De même, les efforts d'autocontrainte  $\sum_k Y_k F''_{ik}$  constituent un sous-espace vectoriel à  $n$  dimensions dont une base est définie par les  $n$  vecteurs de composantes  $F''_{ik}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Nous pouvons choisir dans ce sous-espace  $\mathcal{E}_n$  une base définie par  $n$  vecteurs dont les composantes  $\bar{F}''_{ik}$  vérifient les relations :

$$\sum_k \beta_i \bar{F}''_{ik}{}^2 = 1 \text{ et } \sum_k \beta_i \bar{F}''_{ik} \bar{F}''_{is} = 0 \quad (k \neq s) \tag{22}$$

Enfin, puisque tout état élastique de contrainte est orthogonal à tout état d'autocontrainte, nous avons, quels que soient  $j$  et  $k$  :

$$\sum_i \beta_i \bar{F}'_{ij} \bar{F}''_{ik} = 0 \tag{23}$$

En choisissant les bases ainsi définies, les efforts dans les barres ont pour expressions, en état d'équilibre élastoplastique :

$$F_i = \sum_{j=1}^m \xi_j \bar{F}'_{ij} + \sum_{k=1}^n \eta_k \bar{F}''_{ik} \tag{24}$$

Les variables  $\xi_j$  définissent la sollicitation de la structure, et les variables  $\eta_k$  définissent l'état d'autocontrainte de la structure.

En tenant compte des relations (21), (22) et (23) le travail de déformation élastique correspondant aux efforts  $F_i$  a pour valeur :

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \beta_i F_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_j \xi_j^2 + \sum_k \eta_k^2 \right)$$

Supposons que l'on impose des raccourcissements donnés  $\lambda_i$  aux barres de la structure. En annulant les dérivées de la fonction de Colonnetti :

$$\mathcal{F} = W + \sum_i \lambda_i F_i$$

par rapport aux variables  $\eta_k$ , nous trouvons les  $n$  équations :

$$\eta_k + \sum_i \lambda_i \bar{F}''_{ik} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{25}$$

qui donnent l'état d'autocontrainte provoqué par les raccourcissements  $\lambda_i$ . Ces équations montrent également, le nombre de barres  $b$  étant toujours plus grand que  $n$ , qu'un même état d'autocontrainte peut être obtenu d'une infinité de façons au moyen de raccourcissements de barres de la structure.

Nous pouvons représenter l'état de contrainte de la structure par un point P de l'espace à  $m+n$  dimensions  $\mathcal{E}_{m+n} = \mathcal{E}_m \times \mathcal{E}_n$  de coordonnées  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ . La projection Q de P sur le sous-espace  $\mathcal{E}_m$  définit l'état de sollicitation, et la projection R de P sur le sous-espace  $\mathcal{E}_n$  définit l'état d'autocontrainte. Les efforts  $F_i$  doivent vérifier les inégalités :

$$-F_i^- \leq F_i \leq F_i^+$$

Les inégalités relatives à la barre  $B_j$  montrent que P doit appartenir à la bande d'élasticité  $\mathcal{B}_j$  contenant l'origine et limitée par deux variétés linéaires parallèles à  $m+n$  dimensions  $V'_j$  et  $V''_j$ . L'ensemble des inégalités montrent que P doit appartenir à un **domaine d'élasticité convexe**  $K_{m+n}$ , intersection de toutes les bandes d'élasticité  $\mathcal{B}_j$ . Ce domaine est limité par un **polyèdre d'écoulement** convexe dont les faces parallèles ( $f'_j$ ) et ( $f''_j$ ) sont contenues respectivement dans les variétés  $V'_j$  et  $V''_j$ .

### 2.3.2 Comportement mécanique de la structure

La représentation géométrique de l'état de contrainte permet d'étendre au cas général les propriétés données pour les structures une fois hyperstatiques soumises à des forces extérieures proportionnelles à des forces fixes (§ 2.2.2).

Supposons que l'état initial soit l'état naturel. Tant que le point Q, qui définit l'état de sollicitation de la structure, reste dans le domaine convexe  $K^E_m$ , intersection du domaine d'élasticité  $K_{m+n}$  et du

sous-espace  $\mathcal{E}_m$ , le comportement de la structure est élastique ; P est alors confondu avec le point Q. Le domaine  $K_m^E$  est le **domaine des sollicitations élastiques**.

Lorsque P appartient au domaine  $K_{m+n}$ , le point Q appartient au domaine convexe  $K_m^L$  projection du domaine  $K_{m+n}$  sur le sous-espace  $\mathcal{E}_m$ . Le domaine  $K_m^L$ , qui contient le domaine  $K_m^E$ , est le **domaine des sollicitations possibles**. Les points Q de la frontière du domaine  $K_m^L$  définissent les **sollicitations limites**.

Lorsque l'état d'autocontrainte défini par les variables  $\eta_k^A$  est donné, la projection Q du point P de coordonnées  $(\xi_j ; \eta_k^A)$  appartient à un domaine convexe  $K_m^A$  du sous-espace  $\mathcal{E}_m$ . Le domaine  $K_m^A$  est inclus dans le domaine  $K_m^L$ , mais on ne peut pas comparer les domaines  $K_m^A$  et  $K_m^E$ . Nous obtenons ainsi, lorsqu'on fait varier l'état d'autocontrainte donné, une famille de domaines  $K_m^A$ , et le domaine  $K_m^E$  appartient à cette famille. Supposons que l'on astreigne le point Q, qui définit l'état de sollicitation, à se déplacer dans un domaine D donné du sous-espace  $\mathcal{E}_m$ , nous voyons (théorème fondamental de l'adaptation) que **la structure restera stable, quelles que soient les variations de la sollicitation dans le domaine D, s'il existe au moins un domaine  $K_m^A$  contenant le domaine D**. Notons qu'il est possible, sans changer le résultat, de remplacer le domaine D par le plus petit domaine convexe  $\bar{D}$  qui contient le domaine D.

### 2.3.3 Calcul des déformations plastiques des barres

Lorsque le point figuratif P de l'état de contrainte subit un déplacement PP' de composantes  $\delta\xi_j$  et  $\delta\eta_k$  appartenant au polyèdre d'écoulement, le segment PP' appartient à l'intersection de p faces ( $f_r'$ ) ou ( $f_r''$ ) du polyèdre d'écoulement, et les barres  $B_r$  subissent des raccourcissements plastiques  $\delta\lambda_r$  que nous nous proposons de calculer, connaissant les variations  $\delta\xi_j$  de la sollicitation. Au cours du déplacement PP', les efforts dans les barres  $B_r$ , égaux à  $F_r^+$  ou à  $-F_r^-$ , ne varient pas ; nous avons donc, d'après l'équation (24), les p équations :

$$\sum_j \delta\xi_j \bar{F}_{rj} + \sum_k \delta\eta_k \bar{F}_{rk}'' = 0 \tag{26}$$

Les variations  $\delta\eta_k$  sont dues aux raccourcissements plastiques  $\delta\lambda_r$  des barres  $B_r$  ; nous avons donc, d'après l'équation (25), les n équations :

$$\delta\eta_k + \sum_r \delta\lambda_r \bar{F}_{rk}'' = 0 \tag{27}$$

Nous avons donc p + n équations pour calculer p + n inconnues  $\delta\lambda_r$  et  $\delta\eta_k$  ; il est facile d'éliminer les inconnues  $\delta\eta_k$  entre les équations (26) et (27) ; nous obtenons ainsi, en posant :

$$b_{rs} = \sum_k \bar{F}_{rk}'' \bar{F}_{sk}'' \quad (b_{rs} = b_{sr})$$

p équations pour calculer les p raccourcissements plastiques  $\delta\lambda_r$  :

$$\sum_s b_{rs} \delta\lambda_s = \sum_j \delta\xi_j \bar{F}'_{rj} \tag{28}$$

Nous allons montrer que les variations  $\delta\eta_k$  rendent minimal le carré 2U de la longueur du segment PP'. Les variations  $\delta\xi_j$  étant données :

$$U = \frac{1}{2} \sum_j \delta\xi_j^2 + \frac{1}{2} \sum_k \delta\eta_k^2$$

est une fonction des variables  $\delta\eta_k$  liées par les relations (26). La fonction U sera stationnaire si les dérivées par rapport à  $\delta\eta_k$  de la fonction :

$$U + \sum_r \mu_r \left( \sum_j \delta\xi_j \bar{F}'_{rj} + \sum_k \delta\eta_k \bar{F}_{rk}'' \right)$$

sont nulles. Nous obtenons ainsi n équations :

$$\delta\eta_k + \sum_r \mu_r \bar{F}_{rk}'' = 0$$

qui permettent, avec les équations (26), de calculer les multiplicateurs  $\mu_r$  et les variations  $\delta\eta_k$ . Ces équations ont la même solution  $\delta\eta_k^0$  que les équations (26) et (27), les multiplicateurs  $\mu_r$  étant égaux aux raccourcissements  $\delta\lambda_r$ . La valeur correspondante de U est minimale, car U est une fonction du second degré des variables  $\delta\eta_k$  dont les dérivées sont nulles pour  $\delta\eta_k = \delta\eta_k^0$  ; nous avons donc l'identité :

$$U(\delta\eta_k) = U(\delta\eta_k^0) + \frac{1}{2} \sum_k (\delta\eta_k - \delta\eta_k^0)^2$$

qui entraîne l'inégalité  $U(\delta\eta_k^0) \leq U(\delta\eta_k)$ . Donc **si les variations  $\delta\xi_j$  définissant la variation de sollicitation sont telles que le point figuratif décrive un segment de droite de la frontière du domaine d'élasticité, le segment PP'\_0 décrit par le point figuratif est le plus court de tous les segments PP' de la frontière dont les composantes suivant les axes Oξ\_j sont  $\delta\xi_j$ .**

## 3. Comportement élastoplastique des structures composées de poutres fléchies

### 3.1 Notations et formules préliminaires

#### 3.1.1 Critère de plasticité

Considérons une structure à plan moyen Σ composée de poutres droites ou courbes soumise à des forces extérieures contenues dans le plan moyen ; nous désignons par x le paramètre qui définit la position des sections S(x) de la structure. Soit M(x) le moment fléchissant dans la section S(x) dont le moment d'inertie est I(x) ;

nous poserons, pour simplifier l'écriture  $\beta(x) = \frac{1}{EI(x)}$  ; β(x) est la courbure élastique provoquée par le moment fléchissant unité.

Lorsque le moment fléchissant dans toutes les sections de la structure reste compris entre deux limites  $-M^-(x)$  et  $M^+(x)$ , le comportement de la structure est élastique et la courbure dans la section S(x) est β(x) M(x).

Lorsque pour certaines valeurs de  $x$ , en nombre fini ou infini, le moment fléchissant est égal à l'une des valeurs limites, il peut se produire dans les sections correspondantes des courbures plastiques irréversibles  $\chi(x)$ , positives si  $M(x) = M^+(x)$ , et négatives si  $M(x) = -M^-(x)$ . Ces déformations plastiques créent, lorsque la structure est hyperstatique, un **état d'autocontrainte**.

**Nota :** nous avons négligé l'influence de l'effort normal et de l'effort tranchant pour écrire le critère de plasticité ; il serait possible d'en tenir compte par approximations successives en diminuant les valeurs limites  $M^+(x)$  et  $M^-(x)$  conformément aux résultats des paragraphes 1.3 et 1.4.

### 3.1.2 Calcul de la structure dans le domaine élastique

Supposons la structure  $\Sigma$   $n$  fois hyperstatique, et désignons par  $Y_k$  les inconnues hyperstatiques. Soit  $\mu(x)$  le moment fléchissant produit par les forces extérieures dans la structure isostatique  $\Sigma_0$  obtenue en supprimant dans la structure  $\Sigma$  les liaisons surabondantes qui permettent de définir les inconnues  $Y_k$ . Le moment fléchissant dans la structure  $\Sigma$  est une fonction linéaire des inconnues hyperstatiques :

$$M'(x) = \mu(x) + \sum_k Y_k M_k''(x) \tag{29}$$

avec  $M_k''(x)$  moment dans la structure  $\Sigma_0$  soumise à la seule force  $Y_k = 1$ .

L'énergie de déformation de la structure a pour expression, l'intégrale étant étendue à l'ensemble de la structure :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \beta(x) M'^2(x) dx$$

Le théorème de Menabrea nous donne les équations :

$$\frac{\partial W}{\partial Y_j} = \int_{\Sigma} \beta(x) M'(x) M_j''(x) dx = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Remplaçons  $M'(x)$  par sa valeur donnée dans l'équation (29) ; en posant :

$$a_{jk} = \int_{\Sigma} \beta M_j'' M_k'' dx \text{ et } a_j = \int_{\Sigma} \beta \mu M_j'' dx$$

nous obtenons le système d'équations linéaires :

$$\sum_k a_{jk} Y_k + a_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{30}$$

qui permet de calculer les inconnues  $Y_k$ .

Les formules précédentes sont exactes quelle que soit la distribution du moment fléchissant choisie, pourvu qu'elle soit en équilibre avec les forces extérieures appliquées à la structure. En particulier, nous pouvons prendre  $\mu(x) = M'(x)$  moment fléchissant dans la structure hyperstatique ; nous devons avoir dans ce cas  $Y_k = 0$  quel que soit  $k$  ; donc :

$$a_j = \int_{\Sigma} \beta(x) M'(x) M_j''(x) dx = 0$$

Cette équation exprime que **tout état d'équilibre élastique  $M'(x)$  est orthogonal à tout état d'autocontrainte  $M_j''(x)$** .

### 3.1.3 Moments fléchissants provoqués par des déformations imposées

Imposons des courbures permanentes  $\chi(x)$  aux sections  $S(x)$  de la structure  $\Sigma$ . Il apparaît dans la structure un état d'autocontrainte  $M''(x)$  qui est une combinaison linéaire des états d'autocontrainte  $M_k''(x)$  :

$$M''(x) = \sum_k Y_k M_k''(x) \tag{31}$$

Le théorème fondamental de Colonnetti permet de calculer les inconnues  $Y_k$ . En effet, la fonction de Colonnetti :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \beta M''^2(x) dx + \int_{\Sigma} \chi(x) M''(x) dx$$

est minimale lorsque :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Y_j} = \int_{\Sigma} \beta M'' M_j'' dx + \int_{\Sigma} M_j'' \chi dx = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Remplaçons  $M''(x)$  par sa valeur donnée dans l'équation (31) ; nous obtenons le système d'équations :

$$\sum_k a_{jk} Y_k + \int_{\Sigma} M_j'' \chi(x) dx = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{32}$$

qui permet de calculer les inconnues  $Y_k$ .

## 3.2 Structures une fois hyperstatiques soumises à des forces extérieures proportionnelles à des forces fixes

### 3.2.1 Représentation géométrique de l'état de contrainte

Nous prendrons comme exemple une poutre OA (figure 17) simplement appuyée à l'extrémité  $x = 0$  et encastree à l'extrémité  $x = \ell$ . Cette poutre supporte une charge de densité  $p$  uniformément répartie ; nous nous proposons d'étudier le comportement de cette poutre lorsque  $p$  varie. Nous désignerons par  $\pm M_0$  les valeurs limites du moment fléchissant.

Dans l'hypothèse du comportement élastique, le moment fléchissant a pour valeur :

$$M'(x) = \frac{1}{8} p (3\ell x - 4x^2)$$

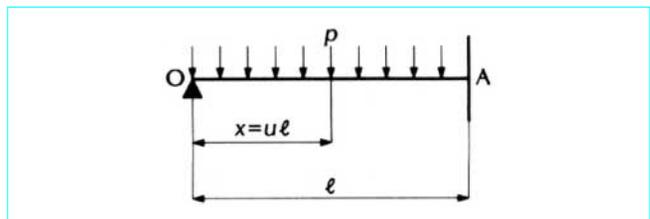


Figure 17 – Poutre encastree à une extrémité et appuyée à l'autre (charges réparties)

En choisissant pour inconnue hyperstatique la réaction  $Y$  exercée par l'appui simple, les seuls états d'autocontrainte possibles sont caractérisés par des moments fléchissants  $Y_x$ , de sorte que, dans le cas le plus général d'équilibre élastoplastique, le moment fléchissant a pour valeur :

$$M(x) = \frac{1}{8} p (3 \ell x - 4 x^2) + Y x$$

Posons  $x = u \ell$  et définissons les variables sans dimension  $\xi$  et  $\eta$  par :

$$\frac{p \ell^2}{8} = \xi M_0 \text{ et } \ell Y = \eta M_0$$

L'expression du moment fléchissant devient :

$$M(x) = M_0 [\xi(3u - 4u^2) + \eta u]$$

Les variables  $\xi$  et  $\eta$  définissent, la première l'état de sollicitation, et la deuxième l'état d'autocontrainte. Nous pouvons représenter l'état de contrainte par le point P de coordonnées  $(\xi, \eta)$  d'un plan  $O\xi\eta$ . Le travail de déformation élastique correspondant au moment  $M(x)$  a pour valeur :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\ell \beta M^2(x) dx = \frac{M_0^2 \ell}{EI} \left( \frac{1}{5} \xi^2 + \frac{1}{3} \eta^2 \right)$$

Il suffirait de faire subir au point P l'affinité  $\eta = \eta' \sqrt{3/5}$  qui l'amènerait en P'  $(\xi, \eta')$  pour que  $OP'^2$  représente, à un facteur près, le travail de déformation élastique  $W$ .

Mais tous les points du plan  $O\xi\eta$  ne sont pas des points représentatifs d'un état de contrainte, car nous devons avoir  $|M(x)| \leq M_0$ , soit :

$$-1 \leq \xi(3u - 4u^2) + \eta u \leq 1$$

Le point P doit donc se trouver dans la bande d'élasticité relative à toute section d'abscisse  $x = u \ell$  ; cette bande est limitée par les droites parallèles d'équations :

$$\xi(3u - 4u^2) + \eta u - 1 = 0 \text{ et } \xi(3u - 4u^2) + \eta u + 1 = 0$$

Lorsque  $u$  varie, l'ensemble des points communs à toutes les bandes d'élasticité est un **domaine convexe** appelé **domaine d'élasticité** ; la frontière de ce domaine est appelée frontière d'écoulement. Le domaine d'élasticité est représenté sur la figure 18 ; il admet l'origine O comme centre de symétrie. La partie de la frontière qui correspond au moment limite  $M_0$  comprend l'arc de parabole ABCD et le segment de droite DEFA' ; la partie de la frontière qui correspond au moment limite  $-M_0$ , symétrique de la précédente par rapport à O, comprend l'arc de parabole A'B'C'D' et le segment de droite D'E'F'A'. L'arc de parabole ABCD est l'enveloppe de la droite d'équation :

$$\xi(3u - 4u^2) + \eta u - 1 = 0$$

Lorsque  $u$  varie de  $\sqrt{2} - 1$  à 1, les coordonnées du point de contact sont :

$$\xi = \frac{1}{4u^2} \text{ et } \eta = -\frac{3-8u}{4u^2}$$

La droite DEFA' est la droite d'équation  $-\xi + \eta - 1 = 0$  et correspond à  $u = 1$ . Le tableau suivant donne les coordonnées des points remarquables de la frontière et l'abscisse relative de la section correspondante.

Points	$\xi$	$\eta$	$u$
A	$\frac{3+2\sqrt{2}}{4} \approx 1,457$	$\frac{2\sqrt{2}-1}{4} \approx 0,457$	$\sqrt{2}-1 \approx 0,414$
B	1	1	$\frac{1}{2}$
C	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
D	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	1
E	0	1	1
F	-1	0	1

Les points A', B', C', D', E', F' sont symétriques des points A, B, C, D, E, F.

On remarquera que le point A correspond à l'écoulement plastique dans la section  $u = \sqrt{2} - 1$  avec  $M = M_0$ , et à l'écoulement plastique dans la section d'encastrement  $u = 1$  avec  $M = -M_0$ . On notera également que le moment limite n'est jamais atteint dans les sections d'abscisses  $x < (\sqrt{2} - 1)\ell$ .

### 3.2.2 Comportement mécanique de la structure

Tous les résultats obtenus dans le paragraphe 2.2.2 s'étendent immédiatement à la structure étudiée. Nous n'y reviendrons pas, et nous nous bornerons à l'étude de deux mises en charge de la poutre.

#### 3.2.2.1 L'état initial est l'état naturel

Faisons croître la densité de charge  $p$  ; le point figuratif décrit le trajet OF'A. Le point F' correspond à la densité de charge  $p'$  pour laquelle la valeur limite est atteinte dans la section d'encastrement, et le point A correspond à la densité de charge limite supérieure  $p_1$  ; nous trouvons :

$$p' = \frac{8M_0}{\ell^2}, \quad p_1 = \frac{2M_0(3+2\sqrt{2})}{\ell^2}, \quad \frac{p_1}{p'} = \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \approx 1,457$$

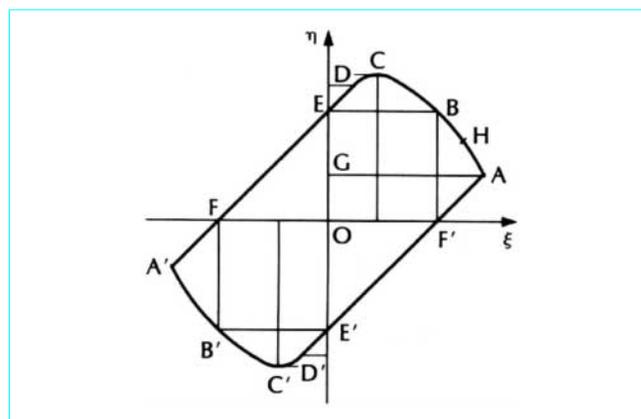


Figure 18 - Domaine d'élasticité de la poutre de la figure 17

Si, après avoir atteint la charge limite  $p_1$ , on décharge la poutre, le point figuratif décrit le segment AG, et l'état d'autocontrainte résiduel, identique à l'état d'autocontrainte en A, est défini par :

$$\eta = \frac{2\sqrt{2}-1}{4} \text{ soit } Y = \frac{2\sqrt{2}-1}{4} \frac{M_0}{\ell}$$

Durant le trajet F'A, les déformations plastiques sont concentrées dans la section d'encastrement ; il se produit dans cette section une rotation plastique finie  $\omega_1$ . Pour calculer  $\omega_1$ , nous pouvons utiliser le théorème de Colonnetti, donc annuler la dérivée de la fonction :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2EI} \int_0^\ell M^2(x) dx + \omega_1 M(\ell)$$

Nous trouvons ainsi :

$$\frac{d\mathcal{F}}{dY} = \frac{1}{EI} \int_0^\ell x M(x) dx + \ell \omega_1 = \frac{Y\ell^3}{3EI} + \ell \omega_1 = 0$$

soit, compte tenu de la valeur de Y :

$$\omega_1 = -\frac{Y\ell^2}{3EI} = -\frac{2\sqrt{2}-1}{12} \frac{M_0\ell}{EI}$$

On peut aussi observer que  $-\omega_1$  est la rotation de l'extrémité de droite de la poutre supportant les moments résiduels  $M_r(x) = Yx$ , donc :

$$\omega_1 = -\int_0^\ell M_r(x) \frac{x dx}{\ell EI} = -\frac{2\sqrt{2}-1}{12} \frac{M_0\ell}{EI}$$

### 3.2.2.2 L'état initial est l'état d'autocontrainte $\eta = 1$

Cet état d'autocontrainte s'obtient en soulevant l'appui simple au moyen d'un vérin de manière à obtenir la réaction  $Y = M_0/\ell$  en l'absence de charge. Faisons croître la densité de charge à partir de zéro ; le point figuratif décrit le trajet EBA ; les points B et A correspondent aux mêmes densités de charge  $p'$  et  $p_1$  que précédemment.

Si, après avoir atteint la charge limite  $p_1$ , on décharge la poutre, le point figuratif décrit le segment AG et l'on retrouve le même état d'autocontrainte résiduel qu'au paragraphe 3.2.2.1. Mais les déformations plastiques qui provoquent cet état d'autocontrainte sont bien différentes. Lorsque le point figuratif décrit l'arc de parabole BA, des courbures plastiques  $\chi(x)$  se produisent successivement dans toutes les sections comprises entre la section d'abscisse  $x = \ell/2$  correspondant au point B et la section d'abscisse  $x = (\sqrt{2}-1)\ell$  correspondant au point A. Le théorème de Colonnetti permet de déterminer la fonction  $\chi(x)$ . Au moment où le point figuratif atteint le point H, compris entre B et A, correspondant à la section d'abscisse  $x$ , des courbures plastiques se sont produites pendant le trajet BH dans les sections comprises entre les sections d'abscisses  $\ell/2$  et  $x$ . La fonction de Colonnetti a donc pour expression :

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1}{2EI} \int_0^\ell M^2(t) dt + \int_x^{\ell/2} \chi(t) M(t) dt$$

Nous devons avoir :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Y} = \frac{1}{EI} \int_0^\ell t M(t) dt + \int_x^{\ell/2} t \chi(t) dt = 0$$

soit, en remplaçant  $M(t)$  par sa valeur  $M'(t) + Yt$  :

$$\frac{Y\ell^3}{3EI} + \int_x^{\ell/2} t \chi(t) dt = 0$$

Compte tenu de la valeur de Y en H :

$$Y = \eta \frac{M_0}{\ell} = -\frac{3-8u}{4u^2} \frac{M_0}{\ell}$$

l'équation précédente devient, en posant  $x = u\ell$  et  $t = \theta\ell$  :

$$-\frac{M_0}{EI} \frac{3-8u}{12u^2} + \int_u^{\frac{1}{2}} \theta \chi(\theta) d\theta = 0$$

Il suffit de dériver l'équation précédente par rapport à  $u$  pour obtenir la fonction  $\chi(u)$  :

$$\chi(u) = \frac{M_0}{EI} \frac{3-4u}{6u^4}$$

En dehors de l'intervalle  $(\sqrt{2}-1, \frac{1}{2})$  la fonction  $\chi(u)$  est nulle.

La figure 19 donne la courbe représentative de la fonction  $\chi(x)$ .

## 3.3 Structures $n$ fois hyperstatiques soumises à des forces extérieures, fonctions linéaires et homogènes de $m$ paramètres

### 3.3.1 Représentation géométrique de l'état de contrainte

Considérons une structure  $n$  fois hyperstatique  $\Sigma$  soumise à un système de forces extérieures ( $S$ ) qui est une combinaison linéaire et homogène de  $m$  systèmes ( $S_j$ ). Soit  $M'_j(x)$  le moment fléchissant produit par le système ( $S_j$ ) dans l'hypothèse du comportement élastique. L'état d'autocontrainte de la structure est une combinaison linéaire et homogène des  $n$  états d'autocontrainte  $M''_k(x)$  correspondant aux  $n$  liaisons surabondantes. Dans l'état d'équilibre élastoplastique le plus général, le moment fléchissant  $M(x)$  a pour expression :

$$M(x) = \sum_{j=1}^m X_j M'_j(x) + \sum_{k=1}^n Y_k M''_k(x)$$

Nous allons substituer aux variables  $X_j$ , qui définissent l'état de sollicitation et aux variables  $Y_k$  qui définissent l'état d'autocontrainte, des variables normales  $\xi_j$  et  $\eta_k$ .

En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, nous pouvons remplacer les  $m$  systèmes ( $S_j$ ) par  $m$  systèmes ( $\bar{S}_j$ ), combinaisons linéaires et homogènes des systèmes ( $S_j$ ), tels que les moments  $\bar{M}'_j(x)$  causés par les systèmes ( $S_j$ ) dans l'hypothèse du comportement élastique vérifient les relations :

$$\int_\Sigma \beta(x) \bar{M}'_j(x) dx = 1 \text{ et } \int_\Sigma \beta(x) \bar{M}'_j(x) \bar{M}'_r(x) dx = 0 \quad (j \neq r) \quad (33)$$

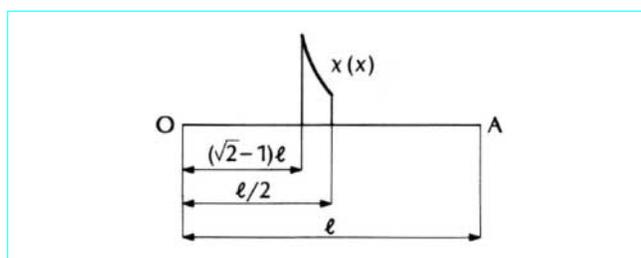


Figure 19 – Courbures plastiques résiduelles

De même, nous pouvons remplacer les  $n$  états d'autocontrainte  $M''_k(x)$  par  $n$  états d'autocontrainte  $\bar{M}''_k(x)$ , combinaisons

linéaires et homogènes des états d'autocontrainte  $M_k''(x)$ , vérifiant les relations :

$$\int_{\Sigma} \beta(x) \overline{M}_k''^2(x) dx = 1 \text{ et } \int_{\Sigma} \beta(x) \overline{M}_k''(x) \overline{M}_s''(x) dx = 0 \text{ (} k \neq s \text{)} \quad (34)$$

Enfin, puisque tout état de contrainte élastique est orthogonal à tout état d'autocontrainte, nous avons, quels que soient  $j$  et  $k$  :

$$\int_{\Sigma} \beta(x) \overline{M}_j'(x) \overline{M}_k''(x) dx = 0 \quad (35)$$

Nous pouvons donc écrire l'expression du moment fléchissant :

$$M(x) = \sum_{j=1}^m \xi_j \overline{M}_j'(x) + \sum_{k=1}^n \eta_k \overline{M}_k''(x) \quad (36)$$

En tenant compte des relations (33), (34) et (35), le travail de déformation élastique correspondant aux moments fléchissants  $M(x)$  a pour valeur :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \beta(x) M^2(x) dx = \frac{1}{2} \left( \sum_j \xi_j^2 + \sum_k \eta_k^2 \right)$$

Supposons que l'on impose des courbures  $\chi(x)$  à la structure. En annulant les dérivées de la fonction de Colonnetti :

$$\mathcal{F} = W + \int_{\Sigma} \chi(x) M(x) dx$$

par rapport aux variables  $\eta_k$ , nous obtenons  $n$  équations :

$$\eta_k + \int_{\Sigma} \chi(x) \overline{M}_k''(x) dx = 0 \quad (37)$$

qui donnent l'état d'autocontrainte provoqué par les courbures  $\chi(x)$ .

Nous pouvons représenter l'état de contrainte de la structure par un point  $P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  de l'espace à  $m+n$  dimensions  $\mathcal{E}_{m+n} = \mathcal{E}_m \times \mathcal{E}_n$ . La projection  $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  de  $P$  sur le sous-espace  $\mathcal{E}_m$  définit l'état de sollicitation, et la projection  $R(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  de  $P$  sur le sous-espace  $\mathcal{E}_n$  définit l'état d'autocontrainte. Les moments fléchissants doivent vérifier les inégalités :

$$-M^-(x) \leq M(x) \leq M^+(x)$$

La double inégalité relative à la section  $S(x)$  montre que le point  $P$  doit appartenir à la bande d'élasticité  $\mathcal{B}(x)$  ; cette bande d'élasticité qui contient l'origine est limitée par deux variétés linéaires parallèles à  $m+n$  dimensions  $V'(x)$  et  $V''(x)$ . L'ensemble des inégalités montre que le point  $P$  doit appartenir à un **domaine d'élasticité convexe**  $K_{m+n}$  qui est l'ensemble des points communs à toutes les bandes d'élasticité. Ce domaine d'élasticité est limité par la **surface d'écoulement** qui est une variété de l'espace  $\mathcal{E}_{m+n}$ , enveloppe des variétés linéaires  $V'(x)$  et  $V''(x)$ . Lorsque le point  $P$  est sur la surface d'écoulement, la variété linéaire tangente en  $P$  à la surface d'écoulement est  $V'(x)$  ou  $V''(x)$  ; le moment fléchissant dans la section  $S(x)$  est égal à  $M^+(x)$  dans le premier cas, et égal à  $-M^-(x)$  dans le second.

### 3.3.2 Comportement mécanique de la structure

Tout ce qui a été dit dans le paragraphe 2.3.2 peut être répété ici sans changement.

### 3.3.3 Détermination et calcul des déformations plastiques

Nous devons examiner comment le point figuratif de l'état de contrainte se déplace sur la frontière du domaine élastique. Soit donc  $P(\xi_j; \eta_k)$  un point de la frontière, et  $\delta\xi_j$  une variation infinitésimale de la sollicitation amenant le point  $P$  en un point  $P'$  de la frontière de coordonnées  $(\xi_j + \delta\xi_j, \eta_k + \delta\eta_k)$ . Il nous faut calculer la variation  $\delta\eta_k$  de l'état d'autocontrainte.

Supposons d'abord que le point  $P$  corresponde à une section  $S(x)$  et que le point  $P'$  corresponde à une section  $S(x + \delta x)$ . Nous avons, en supposant que les moments fléchissants dans ces sections soient les moments limites supérieurs :

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_j \xi_j \overline{M}_j'(x) + \sum_k \eta_k \overline{M}_k''(x) &= M^+(x) \\ \sum_j (\xi_j + \delta\xi_j) \overline{M}_j'(x + \delta x) + \sum_k (\eta_k + \delta\eta_k) \overline{M}_k''(x + \delta x) &= M^+(x + \delta x) \end{aligned} \right.$$

En retranchant membre à membre les relations précédentes, et en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur, nous obtenons l'équation :

$$\sum_j \delta\xi_j \overline{M}_j'(x) + \sum_k \delta\eta_k \overline{M}_k''(x) + \left( \sum_j \xi_j \frac{d\overline{M}_j'}{dx} + \sum_k \eta_k \frac{d\overline{M}_k''}{dx} - \frac{dM^+}{dx} \right) \delta x = 0 \quad (38)$$

D'autre part, les variations  $\delta\eta_k$  résultent de la courbure plastique  $\chi(x)$  de l'élément de poutre compris entre les sections  $S(x)$  et  $S(x + \delta x)$  ; nous avons donc, d'après l'équation (37), les  $n$  équations :

$$\delta\eta_k + \overline{M}_k''(x) \chi(x) \delta x = 0 \quad (39)$$

L'équation (38) et les  $n$  équations (39) permettent de calculer  $\chi(x)$  et les variations  $\delta\eta_k$ . En éliminant  $\delta\eta_k$  entre les équations (38) et (39), nous trouvons l'équation qui donne  $\chi(x)$  :

$$\chi(x) \sum_k \overline{M}_k''^2(x) = \sum_j \overline{M}_j'(x) \frac{\delta\xi_j}{\delta x} + \sum_j \frac{d\overline{M}_j'}{dx} \xi_j + \sum_k \frac{d\overline{M}_k''}{dx} \eta_k - \frac{dM^+}{dx} \quad (40)$$

Les équations (39) donnent ensuite les variations  $\delta\eta_k$ .

Il peut arriver que  $PP'$  soit un **segment de droite** appartenant à la frontière ; dans ce cas le point  $P'$  correspond à la même section  $S(x)$  que le point  $P$ . Les déformations plastiques se concentrent alors dans la section  $S(x)$  qui subit une rotation plastique finie  $\delta\omega(x)$ , la courbure devenant infinie. La rotation  $\delta\omega(x)$  et les variations  $\delta\eta_k$  sont alors les solutions des équations :

$$\left. \begin{aligned} \sum_j \overline{M}_j'(x) \delta\xi_j + \sum_k \overline{M}_k''(x) \delta\eta_k &= 0 \\ \delta\eta_k + \overline{M}_k''(x) \delta\omega(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

qui se déduisent des équations (38) et (39) en prenant  $\delta x = 0$  et  $\delta\omega(x) = \chi(x) \delta x$ . Il résulte des équations (41) que l'on a :

$$\delta\omega(x) \sum_k \overline{M}_k''^2(x) = \sum_j \overline{M}_j'(x) \delta\xi_j \quad (42)$$

On peut montrer, comme dans le cas des structures réticulées, que **l'arc  $PP'_0$  décrit par le point figuratif est le plus court de tous les éléments  $PP'$  de la frontière dont les composantes sur les axes  $O\xi_j$  sont  $\delta\xi_j$ .**

Les résultats précédents s'étendent aisément au cas où l'élément PP' appartient à une variété singulière de la frontière. Le point P correspond alors à  $p$  sections  $S(x_r)$ . Pour calculer les courbures plastiques  $\chi(x_r)$  dans ces sections, nous disposons des  $p$  équations obtenues en faisant  $x = x_r$  dans l'équation (38), et des équations déduites de (37) :

$$\delta \eta_k + \sum_r \bar{M}_r''(x_r) \chi(x_r) \delta x_r = 0 \tag{43}$$

Comme précédemment, il peut arriver qu'un certain nombre de variations  $\delta x_r$  soient nulles ; il suffit alors de remplacer dans l'équation (43) les valeurs  $\chi(x_r) \delta x_r$  par les rotations plastiques qui se produisent dans les sections correspondantes  $S(x_r)$ .

## 4. Détermination des charges limites

### 4.1 Considérations préliminaires

Nous considérerons essentiellement des structures réticulées et des structures composées de poutres fléchies que nous supposerons élastoplastiques parfaites.

Dans le cas des structures réticulées, une barre  $B_i$  est en équilibre limite si l'effort dans cette barre est égal soit à l'effort de traction limite  $-F_i^-$ , soit à l'effort de compression limite  $F_i^+$ . Les nombres positifs  $F_i^-$  et  $F_i^+$  sont caractéristiques de la barre  $B_i$ . Lorsque  $F_i^- = F_i^+$ , nous poserons  $F_i^0 = F_i^- = F_i^+$ .

Dans le cas des structures composées de poutres fléchies, nous négligerons l'influence de l'effort tranchant  $T$  et de l'effort normal  $N$ . Une section  $S(x)$  d'une poutre de la structure, dont la position est définie par le paramètre  $x$ , est en équilibre limite lorsque le moment fléchissant dans cette section est égal à l'une des valeurs limites  $-M^-(x)$  ou  $M^+(x)$ . Les nombres positifs  $M^-(x)$  et  $M^+(x)$  sont caractéristiques de la section  $S(x)$ . Lorsque  $M^-(x) = M^+(x)$ , nous poserons  $M_0(x) = M^-(x) = M^+(x)$ .

Les états d'équilibre limites d'une structure, qui ne dépendent pas de la succession des états d'équilibre antérieurs, peuvent être déterminés en négligeant les déformations élastiques (article *Théorie de la plasticité* [A 350] dans le traité *Sciences fondamentales*). Dans ces conditions, la ruine de la structure, supposée rigide-plastique, se produira au moment où la structure sera transformée en un **mécanisme** ; il faut pour cela qu'un certain nombre de barres se déforment plastiquement dans le cas des structures réticulées, ou qu'un certain nombre de rotules plastiques se forment dans le cas des structures composées de poutres fléchies.

Il ne faut toutefois pas perdre de vue l'hypothèse essentielle qui permet de calculer les charges limites en négligeant les déformations élastiques : **jusqu'au moment de la ruine, les déformations de la structure, supposée élastoplastique parfaite, doivent rester petites**. La non-observation de cette hypothèse peut conduire à des paradoxes.

Le problème du calcul des charges limites peut être énoncé de la façon suivante : **étant donné un système de forces extérieures  $\Phi$  appliqué à une structure, déterminer la borne inférieure  $s_0$  des nombres  $s$  tels que le système de forces extérieures  $s\Phi$  entraîne la ruine de la structure**. Le nombre  $s_0$  est le **coefficient de sécurité à la ruine** de la structure pour le système de forces extérieures  $\Phi$ .

La détermination du coefficient de sécurité d'une structure isostatique est facile. Par exemple, si  $M_{max}$  est le moment fléchissant maximal en valeur absolue produit par le système  $\Phi$  dans une poutre isostatique de section constante, nous avons évidemment  $s_0 = M_0/M_{max}$ .

Dans le cas des structures hyperstatiques, les deux théorèmes fondamentaux de la théorie des états limites d'équilibre (article *Théorie de la plasticité* [A 350]) vont nous donner chacun une méthode de calcul du coefficient de sécurité  $s_0$ .

### 4.2 Méthode statique de détermination des charges limites

Désignons toujours par  $\Phi$  le système de forces extérieures appliquées à la structure hyperstatique  $\Sigma$ , et par  $s_0$  le coefficient de sécurité de  $\Sigma$  pour le système  $\Phi$ . Le premier théorème fondamental de la théorie des états limites peut s'énoncer dans ce cas :

si l'on peut trouver un champ de contraintes stable équilibrant le système de forces extérieures  $s\Phi$ , on a  $s \leq s_0$ .

Dans le cas d'une structure réticulée, un champ de contrainte stable est constitué par des efforts  $F_i$  dans les barres vérifiant toutes les inégalités :

$$-F_i^- \leq F_i \leq F_i^+ \tag{44}$$

Dans le cas d'une structure composée de poutres fléchies, un champ de contraintes stable est défini par une distribution de moments fléchissants  $M(x)$  vérifiant, pour toute valeur de  $x$ , les inégalités :

$$-M^-(x) \leq M(x) \leq M^+(x) \tag{45}$$

La **méthode statique** de recherche du coefficient de sécurité en résulte :

si l'on considère tous les champs de contraintes stables équilibrant les systèmes de forces extérieures  $s\Phi$ , le coefficient de sécurité  $s_0$  est la borne supérieure de l'ensemble des nombres  $s$ .

Supposons la structure  $n$  fois hyperstatique. Les équations de la statique permettent de déterminer **tous** les champs de contraintes équilibrant les systèmes de forces extérieures  $s\Phi$  ; il suffit en effet de donner des valeurs arbitraires aux inconnues hyperstatiques  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Dans le cas d'une structure réticulée, nous obtiendrons ainsi un ensemble d'efforts  $F_i$  **fonctions linéaires et homogènes** de  $s, X_1, X_2, \dots, X_n$  :

$$F_i = \varphi_i(s, X_1, X_2, \dots, X_n) \tag{46}$$

En pratique, il est inutile de considérer toutes les barres de la structure, car certaines sont surabondantes ; il suffit de se borner aux **barres critiques** susceptibles de se plastifier ; nous désignerons par  $m$  le nombre des barres critiques.

Dans le cas d'une structure composée de poutres fléchies, une distribution de moments fléchissants  $M(x)$  équilibrant le système  $s\Phi$  dépend de façon linéaire et homogène des variables  $s, X_1, X_2, \dots, X_n$ . Il est inutile de considérer toutes les sections de la structure ; il suffit de se borner aux **sections critiques**  $S(x_i)$  dans lesquelles un moment limite risque d'être atteint ; nous désignerons par  $m$  le nombre des sections critiques. Les moments fléchissants  $M_i = M(x_i)$  dans les sections critiques sont des fonctions linéaires et homogènes de  $s, X_1, X_2, \dots, X_n$  :

$$M_i = \psi_i(s, X_1, X_2, \dots, X_n) \tag{47}$$

Lorsque  $m$  et  $n$  sont petits, la recherche du coefficient de sécurité peut s'effectuer par la **méthode des inégalités**. Il faut, dans le cas d'une structure réticulée, que les efforts donnés par l'équation (46) vérifient les inégalités de l'équation (44), et, dans le cas d'une structure composée de poutres fléchies, que les moments donnés par

l'équation (47) vérifient les inégalités de l'équation (45) écrites pour  $x = x_j$ . Dans l'un ou l'autre cas, nous obtenons  $m$  doubles inégalités que l'on peut résoudre par rapport à  $X_1$  puisque les fonctions  $\varphi_i$  ou  $\psi_i$  sont linéaires ; nous obtenons ainsi  $m$  doubles inégalités :

$$f'_{1j}(s, X_2, X_3, \dots, X_n) \leq X_1 \leq f_{1j}(s, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

dans lesquelles les fonctions  $f'_{1j}$  et  $f_{1j}$  sont linéaires.

Les inégalités précédentes sont compatibles, si nous avons, quels que soient  $i$  et  $j$  :

$$f'_{1j}(s, X_2, X_3, \dots, X_n) \leq f_{1i}(s, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

et nous pouvons résoudre les inégalités précédentes par rapport à  $X_2$  ; nous obtenons ainsi un certain nombre de doubles inégalités :

$$f'_{2i}(s, X_3, X_4, \dots, X_n) \leq X_2 \leq f_{2j}(s, X_3, X_4, \dots, X_n)$$

Nous avons ainsi éliminé  $X_1$  ; en répétant le même procédé, nous parviendrons finalement à un certain nombre de doubles inégalités :

$$f'_{ni}(s) \leq X_n \leq f_{ni}(s)$$

dans lesquelles les fonctions  $f'_{ni}$  et  $f_{ni}$  sont linéaires.

En écrivant que toute fonction  $f'_{ni}(s)$  est inférieure à toute fonction  $f_{ni}(s)$ , nous trouvons l'unique double inégalité :

$$-b \leq s \leq a$$

La valeur du coefficient de sécurité cherché est  $a$  ; la valeur  $b$  est le coefficient de sécurité de la structure pour le système de forces extérieures  $-\Phi$ .

En donnant à  $s$  la valeur  $a$ , et en remontant la suite des inégalités, on trouve les valeurs de toutes les inconnues hyperstatiques au moment de la ruine. L'équilibre limite de la structure est donc entièrement déterminé : on connaît les barres qui se déforment plastiquement dans le cas d'une structure réticulée, et les sections dans lesquelles se forme une rotule plastique dans le cas d'une structure composée de poutres fléchies. On peut abrégier les calculs en choisissant pour inconnues hyperstatiques  $n$  des efforts  $F_i$ , ou  $n$  des moments  $M_i$ .

La méthode des inégalités devient rapidement fastidieuse dès que  $m$  et  $n$  ne sont plus petits. Le problème de la recherche du coefficient de sécurité peut alors se ramener à un **problème de programmation linéaire** pouvant être résolu au moyen d'un ordinateur. Par exemple, dans le cas d'une structure composée de poutres fléchies, en éliminant les inconnues hyperstatiques entre les  $m$  relations (47), on obtient  $p = m - n$  équations linéaires et homogènes entre  $s, M_1, M_2, \dots, M_m$  qui sont les **équations nécessaires d'équilibre de la statique** :

$$G_k(s, M_1, M_2, \dots, M_m) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p) \quad (48)$$

Le coefficient de sécurité  $s_0$  est le plus grand nombre  $s$  pour lequel on peut déterminer  $m$  nombres  $M_i$  vérifiant les relations (48) et satisfaisant aux inégalités de l'équation (45) écrites pour  $x = x_j$ .

### 4.3 Méthode cinématique de détermination des charges limites

Désignons toujours par  $\Phi$  le système de forces extérieures appliqué à la structure hyperstatique  $\Sigma$ , et par  $s_0$  le coefficient de sécurité de  $\Sigma$  pour le système  $\Phi$ . Puisque la structure est supposée rigide plastique, les seuls champs de vitesse de déplacement sont ceux qui résultent du mouvement d'un mécanisme de ruine possible de la structure.

Supposons donc la structure transformée en un mécanisme. Désignons par  $\mathcal{D}$  la puissance dissipée dans les déformations plastiques, et par  $\mathcal{P}(\Phi)$  la puissance du système de forces extérieures lors d'un mouvement du mécanisme. Tout nombre  $s$  tel que  $s \mathcal{P}(\Phi) \geq \mathcal{D}$  est supérieur ou égal au coefficient de sécurité  $s_0$  en vertu du second théorème fondamental de la théorie des états limites. Donc, en considérant le travail au lieu de la puissance, nous obtenons la proposition :

**si, dans un déplacement d'un mécanisme de ruine de la structure, le travail du système de forces extérieures  $s\Phi$  est égal au travail dissipé dans les déformations plastiques, on a  $s \geq s_0$ .**

Dans le cas d'une structure réticulée, le travail  $\mathcal{C}_{int}$  dissipé lors des raccourcissements plastiques  $\lambda_i$  des barres  $B_i$  est toujours positif et a pour valeur,  $\bar{F}_i$  étant égal à  $F_i^+$  si  $\lambda_i > 0$ , et à  $F_i^-$  si  $\lambda_i < 0$  :

$$\mathcal{C}_{int} = \sum_i \bar{F}_i |\lambda_i|$$

Dans le cas d'une structure composée de poutres fléchies, le travail  $\mathcal{C}_{int}$  dissipé lors des rotations  $\theta_i$  des rotules plastiques  $S_i$  est toujours positif et a pour valeur,  $\bar{M}_i$  étant égal à  $M_i^+$  si  $\theta_i > 0$  et à  $M_i^-$  si  $\theta_i < 0$  :

$$\mathcal{C}_{int} = \sum_i \bar{M}_i |\theta_i|$$

La **méthode cinématique** de recherche du coefficient de sécurité en résulte : **le coefficient de sécurité  $s_0$  est la borne inférieure de l'ensemble des nombres  $s$  correspondant à tous les mécanismes de ruine possibles de la structure.**

Pratiquement le calcul du coefficient de sécurité peut s'effectuer par la **méthode de superposition des mécanismes**. Raisonnons, pour fixer les idées, sur une structure  $n$  fois hyperstatique composée de poutres fléchies comportant  $m$  sections critiques  $S_i$ . Nous avons vu que les moments fléchissants  $M_i$  dans les sections  $S_i$  vérifient  $p = m - n$  équations indépendantes d'équilibre (48).

Or, à tout mécanisme de ruine résultant de la formation de rotules dans certaines sections  $S_i$ , le théorème des travaux virtuels associe une équation d'équilibre linéaire entre les moments fléchissants  $M_i$  ; on applique le théorème des travaux virtuels en prenant pour déplacement virtuel un déplacement du mécanisme de ruine, et en supposant deux couples opposés  $-M_i$  et  $M_i$  appliqués à droite et à gauche des sections  $S_i$ . Cette équation d'équilibre est nécessairement une combinaison linéaire et homogène des  $p$  équations d'équilibre (48). Il en résulte que **tous les mécanismes de ruine possibles de la structure sont des combinaisons linéaires et homogènes de  $p$  mécanismes de base indépendants**. Autrement dit, l'ensemble des mécanismes de ruine est un espace vectoriel de dimension  $p$ .

Considérons donc un mécanisme de base  $\mathcal{M}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ), et soit  $\theta_i^k$  les rotations des rotules plastiques et  $\mathcal{C}_k$  le travail du système de forces extérieures  $\Phi$  dans un déplacement du mécanisme ; nous supposons que le sens du déplacement est choisi de façon que  $\mathcal{C}_k$  soit positif. Le nombre  $s_k$  correspondant à ce mécanisme est défini par l'équation :

$$s_k \mathcal{C}_k = \sum_i \bar{M}_i |\theta_i^k|$$

Un mécanisme de ruine quelconque est une combinaison linéaire et homogène des  $p$  mécanismes de base :

$$\mathcal{M} = \alpha_1 \mathcal{M}_1 + \alpha_2 \mathcal{M}_2 + \dots + \alpha_p \mathcal{M}_p = \sum_k \alpha_k \mathcal{M}_k$$

Les rotations  $\theta_i$  des rotules plastiques et le travail  $\bar{\sigma}$  des forces extérieures dans un déplacement du mécanisme  $\mathcal{M}$  sont :

$$\theta_i = \sum_k \alpha_k \theta_i^k \quad \text{et} \quad \bar{\sigma} = \sum_k \alpha_k \bar{\sigma}_k$$

Le nombre  $s$  correspondant au mécanisme  $\mathcal{M}$  est donné par l'équation :

$$s \bar{\sigma} = \sum_i \bar{M}_i |\theta_i|$$

soit, compte tenu des valeurs de  $\theta_i$  et de  $\bar{\sigma}$  :

$$s = \frac{\sum_i \bar{M}_i \left| \sum_k \alpha_k \theta_i^k \right|}{\sum_k \alpha_k \bar{\sigma}_k} \quad (49)$$

Le coefficient de sécurité est obtenu pour le mécanisme  $\mathcal{M}$  qui rend minimale l'expression (49).

Dans le cas où  $m$  et  $n$  sont petits, on peut trouver le minimum de l'expression (49) par tâtonnements. Il est possible de vérifier si la valeur  $s_1$  obtenue après quelques essais est bien le coefficient de sécurité. Dans le mécanisme obtenu, un certain nombre de moments  $M_i$  sont égaux à l'une des valeurs limites  $-M_i^-$  ou  $M_i^+$ , par exemple pour  $i = q + 1, q + 2, \dots, m$ . Portons ces valeurs dans les équations d'équilibre (48), nous obtenons  $p$  équations linéaires :

$$H_k(s_1, M_1, M_2, \dots, M_q) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

Si l'on peut trouver des valeurs  $M_1, M_2, \dots, M_q$  vérifiant les équations précédentes qui soient comprises entre les valeurs limites, nous avons  $s_1 = s_0$ , car on peut trouver un champ de contraintes stable donnant une valeur de  $s$  inférieure, mais aussi voisine que l'on veut de  $s_1$ . Si cela n'est pas possible, au moins un des moments  $M_i$  sera en dehors des limites permises. Par une réduction proportionnelle des forces appliquées dans un rapport  $\rho < 1$ , nous obtiendrons un champ de contraintes stable ; il en résulte que l'on a :

$$\rho s_1 < s_0 < s_1$$

Notons également que, à toute valeur  $s_2 < s_0$  fournie par un champ de contraintes stable, on peut associer une valeur  $s_3 > s_0$  en considérant le mécanisme de ruine obtenu en introduisant des rotules plastiques dans les sections critiques où les moments fléchissants sont les plus voisins des moments limites.

La méthode par tâtonnements successifs n'est utilisable que si  $m$  et  $n$  sont petits. Si  $m$  et  $n$  sont grands, il est possible de trouver un procédé systématique de recherche du minimum de l'expression (49), mais le calcul numérique exige l'emploi de l'ordinateur. On peut également montrer que la méthode cinématique conduit à un problème de programmation linéaire dual du problème déduit de la méthode statique.

## 4.4 Calcul des déformations avant la ruine

### 4.4.1 Généralités

Pour calculer les déformations d'une structure au moment qui précède la ruine, il est nécessaire de tenir compte des déformations élastiques, autrement dit de supposer la structure élastoplastique. Les déformations au moment qui précède la ruine peuvent être calculées indépendamment de l'histoire de la structure lorsque l'hypothèse de non-décharge suivante est vérifiée : **lorsque le système de forces extérieures croît jusqu'à la ruine de la structure, les éléments qui entrent successivement en déformation plastique ne subissent jamais de décharge.**

Le calcul des déformations avant la ruine permet de vérifier si l'hypothèse concernant la petitesse des déformations est satisfaite.

### 4.4.2 Structures composées de poutres fléchies

Considérons une structure dont nous connaissons le mécanisme de ruine défini par les rotules plastiques  $S_1, S_2, \dots, S_r$ , et supposons que, lorsque les forces extérieures croissent jusqu'à la ruine, les rotules se forment dans l'ordre  $S_1, S_2, \dots, S_r$ . En vertu de l'hypothèse de non-décharge, les rotations des rotules s'effectuent toujours dans le même sens. Avant la formation de la dernière rotule  $S_r$ , nous avons une structure qui comporte  $r - 1$  rotules plastiques, et il est aisé de calculer les déformations  $D_r$  de cette structure. Les déformations  $D_r$  sont les déformations au moment qui précède la ruine, mais on ne sait pas, en général, quelle est la dernière rotule qui se forme. Si l'on suppose que la rotule qui se forme la dernière est une rotule  $S_j$  différente de la rotule  $S_r$ , on peut calculer les déformations  $D_j$  de la structure comportant les rotules  $S_1, S_2, \dots, S_r$  à l'exception de la rotule  $S_j$ . Or on passe des déformations supposées  $D_j$  aux déformations réelles  $D_r$  par un déplacement du mécanisme qui accroît les déformations, puisque dans ce déplacement la rotule  $S_j$  tourne de l'angle correspondant à la configuration réelle de la structure au moment de la ruine. Nous obtenons donc le résultat suivant : **dans l'hypothèse de non-décharge, les déformations au moment qui précède la ruine sont les plus grandes déformations calculées en supposant successivement que chaque rotule du mécanisme de ruine se forme la dernière.**

Lorsque l'hypothèse de non-décharge n'est pas vérifiée, les déformations ainsi calculées sont plus grandes que les déformations réelles.

Le calcul des déformations de la structure comportant  $r - 1$  rotules plastiques s'effectue par les méthodes classiques de la Résistance des matériaux. Dans le cas des poutres droites, l'emploi des formules suivantes facilite le calcul :

$$\left. \begin{aligned} \omega_{AB} &= \omega'_{AB} + \Omega_{AB} - aM_A - bM_B \\ \omega_{BA} &= \omega'_{BA} + \Omega_{AB} + bM_A + cM_C \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

avec  $\omega_{AB}$  et  $\omega_{BA}$  rotations des extrémités A et B de la poutre AB,  
 $\omega'_{AB}$  et  $\omega'_{BA}$  rotations des extrémités A et B de la poutre AB supposée sur appuis simples sous l'effet des charges appliquées,  
 $M_A$  et  $M_B$  moments fléchissants en A et B,  
 $\Omega_{AB}$  angle dont tourne le segment de droite AB au cours de la déformation,  
 $a, b$  et  $c$  coefficients de souplesse de la poutre AB.

Dans le cas où l'inertie  $I$  de la poutre AB de longueur  $\ell$  est constante, les formules (50) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \omega_{AB} &= \omega'_{AB} + \Omega_{AB} - \frac{\ell}{6EI} (2M_A + M_B) \\ \omega_{BA} &= \omega'_{BA} + \Omega_{AB} + \frac{\ell}{6EI} (M_A + 2M_B) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

### 4.4.3 Structures réticulées planes

Le mécanisme de ruine de la structure est défini par la plastification de  $r$  barres. On doit calculer les déformations de la structure lorsque  $r - 1$  des barres précédentes sont plastifiées. Pour cela, on utilise la formule classique donnant le raccourcissement d'une barre  $A_i A_j$  de la structure :

$$\delta \ell_{ij} + \delta \ell'_{ij} = (\delta x_i - \delta x_j) \cos \theta_{ij} + (\delta y_i - \delta y_j) \sin \theta_{ij} \quad (52)$$

avec  $\delta \ell_{ij}$  raccourcissement élastique,  
 $\delta \ell'_{ij}$  raccourcissement plastique éventuel de la barre  $A_i A_j$ ,  
 $(\delta x_i, \delta y_i)$  composantes du déplacement du nœud  $A_i$ ,  
 $\theta_{ij}$  angle  $(Ox, A_i A_j)$ .

Désignons par  $b$  le nombre des barres et par  $n$  le nombre des nœuds. Si la structure est  $p'$  fois intérieurement hyperstatique, nous avons  $p'$  barres surabondantes, donc  $b = 2n - 3 + p'$ . Si la structure est  $p''$  fois extérieurement hyperstatique, nous avons  $2n - 3 - p''$  déplacements  $\delta x_i$  et  $\delta y_i$  non nuls. Au total, la structure est  $p = p' + p''$  fois hyperstatique, et le mécanisme de ruine est caractérisé par la déformation plastique de  $r = p + 1$  barres ; si l'on suppose que  $p$  barres seulement se déforment plastiquement, nous obtenons  $b - 2n - 3 + p'$  équations linéaires (52) pour calculer  $2n - 3 - p''$  déplacements  $\delta x_i$  et  $\delta y_i$  ; et  $p = p' + p''$  raccourcissements plastiques  $\delta \ell'_{ij}$ .

### 4.5 Charges limites des structures réticulées

#### 4.5.1 Structure intérieurement hyperstatique

Considérons (figure 20) la poutre sur appuis simples à montants et croix de Saint-André qui comporte trois barres surabondantes. Les membrures et les montants ont la même section, et les diagonales inclinées à  $45^\circ$  ont la même section. Nous désignons par  $\pm F$  les efforts limites dans une membrure ou dans un montant, et par  $\pm F'$  les efforts limites dans une diagonale. Nous nous proposons de calculer la valeur limite  $P_1$  qui entraîne la ruine de la structure. En fonction des efforts  $X, Y$  et  $Z$  dans les montants sur appuis et dans le montant situé au droit de la charge  $3P$ , nous trouvons facilement les efforts dans les barres par la méthode des nœuds :

$$\begin{aligned} F_1 &= -2P + X & F_2 &= X & F_3 &= P - X + Y \\ F_4 &= 4P - X + Y & F_5 &= -P + Z & F_6 &= Z \\ F_7 &= (2P - X)\sqrt{2} & F_8 &= -X\sqrt{2} & F_9 &= -(3P - X + Y)\sqrt{2} \\ F_{10} &= (-2P + X - Y)\sqrt{2} & F_{11} &= -Z\sqrt{2} \\ F_{12} &= (P - Z)\sqrt{2} & F_{13} &= 2P - X + Y + Z \end{aligned}$$

Admettons que la charge  $3P$  se répartisse également entre les deux triangulations ; nous trouvons :

$$X = P \quad Y = -\frac{3}{2}P \quad Z = \frac{1}{2}P$$

et les efforts dans les barres ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} -F_1 &= F_2 = P & -F_3 &= F_4 = \frac{3}{2}P & -F_5 &= F_6 = \frac{1}{2}P \\ F_7 &= -F_8 = P\sqrt{2} \\ -F_9 &= F_{10} = -F_{11} = F_{12} = \frac{1}{2}P\sqrt{2} & F_{13} &= 0 \end{aligned}$$

Ces efforts constituent un champ de contraintes stable si :

$$\frac{3}{2}P \leq F \text{ et } P\sqrt{2} \leq F'$$

Donc :

- si  $F' > \frac{2}{3}F\sqrt{2}$ ,  $P_1$  est au moins égal à  $\frac{2}{3}F$  ;
- si  $F' < \frac{2}{3}F\sqrt{2}$ ,  $P_1$  est au moins égal à  $\frac{F'}{\sqrt{2}}$ .

Appliquons maintenant la méthode cinématique. Un premier mécanisme de ruine (figure 21) s'obtient en supposant les membrures 3 et 4 en déformation plastique. Dans un déplacement du mécanisme défini par l'angle  $\theta$ , la membrure 3 s'allonge de  $a\theta$ , la membrure 4 se raccourcit de  $a\theta$  et le point d'application de la charge s'abaisse de  $a\theta$ . Ce champ de déplacement est instable si  $3Pa\theta > 2Fa\theta$ , soit  $P > 2F/3$ .

Un second mécanisme de ruine (figure 22) s'obtient en supposant les diagonales 7 et 8 en déformation plastique. Dans un déplacement du mécanisme défini par l'angle  $\theta$ , la diagonale 7 se raccourcit de  $3a\theta/\sqrt{2}$ , la diagonale 8 s'allonge de  $3a\theta/\sqrt{2}$  et le point d'application de la charge s'abaisse de  $2a\theta$ . Ce champ de déplacement est instable si  $6Pa\theta > 6F'a\theta/\sqrt{2}$ , soit  $P > F'/\sqrt{2}$ .

Ces deux mécanismes montrent que  $P_1$  est au plus égal à la plus petite des deux valeurs  $2F/3$  et  $F'/\sqrt{2}$ . Nous avons donc, la méthode statique et la méthode cinématique conduisant aux mêmes valeurs limites :

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{2}{3}F \text{ lorsque } F' > \frac{2}{3}F\sqrt{2} \\ P_1 &= \frac{F'}{\sqrt{2}} \text{ lorsque } F' < \frac{2}{3}F\sqrt{2} \end{aligned}$$

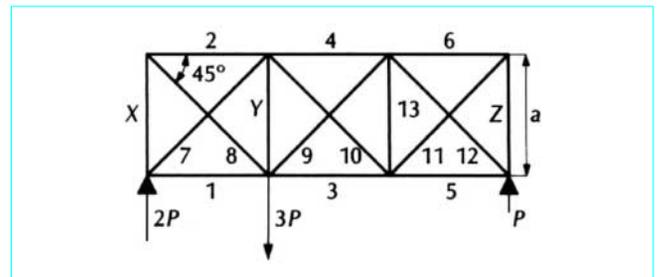


Figure 20 - Poutre sur appuis simples à montants et croix de Saint-André

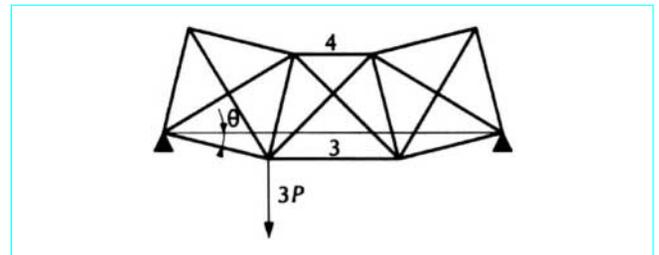


Figure 21 - Premier mécanisme de ruine

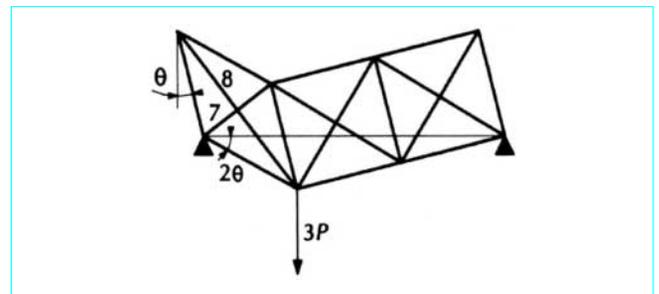


Figure 22 - Second mécanisme de ruine

### 4.5.2 Structure extérieurement hyperstatique

Considérons (figure 23) une poutre Warren continue à deux travées soumise à deux charges  $P$ . Toutes les barres ont la même section, et les valeurs limites de l'effort qu'elles peuvent supporter sont  $\pm F$ . Les panneaux sont identiques, et les diagonales font un angle  $\theta$  avec la verticale. Nous nous proposons de calculer la charge limite  $P_1$ . Prenons pour inconnue hyperstatique la réaction exercée par l'appui central  $2X$ . En utilisant la méthode des nœuds, nous trouvons les valeurs des efforts dans les barres :

$$\begin{aligned} F_1 &= -(P-X) \tan \theta & F_2 &= 2(P-X) \tan \theta \\ F_3 &= -(2P-3X) \tan \theta & F_4 &= 2(P-2X) \tan \theta \\ F_5 &= -F_6 = \frac{P-X}{\cos \theta} & -F_7 &= F_8 = \frac{X}{\cos \theta} \end{aligned}$$

Utilisons la méthode des inégalités ; en observant que  $X$  et  $P-X$  sont positifs, que  $F_4$  est négatif et que  $F_2 = -2F_1$ , les inégalités à vérifier se réduisent à :

$$\begin{aligned} X < F \cos \theta & \quad P-X < F \cos \theta & \quad P-X < \frac{1}{2} F \cot \theta \\ -F \cot \theta < 2P-4X & \quad -F \cot \theta < 3X-2P < F \cot \theta \end{aligned}$$

Résolvons les inégalités précédentes par rapport à  $X$  ; en éliminant les inégalités qui sont des conséquences des autres, nous trouvons que  $X$  doit être inférieur au plus petit des deux nombres :

$$a_1 = F \cos \theta \quad a_2 = \frac{1}{2} P + \frac{1}{4} F \cot \theta$$

et supérieur au plus grand des deux nombres :

$$b_1 = P - F \cos \theta \quad b_2 = P - \frac{1}{2} F \cot \theta$$

En écrivant que  $b_1$  et  $b_2$  sont inférieurs à  $a_1$  et  $a_2$ , nous trouvons que  $P$  doit être inférieur à la plus petite des deux valeurs :

$$P_1' = 2F \cos \theta \quad \text{et} \quad P_1'' = F \left( \cos \theta + \frac{1}{2} \cot \theta \right)$$

En comparant les valeurs de  $P_1'$  et de  $P_1''$ , nous voyons que :

— lorsque  $\sin \theta > \frac{1}{2}$ , soit  $\theta > 30^\circ$ , la charge limite est  $P_1 = P_1''$  ; la valeur correspondante de  $X$  est  $F \cos \theta$ , et les efforts limites sont atteints dans les barres 2, 7 et 8 ( $F_2 = F_8 = F, F_7 = -F$ ) ;

— lorsque  $\sin \theta < \frac{1}{2}$ , soit  $\theta < 30^\circ$ , la charge limite est  $P_1 = P_1'$  ; la valeur correspondante de  $X$  est encore  $F \cos \theta$ , et les efforts limites sont atteints dans les barres 5, 6, 7 et 8 ( $F_5 = F_8 = F, F_6 = F_7 = -F$ ).

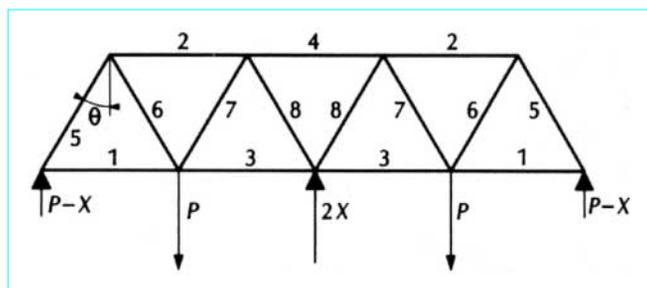


Figure 23 – Poutre Warren continue à deux travées

La meilleure utilisation de la matière correspond à  $\sin \theta = 1/2$ , donc à une poutre Warren composée de triangles équilatéraux.

### 4.6 Charges limites des poutres droites hyperstatiques

#### 4.6.1 Poutre de section constante encastree pour $x = 0$ , et sur appuis simples pour $x = \ell$

Soit A l'extrémité encastree, B l'extrémité sur appuis simples et C le point d'application d'abscisse  $\alpha$  de la charge concentrée  $P$  dont nous voulons trouver la valeur limite (figure 24).

Le mécanisme de ruine est évident : il se forme deux rotules plastiques en A et C. Donc, les valeurs limites du moment fléchissant étant  $\pm M_0$ , nous avons, avec les notations de la figure 24 :

$$Pf = M_0 \left( \frac{f}{\alpha} + \frac{f}{\alpha} + \frac{f}{\ell - \alpha} \right)$$

La valeur limite  $P_1(\alpha)$  de la charge est donc :

$$P_1(\alpha) = \frac{M_0(2\ell - \alpha)}{\alpha(\ell - \alpha)}$$

$P_1(\alpha)$  est maximale et égale à  $(3 + 2\sqrt{2}) \frac{M_0}{\ell}$  lorsque  $\alpha = (2 - \sqrt{2})\ell$ .

Le calcul élastique aurait donné pour valeur maximale  $P'(\alpha)$  :

$$P'(\alpha) = \begin{cases} \frac{2M_0\ell^2}{\alpha(\ell - \alpha)(2\ell - \alpha)} & \text{pour } \alpha < (2 - \sqrt{2})\ell \\ \frac{2M_0\ell^3}{\alpha^2(\ell - \alpha)(3\ell - \alpha)} & \text{pour } \alpha > (2 - \sqrt{2})\ell \end{cases}$$

On vérifie que  $P_1(\alpha)$  est toujours supérieur à  $P'(\alpha)$ , sauf pour  $\alpha = (2 - \sqrt{2})\ell$  ; dans ce cas  $P_1(\alpha)$  et  $P'(\alpha)$  sont égaux.

Calculons la flèche  $v_1(\alpha)$  en C avant la ruine. Les formules (51) donnent, compte tenu de  $M_A = -M_0$  et  $M_C = M_0$ , les équations :

$$\begin{aligned} \omega_{AC} = \omega_{CA} &= \frac{v(\alpha)}{\alpha} + \frac{M_0\alpha}{6EI} \\ \omega_{CB} &= -\frac{v(\alpha)}{(\ell - \alpha)} - \frac{2M_0(\ell - \alpha)}{6EI} \end{aligned}$$

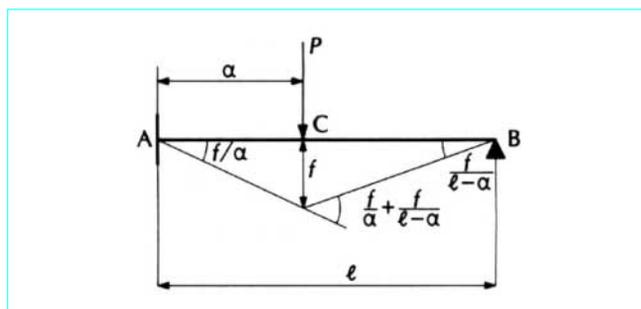


Figure 24 – Poutre de section constante encastree à une extrémité et appuyée à l'autre (charge concentrée)

Supposons que la rotule C se forme la dernière, la condition  $\omega_{AC} = \omega_{CB}$  donne :

$$v_1(\alpha) = - \frac{M_0 \alpha (\ell - \alpha) (2\ell - \alpha)}{6EI}$$

Supposons que la rotule A se forme la dernière, la condition  $\omega_{AC} = 0$  donne :

$$v_1(\alpha) = - \frac{M_0 \alpha^2}{6EI}$$

En comparant les deux valeurs précédentes, nous voyons que la flèche en C au moment de la ruine a pour valeur :

$$v_1(\alpha) = \begin{cases} - \frac{M_0 \alpha (\ell - \alpha) (2\ell - \alpha)}{6EI} & \text{pour } \alpha < (2 - \sqrt{2})\ell \\ - \frac{M_0 \alpha^2}{6EI} & \text{pour } \alpha > (2 - \sqrt{2})\ell \end{cases}$$

Comparons la valeur  $v_1(\alpha)$  et la flèche élastique maximale :

$$v'(\alpha) = - \frac{P'(\alpha) \alpha^3 (\ell - \alpha)^2 (4\ell - \alpha)}{12EI \ell^3}$$

soit compte tenu de la valeur de  $P'(\alpha)$  :

$$v'(\alpha) = \begin{cases} - \frac{M_0}{6EI} \frac{\alpha^2 (\ell - \alpha) (4\ell - \alpha)}{\ell (2\ell - \alpha)} & \text{pour } \alpha < (2 - \sqrt{2})\ell \\ - \frac{M_0}{6EI} \frac{\alpha (\ell - \alpha) (4\ell - \alpha)}{3\ell - \alpha} & \text{pour } \alpha > (2 - \sqrt{2})\ell \end{cases}$$

On vérifie que  $v_1(\alpha)$  est toujours plus grand en valeur absolue que  $v'(\alpha)$ , sauf pour  $\alpha = (2 - \sqrt{2})\ell$  ; dans ce cas  $v_1(\alpha)$  et  $v'(\alpha)$  sont égaux.

Par exemple, pour  $\alpha = \ell/2$  :

$$v_1\left(\frac{\ell}{2}\right) = - \frac{9M_0 \ell^2}{144EI} \text{ et } v'\left(\frac{\ell}{2}\right) = - \frac{7M_0 \ell^2}{144EI}$$

La flèche avant ruine est du même ordre de grandeur que la flèche élastique maximale, et l'hypothèse de la petitesse des déformations est vérifiée.

Dans le cas où la poutre supporte une densité de charge  $p$  répartie sur toute la travée, le mécanisme de ruine comporte une rotule plastique à l'encastrement A et une rotule plastique d'abscisse inconnue  $x$ , donc :

$$\frac{1}{2} p \ell f = M_0 \left( \frac{f}{x} + \frac{f}{\ell - x} \right)$$

La valeur limite de la densité de charge  $a$  donc pour valeur :

$$p_1 = \min_{0 \leq x \leq \ell} \left\{ \frac{2M_0(2\ell - x)}{\ell x(\ell - x)} \right\}$$

On trouve ainsi :

$$x = (2 - \sqrt{2})\ell \text{ et } p_1 = (6 + 4\sqrt{2}) \frac{M_0}{\ell^2} \approx 11,657 \frac{M_0}{\ell^2}$$

La valeur limite  $p_1$  est nettement supérieure à la plus grande densité de charge  $p' = \frac{8M_0}{\ell^2}$  que peut supporter la poutre en équilibre élastique.

### 4.6.2 Poutre encastree de section constante

En raison de la symétrie, nous pouvons supposer l'abscisse  $\alpha$  du point d'application C de la charge concentrée  $P$  inférieure à  $\ell/2$ . Le mécanisme de ruine comporte deux rotules plastiques dans les sections d'encastrement A et B et une rotule plastique dans la section C. Nous avons, avec les notations de la figure 25 :

$$Pf = 2M_0 \left( \frac{f}{\alpha} + \frac{f}{\ell - \alpha} \right)$$

La charge limite  $P_1$  a donc pour valeur :

$$P_1(\alpha) = \frac{2M_0 \ell}{\alpha(\ell - \alpha)}$$

Le calcul élastique aurait donné pour valeur maximale de la charge :

$$P'(\alpha) = \frac{M_0 \ell^2}{\alpha(\ell - \alpha)^2}$$

On vérifie que  $P_1(\alpha)$  est toujours plus grand que  $P'(\alpha)$ , sauf pour  $\alpha = \ell/2$  ; dans ce cas  $P_1(\alpha)$  et  $P'(\alpha)$  sont égaux à  $8M_0/\ell$ .

Calculons la flèche  $v_1(\alpha)$  en C avant la ruine ; les formules (51) donnent, compte tenu de  $M_A = M_B = -M_0$  et  $M_C = M_0$ , les équations :

$$\omega_{AC} = \omega_{CA} = \frac{v(\alpha)}{\alpha} + \frac{M_0 \alpha}{6EI}$$

$$\omega_{CB} = \omega_{BC} = - \frac{v(\alpha)}{\ell - \alpha} - \frac{M_0(\ell - \alpha)}{6EI}$$

On constate que, lorsque  $\alpha < \ell/2$ , la rotule B se forme la dernière ; la condition  $\omega_{BC} = 0$  nous donne la flèche  $v_1(\alpha)$  :

$$v_1(\alpha) = - \frac{M_0(\ell - \alpha)^2}{6EI}$$

Comparons  $v_1(\alpha)$  et la flèche élastique maximale :

$$v'(\alpha) = - \frac{P'(\alpha)}{EI} \frac{\alpha^3 (\ell - \alpha)^3}{\ell^3} = - \frac{M_0 \alpha^2 (\ell - \alpha)}{3EI \ell}$$

La flèche  $v_1(\alpha)$  est toujours plus grande en valeur absolue que la flèche  $v'(\alpha)$ , sauf pour  $\alpha = \ell/2$  ; dans ce cas  $v_1(\alpha)$  et  $v'(\alpha)$  sont égaux à  $-\frac{M_0 \ell^2}{24EI}$ .

Enfin, il est aisé de voir que la valeur limite  $p_1$  de la densité de charge  $p$  répartie sur toute la poutre est  $p_1 = 16M_0/\ell^2$  ; cette valeur est nettement supérieure à la valeur maximale  $p' = 12M_0/\ell^2$  donnée par le calcul élastique.

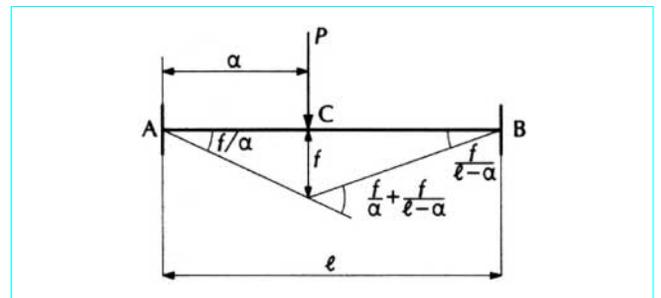


Figure 25 – Poutre encastree de section constante

### 4.6.3 Poutres continues

En laissant de côté les mécanismes de ruine représentés sur la figure 26, le premier correspond à une poutre continue dont les travées de rive ont une rigidité insuffisante, le second à une poutre dont l'inertie diminue trop rapidement à partir des appuis, le mécanisme de ruine généralement obtenu pour une travée AB d'une poutre continue comporte trois rotules plastiques A, B et C (figure 27).

Nous désignons par  $x$  l'abscisse d'une section comptée à partir de l'appui de gauche. Le moment fléchissant  $M(x)$  dans cette section doit vérifier les inégalités :

$$-M^-(x) \leq M(x) \leq M^+(x)$$

Le moment fléchissant  $M(x)$  a pour valeur :

$$M(x) = \mu(x) + M(0) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M(\ell) \frac{x}{\ell}$$

avec  $\mu(x)$  moment fléchissant produit par les charges dans la poutre AB supposée sur appuis simples.

Nous supposons les charges dirigées vers le bas, de sorte que  $\mu(x)$  est une fonction positive qui s'annule pour  $x=0$  et  $x=\ell$ .

Proposons-nous de déterminer le coefficient de sécurité  $s_0$ , autrement dit le plus petit nombre  $s$  par lequel il faut multiplier les charges pour obtenir l'équilibre limite. Les moments sur appuis sont  $M(0) = -M^-(0)$  et  $M(\ell) = -M^-(\ell)$ , et pour tout nombre  $s \leq s_0$ , nous devons avoir :

$$s \mu(x) - M^-(0) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) - M^-(\ell) \frac{x}{\ell} \leq M^+(x)$$

Il en résulte que :

$$s \leq \frac{f(x)}{\mu(x)} \text{ donc } s_0 = \min_{0 \leq x \leq \ell} \left\{ \frac{f(x)}{\mu(x)} \right\}$$

$f(x)$  désignant la fonction :

$$f(x) = M^+(x) + M^-(0) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M^-(\ell) \frac{x}{\ell}$$

Les fonctions  $f(x)$  et  $\mu(x)$  sont positives dans l'intervalle  $(0, \ell)$  ; lorsque  $s$  croît, il arrivera un moment où la courbe  $y = s\mu(x)$  touchera la courbe  $y = f(x)$  en un point d'abscisse  $x_0$  (figure 28). La rotule plastique C a pour abscisse  $x_0$ , et le coefficient de sécurité a pour valeur  $s_0 = f(x_0)/\mu(x_0)$ . Lorsque la poutre est de section symétrique constante, nous avons  $M^-(x) = M^+(x) = M_0$  et la fonction  $f(x)$  se réduit à la constante  $2M_0$ .

Connaissant le mécanisme de ruine défini par les rotules A, B et C, on calcule aisément la flèche en C avant la ruine au moyen des formules (50), mais il est nécessaire de tenir compte des déformations élastiques de toutes les travées de la poutre continue.

Considérons, par exemple, la poutre continue de section constante (moments limites  $\pm M_0$ ) représentée sur la figure 29. Le mécanisme de ruine défini par les rotules A, B et C conduit à la valeur limite  $P_1 = 4M_0/a$  de la charge concentrée  $P$  appliquée dans la section médiane C de la travée centrale. Cette valeur ne dépend pas de la portée  $b$  des travées latérales, ce qui semble paradoxal. Mais nous allons voir que l'hypothèse de la petitesse des déformations avant la ruine n'est plus vérifiée lorsque la portée  $b$  est grande.

Désignons par  $v_1$  la flèche en C au moment de la ruine, les formules (51) donnent, compte tenu de  $M_A = M_B = -M_0$  et  $M_C = M_0$  :

$$\omega_{AC} = \omega_{CA} = -\omega_{CB} = -\omega_{BC} = \frac{v_1}{a} + \frac{M_0 a}{6EI}$$

$$\omega_{BE} = -\omega_{AD} = \frac{2M_0 b}{6EI}$$

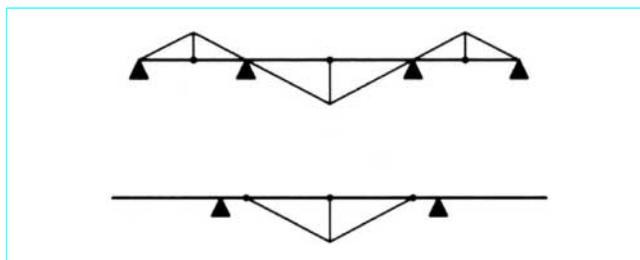


Figure 26 – Mécanismes de ruine d'une poutre continue à trois travées

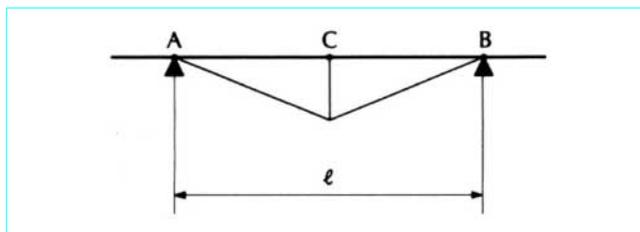


Figure 27 – Poutre continue à trois rotules plastiques

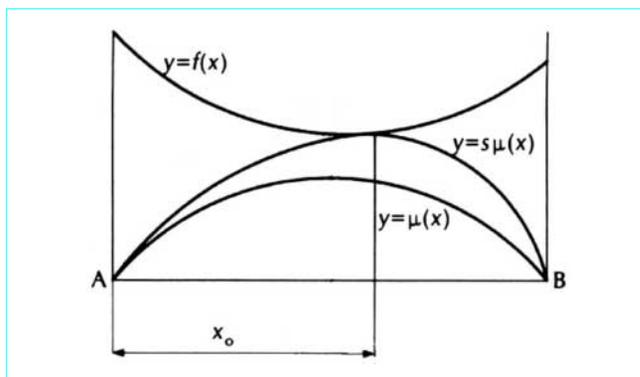


Figure 28 – Fonctions  $f(x)$  et  $\mu(x)$

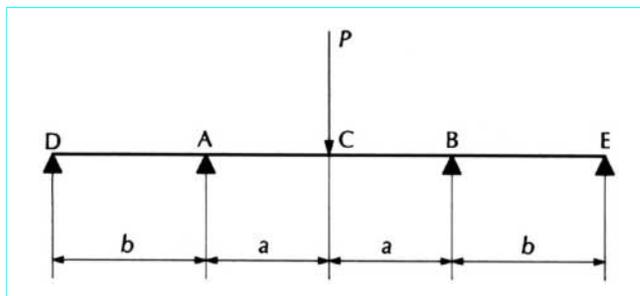


Figure 29 – Poutre continue symétrique à trois travées, de section constante

En supposant que la rotule C se forme la dernière, la condition  $\omega_{CA} = \omega_{CB}$  donne :

$$v_1 = -\frac{M_0 a^2}{6EI}$$

En supposant que les rotules A et B se forment les dernières, la condition  $\omega_{AC} = \omega_{AD}$  (ou ce qui revient au même  $\omega_{BC} = \omega_{BE}$ ) donne :

$$v_1 = - \frac{M_0(a+2b)a}{6EI}$$

Cette valeur, plus grande en valeur absolue que la précédente, est donc la valeur réelle. L'hypothèse de la petitesse des déformations n'est donc plus vérifiée si  $b$  est grand ; la poutre peut devenir inutilisable bien avant la formation des rotules plastiques A et B.

Le calcul élastique aurait donné les valeurs limites :

$$P' = \frac{4M_0(3a+b)}{a(3a+2b)} \text{ et } v' = - \frac{M_0(3a+4b)a^2}{6EI(3a+2b)}$$

de sorte que :

$$\frac{P_1}{P'} = \frac{3a+2b}{3a+b} \text{ et } \frac{v_1}{v'} = \frac{(a+2b)(3a+2b)}{a(3a+4b)}$$

Pour  $b = 2a$  (travées égales)  $\frac{v_1}{v'} = \frac{35}{11} \approx 3,182$ .

### 4.7 Charges limites des structures composées de poutres droites fléchies

#### 4.7.1 Exemple d'application de la méthode des inégalités

La poutre à béquilles encadrées représentée sur la figure 30 est soumise à deux forces de même intensité  $F$ . Des rotules plastiques peuvent apparaître dans les sections 1, 2, 3, 4 et 5. Nous avons, X et Y désignant les composantes de la réaction de l'appui de gauche :

$$\begin{cases} M_2 = M_1 - Xa \\ M_3 = M_1 - Xa + Ya \\ M_4 = M_1 - Xa + 3Ya - 2Fa \\ M_5 = M_1 + 3Ya - Fa \end{cases}$$

En éliminant X et Y entre ces quatre équations, nous obtenons les deux équations d'équilibre indépendantes vérifiées par les moments :

$$\begin{cases} - M_1 + M_2 - M_4 + M_5 = Fa \\ - 2M_2 + 3M_3 - M_4 = 2Fa \end{cases}$$

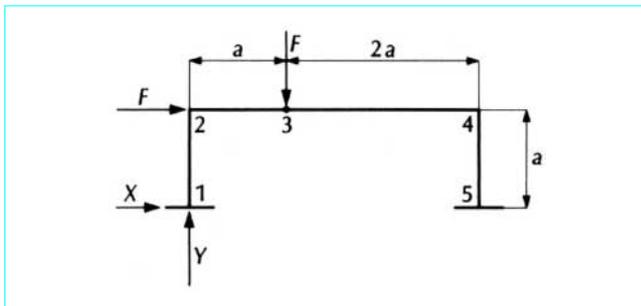


Figure 30 - Poutre à béquilles encadrées

Proposons-nous de déterminer la valeur limite  $F_1$  des forces  $F$ . Supposons la section de la poutre et des béquilles constante, et soit  $\pm M_0$  les valeurs limites du moment fléchissant. En introduisant, pour faciliter le calcul, les quantités sans dimension  $m_i = M_i/M_0$  et  $\beta = Fa/M_0$ , les équations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} - m_1 + m_2 - m_4 + m_5 = \beta \\ - 2m_2 + 3m_3 - m_4 = 2\beta \end{cases}$$

Nous pouvons donc exprimer  $m_1$  et  $m_2$  en fonction de  $m_3, m_4$  et  $m_5$  :

$$\begin{cases} m_1 = \frac{3}{2}m_3 - \frac{3}{2}m_4 + m_5 - 2\beta \\ m_2 = \frac{3}{2}m_3 - \frac{1}{2}m_4 - \beta \end{cases}$$

Les inégalités  $|m_1| \leq 1$  et  $|m_2| < 1$  s'écrivent :

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{3}{2}m_3 - \frac{3}{2}m_4 + m_5 - 2\beta \leq 1 \\ -1 \leq \frac{3}{2}m_3 - \frac{1}{2}m_4 - \beta \leq 1 \end{cases}$$

Résolvons les inégalités précédentes par rapport à  $m_3$  ; compte tenu de ce que  $|m_3| \leq 1$ , nous trouvons que  $m_3$  doit satisfaire aux inégalités :

$$\begin{cases} -1 \leq m_3 \leq 1 \\ m_4 - \frac{2}{3}m_5 - \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\beta \leq m_3 \leq m_4 - \frac{2}{3}m_5 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\beta \\ \frac{1}{3}m_4 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\beta \leq m_3 \leq \frac{1}{3}m_4 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\beta \end{cases}$$

En écrivant que les inégalités précédentes sont compatibles, nous trouvons, compte tenu de ce que  $|m_4| \leq 1$ , que  $m_4$  doit satisfaire aux inégalités :

$$\begin{cases} -1 \leq m_4 \leq 1 \\ -5 - 2\beta \leq m_4 \leq 5 - 2\beta \\ \frac{2}{3}m_5 - \frac{5}{3} - \frac{4}{3}\beta \leq m_4 \leq \frac{2}{3}m_5 + \frac{5}{3} - \frac{4}{3}\beta \\ m_5 - 2 - \beta \leq m_4 \leq m_5 + 2 - \beta \end{cases}$$

En écrivant que les inégalités précédentes sont compatibles, nous trouvons, compte tenu de ce que  $|m_5| \leq 1$ , que  $m_5$  doit satisfaire aux inégalités :

$$\begin{cases} -1 \leq m_5 \leq 1 \\ -4 + 2\beta \leq m_5 \leq 4 + 2\beta \\ -3 + \beta \leq m_5 \leq 3 + \beta \\ -7 - \beta \leq m_5 \leq 7 - \beta \end{cases}$$

et que  $|\beta| \leq 3$ . Finalement, en exprimant que les inégalités précédentes sont compatibles, nous aboutissons à la seule inégalité :

$$-\frac{5}{2} \leq \beta \leq \frac{5}{2}$$

La valeur limite cherchée a donc pour valeur :

$$F_1 = \frac{5M_0}{2a}$$

En prenant  $\beta = 5/2$  et en remontant la suite des inégalités, nous trouvons successivement  $m_5 = 1$ ,  $m_4 = -1$  et  $m_3 = 1$ ; les équations d'équilibre donnent ensuite  $m_2 = -\frac{1}{2}$  et  $m_1 = 1$ . Le mécanisme de ruine comporte donc des rotules plastiques dans les sections 1, 3, 4 et 5.

### 4.7.2 Application de la méthode de superposition des mécanismes

#### 4.7.2.1 Base de mécanismes de ruine indépendants

Considérons le portique multiple  $n = 12$  fois hyperstatique représenté sur la figure 31a. Il y a  $m = 22$  sections, indiquées sur la figure par un point gras, dans lesquelles peuvent apparaître des rotules plastiques. Nous devons donc trouver  $p = m - n = 10$  mécanismes de ruine indépendants permettant d'obtenir par superposition tous les mécanismes de ruine de la structure.

Or nous avons en évidence dix mécanismes de ruine élémentaires indépendants qui constituent une base de l'espace vectoriel des mécanismes de ruine :

— quatre **mécanismes de poutres** dont l'un est indiqué sur la figure 31b;

— deux **mécanismes de panneaux** dont l'un est indiqué sur la figure 31c;

— quatre **mécanismes de nœuds** dont l'un est indiqué sur la figure 31d.

Ce résultat est général ; on peut toujours obtenir le nombre voulu de mécanismes de base indépendants en considérant les mécanismes élémentaires de poutres, de panneaux et de nœuds.

#### 4.7.2.2 Exemple

Étudions le portique à deux étages représenté sur la figure 32. Nous proposons de calculer la valeur limite  $F_1$  de  $F$ , sachant que les valeurs limites du moment fléchissant sont  $\pm M_0$  pour la poutre et les poteaux de l'étage supérieur, et  $\pm 2M_0$  pour la poutre et les poteaux de l'étage inférieur. Cette structure est  $n = 6$  fois hyperstatique, et nous avons  $m = 12$  sections, numérotées de 1 à 12, dans lesquelles peuvent apparaître des rotules plastiques. Les  $p = m - n = 6$  mécanismes de base comprennent :

— deux mécanismes de poutres (a) et (b) comportant les rotules (3, 9, 12) et (5, 6, 7) ;

— deux mécanismes de panneaux (c) et (d) comportant les rotules (1, 2, 10, 11) et (4, 5, 7, 8) ;

— deux mécanismes de nœuds (e) et (f) comportant les rotules (2, 3, 4) et (8, 9, 10).

Le tableau ci-après résume les calculs.

Mécanismes	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$	$\theta_8$	$\theta_9$	$\theta_{10}$	$\theta_{11}$	$\theta_{12}$	$\frac{\zeta_i}{M_0}$	$\frac{\zeta_e}{Fa}$	$\frac{Fa}{M_0}$
$\left  \frac{M_i}{M_0} \right _{max}$	2	2	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2			
(a)	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	2	8	2	4
(b)	0	0	0	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0	4	1	4
(c)	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	8	2	4
(d)	0	0	0	-1	1	0	-1	1	0	0	0	0	4	1	4
(e)	0	-1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	$\infty$
(f)	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0	0	5	0	$\infty$
(g)	-1	0	1	0	1	0	-1	0	-1	0	1	0	10	3	10/3
(h)	-1	0	0	0	1	0	-1	0	-2	0	1	2	14	5	14/5
(k)	-1	0	0	0	0	2	-2	0	-2	0	1	2	16	6	8/3

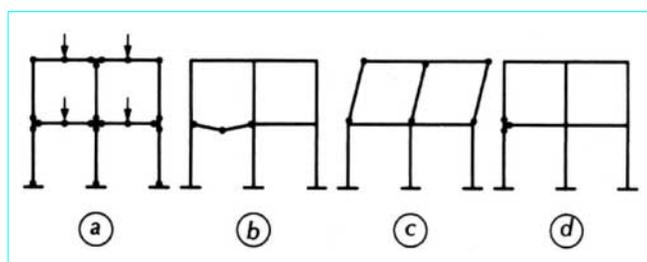


Figure 31 – Mécanismes élémentaires de ruine des portiques multiples

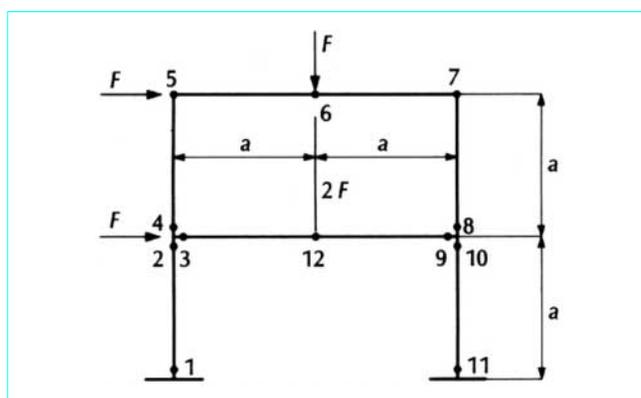


Figure 32 – Portique à deux étages

La première ligne de ce tableau donne la valeur maximale de  $[M_i/M_0]$  dans les douze sections critiques. Les six lignes suivantes décrivent les six mécanismes de base ; chaque ligne donne les rotations des rotules dans un déplacement du mécanisme, le quotient du travail dissipé dans les rotules  $\bar{c}_i$  par  $M_0$ , le quotient du travail des forces extérieures  $\bar{c}_e$  par  $Fa$ , enfin le rapport  $Fa/M_0$  défini par  $\bar{c}_i = \bar{c}_e$ . Les trois dernières lignes donnent les mécanismes composés suivants :

$$(g) = (c) + (d) + (e) + (f)$$

$$(k) = (h) + (b)$$

$$(h) = (g) + (a)$$

qui donnent respectivement pour  $F$  les limites supérieures  $\frac{10M_0}{3a}$ ,  $\frac{14M_0}{5a}$  et  $\frac{8M_0}{3a}$ .

Vérifions que le mécanisme de ruine  $(k)$  est le mécanisme de ruine réel ; en effet, en portant la valeur  $F = \frac{8M_0}{3a}$  et les valeurs des moments limites dans les rotules 1, 6, 7, 9, 11 et 12 de ce mécanisme :

$$\begin{matrix} M_1 = -2M_0 & M_6 = M_0 & M_7 = -M_0 \\ M_9 = -2M_0 & M_{11} = 2M_0 & M_{12} = 2M_0 \end{matrix}$$

dans les équations d'équilibre associées aux mécanismes de base :

$$\begin{cases} -M_3 - M_9 + 2M_{12} = 2Fa \\ -M_5 - M_7 + 2M_6 = Fa \\ -M_1 + M_2 - M_{10} + M_{11} = 2Fa \\ -M_4 + M_5 - M_7 + M_8 = Fa \\ -M_2 + M_3 + M_4 = 0 \\ -M_8 - M_9 + M_{10} = 0 \end{cases}$$

on trouve aisément une distribution de moment stable et statiquement admissible (il y en a même une infinité), par exemple :

$$\begin{matrix} M_2 = 0 & M_3 = \frac{1}{2}M_0 & M_4 = -\frac{2}{3}M_0 \\ M_5 = \frac{1}{3}M_0 & M_8 = \frac{2}{3}M_0 & M_{10} = -\frac{4}{3}M_0 \end{matrix}$$

L'état limite d'équilibre est donc obtenu pour  $F = F_1 = \frac{8M_0}{3a}$ .

## 4.8 Charges limites des arcs hyperstatiques

### 4.8.1 Généralités

Nous pouvons nous borner à l'étude de l'arc encastré. En effet, la transformation d'un arc en mécanisme nécessite la formation de quatre rotules plastiques. Si l'arc comporte une ou deux articulations, la position d'une ou de deux rotules (avec moments limites correspondants nuls) est imposée. L'étude de l'arc à une ou à deux articulations n'est donc qu'un cas particulier de l'arc encastré.

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_m$  les sections critiques dans lesquelles peuvent se former des rotules plastiques. Les moments fléchissants  $M_1, M_2, \dots, M_m$  provoqués dans ces sections par le système de charges verticales donné s'expriment en fonction des trois inconnues hyperstatiques  $\Gamma, R$  et  $Q$ , composantes de la réaction complémentaire de l'appui de gauche (article *Structures élastiques à plan moyen* [C 2 015] dans ce traité) par les formules :

$$M_i = \mu_i + \Gamma + R x_i - Q y_i \tag{53}$$

Dans ces formules  $(x_i, y_i)$  sont les coordonnées du centre de gravité de la section  $A_i$ , et  $\mu_i$  est le moment fléchissant produit dans la section d'abscisse  $x_i$  de la poutre sur appuis simples de même portée que l'arc par le système de charges verticales donné.

Nous supposons que la fibre moyenne de l'arc n'est pas funiculaire des charges extérieures verticales. Nous nous proposons de calculer le coefficient de sécurité  $s_0$ , qui est le plus petit nombre par lequel il faut multiplier les charges données pour obtenir la ruine de l'arc.

### 4.8.2 Méthode statique

La méthode statique conduit, pour déterminer le coefficient de sécurité  $s_0$ , à rechercher le plus grand nombre  $s$  pour lequel les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$-M_i^- \leq s\mu_i + A + Bx_i - Qy_i \leq M_i^+$$

La méthode statique conduit, pour déterminer le coefficient de sécurité  $s_0$ , à rechercher le plus grand nombre  $s$  pour lequel les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$M_i = s\mu_i + \Gamma + R x_i - Q y_i$$

on trouvera les sections dans lesquelles le moment fléchissant atteint l'une des valeurs limites ; ces sections définissent le mécanisme de ruine.

On peut tenir compte de l'effort normal dans les sections qui diminuent les valeurs limites  $-M_i^-$  et  $M_i^+$ . Comme on ne connaît pas *a priori*  $s_0$ , donc l'effort normal au moment de la ruine, il faut procéder par approximations successives. On néglige d'abord l'effort normal pour calculer  $M_i^-$  et  $M_i^+$ , ce qui conduit à une première valeur approchée  $s_0^1$  de  $s_0$  ; on peut alors tenir compte de l'effort normal correspondant à la valeur  $s_0^1$  pour calculer à nouveau les moments limites, ce qui conduit à une seconde valeur approchée  $s_0^2$  toujours suffisante en pratique.

### 4.8.3 Méthode cinématique

La méthode cinématique est fondée sur l'étude du déplacement d'un mécanisme quelconque comportant quatre rotules  $A_i A_j A_k A_\ell$  (figure 33) que nous désignerons par  $(i, j, k, \ell)$ . Il est aisé de déterminer géométriquement les déplacements verticaux des points de la fibre moyenne de l'arc et les rotations  $\theta_i, \theta_j, \theta_k$  et  $\theta_\ell$  des rotules en observant que  $A_i A_j$  tourne autour de  $A_i$ ,  $A_k A_\ell$  tourne autour de  $A_\ell$ , et que  $A_j A_k$  tourne autour du centre instantané de rotation C situé à l'intersection de  $A_i A_j$  et de  $A_k A_\ell$ . Analytiquement, nous pouvons écrire que l'origine des axes, considéré comme lié à l'extrémité de droite de l'arc, ne subit ni rotation, ni translation ; nous obtenons ainsi les équations :

$$\begin{cases} \theta_i + \theta_j + \theta_k + \theta_\ell = 0 \\ \theta_i x_i + \theta_j x_j + \theta_k x_k + \theta_\ell x_\ell = 0 \\ \theta_i y_i + \theta_j y_j + \theta_k y_k + \theta_\ell y_\ell = 0 \end{cases}$$

Nous déduisons des équations précédentes :

$$\begin{matrix} \theta_i \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_j & x_k & x_\ell \\ y_j & y_k & y_\ell \end{vmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} -\theta_j \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_k & x_\ell \\ y_i & y_k & y_\ell \end{vmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \theta_k \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_\ell \\ y_i & y_j & y_\ell \end{vmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} -\theta_\ell \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix} \end{matrix}$$

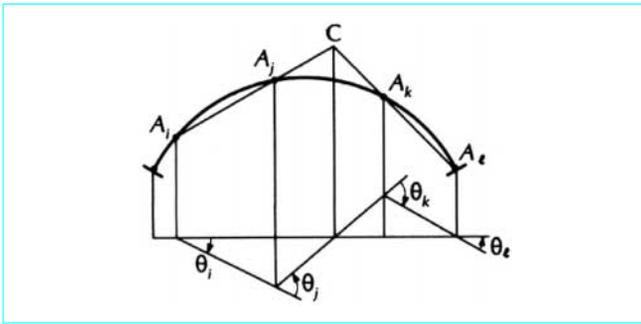


Figure 33 – Arc : mécanisme quelconque de ruine à quatre rotules

soit encore :

$$\frac{\theta_i}{(j, k, \ell)} = \frac{-\theta_j}{(i, k, \ell)} = \frac{\theta_k}{(i, j, \ell)} = \frac{-\theta_\ell}{(i, j, k)} \quad (54)$$

en désignant par  $(i, j, k)$  l'aire algébrique du triangle  $A_i A_j A_k$  comptée positivement lorsque ce triangle est parcouru dans le sens trigonométrique. Les équations (54) et la convexité de la fibre moyenne de l'arc montrent que les signes des nombres de la suite  $\theta_i, \theta_j, \theta_k, \theta_\ell$  sont alternés.

Considérons un déplacement du mécanisme  $(i, j, k, \ell)$  pour lequel le travail  $\mathcal{C}$  du système de charges extérieures est positif, et désignons par  $\bar{M}_i$  la valeur limite  $M_i^+$  si  $\theta_i$  est positif, et l'opposée  $M_i^-$  de la valeur limite  $-M_i^-$  si  $\theta_i$  est négatif. La valeur  $s$  correspondant à ce mécanisme est donnée par l'équation :

$$s\mathcal{C} = \bar{M}_i|\theta_i| + \bar{M}_j|\theta_j| + \bar{M}_k|\theta_k| + \bar{M}_\ell|\theta_\ell| \quad (55)$$

Il est aisé de donner une expression simple de  $\mathcal{C}$  pouvant être calculée rapidement. Appliquons le théorème des travaux virtuels en prenant pour déplacement virtuel le déplacement du mécanisme  $(i, j, k, \ell)$ . Nous trouvons une équation d'équilibre entre  $M_i, M_j, M_k$  et  $M_\ell$  que l'on peut également obtenir en éliminant  $\Gamma, R$  et  $Q$  entre les équations (53) qui donnent  $M_i, M_j, M_k$  et  $M_\ell$  ; cette équation est donc :

$$\begin{vmatrix} M_i - \mu_i & 1 & x_i & y_i \\ M_j - \mu_j & 1 & x_j & y_j \\ M_k - \mu_k & 1 & x_k & y_k \\ M_\ell - \mu_\ell & 1 & x_\ell & y_\ell \end{vmatrix} = 0$$

soit, en développant par rapport à la première colonne et en tenant compte des relations (54) :

$$M_i\theta_i + M_j\theta_j + M_k\theta_k + M_\ell\theta_\ell = \mu_i\theta_i + \mu_j\theta_j + \mu_k\theta_k + \mu_\ell\theta_\ell \quad (56)$$

Le travail  $\mathcal{C}$  des charges extérieures données a donc pour valeur :

$$\mathcal{C} = \mu_i\theta_i + \mu_j\theta_j + \mu_k\theta_k + \mu_\ell\theta_\ell \quad (57)$$

Lorsque  $m$  sections sont critiques, il existe  $C_m^4$  mécanismes de ruine possibles comportant quatre rotules, mais seulement  $m - 3$  mécanismes indépendants, puisque l'arc encastré est trois fois hyperstatique. On peut choisir comme mécanisme de base  $\mathcal{M}_i = (1, 2, 3, i)$  avec  $i > 3$  ; ces mécanismes sont indépendants, puisqu'en éliminant  $\Gamma, R$  et  $Q$  entre les trois premières équations (53) et l'une quelconque des autres, on obtient  $m - 3$  équations d'équi-

libre indépendantes. Les rotations du mécanisme de base  $(1, 2, 3, i)$  sont données par les relations :

$$\frac{\theta_1^i}{(2, 3, i)} = \frac{-\theta_2^i}{(1, 3, i)} = \frac{\theta_3^i}{(1, 2, i)} = \frac{-\theta_i^i}{(1, 2, 3)} \quad (58)$$

Choisissons le sens du déplacement du mécanisme de façon que le travail  $\mathcal{C}_i$  des charges extérieures soit positif :

$$\mathcal{C}_i = \mu_1\theta_1^i + \mu_2\theta_2^i + \mu_3\theta_3^i + \mu_i\theta_i^i \quad (59)$$

La valeur  $s_i$  de  $s$  correspondant au mécanisme est donnée par l'équation :

$$s_i\mathcal{C}_i = \bar{M}_1|\theta_1^i| + \bar{M}_2|\theta_2^i| + \bar{M}_3|\theta_3^i| + \bar{M}_i|\theta_i^i|$$

On dispose alors des données nécessaires pour déterminer le coefficient de sécurité  $s_0$  par la méthode de superposition des mécanismes.

**Nota :** lorsque l'axe est *funiculaire* des charges extérieures, tous les moments  $M_i$  sont nuls, et l'équation (56) montre que le travail des charges extérieures est nul dans les déplacements des mécanismes. Si l'on multiplie les charges par un coefficient  $s$  croissant, la ruine de l'arc résultera de l'écrasement sous l'effet de l'effort normal, à moins que le flambement de l'arc ne se produise avant l'écrasement.

## 5. Application du théorème fondamental de l'adaptation

### 5.1 Rappel du théorème

Le théorème fondamental de l'adaptation (article *Théorie de la plasticité* [A 350] dans le traité Sciences fondamentales) peut s'énoncer :

une structure, soumise à un système de forces extérieures variable dans le temps, s'adapte et peut résister indéfiniment si l'on peut trouver un état d'autocontrainte fixe d'adaptation tel que l'état de contrainte, résultant de la superposition de l'état d'autocontrainte et de l'état de contrainte élastique dû au système de forces extérieures, soit stable.

### 5.2 Possibilité d'adaptation d'une structure

La méthode des inégalités permet de vérifier si une structure soumise à une sollicitation variable connue est ou n'est pas susceptible de s'adapter.

#### 5.2.1 Structures réticulées

Considérons une structure réticulée  $n$  fois hyperstatique et soit, dans l'hypothèse du comportement élastique,  $F_i^{min}$  et  $F_i^{max}$  les valeurs extrêmes de l'effort dans la barre  $B_i$  sous l'effet de la sollicitation variable. Les notations étant celles définies au paragraphe 2.1, un état d'autocontrainte d'adaptation possible, défini par les valeurs  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  des inconnues hyperstatiques, donne les efforts d'adaptation dans les barres :

$$F_i'' = \sum_k F_{ik}'' Y_k$$

Les valeurs  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  doivent donc vérifier les inégalités :

$$\left. \begin{aligned} F_i^{max} + \sum_k F_{ik}'' Y_k &\leq F_i^+ \\ F_i^{min} + \sum_k F_{ik}'' Y_k &\geq -F_i^- \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

En effet, dans l'hypothèse du comportement élastique, une sollicitation quelconque donne des efforts  $F_i$  vérifiant les inégalités :

$$F_i^{min} \leq F_i \leq F_i^{max}$$

et les inégalités (60) montrent que :

$$-F_i^- \leq F_i + \sum_k F_{ik}'' Y_k \leq F_i^+$$

Pour voir s'il existe un ensemble de valeurs  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  vérifiant les inégalités (60), résolvons ces inégalités par rapport à  $Y_1$  ; nous obtenons un ensemble d'inégalités équivalentes aux inégalités (60) :

$$\{L'_{1r}(Y_1, Y_3, \dots, Y_n)\} \leq Y_1 \leq \{L''_{1s}(Y_2, Y_3, \dots, Y_n)\}$$

signifiant que  $Y_1$  doit être supérieur ou égal à chacune des fonctions linéaires  $L'_{1r}$  et inférieur ou égal à chacune des fonctions linéaires  $L''_{1s}$ . Les inégalités précédentes sont compatibles si, quels que soient  $r$  et  $s$  :

$$L'_{1r}(Y_2, Y_3, \dots, Y_n) \leq L''_{1s}(Y_2, Y_3, \dots, Y_n)$$

En résolvant l'ensemble des inégalités précédentes par rapport à  $Y_2$ , nous obtenons un ensemble d'inégalités :

$$\{L'_{2r}(Y_3, Y_4, \dots, Y_n)\} \leq Y_2 \leq \{L''_{2s}(Y_3, Y_4, \dots, Y_n)\}$$

Nous avons ainsi éliminé l'inconnue  $Y_1$  ; en répétant le même procédé, nous parvenons finalement à un ensemble d'inégalités :

$$\{C'_{nr}\} \leq Y_n \leq \{C''_{ns}\}$$

Désignons par  $C'$  le plus grand nombre de l'ensemble  $\{C'_{nr}\}$  et par  $C''$  le plus petit nombre de l'ensemble  $\{C''_{ns}\}$  :

- 1) si  $C' > C''$ , il n'existe pas d'état d'autocontrainte d'adaptation possible ;
- 2) si  $C' = C''$ , il existe un seul état d'autocontrainte d'adaptation possible ;
- 3) si  $C' < C''$ , il existe une infinité d'états d'autocontrainte d'adaptation possibles. L'état réel d'autocontrainte d'adaptation qui se réalise dépend de la succession des sollicitations depuis l'état naturel.

Dans le premier cas, la structure est insuffisante, et dans le troisième cas la structure est surabondante. On peut alors multiplier les sections des barres par un paramètre  $\lambda$  choisi de façon que l'état d'autocontrainte d'adaptation soit unique ; il suffit de remplacer dans les inégalités (60)  $F_i^+$  et  $F_i^-$  par  $\lambda F_i^+$  et  $\lambda F_i^-$ . La méthode des inégalités conduira finalement à un ensemble d'inégalités :

$$\{L'_{nr}(\lambda)\} \leq Y_n \leq \{L''_{ns}(\lambda)\}$$

compatibles si  $L'_{nr} \leq L''_{ns}$  quels que soient  $r$  et  $s$  ; nous trouvons ainsi que  $\lambda$  doit être supérieur ou égal à tous les nombres d'un ensemble  $\{\lambda_j\}$  ; la valeur cherchée est donc le plus petit nombre de cet ensemble ; elle est supérieure à 1 lorsque la structure initiale est insuffisante, et inférieure à 1 lorsque la structure initiale est surabondante.

### 5.2 Structures composées de poutres fléchies

Nous supposons la structure  $n$  fois hyperstatique, et nous désignons par  $M^{min}(x)$  et  $M^{max}(x)$  les valeurs extrêmes du moment fléchissant dans la section  $S(x)$  calculées en supposant la structure élastique. Les notations étant celles définies au paragraphe 3.1, un état d'autocontrainte d'adaptation possible, défini par les valeurs  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  des inconnues hyperstatiques, donne un moment fléchissant d'adaptation  $M''(x)$  dans la section  $S(x)$  :

$$M''(x) = \sum_k M_k''(x) Y_k$$

La structure pourra s'adapter si l'on peut déterminer des valeurs  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  telles que les inégalités :

$$\left. \begin{aligned} M^{max}(x) + \sum_k M_k''(x) Y_k &\leq M^+(x) \\ M^{min}(x) + \sum_k M_k''(x) Y_k &\geq -M^-(x) \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

soient vérifiées, quel que soit  $x$ . En se bornant aux sections critiques  $S(x_i)$ , et en posant :

$$\begin{aligned} M^{max}(x_i) &= M_i^{max} & M^{min}(x_i) &= M_i^{min} \\ M^+(x_i) &= M_i^+ & M^-(x_i) &= M_i^- & M_k''(x_i) &= M_{ik}'' \end{aligned}$$

nous pouvons remplacer les inégalités (61) par les inégalités :

$$\left. \begin{aligned} M_i^{max} + \sum_k M_{ik}'' Y_k &\leq M_i^+ \\ M_i^{min} + \sum_k M_{ik}'' Y_k &\geq -M_i^- \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

qui ne diffèrent des inégalités (60) que par les notations. Nous pouvons donc appliquer la méthode des inégalités comme dans le cas des structures réticulées.

### 5.3 Exemples d'application

Considérons (figure 34) une poutre continue à deux travées égales de section constante et soit  $\pm M_0$  les moments fléchissants limites dans une section. Nous envisageons différents systèmes de charges variables appliqués à cette poutre.

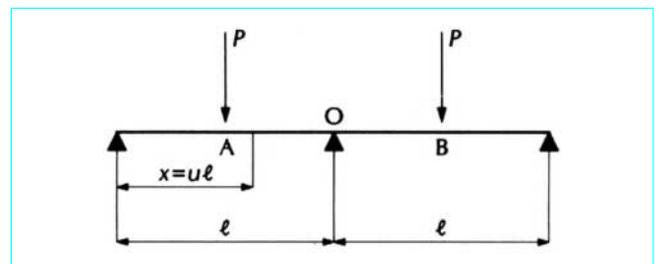


Figure 34 – Poutre continue à deux travées égales de section constante

### 5.3.1 Premier système de charges

Une charge  $P$  appliquée au milieu  $A$  de la première travée peut varier entre 0 et un maximum  $P$ .

En régime élastique, cette charge produit un moment négatif  $M_1$  sur l'appui central et un moment positif  $M_2$  dans la section  $A$  :

$$M_1 = -\frac{3}{32}P\ell \text{ et } M_2 = \frac{13}{64}P\ell$$

La charge maximale  $P'$  que peut supporter la poutre sans adaptation correspond à  $M_2 = M_0$ , donc a pour valeur :

$$P' = \frac{64}{13} \frac{M_0}{\ell}$$

Soit  $M_a$  la valeur du moment d'adaptation sur l'appui central ; nous devons avoir :

$$M_1 + M_a = -M_0 \text{ et } M_2 + \frac{1}{2}M_a = M_0$$

Nous en déduisons :

$$M_a = -\frac{2}{3}(M_1 + M_2) \text{ et } M_0 = \frac{1}{3}(2M_2 - M_1) \quad (63)$$

soit, en remplaçant  $M_1$  et  $M_2$  par leurs valeurs :

$$M_a = -\frac{7}{96}P\ell \text{ et } M_0 = \frac{1}{6}P\ell$$

La charge maximale que peut supporter la poutre après adaptation est donc :

$$P_1 = \frac{6M_0}{\ell} = \frac{39}{32}P' \approx 1,219P'$$

### 5.3.2 Deuxième système de charges

La poutre supporte deux charges égales, pouvant varier de 0 à  $P$ , appliquées **simultanément** dans les sections médianes  $A$  et  $B$  des travées.

En régime élastique nous trouvons :

$$M_1 = -\frac{3}{16}P\ell \text{ et } M_2 = \frac{5}{32}P\ell$$

La charge maximale  $P'$  sans adaptation est obtenue pour  $M_1 = -M_0$ , donc :

$$P' = \frac{16}{3} \frac{M_0}{\ell}$$

Les formules (63), toujours valables, donnent ensuite :

$$M_a = \frac{1}{48}P\ell \text{ et } M_0 = \frac{1}{6}P\ell$$

La charge maximale que peut supporter la poutre après adaptation est donc :

$$P_1 = \frac{6M_0}{\ell} = \frac{9}{8}P' = 1,125P'$$

### 5.3.3 Troisième système de charges

Les deux charges concentrées appliquées dans les sections médianes peuvent varier, **indépendamment l'une de l'autre**, entre 0 et un maximum  $P$ .

En régime élastique, le maximum de  $|M_1|$  a lieu lorsque les deux charges sont égales à  $P$ , et le maximum de  $M_2$  a lieu lorsque la charge appliquée à  $A$  est  $P$  et lorsque la charge appliquée à  $B$  est nulle :

$$M_1 = -\frac{3}{16}P\ell \text{ et } M_2 = \frac{13}{64}P\ell$$

La charge maximale  $P'$  sans adaptation correspond à  $M_2 = M_0$ , donc :

$$P' = \frac{64}{13} \frac{M_0}{\ell}$$

Les formules (63) donnent ensuite :

$$M_a = -\frac{1}{96}P\ell \text{ et } M_0 = \frac{19}{96}P\ell$$

La charge maximale que peut supporter la poutre après adaptation est donc :

$$P_1 = \frac{96}{19} \frac{M_0}{\ell} = \frac{39}{38}P' \approx 1,026P'$$

Ces trois exemples montrent que le gain procuré par l'adaptation est très différent suivant les systèmes de charges envisagés.

### 5.3.4 Quatrième système de charges

Une charge concentrée **constante**  $P$  peut se déplacer sur la poutre.

Lorsque la charge  $P$  est appliquée à la distance  $x = u\ell$  de l'appui de gauche, le moment négatif  $M_1(u)$  sur l'appui central et le moment positif  $M(u)$  au droit de la charge ont pour valeurs, dans l'hypothèse du comportement élastique :

$$\begin{cases} M_1(u) = -\frac{1}{4}P\ell u(1-u)(1+u) \\ M(u) = P\ell \left[ u(1-u) - \frac{1}{4}u^2(1-u)(1+u) \right] \end{cases}$$

Le maximum de  $|M_1(u)|$  est obtenu pour :

$$u = u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577350$$

et :

$$M_1 = M_1(u_1) = -P\ell \sqrt{\frac{3}{18}} \approx -0,096225P\ell$$

Le maximum de  $M(u)$  est obtenu lorsque  $u$  est égal à la racine de l'équation :

$$M'(u) = \frac{1}{2}P\ell(2-5u+2u^3) = 0$$

comprise entre 0 et 1 ; elle a pour valeur approchée  $u_2 \approx 0,432320$ , et :

$$M(u_2) \approx 0,207427P\ell$$

Sans adaptation, la valeur maximale de  $P$ , obtenue pour  $M(u_2) = M_0$ , est donc :

$$P' \approx 4,820968 \frac{M_0}{\ell}$$

La figure 35 représente les lignes enveloppes du moment fléchissant. Après l'adaptation, définie par la valeur du moment d'adaptation sur l'appui central  $M_a$ , les moments sont comptés à partir de la ligne ADC avec  $\overline{OD} = -M_a$ . Le moment positif maximal  $\overline{EF}$  et la valeur absolue  $\overline{BD}$  du moment sur l'appui central doivent être égaux à  $M_0$ . Nous devons donc avoir,  $u_3$  désignant l'abscisse

relative de  $F$ , en observant que  $\overline{OD} = -M_a = M'(u_3)$  puisque AD est parallèle à la tangente en F à la ligne enveloppe :

$$M(u_3) - u_3 M'(u_3) = P\ell \frac{\sqrt{3}}{18} + M'(u_3) = M_0$$

Il en résulte que  $u_3$  est la racine comprise entre 0 et 1 de l'équation :

$$3u^4 + 4u^3 - 5u^2 - 10u + 4 + \frac{2}{9}\sqrt{3} = 0$$

On trouve  $u_3 \approx 0,392\ 737$  et :

$$M_a \approx -0,078\ 735\ P\ell \text{ et } M_0 \approx 0,174\ 960\ P\ell$$

La charge maximale que peut supporter la poutre après adaptation est donc :

$$P_1 \approx 5,715\ 601\ M_0/\ell \approx 1,185\ 571\ P'$$

Cette charge  $P_1$  est légèrement inférieure à la charge limite  $P_{max}$  que peut supporter la poutre (§ 4.6.1) :

$$P_{max} = (3 + 2\sqrt{2})M_0/\ell \approx 5,828\ 427\ M_0/\ell$$

### 5.3.5 Cinquième système de charges

Une densité de charge  $p$  peut être appliquée sur une partie quelconque de la poutre.

En régime élastique, le maximum de la valeur absolue  $|M_1|$  du moment sur l'appui central est obtenu lorsque la densité de charge s'étend sur les deux travées, et le plus grand moment positif  $M(u)$  dans la section d'abscisse  $x = u\ell$ , inférieure à l'abscisse du foyer de droite, est obtenu lorsque la densité de charge s'étend sur la première travée seulement, donc :

$$M_1 = -\frac{1}{8}p\ell^2 \text{ et } M(u) = \left[ \frac{1}{2}u(1-u) - \frac{1}{16}u \right] p\ell^2$$

Sans adaptation, la valeur maximale de  $p$ , obtenue pour  $M_1 = -M_0$ , est donc :

$$p' = \frac{8M_0}{\ell^2}$$

Soit  $M_a = \frac{\alpha}{16}p\ell^2$  la valeur du moment d'adaptation sur l'appui central ; nous devons avoir :

$$M_0 = \frac{1}{8}p\ell^2 - \frac{\alpha}{16}p\ell^2 = \text{Max} \left\{ \left[ \frac{1}{2}u(1-u) - \frac{1}{16}u + \frac{\alpha}{16}u \right] p\ell^2 \right\}$$

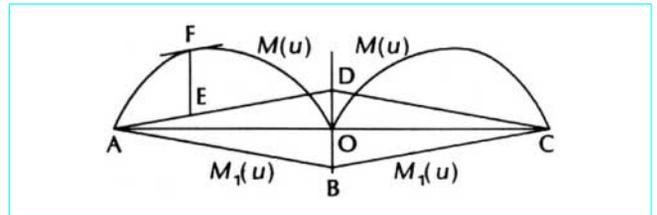


Figure 35 – Lignes enveloppes du moment fléchissant

Il en résulte que :

$$2 - \alpha = \text{Max} \{-8u^2 + (7 + \alpha)u\}$$

Le maximum du second membre de l'équation précédente est obtenu pour  $u_1 = \frac{1}{16}(7 + \alpha)$  ; donc  $\alpha$  est la racine positive de l'équation du second degré :

$$32(2 - \alpha) = (7 + \alpha)^2 \text{ ou } \alpha^2 + 46\alpha - 15 = 0$$

donc :

$$\alpha = \sqrt{544} - 23 \approx 0,323\ 808 \text{ et } u_1 = \sqrt{\frac{17}{8}} - 1 \approx 0,457\ 738$$

Il en résulte que :

$$M_0 = \frac{25 - \sqrt{544}}{16} p\ell^2 \approx 0,104\ 762\ p\ell^2$$

La valeur maximale de  $p$  après adaptation est donc :

$$p_1 = \frac{16}{25 - \sqrt{544}} \frac{M_0}{\ell^2} \approx 9,545\ 443 \frac{M_0}{\ell^2} \approx 1,193\ 180\ p'$$

La valeur  $p_1$  est nettement inférieure à la densité de charge limite  $p_{max}$  que peut supporter la poutre (§ 4.6.1) :

$$p_{max} = (6 + 4\sqrt{2}) \frac{M_0}{\ell^2} \approx 11,656\ 854 \frac{M_0}{\ell^2}$$

Ce dernier exemple montre qu'il ne faut pas se borner seulement au calcul des charges limites dans le cas des structures soumises à des forces extérieures variables dans le temps.

## Références bibliographiques

- [1] COURBON (J.). – *Résistance des Matériaux*. Tome 2, 840 p., 2<sup>e</sup> éd., Dunod (1971).
- [2] COLONNETTI (G.). – *L'équilibre des corps déformables*. 182 p., Dunod (1956).
- [3] RJANITSYN (A. R.). – *Calcul à la rupture et plasticité des constructions*. 284 p., Eyrolles (1959).
- [4] HODGE (P. H.). – *Plastic analysis of structures*. 364 p., McGraw Hill (1959).
- [5] ILIOUCHINE (A. A.). – *Plasticité*. 374 p., Eyrolles (1956).
- [6] PRAGER (W.). – *Problèmes de plasticité théorique*. 121 p., Dunod (1958).
- [7] MASSONNET (Ch.) et SAVE (M.). – *Calcul plastique des constructions*. 2 volumes, 990 p., Centre Belgo-Luxembourgeois d'Information de l'Acier (1972).
- [8] COURBON (J.). – *Plasticité appliquée au calcul des structures*. 368 p., École Nationale des Ponts et Chaussées (polycopié) (1976).