

Albert FUENTES

[WWW.GENIECIVIL.ORG](http://WWW.GENIECIVIL.ORG)

aso212

**CALCUL PRATIQUE DES  
OSSATURES  
DE BÂTIMENTS  
EN BETON ARME.**

BÂTIMENTS COURANTS  
BÂTIMENTS DE GRANDE HAUTEUR

PRÉFACE DE ROGER LACROIX

**EDITEUR**  
**EDITEUR**

## TABLE DES MATIÈRES

ASOZ12	www.geniecivil.org
<b>PRÉFACE</b> .....	VII
<b>AVANT-PROPOS</b> .....	XI
<b>CHAPITRE PREMIER. — Fondations</b> .....	1
I. Fondations superficielles ou à faible profondeur .....	1
1. Semelles continues sous mur, en gros béton. — 2. Semelles filantes sous mur, en béton armé. — 3. Semelles isolées ou continues sous poteau. — 4. Radier général. — 5. Généralités sur les fondations superficielles	
II. Fondations profondes sur puits ou pieux .....	23
1. Puits. — 2. Pieux en béton armé. — 3. Utilisation des murs des sous-sols pour la rigidification des systèmes de fondation.	
<b>CHAPITRE II. — Planchers</b> .....	33
I. Planchers à surcharge modérée .....	33
II. Planchers à forte surcharge .....	38
III. Poutrelles et hourdis répartiteur .....	45
1. Poutre infinie soumise à une charge concentrée $P$ . —	
2. Poutre demi-infinie soumise à une charge concentrée $P$ . —	
3. Exemples	
<b>CHAPITRE III. — Rappels de résistance des matériaux</b> .....	56
I. Calcul des rotations et des déplacements des poutres à inertie constante .....	56
Déformations des portiques simples. Exemples de calcul.	
II. Poutres à inertie variable .....	66
III. Torsion .....	
1. Contraintes dues aux couples de torsion. — 2. Pièces sollicitées en torsion. — 3. Torsion et gauchissement.	77
<b>CHAPITRE IV. — Contreventement des bâtiments</b> .....	102
A. <i>Les refends</i> .....	102
I. Distribution des efforts horizontaux dans les refends en maçonnerie .....	
a) systèmes isostatiques. — b) systèmes hyperstatiques.	103

**X**      **CALCUL PRATIQUE DES OSSATURES DE BÂTIMENTS EN B.A.**

II. Refends parallèles et cage (escalier ou ascenseur) ayant une rigidité à la torsion .....	110
III. Refend de faible hauteur .....	117
IV. Refend à une seule file d'ouvertures .....	117
V. Mur de refend à plusieurs files d'ouvertures .....	131
VI. Stabilité des fondations sous les refends .....	136
1. Refend plein. — 2. Refend avec ouvertures	
B. <i>Calcul des portiques soumis à des efforts horizontaux</i> .....	141
I. Méthodes approchées .....	141
Stabilité des portiques.	
II. Calcul des portiques étagés. Méthodes exactes .....	148
Méthode de calcul des moments dans les barres d'un système	152
Portique étagé, soumis à des efforts horizontaux .....	158
III. Portiques contreventés par des diagonales ou des remplissages	168
1. Contreventement par diagonales. — 2. Portique contreventé par remplissage.	
IV. Portiques sollicités par des charges verticales .....	175
C. <i>Portiques et refends</i> .....	182
Portiques et refends disposés parallèlement .....	182
Portique et refend dans le même plan de contreventement ...	204
Ossature composée de portiques parallèles .....	227
Éléments quelconques disposés parallèlement .....	230
Intervention des deux plans de contreventement dans l'équilibre général de l'ossature .....	233
D. <i>Stabilité des constructions de grande hauteur</i> .....	243
ANNEXE 1 .....	249
ANNEXE 2 — Etablissements des formules proposées .....	250
ANNEXE 3 .....	257
BIBLIOGRAPHIE .....	263

asoz12

www.geniecivil.org

## PRÉFACE

*Nombreux sont les ouvrages qui traitent du calcul des structures, et la littérature technique offre à l'ingénieur une foule de traités et manuels qui l'aident à dimensionner, ou à vérifier la stabilité des ossatures de bâtiment.*

*Ces livres sont souvent élémentaires, et se contentent de traiter des systèmes isostatiques, en donnant quelques recettes, plutôt que des méthodes, pour les systèmes hyperstatiques. D'autres, au contraire, développent des méthodes rigoureuses, qui permettent, théoriquement, d'aborder le calcul des structures les plus compliquées, mais ils laissent généralement au lecteur le soin de l'application de ces méthodes, et c'est là que commence le problème de l'utilisateur qui, noyé dans une foule de formules littérales, éprouve de grandes difficultés pour les transposer à son projet.*

*Le grand mérite de M. FUENTÈS est d'avoir su réaliser la synthèse entre ces deux catégories d'ouvrages : sans négliger les moindres détails, il a écrit un guide qui permet d'effectuer la transition entre la science abstraite qu'est la Résistance des Matériaux, et cet art de l'ingénieur, qu'est le calcul du béton armé.*

*Tous les problèmes qui se posent à propos d'une ossature de bâtiment sont abordés sous un angle essentiellement pragmatique, avec de nombreux exemples numériques, grâce auxquels sont précisées les hypothèses simplificatrices, ou les approximations permises.*

*Ce sont tout d'abord les fondations, traitées uniquement sous l'angle du béton armé, et non sous celui de la Mécanique*

*des sols, située à l'amont. Plusieurs règles pratiques sont données, notamment pour les semelles, qui sont rarement justiciables d'un véritable calcul de résistance des matériaux.*

*Puis sont étudiés les planchers : après un rappel et une illustration des méthodes approchées usuelles l'auteur aborde les calculs plus complexes de la répartition des charges entre poutrelles voisines grâce à la raideur du hourdis.*

*Enfin, après un rappel de Résistance des Matériaux qui retient seulement les notions nécessaires à la suite de l'exposé, M. FUENTÈS traite de son sujet favori « le contreventement des bâtiments » : les refends, avec ou sans ouvertures, les portiques, et surtout les associations de portiques et de refends, qui constituent l'un des problèmes les plus difficiles du calcul des bâtiments élevés. Ce chapitre montre que, même sans le recours à un ordinateur, il est possible de calculer avec une très bonne approximation des systèmes complexes, avec ou sans symétrie axiale, c'est-à-dire en tenant compte éventuellement des torsions introduites par une rotation d'ensemble de l'ossature. Les calculs correspondants tiennent compte du gauchissement des profils ouverts, que l'on rencontre fréquemment en bâtiment, sous forme de cages d'ascenseurs ou d'escaliers, par exemple, en appliquant la théorie de VLASSOV, qui se trouve brièvement résumée.*

*Au fil des pages, l'ouvrage livre au lecteur le savoir faire qu'a acquis son auteur au cours d'une carrière déjà longue, presque entièrement consacrée à l'étude des bâtiments ; appelé à résoudre quotidiennement ces problèmes et à en exposer la solution lors des séances d'enseignement qu'il accomplit à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, M. FUENTÈS a su comparer les différentes méthodes, en faire le meilleur choix, et il met aujourd'hui à la disposition de l'ingénieur d'études un outil patiemment affiné, et qui lui rendra les meilleurs services.*

R. LACROIX

Professeur de Béton Armé et  
Béton Précontraint

à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

**ASOZ12 WWW.GENIECIVIL.ORG**



TABLE DES MATIÈRES

**POUR INFORMATION UNIQUEMENT**

PRÉFACE .....	VII
AVANT-PROPOS .....	XI
CHAPITRE PREMIER. — <b>Fondations</b> .....	1
I. Fondations superficielles ou à faible profondeur .....	1
1. Semelles continues sous mur, en gros béton. — 2. Semelles filantes sous mur, en béton armé. — 3. Semelles isolées ou continues sous poteau. — 4. Radier général. — 5. Généralités sur les fondations superficielles	
II. Fondations profondes sur puits ou pieux .....	23
1. Puits. — 2. Pieux en béton armé. — 3. Utilisation des murs des sous-sols pour la rigidification des systèmes de fondation.	
CHAPITRE II. — <b>Planchers</b> .....	33
I. Planchers à surcharge modérée .....	33
II. Planchers à forte surcharge .....	38
III. Poutrelles et hourdis répartiteur .....	45
1. Poutre infinie soumise à une charge concentrée $P$ . —	
2. Poutre demi-infinie soumise à une charge concentrée $P$ . —	
3. Exemples	
CHAPITRE III. — <b>Rappels de résistance des matériaux</b> .....	56
I. Calcul des rotations et des déplacements des poutres à inertie constante .....	56
Déformations des portiques simples. Exemples de calcul.	
II. Poutres à inertie variable .....	66
III. Torsion .....	
1. Contraintes dues aux couples de torsion. — 2. Pièces sollicitées en torsion. — 3. Torsion et gauchissement.	77
CHAPITRE IV. — <b>Contreventement des bâtiments</b> .....	102
A. <i>Les refends</i> .....	102
I. Distribution des efforts horizontaux dans les refends en maçonnerie .....	
a) systèmes isostatiques. — b) systèmes hyperstatiques.	103

**X**      **CALCUL PRATIQUE DES OSSATURES DE BÂTIMENTS EN B.A.**

II. Refends parallèles et cage (escalier ou ascenseur) ayant une rigidité à la torsion .....	110
III. Refend de faible hauteur .....	117
IV. Refend à une seule file d'ouvertures .....	117
V. Mur de refend à plusieurs files d'ouvertures .....	131
VI. Stabilité des fondations sous les refends .....	136
1. Refend plein. — 2. Refend avec ouvertures	
B. <i>Calcul des portiques soumis à des efforts horizontaux</i> .....	141
I. Méthodes approchées .....	141
Stabilité des portiques.	
II. Calcul des portiques étagés. Méthodes exactes .....	148
Méthode de calcul des moments dans les barres d'un système	152
Portique étagé, soumis à des efforts horizontaux .....	158
III. Portiques contreventés par des diagonales ou des remplissages	168
1. Contreventement par diagonales. — 2. Portique contreventé par remplissage.	
IV. Portiques sollicités par des charges verticales .....	175
C. <i>Portiques et refends</i> .....	182
Portiques et refends disposés parallèlement .....	182
Portique et refend dans le même plan de contreventement ...	204
Ossature composée de portiques parallèles .....	227
Éléments quelconques disposés parallèlement .....	230
Intervention des deux plans de contreventement dans l'équilibre général de l'ossature .....	233
D. <i>Stabilité des constructions de grande hauteur</i> .....	243
ANNEXE 1 .....	249
ANNEXE 2 — Etablissements des formules proposées .....	250
ANNEXE 3 .....	257
BIBLIOGRAPHIE .....	263

## AVANT-PROPOS

Cet ouvrage doit permettre, à l'ingénieur, de traiter la plupart des problèmes qu'il peut être amené à aborder, au cours de l'étude d'une structure de bâtiment en béton.

Quelques rappels de *Résistance des Matériaux* ont permis d'établir des méthodes simples pour le calcul des différents éléments qui composent aussi bien les ossatures d'ouvrages courants que celles des bâtiments de grande hauteur soumis, notamment, à des efforts horizontaux.

Au cours de l'étude de la déformation de la structure, on remarquera qu'il est possible de faire intervenir, simultanément : les refends (avec ou sans ouverture), les portiques, les gaines ainsi que tout autre élément (avec ou sans rigidité à la torsion).

L'exposé sur le gauchissement des profils ouverts, soumis à la torsion, permettra à l'ingénieur de calculer les gaines d'ascenseurs et d'escaliers, en tenant compte de la raideur des linteaux.

A l'époque de l'ordinateur, certaines méthodes qui sont développées et qui auraient pu paraître trop longues d'application, il y a quelques années, donneront les résultats recherchés, dans un temps relativement court.

Quelques problèmes particuliers, tels : poutres courbes, poutres ou portiques à inertie variable, intervention de la raideur du hourdis dans la répartition des charges sur une série de poutres parallèles, sont traités d'une manière simple et pratique, sans développements mathématiques compliqués.

Il a semblé utile, également, dans le cadre du bâtiment courant, de reparler de l'excellent *outil de travail* que sont les règles de M. CAQUOT ainsi que les méthodes forfaitaires pour le calcul des planchers.

Le chapitre premier de l'ouvrage a été réservé au rappel des différents types de fondations, utilisés couramment dans la technique de la Construction des Bâtiments.



## CHAPITRE PREMIER

# FONDATEIONS

### I. Fondations superficielles ou à faible profondeur

#### 1° Semelles continues sous mur, en gros béton

Il s'agit de fondations qui doivent assurer la répartition sur le sol de la charge verticale transmise à la base d'un mur. Cette charge, supposée sensiblement uniforme dans le sens de la longueur du mur est désignée par  $q$  (intensité par unité de longueur).

Lorsque le terrain est susceptible de supporter une pression relativement élevée et qu'il est homogène, ou lorsque l'intensité de la charge est relativement faible, on peut réaliser une fondation économique par une semelle ou « rigole en gros béton », c'est-à-dire en béton de cailloux, non armé (dosage 150 à 200 kg de ciment au mètre cube). Une telle semelle est en principe enterrée. La répartition des pressions donne lieu à des contraintes de traction à la partie inférieure d'une section transversale de la semelle, mais on admet que ces contraintes ne sont pas dangereuses, si leurs valeurs calculées en section homogène sous l'effet du moment de flexion maximal qui se produit dans l'axe du mur, sont inférieures à la contrainte admissible du béton en traction.

Une règle pratique consiste à prévoir, pour un débord de semelle égal à  $d$ , une épaisseur de valeur  $2d$  (fig. I.1).

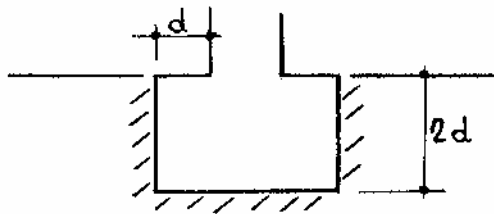


FIG. I.1.

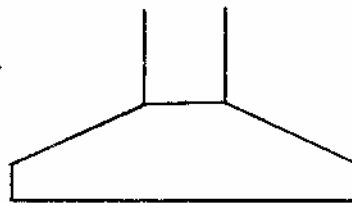


FIG. I.2.

Lorsque l'importance des charges ou la faible valeur de la pression admissible, conduisent à des semelles dont la largeur est relativement importante par rapport à l'épaisseur des murs, on est conduit à réaliser des semelles en béton armé ayant en coupe la forme indiquée figure I.2.

Les expériences ont montré que la pression sur le terrain, n'est pas uniformément répartie. Selon la nature du sol d'assise, la pression maximale peut être atteinte au centre de la semelle ou sur les bords.

Il apparaît donc que le problème, dans sa complexité ne peut être traité rigoureusement par le calcul. Néanmoins, il fallait trouver une méthode qui permette d'établir aussi simplement que possible de telles semelles, puisque le problème se pose journellement au constructeur.

La méthode de calcul utilisée est connue sous le nom de « méthode des bielles », car la charge est supposée transmise au sol par l'intermédiaire de bielles inclinées dans la hauteur de la semelle.

## 2° Semelle filante sous mur, en béton armé

On admet que la réaction du sol sous la semelle est verticale et uniforme, si la hauteur utile de la semelle permet de vérifier la condition

$$h = h_r - d' \geq \frac{A - a}{4}.$$

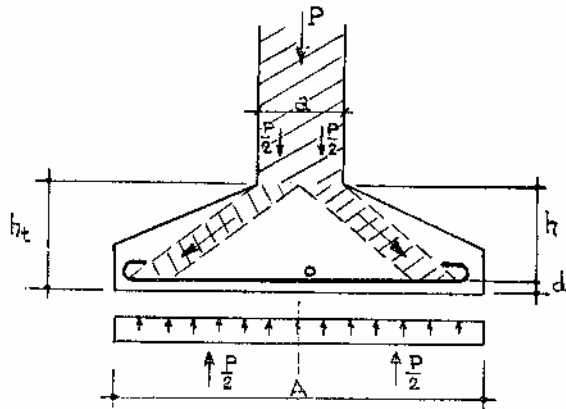


FIG. I.3.

L'ensemble de deux bielles fictives (symétriques par rapport à l'axe de la semelle) et des armatures inférieures, fonctionne à la manière d'une ferme chargée en son sommet, dont les armatures constituent le tirant.

En appelant  $P$  la charge par unité de longueur de mur, le moment par rapport à 0, est

$$\frac{P}{2} \frac{A}{4} - \frac{P}{2} \frac{a}{4} = \frac{P(A-a)}{8}$$

L'effort dans les armatures est égal à

$$F = \frac{P(A-a)}{8(h_t-d')}$$

et la section d'aciers nécessaires pour équilibrer cet effort

$$\omega = \frac{P(A-a)}{8\sigma_a(h_t-d')}$$

$\sigma_a$  : contrainte admissible pour l'acier.

Le système est complété longitudinalement par des aciers filants, posés sur les armatures inférieures, dont la section totale peut être prise égale au  $\frac{1}{4}$  de la section des armatures calculées transversalement.

S'il s'agit d'un mur en maçonnerie, il est conseillé de prévoir un chaînage filant, dans l'épaisseur de la semelle, pour éviter, ou minimiser, un tassement à cause d'une possible hétérogénéité du sol d'assise (fig. I.4a).

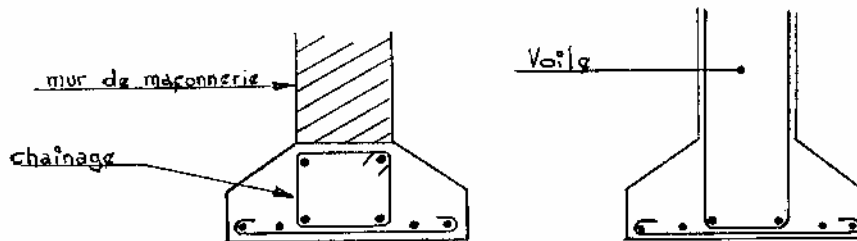


FIG. I.4a.

FIG. I.4b.

Le projeteur devra apprécier le risque pour armer ce chaînage.

S'il s'agit d'un voile en béton banché (non armé), ce chaînage pourra avantageusement être remplacé par le système d'armature proposé sur la figure I.4b.

Là encore le projeteur devra apprécier le risque pour dimensionner les armatures constituant le chaînage au droit du voile.

Les essais systématiques effectués sur des semelles, calculées par cette méthode, ont montré que si la condition

$$h - d' \geq \frac{A - a}{4},$$

était respectée, il était inutile de prévoir un système d'armatures transversales (cadres, épingles ou étriers) pour parer au risque d'un cisaillement quelconque.

### 3° Semelle isolée sous poteau, en béton armé

a) *Semelle carrée*. Les armatures sont déterminées en raisonnant d'une façon analogue à celle utilisée pour le calcul de la semelle sous mur.

Si  $P$  est la charge sollicitant le poteau, nous avons vu que le moment par rapport à  $y'y$ , était égal

$$P \frac{(A - a)}{8}.$$

Ainsi, la résultante des contraintes, suivant l'axe  $y'y$  le long de  $MN$  est évidemment égale à  $P$ .

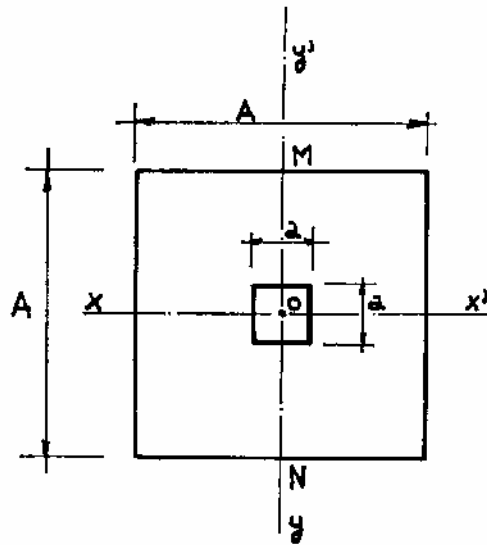


FIG. 1.5.

Elle peut être décomposée en deux forces égales à  $\frac{P}{2}$ , l'une au milieu de  $OM$ , l'autre au milieu de  $ON$ .

Le moment de chacune des ces deux forces par rapport à  $O$ , est, de la même manière que précédemment, égal à

$$\frac{P(A-a)}{8}$$

On a, dans ce système, remplacé le mur qui existerait le long de  $y'y$  par une console double  $OM$  et  $ON$  ramenant la charge sous le poteau.

Les armatures de cette console double qui pourraient être concentrées suivant  $y'y$ , au droit du poteau, sont généralement réparties sur toute la largeur de la semelle, de sorte que le ferrailage consiste à disposer un quadrillage d'acier à la partie inférieure de la semelle.

b) *Semelle rectangulaire*. En appelant  $A$  et  $B$  les côtés de la semelle,  $a$  et  $b$  les côtés du poteau, on obtiendra aisément, les valeurs des moments

par rapport à  $y'y$  :  $\frac{P(A-a)}{8}$ ,

par rapport à  $x'x$  :  $\frac{P(B-b)}{8}$ .

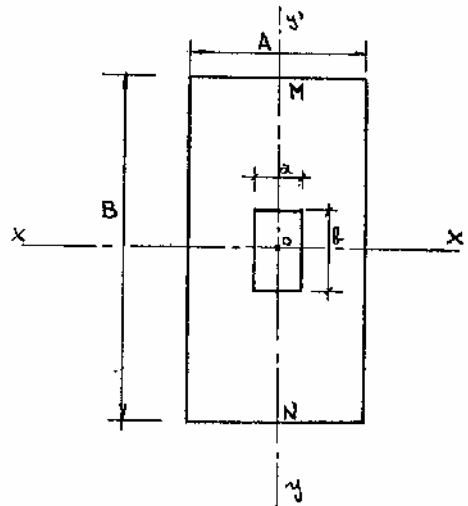


FIG. I.6.

L'utilisation de la condition de raideur, imposant de prendre pour  $h$  la plus grande des deux valeurs :

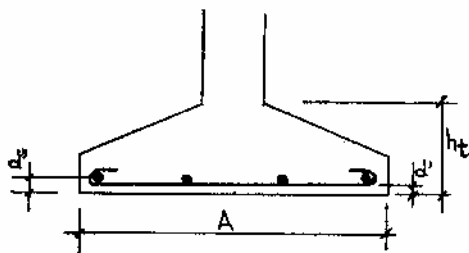


FIG. I.7.

$$h_t - d' \geq \frac{A-a}{4}$$

$$h_t - d'' \geq \frac{B-b}{4}$$

nous permet d'utiliser la « méthode des bielles » pour calculer les armatures du quadrillage

$$\omega_A = \frac{P(A-a)}{8\sigma_a h},$$

$$\omega_B = \frac{P(B-b)}{8\sigma_a h},$$

et de supprimer toutes armatures secondaires (cadres, étriers ou épingles) puisque l'expérience prouve qu'il n'y a aucun risque de cisaillement.

Nous rappelons que la condition de raideur nous permet de supposer que la réaction du sol est uniforme sous la totalité de la semelle.

Les armatures inférieures de la semelle doivent être munies de retours ou crochets, capables d'équilibrer l'effort  $F$  provenant des bielles. Ces retours ou crochets présentent un rayon de courbure suffisant pour satisfaire à la condition de non-écrasement du béton. Les retours se feront avec un angle au centre de  $120^\circ$  au minimum.

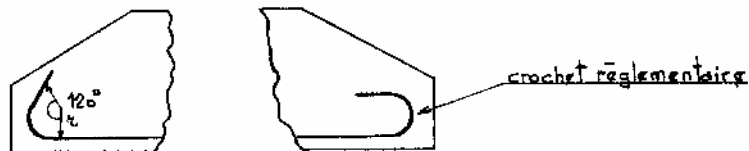


FIG. I.8.

Cette règle relative à la condition de non-écrasement du béton, permet de déterminer la hauteur de la semelle à son extrémité, cette hauteur varie généralement de 15 à 40 cm.

**Contrainte du béton dans les bielles.** Dans l'hypothèse de la formation

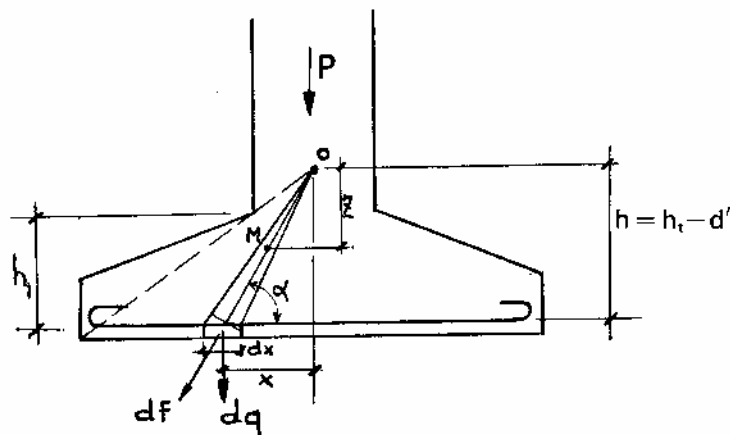


FIG. I.9.

de bielles, nous avons pu déterminer les armatures des semelles carrées et rectangulaires. Ce fonctionnement provoque des contraintes de compression dans les bielles fictives.

En un point  $M$  quelconque, situé à la distance  $Z$  de l'origine des bielles, nous avons

$$\sigma'_b = \frac{dF}{dA},$$

avec

$dF$  = effort transmis dans la bielle

$dA$  = section de la bielle par unité de longueur.

La composante verticale de  $dF$  que nous appelons  $dq$  est égale à  $dF \sin \alpha$ .

D'autre part en  $M$ ,  $dA$  est égale à  $dx \sin \alpha \frac{Z}{h}$ .

Nous avons donc

$$\sigma'_b = \frac{dq}{\sin \alpha} \frac{h}{dx \sin \alpha Z} = \frac{dq h}{dx Z \sin^2 \alpha}.$$

Or 
$$\sin^2 \alpha = \frac{h^2}{h^2 + x^2}.$$

D'où 
$$\sigma'_b = \frac{dq}{dx} \frac{h^2 + x^2}{h \cdot Z}.$$

Dans l'hypothèse d'une contrainte uniforme sous la semelle, nous avons  $\frac{dq}{dx} = \frac{P}{A}$  de sorte que la formule générale s'écrit

$$\sigma'_b = \frac{P}{A} \frac{h^2 + x^2}{h \cdot Z} \quad \text{pour } Z \geq h - h_1.$$

En réalité les essais de photo-élasticité effectués sur des pièces ayant des formes comparables à celles des massifs de fondation généralement réalisés, ont permis de déterminer les lignes de tensions principales. On s'aperçoit sur la figure ci-contre que les tensions maximales de traction, se produisent effectivement vers le milieu des semelles et que les tensions maximales de compression d'abord inclinées, reviennent à la verticale au contact de la surface d'assise.

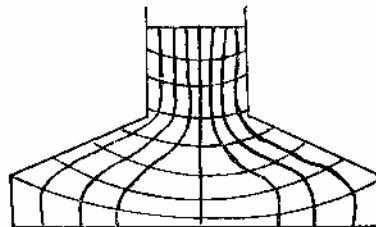


FIG. I.10.

**Poinçonnement.** On peut, aisément remarquer que la « condition de raideur »

$$h_t - d' \geq \frac{A - a}{4}$$

peut conduire le projeteur à adopter des semelles « assez plates » lorsque le sol d'assise permet d'adopter une forte contrainte, puisque, dans ces conditions,  $A$  diminue au fur et à mesure que la contrainte admissible augmente. Il y a, alors, risque de poinçonnement de la semelle.

Caquot a proposé la formule empirique

$$h_t - d' \geq 1,44 \sqrt{\frac{P}{\sigma'_{b_0}}}$$

$\sigma'_{b_0}$  : contrainte admissible en compression simple.

En pratique, on s'aperçoit que dès que la contrainte au sol est voisine ou supérieure à 2 bars, il faut vérifier la semelle par la formule de Caquot.

Dans le cas où le projeteur voudrait faire une vérification plus conforme aux règlements en vigueur, il pourrait utiliser la formule générale du poinçonnement

$$1,2\sigma_b \geq 1,5 \frac{P}{p_c h_t}$$

$\sigma_b$  est la contrainte admissible pour le béton en traction (6,6 à 7 bars).

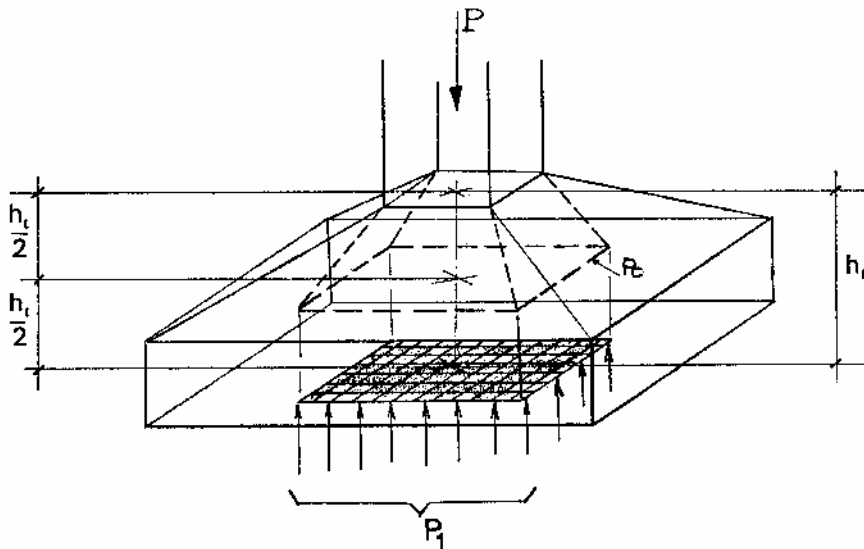


FIG. I.11.



$p_c$  est le périmètre d'un contour homothétique de celui du poteau, situé à mi-épaisseur de la semelle et à une distance  $\frac{h_t}{2}$  de ce dernier.

Il faut noter qu'on doit soustraire, dans le cas des semelles, de la charge  $P$ , la valeur de la réaction du sol, appliquée sur l'aire délimitée par  $p_c$  soit  $P_1$ .

La vérification à effectuer s'écrit donc

$$1,2\sigma_b \geq 1,5 \frac{P - P_1}{p_c h_t}$$

On devra disposer sous les semelles un « béton de propreté » de 5 cm au minimum.

Dans le cas où une couche de « gros béton » est interposée entre le sol et la semelle, la transmission des charges se fera à travers le gros béton (dosage 200 kg/m<sup>3</sup> minimum), qui pourra travailler à une contrainte de 10 à 12 bars, suivant un angle tel que  $\frac{d}{h}$  varie de 0,5 à 0,6.

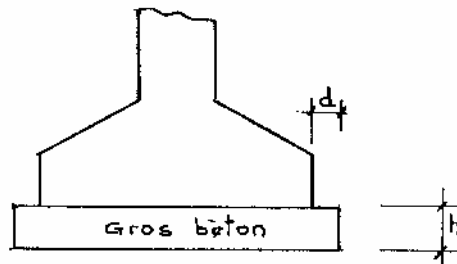


FIG. I.12.

Cette règle est valable pour les semelles continues, carrées, rectangulaires ou circulaires.

**Semelles excentrées.** Le problème se pose le long des murs mitoyens. Il faut éviter d'avoir une contrainte au sol, supérieure à la contrainte admissible. Il est donc avantageux de prévoir des semelles allongées le long du mur, afin d'obtenir sous la semelle un diagramme des contraintes trapézoïdal ou triangulaire.

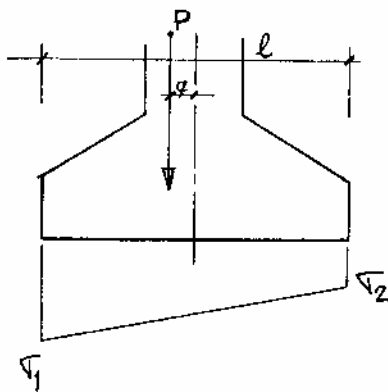
Le D.T.U., relatif aux fondations superficielles, impose au projeteur de respecter les conditions suivantes :

En admettant la répartition linéaire des pressions sous semelle, le diagramme des contraintes affecte la forme d'un trapèze ou d'un triangle.

a) *Répartition trapézoïdale*. La contrainte au quart de la largeur de la semelle, ne doit pas dépasser la contrainte admissible  $\sigma_a$ , c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\frac{3\sigma_1 + \sigma_2}{4} \leq \sigma_a.$$

Dans le cas de la semelle rectangulaire, si  $e$  est l'excentricité de la charge par rapport au centre de la semelle, on a



$$\sigma_1 = \frac{P}{S} \left( 1 + \frac{6e}{l} \right),$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{S} \left( 1 - \frac{6e}{l} \right),$$

$S$  = surface de la semelle.

FIG. I.13.

b) *Répartition triangulaire*. Dans ce cas la contrainte  $\sigma_2$  est égale à zéro et la contrainte  $\sigma_1$  ne doit pas être supérieure à  $1,33 \sigma_a$  ( $\sigma_a$  contrainte admissible).

Pour la semelle rectangulaire, on aurait, alors,

$$e = \frac{l}{6} \text{ et } \sigma_1 = \frac{2P}{S} \leq 1,33 \sigma_a.$$

Toutefois, dans le cas d'un effort normal relativement faible vis-à-vis du moment de flexion sollicitant le poteau, l'excentricité peut être supérieure à  $\frac{l}{6}$ , le diagramme triangulaire est encore admissible si la valeur de la contrainte, à la pointe du triangle, reste limitée à  $1,33 \sigma_a$ .

Ainsi si  $e > \frac{l}{6}$ ,

La formule  $\sigma_1 = \frac{P}{S} \left( 1 + \frac{6e}{l} \right)$

dans le cas de la semelle rectangulaire, n'est plus valable (fig. I.14).

La partie  $MN$  de la semelle, correspondant à des contraintes négatives, est inutile. On ne peut, en effet, considérer que des contraintes positives. On se ramène, alors, au diagramme triangulaire sur une largeur égale à  $3\left(\frac{l}{2}-e\right)$ .

Cette partie comprimée doit être au minimum égale à  $\frac{3}{5}l$  (fig. I.15).

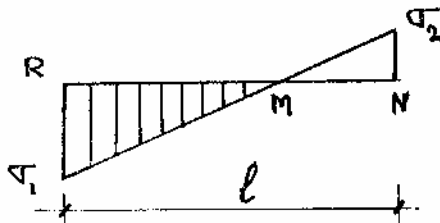


FIG. I.14.

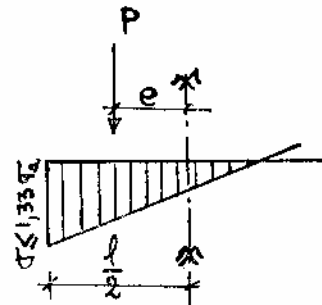


FIG. I.15.

En appelant  $L$  la longueur de la semelle, on devra avoir :

$$\sigma_{\max} = \frac{2P}{3L\left(\frac{l}{2}-e\right)} = \frac{4P}{3L(l-2e)} \leq 1,33 \sigma_a,$$

ou bien  $P \leq L(l-2e)\sigma_a$

*Armatures des semelles*, entièrement soumises à des contraintes de compression :

a) Lorsque la différence entre la contrainte maximale et la contrainte minimale est inférieure à la moitié de la contrainte moyenne, on peut encore employer la méthode des bielles, en prenant en compte, non pas la charge  $P$ , mais une charge fictive  $P'$  obtenue en multipliant la surface totale de la semelle par la contrainte  $\sigma$  telle que :

$$\sigma = \frac{3\sigma_1 + \sigma_2}{4},$$

$\sigma_1$  = contrainte maximale du sol

$\sigma_2$  = contrainte minimale du sol.

b) Lorsque la différence entre la contrainte maximale et minimale dépasse la moitié de la valeur de la contrainte moyenne, les armatures de la semelle doivent être déterminées en fonction des moments fléchissants auxquels sont soumises les différentes sections.

*Armatures des semelles* partiellement soumises à des contraintes de compression :

Ces armatures sont calculées après avoir déterminé le moment de flexion dans la semelle, à partir du diagramme de répartition des contraintes. Dans la partie  $MN$ , des armatures sont disposées à la partie supérieure de la semelle, pour reprendre le poids propre et la surcharge (terre) sollicitant cette partie. On prendra  $MN = 3e - \frac{l}{2}$  (fig. I.14).

Dans tous les cas, il est conseillé de prévoir des retours horizontaux, aux armatures des poteaux, dans le plan des armatures inférieures de la semelle.

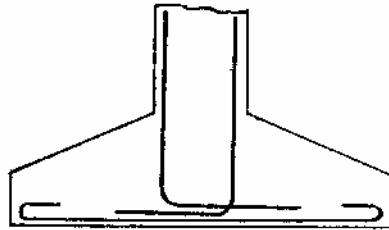


FIG. I.16.

**Longrine de liaison - Poutre de redressement.** Le cas peut se présenter où la proximité des poteaux à prévoir le long du mur mitoyen, ne donne pas la possibilité de trouver des semelles suffisamment étalées, de sorte qu'aucune de ces trois conditions ne puisse être satisfaite. (Diagramme des contraintes : rectangulaire, trapézoïdal ou triangulaire).

Il y a alors trois solutions pour résoudre le problème.

1° Admettre le moment  $M = Pe$ , dans la mesure où le plancher supérieur est capable de reprendre une réaction horizontale  $H_1$ .

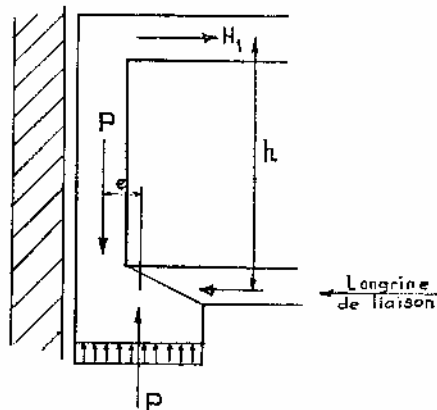


FIG. I.17.

Au niveau de la semelle, cette réaction est équilibrée par les tensions de frottement de la semelle sur le sol.

Il est conseillé dans ce cas de prévoir, néanmoins, une longrine, liant deux poteaux voisins, ou au minimum, un renforcement du dallage existant au niveau le plus bas.

On devra vérifier que le poteau a une raideur suffisante, afin de négliger la rotation du poteau sous l'effet du moment.

2° Créer une poutre rigide, dite poutre de redressement, reliant la semelle à construire, à la semelle voisine. C'est la solution la plus utilisée. On détermine sous le poteau, une semelle dont le centre de gravité se trouve le plus près possible de l'axe du poteau, soit  $e$  cette distance. Les dimensions de la semelle sont calculées en supposant, non seulement la semelle rigide, mais encore en supposant une répartition uniforme des contraintes au sol.

Le moment  $Pe$ , dans la semelle, est repris par la poutre de redressement et si nous appelons  $l$  la distance entre les deux semelles, on devra dimensionner la semelle excentrée en fonction d'un effort :

$$P + \frac{Pe}{l},$$

tandis qu'on vérifiera que le poteau servant à réaliser l'équilibre n'est pas soulevé sous l'effet de la composante  $\frac{-Pe}{l}$ , alors qu'il n'est soumis qu'aux seules charges permanentes.

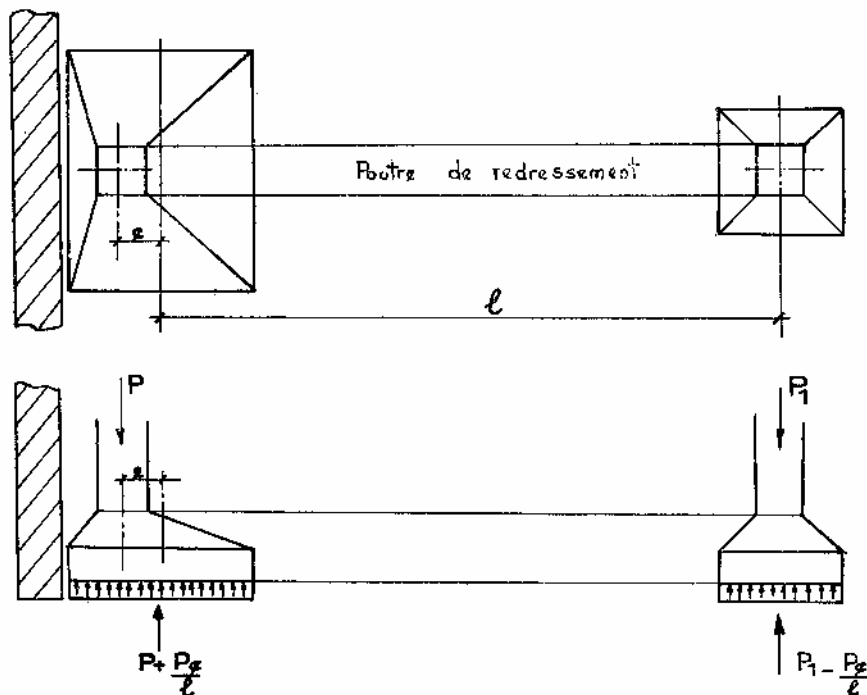


FIG. 1.18.



FIG. I.19. — Disposition schématique des armatures.

3° Réaliser l'équilibre par excentrement d'une semelle située vis-à-vis de la semelle intéressée, pour que les réactions horizontales, au niveau du sol, puissent s'équilibrer par un buton situé entre les deux semelles.

On devra avoir  $Qe = Q_1e_1$ .

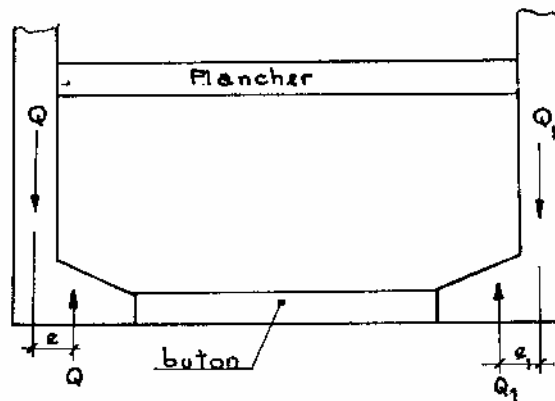


FIG. I.20.

Il reste un cas à traiter, c'est celui qui consiste à prolonger l'ossature d'un bâtiment existant. Dans cette éventualité, les semelles du bâtiment existant débordent sur l'emprise du bâtiment futur.

On devra encore avoir recours à l'utilisation d'une longrine rigide s'appuyant sur une semelle en retrait et capable, comme précédemment, de reprendre un moment ( $Pe$ ) grâce à la stabilité que peut procurer un poteau voisin, situé, si possible, dans le même alignement que la semelle en retrait (fig. I.21).

Si les charges sont très élevées et le terrain peu déformable, le dispositif doit être complété par une articulation permettant le centrage effectif de la charge sur la semelle.

NOTA : Les semelles existant au droit d'un joint de dilatation ne sont pas coupées à la verticale de ce joint. Le joint est arrêté au niveau supérieur

de la semelle. Cette disposition est valable aussi bien pour les poteaux jumelés que pour les murs. On prendra la précaution de coudre la partie supérieure de la semelle par quelques armatures suffisamment ancrées pour éviter la fissuration de la semelle (fig. I.22).

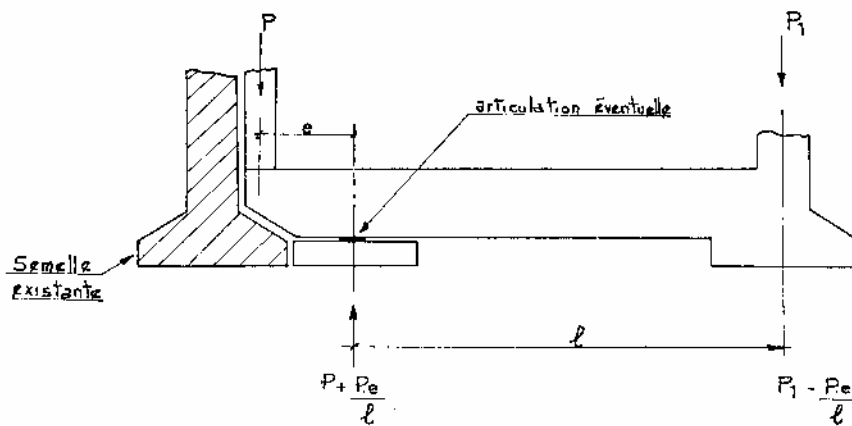


FIG. I.21.

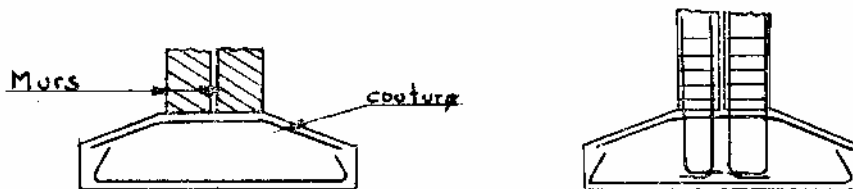


FIG. I.22.

**Semelles continues sous poteaux.** Nous avons vu que pour une semelle sous mur, ou bien pour une semelle isolée, la répartition des contraintes, sous la semelle, peut être considérée comme uniforme, si nous vérifions la condition de raideur et éventuellement la condition de non poinçonnement.

Pour les semelles continues, sous poteaux, nous allons voir que la loi de répartition des contraintes sur le sol est fonction, également de la raideur de la semelle.

Pour étudier la raideur d'une semelle continue sous poteaux, nous utiliserons la théorie de la poutre sur sol élastique.

On calculera en premier lieu la longueur élastique de la semelle

$$l_e = \sqrt[4]{\frac{4EI}{Kb}},$$

$I$  est l'inertie de la semelle ;

$E$  est le module d'élasticité du béton (prendre en moyenne 200 000 kg/cm<sup>2</sup>)

$b$  est la largeur de la semelle ;

$K$  est le coefficient de raideur du sol.

En pratique le coefficient  $K$  varie de 0,5 à 12 kg/cm<sup>3</sup>.

On pourra par exemple adopter pour  $K$  les valeurs suivantes :

0,5 kg/cm<sup>3</sup> pour un « très mauvais sol » ;

4 kg/cm<sup>3</sup> pour un « sol moyen » (contrainte admissible 2 bars)

12 kg/cm<sup>3</sup> pour un « très bon sol ».

Après avoir obtenu la longueur élastique de la poutre, nous pourrions tenir compte des résultats obtenus par Verdeyen dans son cours de *mécanique des sols*.

Ses conclusions sont les suivantes :

1° Lorsque la longueur de la poutre ou l'écartement des charges qui la sollicitent est tel que

$$l \leq \frac{\pi}{2} l_e,$$

le calcul peut être fait en supposant une répartition linéaire des contraintes sur le sol et il n'y a pas lieu de faire des calculs relatifs à la poutre sur sol élastique.

Si les charges sont transmises à la poutre par l'intermédiaire de poteaux de largeur  $a$  non négligeable, on pourra admettre la répartition linéaire sur une longueur totale de la semelle

$$\frac{\pi}{2} l_e + a.$$

Si l'entr'axe des poteaux est inférieur à cette valeur, la poutre se calcule, alors, comme une poutre continue soumise à la réaction du sol (répartition linéaire).

Le projeteur pourra généralement choisir une section de poutre telle que cette condition soit remplie.

2° Si l'entr'axe des poteaux est supérieur à  $\frac{\pi}{2} l_e + a$  le calcul devra être effectué :

a) conformément à la théorie de la poutre sur sol élastique,



b) en faisant une approximation à partir du diagramme de déformation de la poutre sur sol élastique, de longueur infinie.

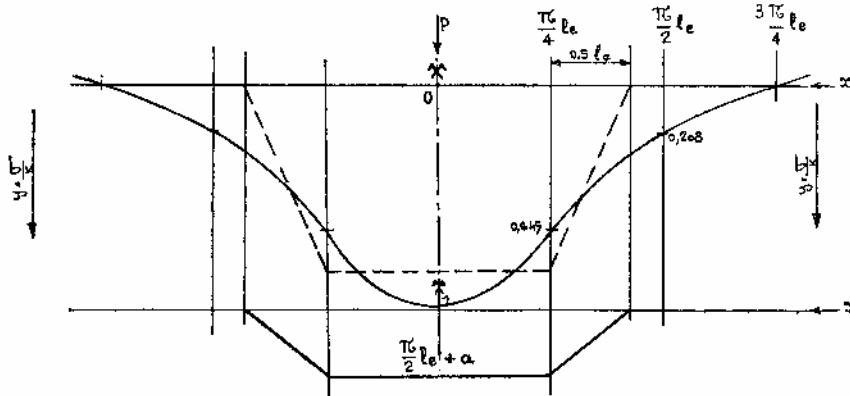


FIG. I.23.

Cette approximation consiste à remplacer le diagramme théorique par un diagramme trapézoïdal.

Cette approximation, qui est dans le sens de la sécurité, nous conduit à admettre le diagramme de contrainte, ci-dessous. Il y a lieu de rappeler que la contrainte en un point est égale au produit du coefficient de raideur du sol par l'enfoncement en ce point

$$\sigma = Ky.$$

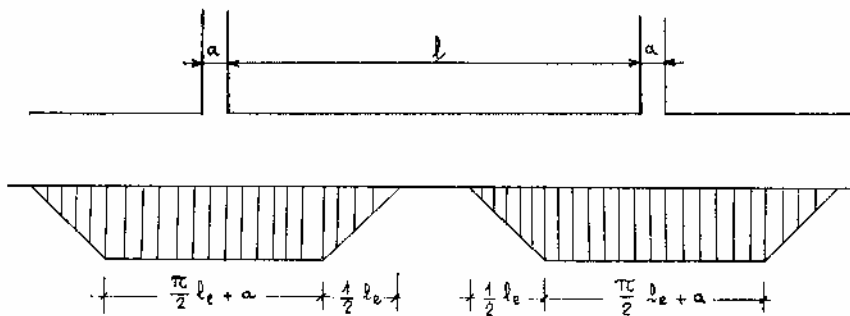


FIG. I.24.

Le calcul de la poutre est effectué comme s'il s'agissait d'une poutre continue soumise aux sollicitations qui correspondent au diagramme simplifié des contraintes.

Pour un poteau de rive, on devra prévoir un débord de semelle de  $\frac{\pi}{4} l_e$  au minimum. S'il était impossible de prévoir un tel débord, il faudrait adopter une section de poutre entre le premier et le second poteau, telle que leur écartement soit sensiblement inférieur à  $\frac{\pi}{2} l_e$ .

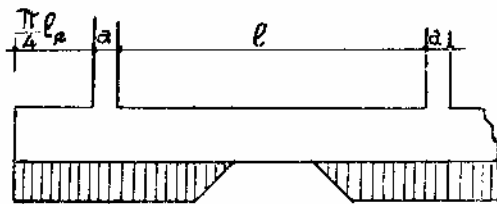


FIG. 1.25.

*Semelles à poutres croisées sous poteaux* : Lorsqu'il s'agit d'un système de fondations à poutres croisées, on pourra estimer que la charge  $P$ , au droit d'un croisement de poutres-semelles d'inertie  $I_1$  et  $I_2$ , se décompose en deux charges  $P_1$  et  $P_2$ , venant solliciter les deux poutres sur deux longueurs  $\frac{\pi}{2} l_{e1}$  et  $\frac{\pi}{2} l_{e2}$ , axées sous la charge et soumises à un diagramme linéaire des contraintes, le plus souvent uniformes. Si les raideurs des poutres sont presque semblables et si leurs largeurs respectives sont  $b_1$  et  $b_2$  et leurs longueurs sont  $l_1$  et  $l_2$ , on pourra admettre que

$$P_1 = \frac{Pl_1b_1}{l_1b_1 + l_2b_2} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{Pl_2b_2}{l_1b_1 + l_2b_2}.$$

Lorsque les raideurs des poutres sont sensiblement différentes l'une de l'autre, il y aura intérêt à augmenter l'importance du système à courte portée, le rôle de l'autre poutre se réduisant à assurer la liaison et la continuité de l'ensemble.

#### 4° Radier général

La solution de radier général est en principe adoptée quand la construction peut être fondée à une profondeur généralement faible et quand la répartition de l'ensemble des charges sur la totalité de la surface occupée en plan, par la construction, conduit à une pression voisine de celle qui est admissible sur la couche de terrain considérée.

Bien entendu, il faut que cette solution corresponde à des tassements d'amplitude acceptable et qu'elle soit moins onéreuse qu'une solution de fondations profondes par puits ou pieux.

La solution du radier général peut également s'imposer si le terrain est inondable. Le radier doit alors résister à la sous-pression de l'eau.

On vérifiera que sous l'effet de la poussée d'Archimède, le bâtiment sans surcharge, n'a pas tendance à se soulever. La résultante générale des forces sollicitantes, ne passe pas, dans le cas général, par le centre de figure du radier. On vérifiera que sous l'effet des charges permanentes seules, puis des surcharges les plus défavorables, il n'y a aucun soulèvement en bordure du radier et que les contraintes obtenues aux angles sont admissibles.

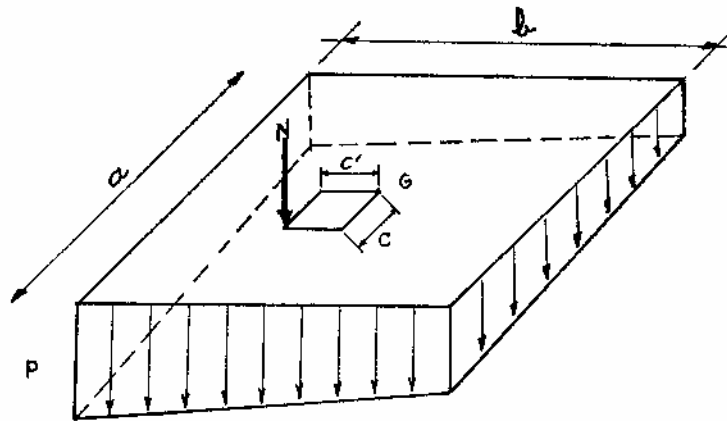


FIG. 1.26.

La valeur de la contrainte est donnée par l'expression :

$$p = \frac{N}{ab} \left( 1 \pm \frac{6c}{a} \pm \frac{6c'}{b} \right).$$

Le radier se présente couramment sous la forme d'un plancher renversé, composé d'un système de poutres orthogonales et d'un hourdis au contact du sol.

On peut avoir soit :

1° La dalle à la partie inférieure du radier avec les inconvénients suivants :

- a) fouille générale plus importante,
- b) nécessité de remplir la partie comprise entre la face supérieure du hourdis et celle des nervures ou poutres à l'aide de béton de cailloux ou de mâchefer,
- c) risque de sous pression plus important,
- d) moments de continuité sur appuis souvent plus importants que les moments en travée. La dalle, dans ce cas, se trouve sur la partie tendue de la poutre, précisément à l'appui.

2° La dalle à la partie supérieure du radier avec les inconvénients suivants :

a) coffrage compliqué pour le « gros béton » à disposer de part et d'autre des faces latérales de la poutre,

b) les armatures secondaires doivent non seulement reprendre l'effort tranchant, mais ramener les charges vers les parties comprimées (en travée).

Dans les deux cas, on pourra apprécier si la répartition uniforme des contraintes peut être adoptée grâce au calcul de la longueur élastique, effectué pour les poutres et pour le hourdis.

Si la répartition uniforme ne peut être adoptée, on appliquera l'une des deux méthodes exposées précédemment pour apprécier, tant pour les poutres que pour le hourdis, les distances sur lesquelles cette répartition uniforme peut être admise.

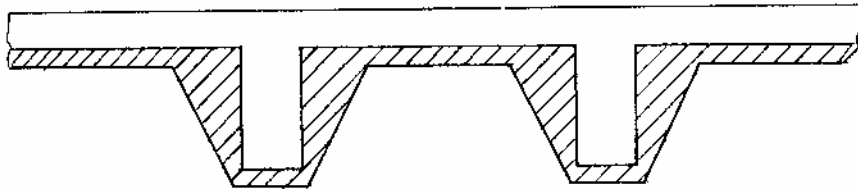


FIG. I.27.

**Radier dalle.** Dans ce système de radier les poutres sont supprimées. Les poteaux sont directement fondés sur une dalle épaisse. On devra, là encore, apprécier par la considération de la longueur élastique, si l'on peut adopter une répartition uniforme des contraintes, ou bien si cette répartition uniforme n'est que partielle. Le calcul d'un tel radier s'effectue comme celui d'un « plancher champignon » renversé.

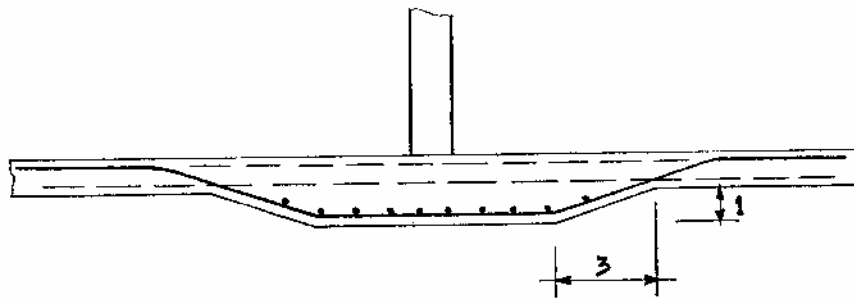


FIG. I.28.

Il est souvent très économique de marquer la position des poteaux par une surépaisseur de la dalle, intéressant une surface que l'on veut rigide d'une part, et permettant une contrainte au sol admissible d'autre part.

Cette zone en surépaisseur sera raccordée à la partie courante de la dalle par un gousset  $1/3$ . Le calcul peut être ramené à celui d'une série de semelles indépendantes (dont on vérifiera la condition de non-poinçonnement), reliées par un dallage armé.

**Radier voûte.** On peut généralement reprendre les réactions du sol par des voûtes paraboliques (funiculaire de charges uniformément réparties), qui reportent leur effort sur des poutres, filant dans une direction, sous les poteaux.

Dans l'autre direction, on trouvera des tirants reprenant l'effet de poussée des voûtes. La dernière voûte poussera sur une poutre horizontale armée en conséquence.

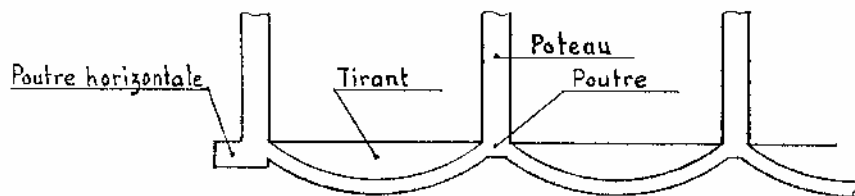


FIG. I.29.

##### 5° Généralités sur les fondations superficielles

*Fondations sur sol en pente* — Les fondations correspondant au haut de pente ne doivent pas transmettre de poussées sur les fondations inférieures, sauf dispositions spéciales tenant compte de ces poussées.

Compte tenu des niveaux de base des fondations, il y a lieu de vérifier que les charges ne peuvent entraîner de mouvement d'ensemble du terrain.

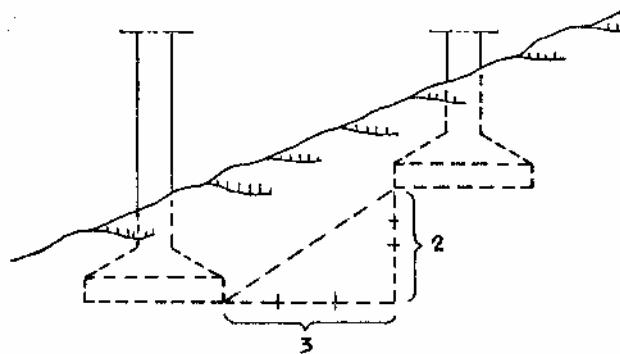


FIG. I.30.

Lorsque le sol d'assise ne peut donner lieu à un glissement d'ensemble, les niveaux des fondations successives doivent être tels qu'une pente maximale de 3 de base pour 2 de hauteur relie les arêtes des semelles les plus voisines.

Si cette condition ne peut être satisfaite, des dispositions spéciales doivent être prises pour éviter le desserrage des terrains supérieurs, pour équilibrer les poussées et pour assurer l'évacuation des eaux.

Si, dans le voisinage de l'ouvrage, existent des fouilles plus profondes que le niveau de fondation, il doit être vérifié que les charges et poussées apportées par les fondations peuvent être supportées par le terrain bordant ces fouilles.

Si le terrain est affouillable, le projet doit être adapté à cet état ; des consolidations doivent être effectuées pour satisfaire, s'il y a lieu, à la condition ci-dessus.

Un joint de rupture doit être ménagé entre deux éléments d'ouvrages voisins, lorsqu'ils subissent des différences importantes de charge et de tassement.

*Sous-pressions* — Les fondations formant cuvelage doivent être calculées pour résister aux pressions hydrostatiques éventuelles.

Si l'eau peut monter librement au-dessus des fondations, il n'y a pas lieu de tenir compte des sous-pressions, dans le calcul, à condition de prévoir des dispositifs de sécurité, dans ce sens.

*Poussée et butée des terres* — La poussée des terres sur les ouvrages doit être calculée et prise en compte dans les conditions les plus défavorables.

Il doit être tenu compte, tout particulièrement, des effets de remblais, charges de constructions voisines, etc., dont la présence peut provoquer des poussées supplémentaires.

De plus, il doit être tenu compte de la poussée hydrostatique correspondant au niveau maximal probable de la nappe phréatique, à moins que des dispositifs particuliers évitent leur mise en charge.

Par contre, il ne peut être tenu compte de la butée latérale, sans justification et sans disposition particulière assurant la pérennité de cette butée.

Lorsque la pression, sur le terrain des fondations, due au vent (pressions dynamiques normales) est inférieure au  $1/3$  de celle due aux charges et surcharges, on peut la négliger dans le calcul des fondations. Lorsque cette pression est supérieure à cette valeur, les fondations doivent être établies de telle façon que la pression due à l'effet combiné des charges, des surcharges et du vent (pressions normales) ne dépasse pas de plus de  $1/3$  la valeur admissible.

La majoration de  $1/3$  pour la contrainte du sol n'est pas admissible si l'ouvrage se trouve dans une région où le vent dominant, d'intensité sensiblement constante, souffle en permanence dans la même direction.

## II. Fondations profondes sur puits ou pieux

De telles fondations s'imposent lorsqu'il est impossible de fonder à faible profondeur par suite de la mauvaise qualité des terrains rencontrés et lorsque l'on trouve, en dessous de ces terrains, une couche résistante.

En principe, lorsque l'on atteint cette couche résistante sans difficultés spéciales, et notamment sans rencontrer d'eau, on adopte la solution des puits, sur lesquels on exécutera des semelles sous points d'appui isolés comme indiqué précédemment. Tant pour les puits que pour les pieux, on calculera la charge portante, en fonction de la résistance de pointe à laquelle on ajoutera l'effet des frottements latéraux. Les formules de MM. Caquot & Kerisel permettent de déterminer cette charge, en faisant intervenir : l'épaisseur, la profondeur, la densité, la cohésion et l'angle de frottement interne des couches rencontrées.

### 1. Puits : Longrines sous murs à disposer entre puits

Ces longrines doivent transmettre aux puits de fondations les charges des murs d'une construction. Elles sont donc à traiter comme des poutres. Toutefois, lorsque les murs portés ne comportent pas d'ouvertures importantes dans leur partie inférieure, il n'est pas nécessaire de calculer les longrines entre puits pour supporter la totalité des charges des maçonneries et des différents planchers dans l'intervalle entre semelles supportant ces longrines.

Il se crée, en effet, dans les maçonneries des « arcs de décharge » en forme de parabole surbaissée, d'équation :

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x).$$

La contrainte dans la maçonnerie n'excédera pas 15 bars pour les moellons et 25 bars pour le gros béton.

La longrine ne reprend, alors, que le poids de maçonnerie en dessous de l'arc et son poids propre, et évidemment, l'effort de traction déterminé par la poussée de l'arc de décharge.

Sur les puits intermédiaires d'une même file, il y a butée réciproque des deux arcs de décharge. Aux extrémités, s'il n'y a pas de poteau d'about, il est nécessaire de créer une butée au premier et au dernier arc.

Les puits de section circulaire, carrée, ou rectangulaire, sont réalisés en gros béton, non armé, à 200 kg/m<sup>3</sup> minimum et pouvant travailler à 20 bars environ. Pour améliorer leur assise, on crée souvent, un élargissement en pied, appelé « patte d'éléphant » (fig. I.31b).

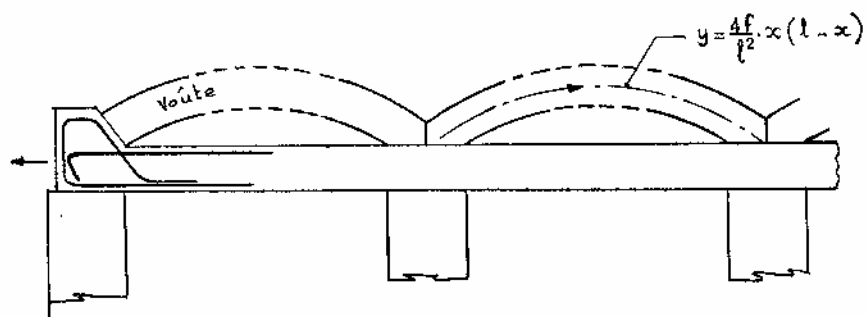


FIG. I.31a

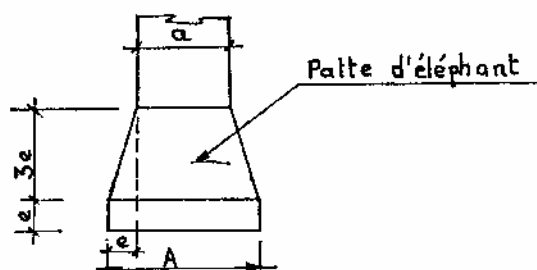


FIG. I.31b.

## 2. Pieux en béton armé

Ils peuvent être moulés dans le sol ou préfabriqués.

### 1° Pieux moulés dans le sol

Réalisés par :

- a) Un tube métallique enfoncé par battage, constituant un fourreau perdu; c'est une solution onéreuse.
- b) Sans fourreau métallique, grâce à un mouton conique créant un trou par compression mécanique du sol; c'est le système « Compressol ».
- c) Avec un fourreau temporaire, retiré au fur et à mesure que l'on remplit le vide par du béton : pieux Franki, pieux Vibro.

La partie supérieure des pieux moulés dans le sol est toujours armée.

### 2° Pieux préfabriqués

Leur section est carrée, octogonale ou circulaire.

Ces pieux ont des armatures transversales et longitudinales, déterminées en fonction des conditions de travail en flexion, lors du levage du pieu.



En tête, le ferrailage est renforcé par des armatures transversales qui constituent un frettage sur une hauteur double du diamètre du pieu, afin de résister au choc du « mouton ».

La pointe du pieu est souvent munie d'un sabot en acier, ancré dans le béton, à l'aide de pattes.

**Semelles continues sur pieux.** Ces semelles ont pour rôle d'assurer la transmission des charges de la construction, que celles-ci soient apportées par des murs ou par des points d'appui isolés.

Les semelles filantes sous murs peuvent être réalisées sur une seule file de pieux ou sur deux files de pieux disposés en quinconce. Ces semelles débordent de 0,15 m sur le pieu. L'entr'axe minimum des pieux est de trois diamètres (fig. I.33).

Le calcul des semelles peut être effectué comme s'il s'agissait d'une poutre continue, mais pour obtenir un ferrailage simple, on préfère le plus souvent utiliser la méthode des bielles, ce qui impose que la hauteur totale de la semelle soit au moins égale à la moitié de l'entr'axe des pieux.

Les armatures inférieures, dans le cas où  $H \geq \frac{e}{2}$  sont dimensionnées pour reprendre l'effort tranchant. Ainsi si  $p$  est la charge par mètre linéaire supportée par la semelle sur pieu, on aura

$$\omega = \frac{T}{\sigma_a} = \frac{pe}{2\sigma_a}, \quad \sigma_a = \text{contrainte admissible de l'acier.}$$

Le ferrailage est complété par une armature identique à la partie supérieure, et par quelques cadres de construction. Comme pour les puits, on pourra prévoir la formation d'arcs de décharge, dans le cas où la semelle supporte un mur continu à la partie supérieure.

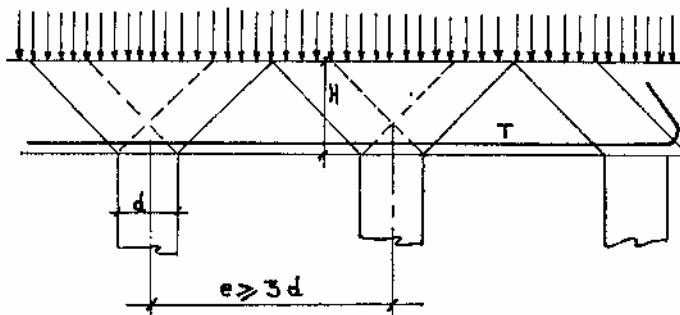


FIG. I.32.

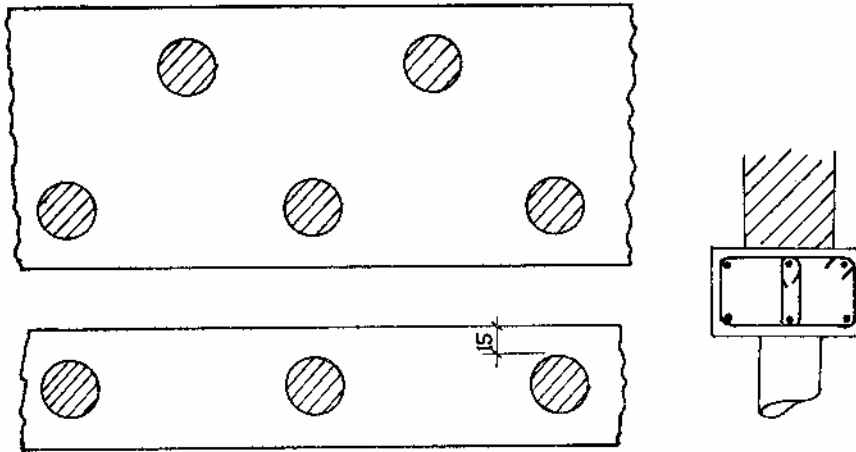


FIG. I.33.

**Semelle sur un pieu.** Elle est constituée d'un massif cubique ou parallélépipédique, débordant de 15 cm au minimum par rapport au pieu. Il est préférable de prévoir des longrines entre les différentes semelles pour reprendre une excentricité possible, par suite d'un mauvais centrage du pieu.

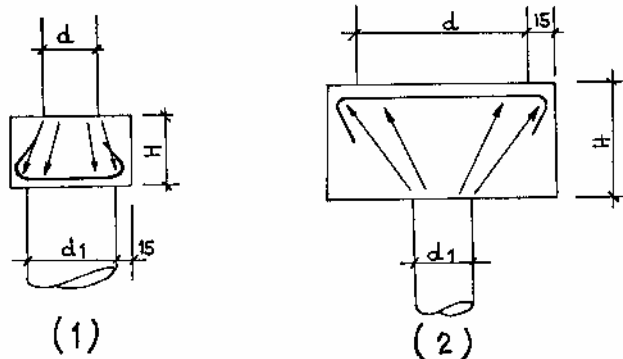


FIG. I.34.

Dans le cas (1) où  $d$  est inférieur ou égal à  $d_1$  les armatures inférieures (quadrillage) sont prépondérantes. Il faut prévoir, néanmoins, des armatures supérieures et quelques cadres, dans les deux sens. On doit avoir  $2H \geq d_1 + 30$  cm.

La solution (2) est une mauvaise solution. Si elle se présentait on devrait prévoir des armatures supérieures (quadrillage) pour reprendre les bielles. Là encore, on devra prévoir des armatures inférieures et des cadres dans les deux sens. On doit avoir  $2H \geq d + 30$  cm.

**Semelle sur deux pieux.** Le calcul d'une telle semelle est effectué en utilisant la méthode des bielles. On devra donc avoir

$$l \geq d + 30 \text{ cm},$$

$$l' \geq e + d + 30 \text{ cm},$$

$$H \geq \frac{e}{2}.$$

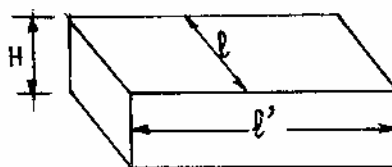


FIG. I.35.

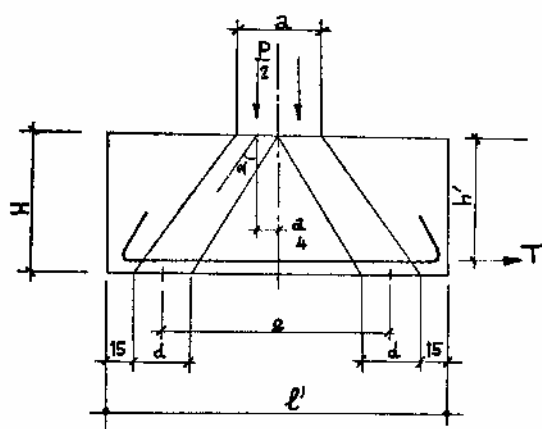


FIG. I.36.

Nous avons ici

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{e}{2} - \frac{a}{4}}{h'},$$

et

$$T = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{P(2e - a)}{8h'}.$$

La contrainte de compression dans les bielles

$$\sigma_b' = \frac{P}{B \cos^2 \alpha},$$

(où  $B$  est la section du poteau) ne doit pas être supérieure à  $0,6 \sigma_j'$  ( $\sigma_j'$  résistance du béton à la compression à rupture).

Les armatures inférieures doivent comporter à leurs extrémités de larges ancrages (crochets normaux ou à  $45^\circ$ ).

En plus des armatures inférieures, calculées pour résister sous contrainte admissible à l'effort  $T$ , on devra prévoir dans la semelle :

- des armatures supérieures;
- des cadres régulièrement espacés sur toute la longueur de la semelle.

De telles armatures ne sont pas justiciables d'un calcul mais de règles de bonne construction.

**Semelle sur trois pieux.** Les pieux sont disposés suivant un triangle équilatéral. La charge  $P$  est disposée au centre de gravité du triangle.

Il y a deux possibilités pour armer ces semelles :

a) Armatures disposées suivant chacune des trois médianes.

avec  $H \geq \frac{e}{2}$ ,

nous avons

$$T = \frac{P}{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

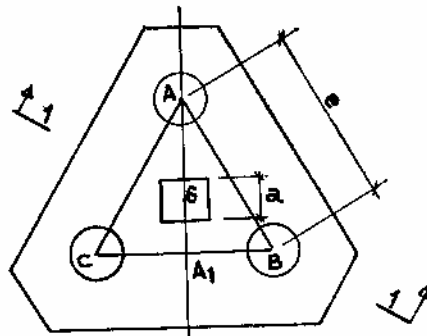


FIG. I.37.

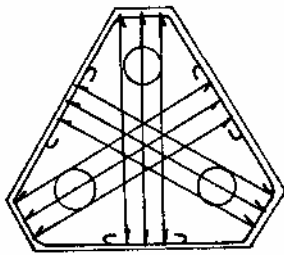


FIG. I.38.

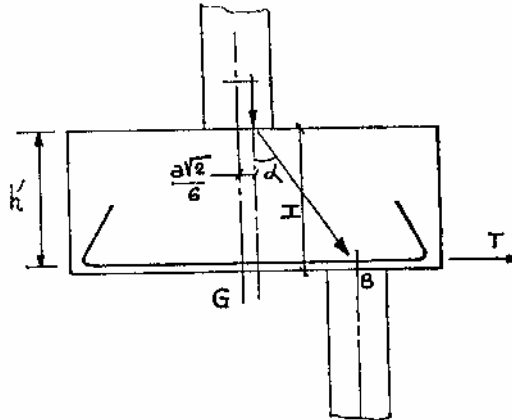


FIG. I.39a.

D'autre part  $GB = \frac{e\sqrt{3}}{3},$

d'où  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2e\sqrt{3} - a\sqrt{2}}{6h'},$

et  $T = \frac{P(2e\sqrt{3} - a\sqrt{2})}{18h'}.$

b) Armatures disposées suivant les côtés

Nous avons ici  $T = \frac{2T'\sqrt{3}}{2} = T'\sqrt{3},$

d'où 
$$\omega' = \frac{T}{\sqrt{3} \cdot \sigma_a}$$

C'est la meilleure disposition.

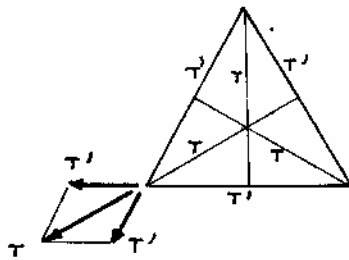


FIG. I.39b

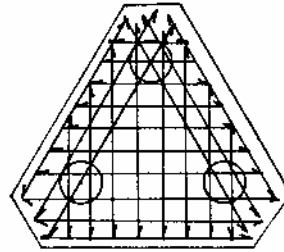


FIG. I.39c.

Le ferrailage pratique consistera à armer la semelle suivant les trois côtés et à compléter le système par un quadrillage, de bonne construction, empêchant la fissuration de la semelle à la partie inférieure.

On disposera également quelques cadres ou étriers et un quadrillage supérieur, semblable au quadrillage inférieur.

On pourra vérifier comme précédemment la condition

$$\sigma'_b = \frac{P}{B \cos^2 \alpha} \leq 0,6\sigma'_j.$$

### 3. Utilisation des murs des sous-sols pour la rigidification des systèmes de fondation

Il peut être intéressant de profiter de la présence de murs pleins dans la hauteur des sous-sols pour accroître la rigidité des poutres-semelles en utilisant toute la hauteur de ces murs. Deux cas peuvent se présenter :

a) Murs en béton banché reposant sur une semelle en béton armé et couronnés par un chaînage en béton armé. On peut disposer, dans la partie en béton banché, des cadres verticaux reliant la semelle inférieure et le chaînage supérieur et rajouter quelques barres horizontales sur les deux faces du mur.

b) Voiles en béton armé entre semelle inférieure et chaînage supérieur en béton armé. Le voile est ici une paroi verticale d'épaisseur relativement faible, renforcée éventuellement par des contreforts. Il est armé d'un double quadrillage d'armatures; les armatures verticales font office d'étriers entre la membrure inférieure (semelle) et la membrure supérieure (chaînage).

Lorsqu'il s'agit de murs périphériques, on devra rajouter aux armatures ci-dessus celles nécessaires à la reprise du moment de flexion dû à la composante horizontale de la poussée des terres.

$$q_r = dh \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

$d$  = densité du terrain;

$h$  = profondeur à laquelle on calcule la poussée;

$\varphi$  = angle de frottement interne du terrain;

et éventuellement à la composante horizontale de la poussée due à la surcharge sur le terrain

$$q_s = S \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

$S$  = surcharge unitaire.

Les efforts tranchants dus à ces poussées sont repris par le dallage du sous-sol d'une part (ou par des longrines perpendiculaires au voile) et par le plancher haut du sous-sol d'autre part (fig. I.40).

Le voile pourra être considéré comme articulé en pied et partiellement encastré en tête.

Dans le cas où des longrines reprennent l'effort horizontal, en pied, la poutre semelle sera calculée à la flexion latérale.

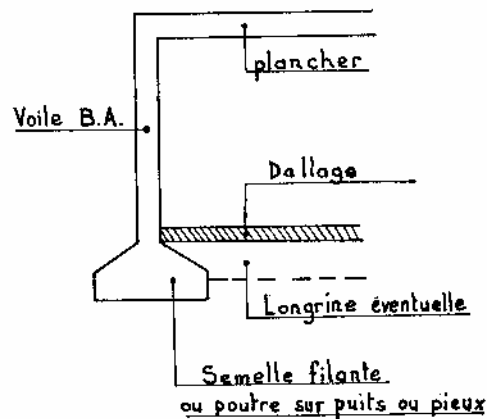


FIG. I.40.

Il arrive fréquemment que les voiles supportent les poteaux de la superstructure.

a) Si le voile est suffisamment épais pour recevoir le poteau, seules les armatures longitudinales du poteau seront prolongées jusqu'à la base de la semelle.

b) Si le voile est de faible épaisseur, on devra prévoir sur la hauteur du voile, non seulement les armatures longitudinales, mais également les cadres et étriers du poteau.

Qu'il s'agisse d'un voile sur semelle superficielle ou d'une poutre voile, reposant sur pieux ou puits, il est conseillé de prévoir, aussi bien dans le cas du voile épais que dans le cas du voile de faible épaisseur, suffisamment de « coutures » horizontales au droit du poteau. Ces « coutures » doivent pouvoir reprendre de part et d'autre du poteau un effort égal à  $\frac{P}{2}$ , sous contrainte voisine de la limite élastique ( $0,9\sigma_{en}$ ).

Généralement les barres horizontales prévues dans le voile suffisent (barres supérieures, intermédiaires et inférieures). Sinon quelques barres devraient être rajoutées; leur longueur variera suivant deux lignes à 45°.

Exemple :  $P = 150 \text{ t}$      $H = 2,50 \text{ m}$

$\sigma_{en} = 4\,200 \text{ bars}$      $0,9\sigma_{en} = 3\,780 \text{ bars}$

d'où 
$$\omega' = \frac{150\,000}{2 \times 3\,780} = 19,8 \text{ cm}^2.$$

Soit pour une hauteur de 2,50 m, 20 Tor 8 sur chaque face du voile.

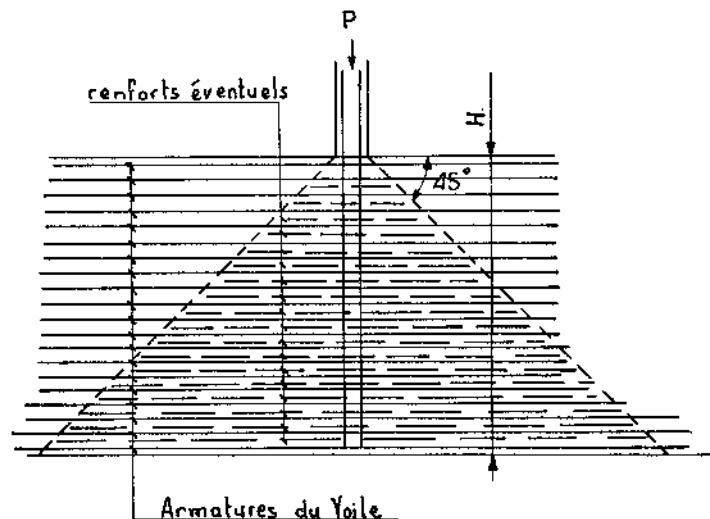


FIG. I.41.

REMARQUES :

1° Dans le cas d'un voile sur semelle superficielle, en fonction de l'écartement entre poteaux et de l'inertie du voile, on pourra, par la considération de la longueur élastique, déterminer si la contrainte est uniforme, ou non, sous la semelle.

2° Dans le cas d'un voile prenant appui sur des pieux ou puits et recevant une série de poteaux, le calcul sera mené comme s'il s'agissait d'une poutre continue, si la hauteur du voile est inférieure à la moitié de l'entr'axe entre points d'appui, ou bien comme une poutre voile, si la hauteur du voile est égale ou supérieure à la moitié de l'entr'axe entre points d'appui (voir méthode de calcul en annexes de C.C.B.A. 68).

On devra vérifier qu'au droit du pieu ou du puits, il y a suffisamment d'armatures de coutures pour reprendre la totalité de l'effort tranchant, compte tenu de la continuité.

En toute rigueur, il faut vérifier que les armatures horizontales traversant l'appui et suffisamment ancrées au-delà de l'appui peuvent reprendre sous contrainte admissible un effort :

$$T + \frac{M}{Z},$$

$M$  = Moment de continuité au droit de l'appui intervenant avec son signe.

$Z$  = Bras de levier du couple élastique.

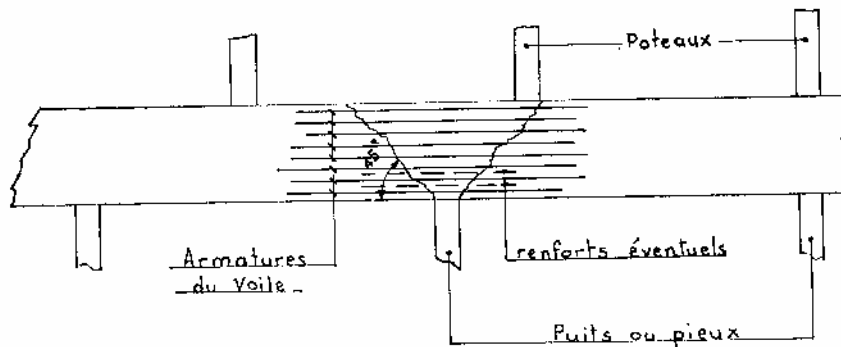


FIG. I.42.



## PLANCHERS

Les poutres et poutrelles d'un plancher peuvent être calculées en utilisant les méthodes classiques de la Résistance des Matériaux, ou bien en utilisant des méthodes simplifiées.

Il est intéressant de lire, avec attention, l'article 54,22 des règles C.C.B.A 68, concernant l'utilisation des méthodes exactes dans le bâtiment et de retenir en particulier que ces méthodes conduisent, le plus souvent, l'ingénieur à surestimer les moments sur appuis et à sous-estimer les moments en travée.

L'erreur provient de ce que généralement le projeteur ne tient pas compte de la variation du facteur  $EI$  le long de la ligne moyenne des poutres.

Ainsi, dans le cas très fréquent d'une poutre en T, formée d'une nervure associée à un hourdis, on attribue habituellement une largeur constante au hourdis, pour la détermination de l'inertie de la section, calculée en considérant le béton seul, supposé non fissuré. (La largeur de hourdis, alors prise en compte de part et d'autre de la nervure, est limitée au dixième de la portée libre, dans le cas de la poutre hyperstatique).

Il est certain que si de telles simplifications n'étaient pas admises, on se heurterait à des complications excessives.

Dès lors, « il est parfaitement légitime de substituer à de tels calculs dont la précision risque d'être illusoire, des règles simples, conformes aux usages courants des bureaux d'études et ayant reçu la sanction de l'expérience ».

Il faut préciser, avant même d'énoncer ces règles, que d'une façon générale, la portée retenue pour le calcul des éléments en B.A. est la portée libre entre nus intérieurs des appuis, (sauf évidemment le cas exceptionnel où il s'agit d'une poutre munie d'appareils d'appui).

### I. Planchers à surcharge modérée

Ces règles sont applicables aux éléments fléchis de poutres, poutrelles et dalles portant dans un seul sens.

La somme des surcharges variables (non pondérées), qui sont appliquées à ces planchers, est inférieure à *deux fois* la somme des charges permanentes.

Les éléments solidaires ont une même section constante dans les différentes travées. Le rapport des portées de deux travées quelconques est compris entre 0,8 et 1,25.

Cette méthode simplifiée néglige la rigidité à la flexion des poteaux supportant les poutres et la raideur à la torsion des poutres supportant les dalles ou les poutrelles.

Ces planchers correspondent aux planchers d'habitation, de bâtiments à usage de bureaux, de locaux d'enseignement et d'hospitalisation.

Le bon comportement des éléments dimensionnés en utilisant ces règles nous permet de constater l'excellente adaptation du béton.

**Principe de calcul.** Les charges transmises par les hourdis aux poutrelles, par les poutrelles aux poutres et par les poutres aux poteaux sont celles résultant de l'application de la règle forfaitaire suivante :

Discontinuité des différents éléments, sauf sur le premier appui intermédiaire d'une dalle, d'une poutrelle ou d'une poutre à deux travées où les réactions devront être majorées de 15 %.

S'il s'agit d'une dalle, d'une poutrelle ou d'une poutre à plus de deux travées, ces réactions seront majorées de 10 % sur le premier appui intermédiaire uniquement.

De même, dans le cas d'une travée de rive prolongée en console, on tiendra compte de l'effet console, sur cet appui, en admettant la discontinuité des travées au droit des poteaux voisins des poteaux de rive.

Après avoir défini l'intensité des charges et surcharges majorées sur chaque élément, il y a lieu de calculer, pour chacun de ces éléments, le moment maximal isostatique provoqué par ces charges et surcharges.

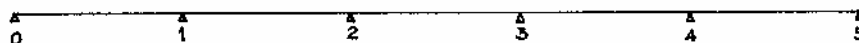


FIG. II.1.

Appelons  $m_1, m_2, m_3, m_4$  la valeur des moments sur les appuis 1, 2, 3, 4.

Les règles nous permettent de choisir le moment sur l'appui considéré, en fonction du plus grand moment isostatique  $M_0$  trouvé dans l'une des deux travées, située à droite et à gauche de cet appui.

La valeur absolue de chaque moment sur appui intermédiaire ne doit pas être inférieure à :

$0,6M_0$  dans le cas d'une poutre à deux travées ;

$0,5M_0$  dans le cas des appuis voisins de l'appui de rive d'une poutre à plus de deux travées ;

$0,4M_0$  dans le cas des autres appuis intermédiaires d'une poutre à plus de deux travées.

La deuxième condition permet de déterminer le moment en travée  $M_T$ , de l'élément considéré, en écrivant :

$$M_T + m_d \frac{x}{l} + m_g \frac{l-x}{l} \geq 1,15M_0.$$

En supposant que le moment maximum en travée soit assez voisin du milieu de celle-ci, il est admissible d'écrire cette formule :

$$M_T + \frac{m_g + m_d}{2} \geq 1,15M_0,$$

ici  $M_0$  est le moment isostatique maximal de la travée considérée.

$m_g$  et  $m_d$  sont les valeurs absolues des moments sur appuis situés à gauche et à droite de la travée considérée. (Ces moments ont été calculés comme indiqué précédemment).

La valeur trouvée pour  $M_T$ , moment maximal en travée, ne devra pas être inférieure à :

$0,5M_0$  dans le cas d'une travée intermédiaire ;

$0,6M_0$  dans le cas d'une travée de rive.

La valeur absolue du moment sur appui de rive, dépend des conditions d'encastrement. Le projecteur devra justifier par le calcul, le moment admissible en rive et l'exprimer en fonction de  $M_0$ , moment maximal isostatique de la travée contiguë. Ce moment pourra varier de zéro à  $0,4M_0$ .

Si toutefois, la valeur zéro était retenue sur l'appui de rive, une section de chapeaux correspondant à  $0,15M_0$  devra être prévue sur cet appui.

REMARQUE : La position du moment maximal peut être déterminée, en écrivant que la dérivée de l'expression du moment fléchissant :

$$M = \frac{px(l-x)}{2} - m_d \frac{x}{l} - m_g \frac{(l-x)}{l},$$

s'annule, c'est-à-dire pour :

$$x = \frac{l}{2} + \frac{m_g - m_d}{pl}.$$

On peut, ainsi, déterminer  $M_T$  en portant cette valeur de  $x$ , dans la formule :

$$M_T + m_d \frac{x}{l} + m_g \frac{(l-x)}{l} \geq 1,15M_0.$$

Cette méthode simplifiée est certes très rapide. Elle évite, à l'ingénieur, des calculs assez longs par suite de l'étude des cas de surcharges défavorables.

Les valeurs minimales, choisies pour les moments, imposent le tracé de l'enveloppe des moments (en adoptant toutefois des valeurs inférieures pour les moments sur appuis et supérieures pour les moments en travée). Les phénomènes d'adaptation du béton expliquent qu'aucun désordre n'a été enregistré dans les constructions, à surcharges modérées, où ces règles ont été appliquées.

Les efforts tranchants peuvent être calculés en faisant abstraction de la continuité, sauf dans le cas des travées de rive où il est tenu compte, soit des moments évalués, soit des majorations forfaitaires de 15 % et 10 % utilisées suivant qu'il s'agit d'éléments à deux travées ou à plus de deux travées.

Cette méthode peut être également appliquée lorsque le rapport des portées des éléments est inférieure à 0,8 ou supérieure à 1,25.

Prenons le cas d'une petite travée comprise entre deux travées beaucoup plus grandes.

a) Travée intermédiaire



FIG. II.2.

Il suffit de porter sur l'appui *B* la plus petite des valeurs admissibles pour le moment sur appui, soit dans le cas de la figure représentée ci-dessus  $0,5 M_0$  (ici  $M_0$  correspond à la travée *AB*), puis de porter sur l'appui *C* la plus petite des valeurs admissibles, c'est-à-dire dans le cas traité  $0,4 M_0$  (ici  $M_0$  correspond au moment maximal isostatique de *CD*). Ayant obtenu la ligne de fermeture des moments sur appui entre *B* et *C*, on devra porter à partir de cette ligne le moment isostatique maximal de la travée *BC*.

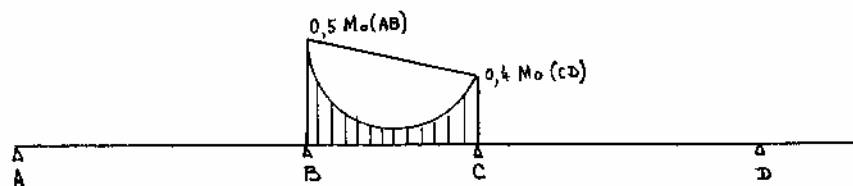


FIG. II.3.

Les chapeaux prévus de *B* en *C* devront avoir une section correspondant au moment résultant (partie hachurée de la figure ci-dessus).

Les moments en travée des poutres  $AB$  et  $CD$  seront calculés comme s'il s'agissait du cas où le rapport des portées est compris entre 0,8 et 1,25, c'est-à-dire à partir de l'équation.

$$M_T + m_d \frac{x}{l} + m_g \frac{(l-x)}{l} \geq 1,15M_0 \text{ (} AB \text{ ou } CD \text{ suivant le cas) .}$$

La travée  $BC$  sera armée à la partie inférieure pour un moment correspondant à  $0,5M_0$  (0,5 fois le moment isostatique maximal de  $BC$ ).

b) Travée de rive

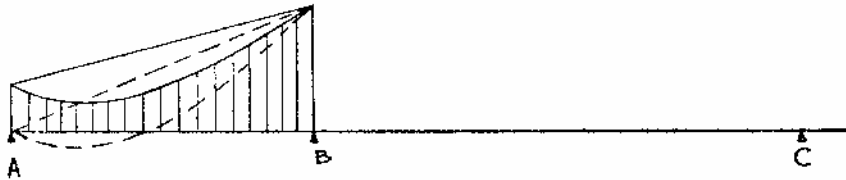


FIG. II.4.

Il suffit dans ce cas de porter en  $A$  la valeur du moment admissible compte tenu de l'encastrement possible. Nous avons vu que ce moment peut varier de zéro à  $0,4M_0$  ( $AB$ ).

En  $B$ , on devra porter la valeur du moment admissible, c'est-à-dire  $0,6M_0$  ( $BC$ ) s'il n'y a que deux travées ou  $0,5M_0$  ( $BC$ ) s'il y a plus de deux travées.

Il est, dès lors, possible de tracer la ligne de fermeture  $AB$  puis de porter à partir de cette ligne le moment isostatique maximal de  $AB$ . Les chapeaux prévus de  $A$  en  $B$  devront avoir une section correspondant au moment résultant (partie hachurée de la figure).

Comme précédemment les armatures inférieures de la travée  $AB$  devront correspondre à un moment  $0,5M_0$  (0,5 fois le moment isostatique maximal de  $AB$ ), si la poutre a plus de deux travées ou  $0,6M_0$  ( $AB$ ) si la poutre n'a que deux travées.

Le moment en travée de  $BC$  devra satisfaire à l'équation

$$M_T + \frac{m_g + m_d}{2} \geq 1,15M_0 \text{ (} BC \text{),}$$

ou mieux 
$$M_T + m_d \frac{x}{l} + m_g \frac{(l-x)}{l} \geq 1,15M_0 \text{ (} BC \text{) .}$$

Lorsque le rapport des travées est inférieur à 0,8 ou supérieur à 1,25, on déterminera les efforts tranchants en tenant compte des moments évalués.

L'utilisation de la méthode forfaitaire peut être étendue au calcul des poutres, poutrelles ou dalles portant dans un seul sens, dans le cas où l'inertie de ces éléments varie d'une travée à l'autre.

Toutefois, la variation autorisée est limitée, aussi bien en plan qu'en élévation, à la formation, à travers l'appui de l'élément, d'un gousset fictif  $1/3$ .

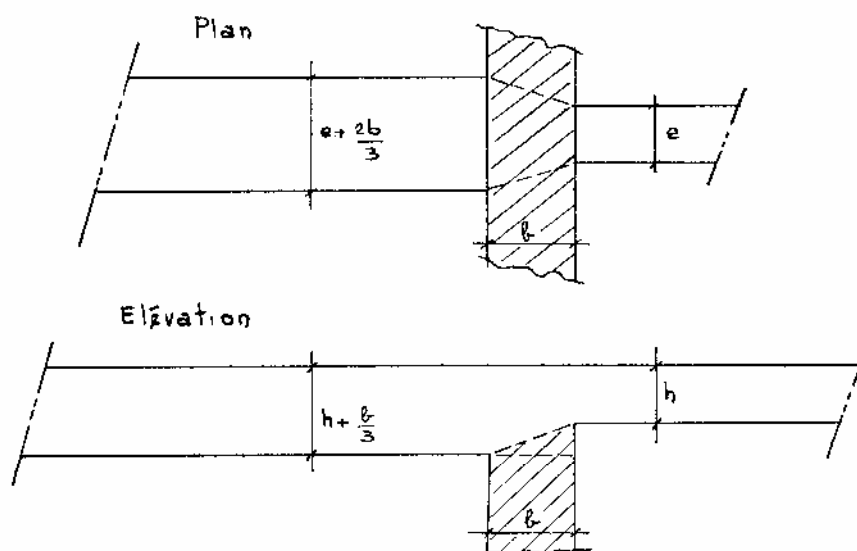


FIG. II.5.

On doit vérifier dans l'un et l'autre cas que les isostatiques de compression, provenant du moment sur appui choisi, peuvent être équilibrées sous contraintes admissibles, par le béton de la partie inférieure des éléments situés de part et d'autre de l'appui considéré.

La section de chapeaux, disposés sur cet appui, doit être déterminée en fonction de la hauteur de poutre la plus faible. Il est bien certain, alors, que le moment résistant de l'élément le plus haut est supérieur à celui de l'élément voisin, non pas dans le rapport des raideurs comme prévu par la Résistance des Matériaux, mais simplement dans le rapport des hauteurs.

## II. Planchers à forte surcharge

« La méthode approchée pour le calcul des poutres continues solidaires (ou non) des poteaux qu'ils supportent, sous l'action des charges verticales, est due à Caquot. Elle tient compte implicitement des variations d'inertie

résultant de la présence des tables de compression en travée et de la réduction des moments sur appuis qui en est la conséquence ».

Après avoir reconnu expérimentalement que pour les constructions monolithiques en béton armé, sur un appui déterminé, l'action des charges éloignées est pratiquement nulle, Caquot a estimé qu'il était suffisant et correct de considérer, pour calculer le moment sur appui, l'effet des charges appliquées, à droite et à gauche de l'appui considéré, en fixant la position des foyers à gauche et à droite de l'appui considéré à  $0,8 l$ .

1° Dans le cas d'une charge uniformément répartie sur une poutre continue d'inertie constante, l'application de la formule des trois moments s'écrit pour une poutre à deux travées :

$$M_0 l_g + 2M_1(l_d + l_g) + M_2 l_d = \frac{p_1 l_g^3}{4} + \frac{p_2 l_d^3}{4}$$

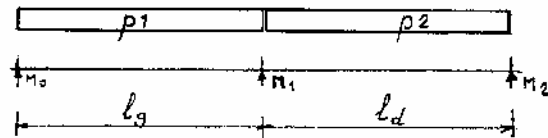


FIG. II.6.

Si  $M_0 = M_2 = 0$

Nous obtenons 
$$M_1 = \frac{p_1 l_g^3 + p_2 l_d^3}{8(l_g + l_d)}$$

Caquot a remplacé le facteur 8 du dénominateur par le facteur 8,5 pour tenir compte de la variation de  $EI$  le long de la poutre.

On a ainsi la formule de Caquot

$$M_1 = \frac{p_1 l_g^3 + p_2 l_d^3}{8,5(l_g + l_d)}$$

Dans le cas où  $l_g$  (ou bien  $l_d$ ) est une poutre intermédiaire, on remplacera, dans cette formule,  $l_g$  par  $0,8 l_g$  (ou bien  $0,8 l_d$ ).

Par contre, si  $l_g$  est une poutre d'extrémité, reposant librement, sur l'appui de rive, la valeur de  $l_g$  restera inchangée, puisque, dans ce cas, le foyer se situe sur l'appui de rive et non plus à  $0,8 l$  de l'appui, au droit duquel on recherche le moment de continuité.

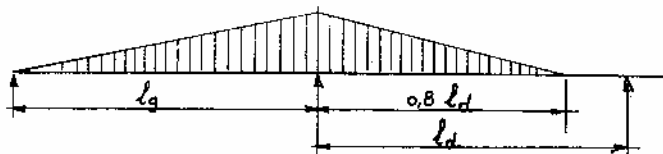


FIG. II.7.

2° Dans le cas d'une charge concentrée, la formule des trois moments s'écrit :

$$M_0 l_g + 2M_1(l_g + l_d) + M_2 l_d = \frac{Pa(l_d - a)(2l_d - a)}{l_d},$$

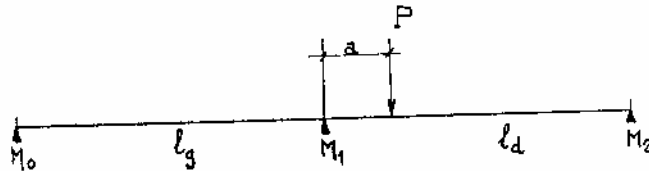


FIG. II.8.

et si  $M_0 = M_2 = 0$ ,

On obtient 
$$M_1 = \frac{Pa(l_d - a)(2l_d - a)}{2l_d(l_g + l_d)}.$$

Caquot a remplacé cette formule par

$$M_1 = \frac{Pl_d^2}{l_g + l_d} k,$$

avec 
$$k = \frac{1}{2,125} \frac{a}{l_d} \frac{l_d - a}{l_d} \frac{2l_d - a}{l_d}.$$

C'est la même formule, où le facteur 2 a été remplacé par le facteur 2,125 au dénominateur, et où il y aura lieu de prendre pour  $l_g$  ou  $l_d$  les valeurs  $0,8l_g$  ou  $0,8l_d$  s'il s'agit d'une poutre ayant un moment sur appui à chacune de ses extrémités, ou bien de conserver les valeurs  $l_g$  et  $l_d$  s'il s'agit d'une poutre de rive librement appuyée à l'une de ses extrémités.

Le coefficient  $k$  est donné par une échelle en fonction des valeurs  $\frac{a}{l_d}$  ou  $\frac{a}{l_g}$ . Pour ces deux rapports  $l_d'$  et  $l_g'$  sont les portées des poutres, corrigées après application du coefficient 0,8 (ou 1 pour la travée de rive simplement appuyée à une extrémité).

3° Dans le cas de la charge quelconque

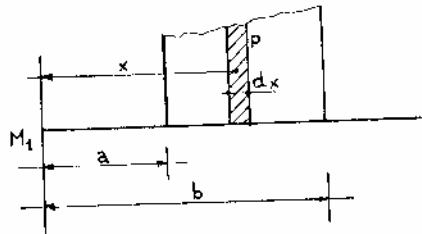


FIG. II.9.



On obtient 
$$M_1 = \frac{l_d'^2}{l_d' + l_g'} \int_a^b k p \, dx,$$

où  $k$  a la valeur 
$$\frac{1}{2,125} \frac{x}{l_d'} \frac{l_d' - x}{l_d'} \frac{2l_d' - x}{l_d'}.$$

Ces formules sont également appliquées aux **poutres dont l'inertie varie de part et d'autre de l'appui.**

En posant 
$$K_d = \frac{I_d}{l_d'} \quad \text{et} \quad K_g = \frac{I_g}{l_g'}$$

On obtient la formule :

$$M = \frac{p_1 l_g'^2 K_d + p_2 l_d'^2 K_g}{8,5(K_g + K_d)},$$

dans le cas de deux charges  $p_1$  et  $p_2$  uniformément réparties de part et d'autre de l'appui considéré.

Avec  $I_g = I_d = I$  cette formule devient

$$M = \frac{p_1 l_g'^2 \frac{I}{l_d'} + p_2 l_d'^2 \frac{I}{l_g'}}{8,5 \left( \frac{I}{l_g'} + \frac{I}{l_d'} \right)},$$

ce qui nous donne bien la formule initiale.

De même pour la charge concentrée la formule s'écrit :

$$M = \frac{K_d k_g P_g l_g' + K_g k_d P_d l_d'}{K_d + K_g}.$$

Les règles de Caquot peuvent être étendues au cas des **poutres qui sont solidaires des poteaux qui les supportent.**

Il suffit pour cela d'utiliser deux facteurs remarquables :

$$\frac{pl'^2}{8,5}, \text{ d'une part, qui correspond à } \frac{pl^2}{13,2} \text{ avec } l' = 0,8l$$

et  $kPl'$ , d'autre part, qui correspond à  $0,122 Pl$ , lorsque  $P$  est au milieu de la poutre (puisque pour  $\frac{0,5l}{0,8l} = \frac{a}{l}$  la valeur de  $k$  est de  $0,152$ ).

Ces deux facteurs qui seraient respectivement dans le cas de l'encastrement parfait  $\frac{-pl^2}{12}$  et  $-0,125Pl$  permettent d'effectuer la répartition des moments dans les nœuds.

Ainsi au droit d'un nœud, à partir des deux facteurs remarquables, ou moments caractéristiques :

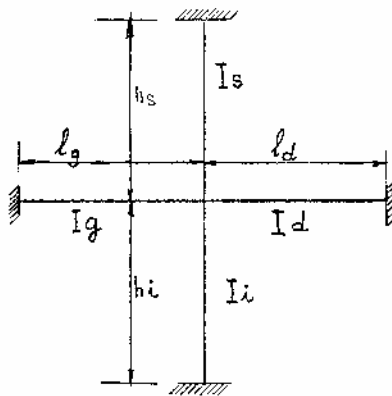


FIG. II.10.

$$M'_g = \frac{p_1 l'_g{}^2}{8,5} + kP_1 l'_g$$

et

$$M'_d = \frac{p_2 l'_d{}^2}{8,5} + kP_2 l'_d.$$

On raisonnera par superposition :

a) Le moment  $M'_d$  dans la barre  $l_d$ , est équilibré par quatre moments répartis dans les quatre barres proportionnellement aux raideurs

$$K_d = \frac{I_d}{l'_d}, \quad K_g = \frac{I_g}{l'_g}, \quad K_s = \frac{I_s}{h'_s} \quad \text{et} \quad K_i = \frac{I_i}{h'_i}.$$

Nous avons ici :

$$l'_d = 0,8l_d,$$

$$l'_g = 0,8l_g,$$

$$h'_s = 0,8h_s,$$

$$h'_i = 0,8h_i.$$

Ces quatre moments répartis sont respectivement :

$$m_1 = \frac{M'_d K_d}{K_d + K_g + K_i + K_s},$$

$$m_2 = \frac{M'_d K_s}{K_d + K_g + K_i + K_s},$$

$$m_3 = \frac{M'_d K_g}{K_d + K_g + K_i + K_s},$$

$$m_4 = \frac{M'_d K_i}{K_d + K_g + K_i + K_s},$$

de même avec  $M'_g$

$$m_5 = \frac{M'_g K_g}{K},$$

$$m_6 = \frac{M'_g K_s}{K},$$

$$m_7 = \frac{M'_g K_d}{K},$$

$$m_8 = \frac{M'_g K_i}{K},$$

en posant

$$K = K_d + K_g + K_i + K_s.$$

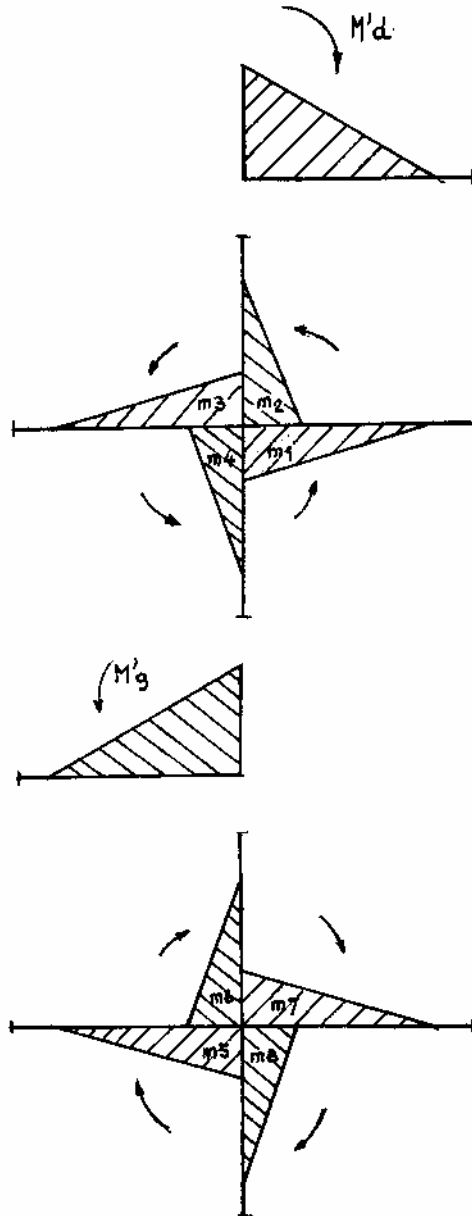


FIG. II.11.

La superposition des deux systèmes donne :

a) pour la barre de droite

$$M_d = M'_d - m_1 + m_7 = M'_d - \frac{M'_d K_d}{K} + \frac{M'_g K_d}{K} = M'_d \left(1 - \frac{K_d}{K}\right) + \frac{M'_g K_d}{K},$$

b) pour la barre de gauche

$$M_g = M'_g - m_5 + m_3 = M'_g - \frac{M'_g K_g}{K} + \frac{M'_d K_g}{K} = M'_g \left(1 - \frac{K_g}{K}\right) + \frac{M'_d K_g}{K},$$

c) pour le poteau supérieur

$$M_s = m_2 - m_6 = \frac{M'_d K_s}{K} - \frac{M'_g K_s}{K} = \frac{K_s}{K} (M'_d - M'_g),$$

d) pour le poteau inférieur

$$M_i = m_4 - m_8 = \frac{M'_d K_i}{K} - \frac{M'_g K_i}{K} = \frac{K_i}{K} (M'_d - M'_g).$$

*Calcul des efforts tranchants* : Pour déterminer les effets des surcharges variables sur un élément de plancher, on considère l'application de ces surcharges sur les deux travées d'éléments transmettant les efforts à l'élément porteur envisagé et situées de part et d'autre de ce dernier ; les réactions correspondantes peuvent être calculées en prenant en compte les moments de continuité évalués par la méthode approchée que nous venons de définir (en négligeant la solidarité avec les poteaux). Il en est de même en ce qui concerne les charges permanentes.

**Principe de dimensionnement des Poutres - Nervures - Dalles.** Les épaisseurs minimales à retenir pour des charges modérées afin d'obtenir une flèche admissible sont les suivantes

Valeur de  $(h-d')$  ou hauteur utile

- |                           |  |
|---------------------------|--|
| a) Poutre                 | $\frac{1}{15} \times$ portée libre pour la travée indépendante                 |
|                           | $\frac{1}{17}$ à $\frac{1}{18} \times$ portée pour les travées continues       |
| b) Nervures à corps creux | $\frac{1}{20} \times$ portée libre pour la travée indépendante                 |
|                           | $\frac{1}{22}$ à $\frac{1}{23} \times$ portée libre pour les travées continues |
| c) Dalles sur deux appuis | $\frac{1}{35} \times$ portée libre pour la travée indépendante                 |
|                           | $\frac{1}{40}$ à $\frac{1}{42} \times$ portée libre pour les travées continues |

d) Dalles sur quatre appuis  $1 \leq \frac{a}{b} \leq 2,5$

$$\frac{a}{b} = 1 \quad \frac{1}{50} \times \text{portée libre pour la dalle reposant librement}$$

$$\frac{1}{55} \times \text{portée libre pour les dalles continues}$$

$$\frac{a}{b} = 1,5 \quad \frac{1}{45} \times \text{plus petite portée libre pour la dalle reposant librement}$$

$$\frac{1}{50} \times \text{plus petite portée libre pour les dalles continues}$$

$$\frac{a}{b} = 2 \quad \frac{1}{40} \times \text{plus petite portée libre pour la dalle reposant librement}$$

$$\frac{1}{45} \times \text{plus petite portée libre pour les dalles continues}$$

$$\frac{a}{b} = 2,5 \quad \frac{1}{35} \times \text{plus petite portée libre pour la dalle reposant librement}$$

$$\frac{1}{40} \times \text{plus petite portée libre pour les dalles continues}$$

NOTA : Pour les poutres et nervures déterminer l'épaisseur  $b$  en vérifiant le cisaillement, à l'appui, sous l'effet de l'effort tranchant de la travée indépendante ; pour les dalles vérifier que l'épaisseur choisie permet d'obtenir un cisaillement, à l'appui, inférieur à  $1,15\sigma_b$ , afin d'éviter l'emploi d'étriers.

### III. Poutrelles et hourdis répartiteur

La solidarisation transversale d'un système de poutres, ou poutrelles parallèles, est généralement assurée par un hourdis continu, lié à ce système par des coutures (cadres ou épingles ancrés dans le hourdis).

Entre plusieurs poutres parallèles, on peut également trouver un plancher (à nervures et corps creux, ou à caissons) qui permet, compte tenu des liaisons de ce plancher avec les poutres, d'assurer une solidarisation transversale entre les différents éléments.

Il arrive fréquemment, en bâtiment, qu'une poutre ait à supporter, sur toute sa longueur ou sur une partie de sa longueur, une murette permettant la séparation entre deux locaux, ou bien encore, qu'une poutre ait à reprendre la charge ponctuelle provenant d'un poteau supportant le plancher supérieur. Dans de tels cas, il est trop pessimiste de considérer que la poutre directement sollicitée « encaisse » la totalité de la charge appliquée et de négliger la raideur du hourdis ou du plancher (solidaire de la poutre), qui permet de transporter une partie de cette charge, sur les éléments voisins.

(1) Voir en annexe le rappel concernant la poutre sur appui élastique.

Pour traiter ce problème, nous rappelons que dans l'étude de la poutre (à moment d'inertie constant), sur appui élastique, sollicitée par une charge concentrée  $P$ , en posant :

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}},$$

la pression unitaire sur l'appui est égale à :

$$p = \frac{kP\alpha}{2},$$

par définition,  $K$  est tel que si  $y$  est l'enfoncement en un point quelconque, on a, par unité de longueur :

$$p = Ky$$

### 1. Poutre infinie soumise à une charge concentrée $P$ (fig. II.12)

Dans ce cas, on a au droit de la charge :

$$k = 1$$

d'où la pression unitaire :  $p = \frac{P\alpha}{2}$ .

On remarque sur les diagrammes qui suivent que :

a) la pression est nulle pour  $\alpha x = \frac{3\pi}{4}$ ,

b) le moment au droit de la charge est égal à :  $M_0 = \frac{P}{4\alpha}$ ,

c) l'effort tranchant au droit de la charge a pour valeur  $T_0 = \pm \frac{P}{2}$ .

Ces diagrammes se confondent avec les lignes d'influence correspondantes en 0, point d'application de la charge.

### 2. Poutre demi-infinie soumise à une charge concentrée $P$

Lorsque la charge  $P$  est à l'extrémité, on a :  $k = 4$

c'est-à-dire que la pression est quatre fois plus grande que précédemment.

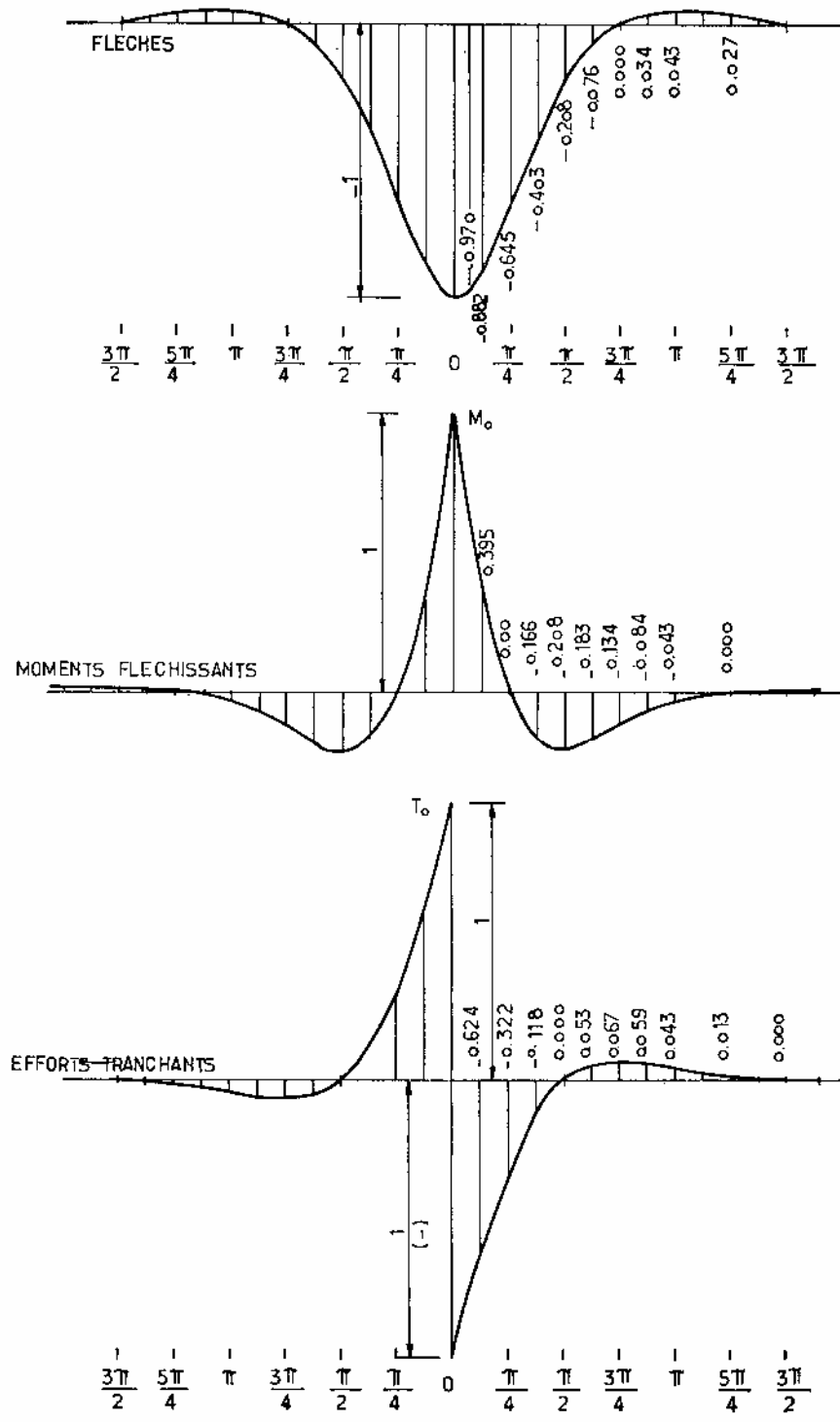


FIG. II.12.

On a ainsi :

$$p = 2P \cdot \alpha$$

Cette pression est nulle pour  $\alpha x = \frac{\pi}{2}$ .

Le moment maximum (négatif) se situe à  $\alpha x = \frac{\pi}{4}$ , et vaut :

$$M = -0,3223 \frac{P}{\alpha}$$

Ce moment est nul au droit de la charge.

L'effort tranchant, au droit de la charge, est égal à :

$$T_0 = -P$$

(Voir sur le diagramme qui suit, les différentes valeurs de  $k$  pour plusieurs positions de la charge (fig. II.13) :

$$\alpha x \rightarrow 0 \quad 0,4 \quad 1 \quad \frac{\pi}{2} \quad 2,4.$$

Avec — Charge  $P$  à une distance  $\frac{\pi}{4\alpha}$  de l'extrémité libre

$$k = 1,29$$

— Charge  $P$  à une distance  $\frac{\pi}{2\alpha}$  de l'extrémité libre

$$k = 1,043$$

— Charge  $P$  à une distance  $\frac{3\pi}{4\alpha}$  de l'extrémité libre

$$k = 1$$

### 3. Exemples

Nous allons utiliser ces résultats dans quelques cas précis qui se présentent fréquemment lorsque l'on étudie des planchers à poutrelles parallèles.

1° *Poutrelle intermédiaire librement posée, recevant une charge  $p$  uniformément répartie sur toute sa longueur.*

Si on appelle  $p_1$  la charge uniformément répartie « équivalente », c'est-à-dire celle qui ferait prendre à la poutrelle directement sollicitée,



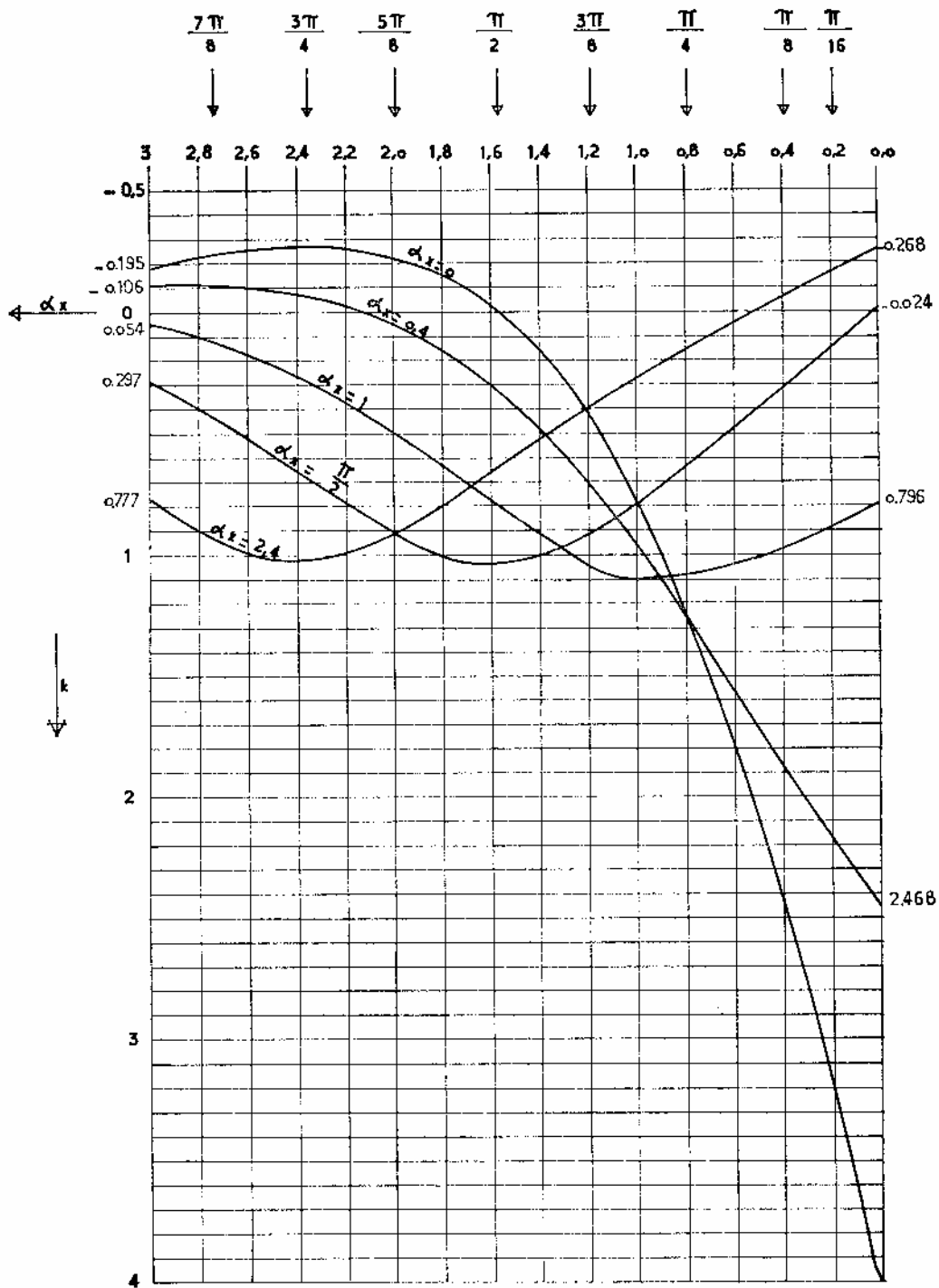


FIG. II.13.

(compte tenu de la raideur du hourdis qui liaisonne toutes les poutrelles du plancher) une flèche égale à la flèche réelle, à mi-portée :

on a 
$$p_1 = Ky$$

Sous l'effet de  $p_1$  la flèche au milieu de la poutrelle chargée est égale à :

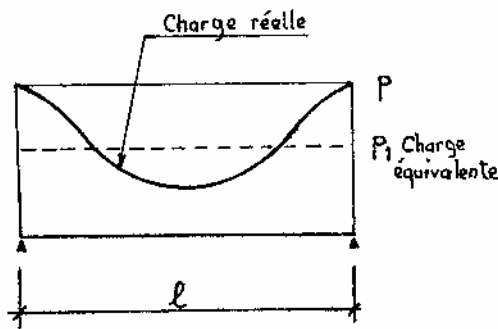


FIG. II.14.

$$y = \frac{5p_1 L^4}{384EI}$$

$L$  = longueur de la poutrelle

$I$  = moment d'inertie de la poutrelle en T

Ce qui donne :

$$K = \frac{384EI}{5L^4}$$

Dans la mesure où  $p_1$  correspond à une charge par mètre linéaire de poutrelle, autrement dit, si le mètre a été choisi comme unité, on calculera le moment d'inertie d'une bande de hourdis répartiteur de 1 mètre de largeur. Soit  $i$  ce moment d'inertie.

On a alors : 
$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{K}{4Ei}}$$

Soit : 
$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{384I}{20iL^4}} = \frac{2,09}{L} \sqrt[4]{\frac{I}{i}}$$

En appelant  $e$  l'entr'axe des poutrelles et  $k_m$  la valeur moyenne du coefficient  $k$  dans l'intervalle  $e$ , on aura :

$$p_1 = \frac{k_m p \alpha e}{2}$$

Prenons l'exemple précis d'un plancher constitué de poutrelles parallèles à l'entr'axe de 2,00 m (section 20 × 40) avec un hourdis de 10 cm d'épaisseur. Supposons qu'une poutrelle intermédiaire reçoive une murette correspondant à une charge de 1 tonne par mètre linéaire et que la longueur des poutrelles, soit de 7 m.

Nous avons  $I = 245\ 000\text{ cm}^4$   
 d'où  $i = 8\ 330\text{ cm}^4$   
 $\alpha = 0,69$

La flèche est nulle pour

$$x = \frac{3\pi}{4\alpha} = 3,40\text{ m.}$$

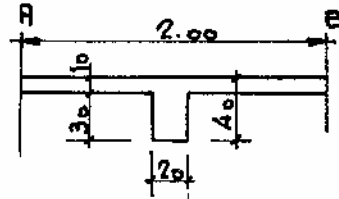


FIG. II.15.

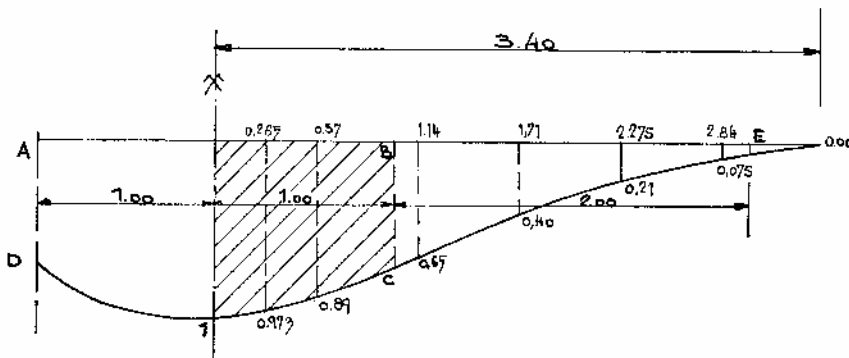


FIG. II.16.

On peut, après avoir tracé le diagramme, déterminer  $k_m$ , en calculant l'aire  $ABCD$  par la formule de Simpson. Supposons que nous obtenions par exemple  $k_m = 0,9$  dans l'intervalle  $AB$  (largeur de 2,00 m correspondant à l'entr'axe des poutrelles), on aurait alors :

$$p_1 = \frac{0,9 \times 1 \times 0,69 \times 2}{2} = 0,620\text{ t p.m.l.}$$

Pour calculer la charge par mètre linéaire, sollicitant la poutrelle voisine, dans l'intervalle  $BE$  (largeur de 2,00 m) on calculera, comme précédemment, la valeur correspondante de  $k_m$  en se servant du diagramme.

2° *Poutre intermédiaire librement posée, recevant une charge concentrée P, en son milieu.*

Si  $P_1$  est la charge qui sollicite la poutre, la flèche au milieu est égale à :

$$y = \frac{P_1 L^3}{48EI},$$

$\left( P_1 \text{ est, en fait, une charge équivalente de la forme } \frac{2P_1 \cdot l^3}{\pi} \right)$

$L$  = longueur de la poutre

$I$  = inertie de la poutre en T

(\*) Voir remarque 3 de la page 54.

De la relation  $P_1 = Ky$

on tire 
$$K = \frac{48EI}{L^3}.$$

En appelant  $i$  le moment d'inertie de la bande de hourdis correspondant à la charge  $P$ , conformément au dessin ci-après :

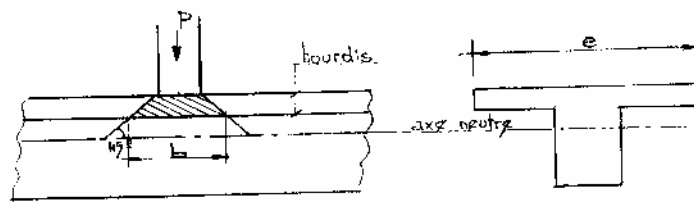


FIG. II.17.

on obtient : 
$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{48EI}{4EiL^3}} = 1,86 \sqrt[4]{\frac{I}{iL^3}}.$$

Cette valeur nous permet de tracer le diagramme de déformation et de définir le coefficient moyen  $k_m$  dans l'intervalle  $e$  égal à l'entr'axe des poutres.

La valeur de  $P_1$  est alors donnée par :

$$P_1 = \frac{k_m P e \alpha}{2}.$$

Ainsi si  $P = 10$  t

$$L = 9$$
 m

$$I = 245\,000$$
 cm<sup>4</sup>

$$i = 4\,165$$
 cm<sup>4</sup> (dans le cas où  $b = 50$  cm)

$$e = 2$$
 m

On obtient :

$$\alpha = 1,86 \sqrt[4]{\frac{58,8}{729}} = 1.$$

Supposons que l'intégration numérique nous ait permis d'obtenir (fig. II.18)

$$k_m = 0,75$$

on aurait 
$$P_1 = \frac{0,75 \times 10 \times 2 \times 1}{2} = 7,5$$
 t.

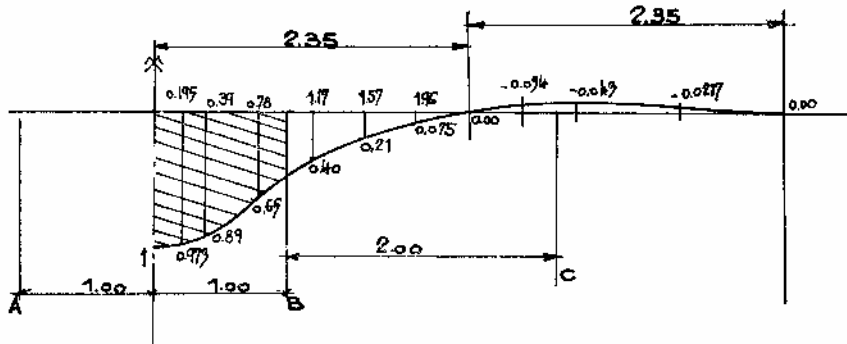


FIG. II.18.

C'est ensuite la valeur de  $k_m$  obtenue de B en C (compte tenu du changement de signe à 2,35 m de la charge) qui permettra de déterminer la charge sollicitant la poutre voisine.

Il est évident que le calcul peut être effectué pour n'importe quelle position de P sur la poutre. Il suffira de calculer la flèche, en ce point, sous l'effet de  $P_1$  et d'en déduire la valeur de  $\alpha$ .

3° Dans le cas d'une poutre ou d'une poutrelle intermédiaire parfaitement encastree à ses extrémités, recevant une charge uniforme  $p$  par mètre linéaire, on a, en appelant  $p_1$  la charge résiduelle sur la poutrelle après intervention du hourdis ( $p_1$  est une charge équivalente).

$$y = \frac{5p_1L^4}{384EI} - \frac{ML^2}{8EI}, \text{ (flèche au milieu)}$$

avec  $M = \frac{p_1L^2}{12},$

soit  $y = \frac{p_1L^4}{384EI},$

d'où  $\alpha = \sqrt[4]{\frac{384EI}{4EiL^4}} = \frac{3,12}{L} \sqrt[4]{\frac{I}{i}}.$

La même méthode peut être utilisée pour obtenir la valeur de  $\alpha$  pour divers degrés d'encastrement des poutres ou poutrelles sur leurs appuis.

REMARQUES :

— Dans le cas où une série de poutrelles parallèles est sollicitée par un système de charges ponctuelles, on devra superposer les effets de ces charges sur les différentes poutrelles, en fonction de leur position respective.

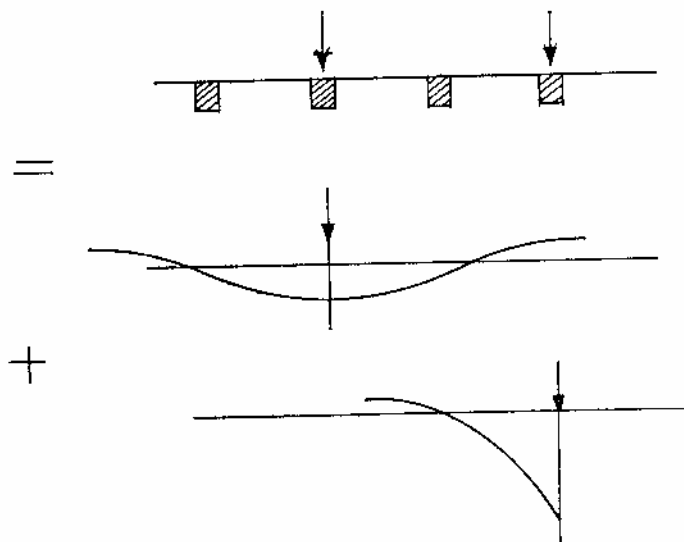


FIG. II.19.

— Si une charge ponctuelle est appliquée sur le hourdis, entre deux poutrelles parallèles, on pourra décomposer cette charge, sur chacune des deux poutrelles, comme si le hourdis était articulé au droit des poutrelles.

— Dans le cas de poutres parallèles où l'une d'entre elles est sollicitée par une charge concentrée, il est nécessaire de développer cette charge en série de Fourier le long de la poutre, puis, de découper le hourdis en bandes perpendiculaires à la direction de la poutre ; chaque bande est affectée d'un coefficient de proportionnalité  $K$  liant, dans le système élastique la pression  $p$  à l'enfoncement  $y$ , de sorte que  $p = Ky$  et on peut ainsi définir l'étalement de la charge (qui intéresse chaque bande au droit de la poutre) sur toutes les poutres parallèles.

Ce type de calcul est largement développé dans l'ouvrage de l'auteur *Calcul des ossatures*, Eyrolles 1975, en particulier au chapitre I-B.

— Nous n'avons pas tenu compte, dans la méthode exposée, de la raideur à la torsion des poutres ou poutrelles ; elle est généralement faible et pourra être négligée.

Dans le cas particulier où certaines poutres présentent une bonne raideur à la torsion, il est possible de tenir compte de ce facteur, en opérant comme suit :

- a) le calcul est mené en première phase comme nous venons de l'exposer.
- b) le diagramme des pressions, ainsi défini, nous permet de calculer la pente du hourdis sur les poutres, voisines de la poutre directement

sollicitée ; on suppose, pour l'instant, que ces poutres n'ont subi aucune rotation.

c) on fait agir au droit de ces poutres, sur les bandes de hourdis, des couples  $\pm C_i$ , symétriquement par rapport à la poutre chargée. Il faut écrire qu'au droit d'une poutre, la rotation de torsion de la poutre soumise au couple  $C_i$ , majorée de la rotation de flexion du hourdis soumis à tous les couples  $-C_i$ , est précisément égale à la pente du hourdis avant application des couples  $\pm C_i$ .

d) les valeurs de  $C_i$  nous permettent ensuite de déterminer la pression unitaire le long de la bande de hourdis considérée, donc au droit de chaque poutre.

Le formulaire « Courtand et Lebel » donne la valeur de la pente d'un hourdis infini ou demi-infini, sur appui élastique, lorsqu'il est sollicité par une charge  $P$  ou par un couple  $C$ . Le chapitre III de cet ouvrage permet le calcul de la rotation de torsion d'une poutre soumise à un couple.

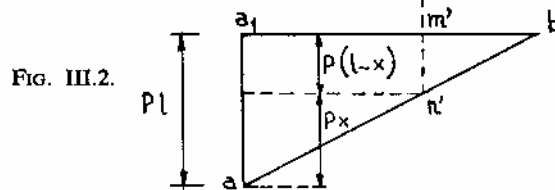
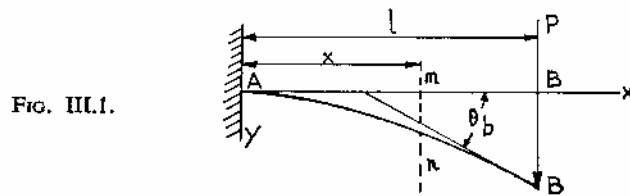
CHAPITRE III

RAPPELS DE RÉSISTANCE  
DES MATÉRIAUX

I. Calcul des rotations et des déplacements  
Méthode du moment des aires\*

Poutres à inertie constante

1° Déformation d'une poutre en porte-à-faux par la méthode du moment des aires



\* Voir tableau de l'annexe 1 donnant le diagramme du moment, son aire et son centre de gravité.



Le diagramme du moment de flexion d'une poutre en porte-à-faux supportant une charge concentrée à son extrémité (fig. III.1), est représenté sur la figure III.2. La tangente à l'encastrement  $A$  étant égale à zéro, les ordonnées des points de la déformée, comptées à partir de cette tangente, constituent les déformations réelles. L'angle  $\theta_B$  que fait la tangente en  $B$  à la déformée, avec la tangente en  $A$ , est appelée déformation angulaire de  $B$  par rapport à  $A$ .

Pour une section  $mn$ , la déformation angulaire, relativement à  $A$ , est égale à l'aire  $m'n'aa_1$  de la figure III.2 divisée par  $EI$ . Dans le cas des courbes plates comme le sont les déformées des poutres, on peut confondre la déformation angulaire avec la pente de la déformée et l'on obtient :

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{Pl^2}{2EI} \left[ 1 - \frac{(l-x)^2}{l^2} \right].$$

La déformation  $y$  à l'aplomb de la section considérée est égale au moment de l'aire  $m'n'aa_1$  par rapport à  $m'n'$  divisé par  $EI$ . Cette aire peut être décomposée en un rectangle et un triangle indiqués sur la figure III.2, de sorte que

$$y = \frac{1}{EI} \left[ P(l-x) \frac{x^2}{2} + \frac{Px^2}{2} \frac{2x}{3} \right] = \frac{P}{EI} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

À l'extrémité  $B$  : dans le cas de la figure III.1, nous avons pour la rotation :

$$\theta_B = Pl \frac{l}{2} \frac{1}{EI} = \frac{Pl^2}{2EI}.$$

Pour calculer la flèche, on divise par  $EI$ , le moment de l'aire  $aba_1$  par rapport à la verticale menée par  $b$ , ce qui donne :

$$y_B = Pl \frac{l}{2} \frac{2l}{3} \frac{1}{EI} = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

*Exemple 1* : Dans le cas d'un porte-à-faux, supportant une charge concentrée  $P$ , appliquée à la distance  $c$  de l'encastrement (fig. III.3), le diagramme du moment de flexion prend la forme indiquée sur la figure III.4. Pour les sections à droite de la charge, le moment de flexion et la courbure sont nuls ; cette partie de poutre reste donc rectiligne. La pente est constante et égale à la pente en  $D$ , c'est-à-dire à

$$\frac{Pc^2}{2EI}.$$

La déformation en une section  $mn$ , est égale au moment de l'aire du triangle  $aa_1d$  par rapport à la verticale  $m'n'$  divisée par  $EI$ , ce qui donne :

$$y = \frac{1}{EI} \frac{Pc^2}{2} \left( x - \frac{1}{3}c \right).$$

FIG. III.3.

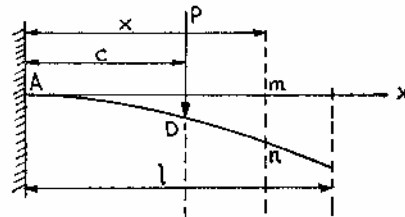
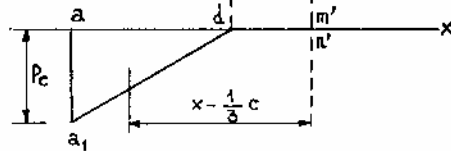


FIG. III.4.



*Exemple 2 :* Dans le cas d'une poutre en porte-à-faux supportant une charge uniforme d'intensité  $q$  (fig. III.5), nous avons :

$$S = q \frac{l^2}{2} \frac{l}{3} = \frac{ql^3}{6},$$

d'où 
$$\theta_B = \frac{ql^3}{6EI},$$

et 
$$y_B = q \frac{l^2}{2} \frac{l}{3} \frac{3l}{4} \frac{1}{EI} = \frac{ql^4}{8EI}.$$

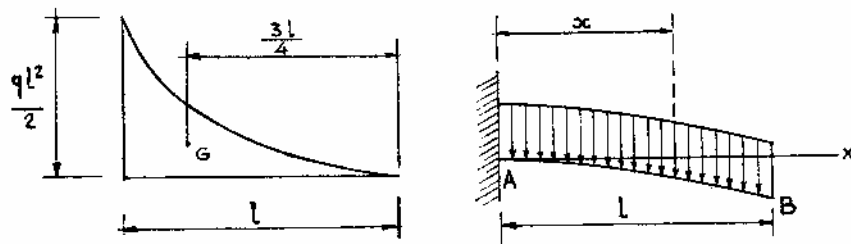


FIG. III.5.

Exemple 3 : Dans le cas d'une poutre en porte-à-faux fléchié par un couple  $M$  (fig. III.6), nous avons :

d'où 
$$S = Ml,$$

$$\theta = \frac{Ml}{EI},$$

et 
$$y = \frac{Ml}{EI} \frac{l}{2} = \frac{Ml^2}{2EI}.$$

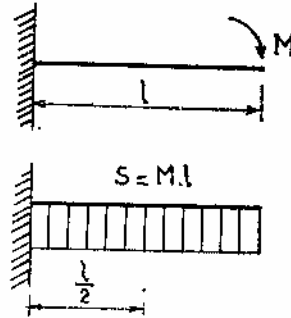


FIG. III.6.

2° Déformation d'une poutre reposant sur deux appuis simples par la méthode du moment des aires

Il suffit de considérer le diagramme du moment de flexion comme le diagramme de charge sollicitant la poutre.

a) La pente de la déformée est obtenue en divisant par  $EI$ , l'effort tranchant dans la section considérée, obtenu à partir de la charge fictive précitée.

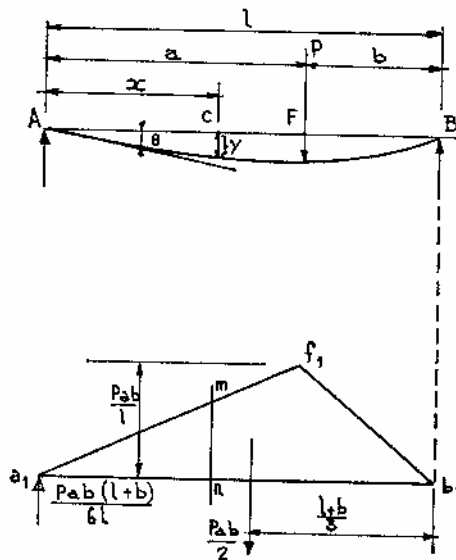


FIG. III.7.

b) La déformation en une section quelconque est obtenue en divisant par  $EI$ , le moment de flexion dans la section considérée, obtenu à partir de la charge fictive précitée.

Considérons le cas d'une poutre reposant sur deux appuis simples et supportant une charge  $P$  appliquée au point  $F$  (fig. III.7).

Le diagramme du moment de flexion est constitué par le triangle  $a_1b_1f_1$  dont l'aire est égale à  $\frac{Pab}{2}$  et dont le centre de gravité, se trouve à la distance  $\frac{l+b}{3}$  de la verticale  $Bb_1$

Nous avons 
$$R_A = \frac{Pab}{2} \frac{l+b}{3l},$$

d'où 
$$\theta_A = \frac{Pab}{2} \frac{l+b}{3l} \frac{1}{EI}.$$

Le moment de flexion à la distance  $x$  de l'appui  $A$  est égal à

$$M_x = R_A x - \text{aire}(a_1mn) \frac{x}{3}.$$

L'aire  $a_1mn$  est obtenue à partir du diagramme des moments d'où

$$y_x = \frac{1}{EI} \left( R_A x - \text{aire}(a_1mn) \frac{x}{3} \right).$$

Dans le cas d'une poutre  $AB$ , reposant sur deux appuis simples, soumise à l'action d'un couple  $M$  à son extrémité (fig. III.8), le diagramme du moment de flexion est le triangle  $abd$ .

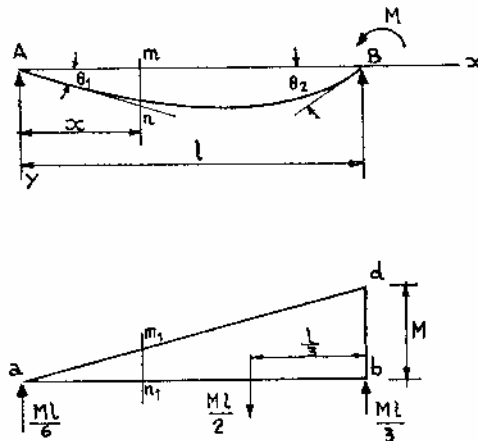


FIG. III.8.

Sur la poutre  $ab$ , la résultante de la charge fictive totale est égale à  $\frac{Ml}{2}$ . Les réactions d'appui dans la poutre sont par suite  $\frac{Ml}{6}$  en  $a$  et  $\frac{Ml}{3}$  en  $b$ .

Les rotations aux appuis de la poutre réelle sont donc égales à

$$\theta_a = \frac{Ml}{6EI},$$

et 
$$\theta_b = \frac{Ml}{3EI}.$$

Sur l'appui de droite la rotation est évidemment négative.

De même, la déformation à l'aplomb d'une section  $mn$  de la poutre, s'obtient en divisant par  $EI$  le moment de flexion  $m_1n_1$  dans la section correspondante de la poutre, ce qui donne :

$$y = \frac{1}{EI} \left( \frac{Ml}{6} x - \frac{Mx}{l} \frac{x}{2} \frac{x}{3} \right) = \frac{Mlx}{6EI} - \frac{Mx^3}{6lEI} = \frac{Mlx}{6EI} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

**Application directe aux poutres continues d'inertie constante**

La possibilité de calculer les rotations aux extrémités d'une poutre, nous permet d'obtenir rapidement la valeur des moments de continuité, au droit des appuis d'une poutre à inertie constante. Il suffit en effet, d'écrire que la somme des rotations au droit de l'appui de continuité est nulle.

Considérons une poutre continue à trois travées égales et également chargées par une charge uniforme  $p$ . On suppose que la poutre repose librement en  $A$  et  $A_1$ .

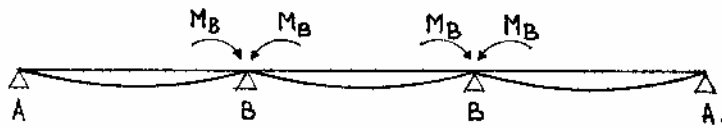


FIG. III.9.

Si les poutres étaient totalement libres sur les quatre appuis, on obtiendrait les rotations aux extrémités en écrivant :

Aire du moment fléchissant :

$$S = \frac{2}{3} l \frac{pl^2}{8} = \frac{pl^3}{12},$$

d'où les rotations à chaque extrémité de poutre libre :

$$\theta = \frac{pl^3}{24EI}.$$

Le couple  $M_B$  produit une rotation :

$$\frac{M_B l}{3EI} \text{ à l'extrémité } B \text{ de la poutre } AB,$$

et  $\frac{M_B l}{3EI} + \frac{M_B l}{6EI}$  à l'une des extrémités  $B$  de la poutre  $BB$ .

On doit écrire :

$$\frac{pl^3}{24EI} + \frac{M_B l}{3EI} + \frac{pl^3}{24EI} + \frac{M_B l}{3EI} + \frac{M_B l}{6EI} = 0,$$

soit 
$$\frac{pl^3}{12} = -\frac{5M_B l}{6},$$

ou 
$$M_B = -\frac{pl^2}{10}.$$

### Déformations des portiques simples - Exemples de calcul

La méthode utilisée ci-dessus dans le cas des poutres hyperstatiques s'applique également à l'étude des portiques. Considérons, par exemple, un portique symétrique et symétriquement chargé articulé en  $C$  et  $D$  (fig. III.10). Le tracé en pointillé représente la déformée du portique. Si l'on néglige les variations de longueur des barres ainsi que l'influence des forces axiales sur leur flexion, on peut considérer que le portique est constitué par trois poutres conformément au schéma de la figure III.11. Il est évident qu'aux extrémités de la poutre horizontale  $AB$  existent des couples  $M$  qui s'opposent à la rotation libre des dites extrémités et représentent l'action des barres verticales sur la poutre horizontale. Le couple  $M$  peut être considéré comme l'unique élément statiquement indéterminé. Connaissant  $M$ , on peut étudier sans aucune difficulté la flexion des trois barres. Pour déterminer  $M$ , nous exprimerons la condition de rigidité de l'assemblage des barres en  $A$  et  $B$  d'après laquelle la rotation du sommet de la barre

verticale  $AC$  doit être égale à la rotation de l'extrémité gauche de la barre horizontale. L'équation servant à déterminer  $M$  s'écrit donc

$$\theta_1 = \theta'_1.$$

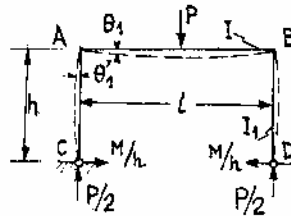


FIG. III.10.

$\theta_1$  doit être déterminé à partir de la flexion de la poutre horizontale  $AB$ . Désignons par  $l$  la longueur de cette poutre et par  $EI$  sa rigidité de flexion ; la rotation de l'extrémité  $A$  sous l'action de la charge  $P$  est, dans ce cas ( $P$  en  $\frac{l}{2}$ ), égale à  $\frac{Pl^2}{16EI}$ . Les couples d'extrémité s'opposent à cette flexion et donnent lieu à une rotation de sens contraire, égale à  $\frac{MI}{2EI}$ . La rotation résultante a donc pour valeur

$$\theta_1 = \frac{Pl^2}{16EI} - \frac{MI}{2EI}.$$

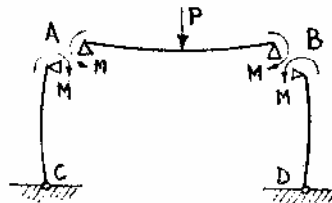


FIG. III.11.

Considérons maintenant la barre verticale  $AC$  comme une poutre reposant sur deux appuis et fléchié par le couple  $M$ . Si nous désignons par  $h$  sa longueur et par  $EI_1$  sa rigidité de flexion, la rotation du sommet s'écrit

$$\theta'_1 = \frac{Mh}{3EI_1}.$$

Portant cette valeur dans l'équation, nous obtenons

$$\frac{Pl^2}{16EI} - \frac{MI}{2EI} = \frac{Mh}{3EI_1},$$

d'où 
$$M = \frac{Pl}{8} \frac{1}{1 + \frac{2hI}{3I_1}}.$$

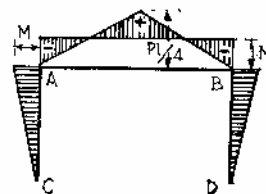


FIG. III.12.

Cette expression donne  $M$  en valeur absolue ; la figure III.11 en donne le sens. Connaissant  $M$ , on peut construire le diagramme du moment de flexion représenté sur la figure III.12. La figure III-10 donne, en outre, les réactions aux articulations  $C$  et  $D$ . Les composantes verticales de ces forces sont, par raison de symétrie, égales chacune à  $\frac{P}{2}$ . En ce qui concerne les composantes horizontales, leur valeur  $\frac{M}{h}$  s'obtient en considérant les barres verticales comme des poutres reposant sur deux appuis et soumises à l'action des couples  $M$  à leur extrémité supérieure.

*Exemple 2.* Déterminer les moments de flexion aux angles du cadre représenté sur la figure III.13 (Charge  $P$  appliquée au milieu de  $AB$  et  $CD$ ).

Considérons la barre  $AB$  comme une poutre reposant sur deux appuis (fig. III.13b) et désignons par  $M$  les moments aux angles. La rotation  $\theta_1$  s'écrit

$$\frac{Pl^2}{16EI} - \frac{Ml}{2EI}$$

Si l'on égale cette expression à celle de l'angle  $\theta_1$  de rotation des extrémités des barres verticales fléchies par les seuls couples  $M$ , on aboutit à l'équation ci-après qui permet de calculer  $M$  :

$$\frac{Pl^2}{16EI} - \frac{Ml}{2EI} = \frac{Mh}{2EI_1}$$

d'où

$$M = \frac{Pl}{8} \frac{1}{1 + \frac{h}{l} \frac{I}{I_1}}$$

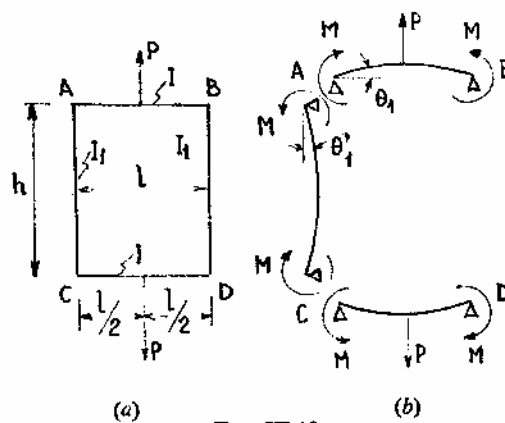


FIG. III.13.



*Exemple 3.* Déterminons les moments de flexion aux nœuds du cadre représenté par la figure III.14 (deux charges  $P$  appliquées sur la traverse inférieure).

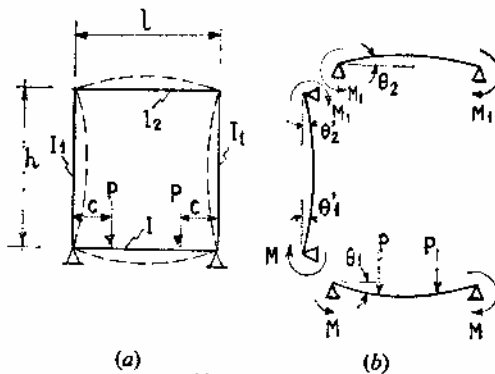


FIG. III.14.

Disjoignons le cadre de la façon indiquée sur la figure III.14b. Pour déterminer les couples  $M$  et  $M_1$ , nous avons les relations suivantes :

$$\theta_1 = \theta'_1 \quad \text{et} \quad \theta_2 = \theta'_2.$$

Or

$$\theta_1 = \frac{Pc(l-c)}{2EI} - \frac{Ml}{2EI}; \quad \theta'_1 = \frac{Mh}{3EI_1} - \frac{M_1h}{6EI_1};$$

$$\theta_2 = \frac{M_1l}{2EI_2}; \quad \theta'_2 = \frac{Mh}{6EI_1} - \frac{M_1h}{3EI_1}.$$

Portant ces valeurs dans les relations ci-dessus nous obtenons deux équations qui permettent de calculer  $M$  et  $M_1$ .

*Exemple 4.* Un cadre rectangulaire symétrique est soumis à l'action d'un effort horizontal  $H$  de la façon indiquée sur la figure III.15a. Déterminer les moments de flexion  $M$  et  $M_1$  aux nœuds.

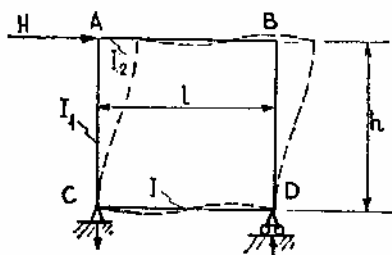


FIG. III.15a.

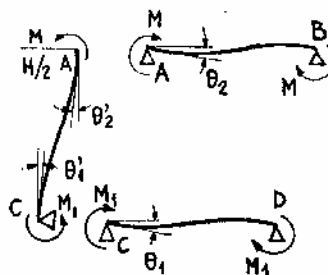


FIG. III.15b.

La figure III.15a donne le tracé de la déformée du cadre. Disjoignons le cadre comme l'indique la figure III.15b, puis appliquons des couples dont l'orientation soit compatible avec la déformée du cadre (fig. III.15a). Nous avons, pour la barre  $CD$ .

$$\theta_1 = \frac{M_1 l}{6EI} = \left( \frac{Hh}{2} - M \right) \frac{l}{6EI} . \quad (a)$$

En effet, l'inertie de  $AC$  étant égale à celle de  $BD$ , l'effort  $H$  se partage en deux valeurs égales.

Considérons maintenant la barre verticale  $AC$  comme une poutre en porte-à-faux encastree à son extrémité  $C$ , sous l'angle  $\theta'_1$ . La rotation de l'extrémité  $A$ , a pour expression, compte tenu de ce que  $\theta'_1 = \theta_1$

$$\theta'_2 = \theta_1 + \frac{H}{2} \frac{h^2}{2EI_1} - \frac{Mh}{EI_1} . \quad (b)$$

Finalement, en raison de la flexion de la barre  $AB$ , nous avons

$$\theta_2 = \theta'_2 = \frac{Ml}{6EI_2} . \quad (c)$$

Des équations (a), (b) et (c), on tire alors la valeur de  $M$  puis la valeur de  $M_1$ .

Lorsque la barre horizontale  $CD$  possède une grande rigidité on approche de la condition du portique, parfaitement encastree en pied, soumis à l'action d'un effort latéral  $H$ . L'inertie de  $CD$  étant alors infiniment grande  $\theta_1$  est égale à zéro.

On se ramène également au cas du portique de la figure III.10, monté sur rotules et soumis à l'action d'un effort latéral appliqué en  $A$ , en faisant  $I = 0$ .

## II. Poutres à inertie variable

Nous avons vu précédemment qu'il était relativement simple de calculer les déformations d'une poutre à inertie constante, en utilisant la méthode du moment des aires.

Nous allons également utiliser cette méthode pour calculer les rotations, les flèches et les moments sur appuis des poutres à inertie variable.

En effet, nous savons que la courbure de la déformée, en une section quelconque s'exprime par le rapport :

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$$

Cette équation montre qu'un accroissement de la rigidité de flexion  $EI$ , en une section déterminée, aura sur la déformation la même influence qu'une diminution proportionnelle du moment de flexion.

Le problème de la déformation des poutres à section variable se ramène, en conséquence, à celui des poutres de section constante au moyen du « diagramme du moment de flexion rectifié » obtenu en multipliant les ordonnées du moment de flexion par  $\frac{I_0}{I}$ .

$I$  représente le moment d'inertie de la section considérée et  $I_0$  le moment d'inertie constant de la barre uniforme qui aurait même déformation que la barre de section variable.

Supposons que nous ayons à étudier le problème de la déformation, sous une charge  $P$ , d'une poutre  $AB$  dont l'inertie augmente brusquement dans la partie centrale.

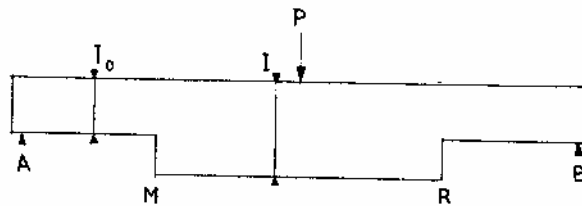


FIG. III.16.

Il nous suffit, pour obtenir « la poutre conjuguée », de tracer le moment de flexion sous charge  $P$ , comme si la poutre avait une inertie constante  $I_0$ , puis de modifier le diagramme de ce moment, en multipliant les ordonnées correspondant à la partie  $MR$ , par le rapport  $\frac{I_0}{I}$ .

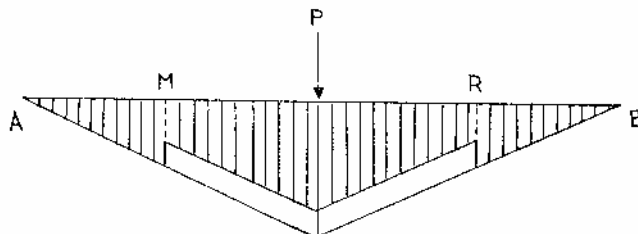


FIG. III.17.

C'est à partir de ce « diagramme rectifié » que se fera le calcul des rotations et flèches, comme s'il s'agissait d'une poutre d'inertie constante  $I_0$ .

Dans le cas du béton armé, un changement de section, comme celui indiqué sur le dessin de la poutre  $AB$ , ne peut être retenu pour le calcul des contraintes normales à chaque abscisse. Les règlements imposent de prendre en compte, pour le calcul, des sections fictives, raccordées aux sections minimales par des goussets fictifs de pente  $\frac{1}{3}$ .

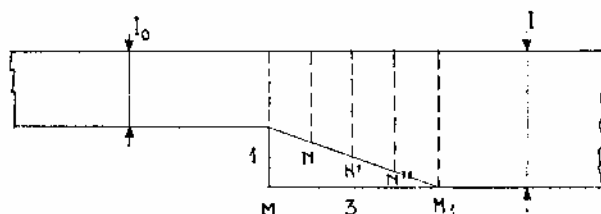


FIG. III.18.

Ainsi, dans l'exemple que nous venons de traiter, nous sommes amenés à tracer le diagramme rectifié non pas en fonction des deux inerties  $I_0$  et  $I$ , mais en fonction des inerties dont les grandeurs varient de  $I_0$  à  $I$  entre les points  $M$  et  $M_1$ .

Il sera pratique, dans ce cas, de partager la distance  $MM_1$  en plusieurs parties, dont la largeur varie de 25 à 50 cm par exemple. Les inerties sont calculées au droit de  $N$ ,  $N'$  et  $N''$ , puis pour ces mêmes sections, nous ferons la correction des ordonnées du diagramme du moment de flexion, en multipliant respectivement chacune de ces ordonnées par

$$\frac{I_0}{I_N}, \frac{I_0}{I_{N'}}, \frac{I_0}{I_{N''}} \quad \text{et enfin} \quad \frac{I_0}{I},$$

d'où le diagramme rectifié :

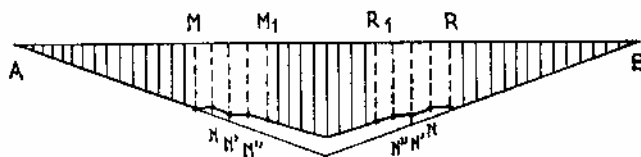


FIG. III.19.

Ainsi dans le cas du béton armé, c'est à partir de ce dernier diagramme que se fera le calcul des rotations et flèches, comme s'il s'agissait d'une poutre d'inertie constante  $I_0$ .

Pour le calcul de l'aire du diagramme, comprise entre des zones, telles  $MM_1$ , il sera intéressant quelquefois d'utiliser la formule de Simpson :

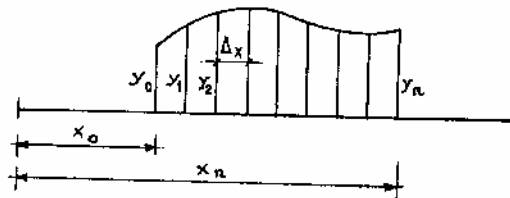


FIG. III.20.

En divisant la figure en un nombre pair d'éléments  $\Delta x$  égaux, d'ordonnés  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , cette formule s'écrit :

$$\int_{x_0}^{x_n} y \, dx = S = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

*Exemple.* Considérons le portique symétrique, à béquilles encastrées, représenté sur la figure ci-dessous.

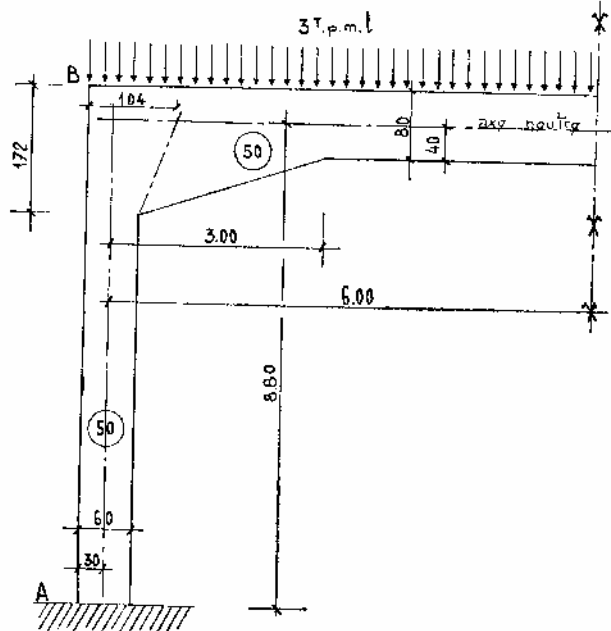


FIG. III.21.

Le gousset fictif du poteau est obtenu en traçant une droite de pente 1/3, sa valeur maximale est donc de 104 cm, au niveau de l'axe neutre de la traverse.

Les caractéristiques du poteau et de la poutre sont par suite :

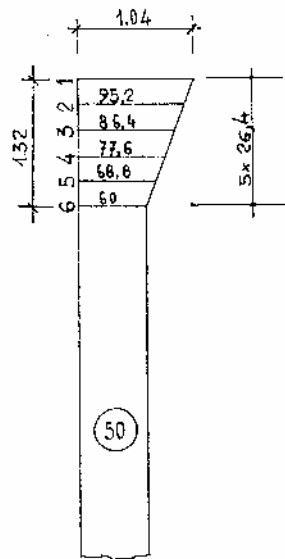


FIG. III.22.

$$\text{Poteau } I_1 = \frac{50 \times 104^3}{12} = 4\,690\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{50 \times 95,2^3}{12} = 3\,598\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_3 = \frac{50 \times 86,4^3}{12} = 2\,680\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_4 = \frac{50 \times 77,6^3}{12} = 1\,950\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_5 = \frac{50 \times 68,8^3}{12} = 1\,360\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_0 = I_6 = \frac{50 \times 60^3}{12} = 900\,000 \text{ cm}^4$$

$$\text{Poutre } I_0 = \frac{50 \times 80^3}{12} = 2\,133\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_1 = 2\,133\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_5 = 11\,780\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = 3\,600\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_6 = 161 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

$$I_3 = 5\,675\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_7 = 213 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

$$I_4 = 9\,900\,000 \text{ cm}^4$$

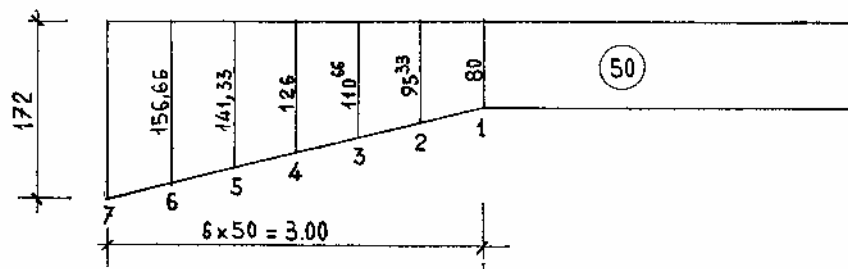


FIG. III.23.

Représentons le moment isostatique de la poutre

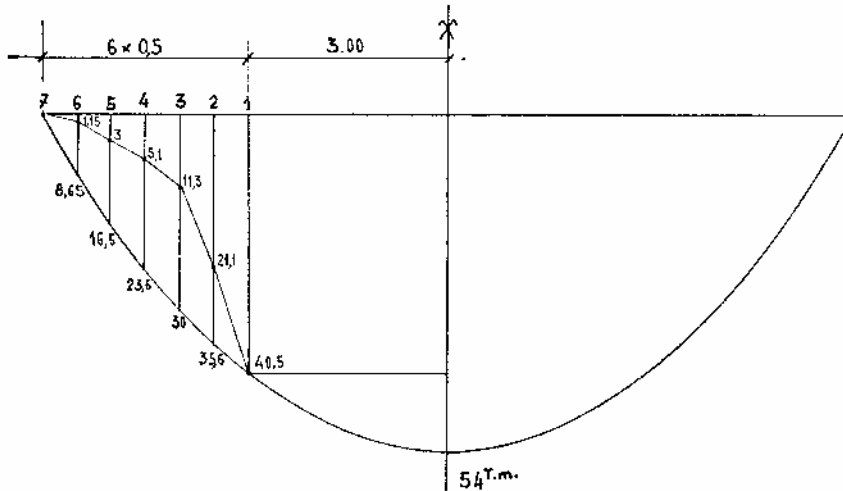


FIG. III.24.

Les réductions à opérer sur les ordonnées sont par suite :

en 2  $35,6 \frac{21,33 \cdot 10^5}{36 \cdot 10^5} = 21,100 \text{ T.m}$

en 3  $30 \frac{21,33 \cdot 10^5}{56,75 \cdot 10^5} = 11,300 \text{ T.m}$

en 4  $23,6 \frac{21,33}{99} = 5,100 \text{ T.m}$

en 5  $16,5 \frac{21,33}{117,8} = 3,000 \text{ T.m}$

en 6  $8,65 \frac{21,33}{161} = 1,150 \text{ T.m}$

La rotation de la poutre isostatique est donnée par l'expression

$$EI_0 \theta_i = 40,5 \times 3 + 13,5 \times 3 \frac{2}{3} + \frac{61,6}{2} 0,5 + \frac{32,4}{2} 0,5 + \frac{16,4}{2} 0,5 + \frac{8,1}{2} 0,5 + \frac{4,15}{2} 0,5 + \frac{1,15}{2} 0,5,$$

d'où  $\theta_i = \frac{179,452}{EI_0} = \frac{179,452}{E \times 21,3 \cdot 10^{-3}}$

Traisons maintenant l'effet d'un moment  $M$ , à l'angle du portique.

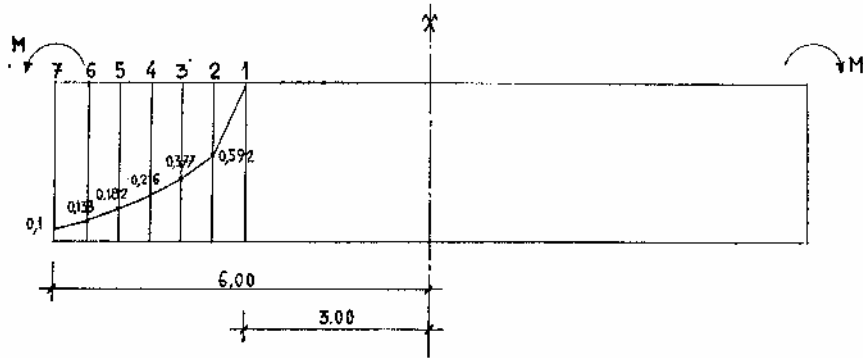


FIG. III.25.

et dessinons le diagramme rectifié, en fonction des différentes inerties, nous obtenons :

$$\text{en 2} \quad \frac{M \times 21,33 \cdot 10^5}{36 \cdot 10^5} = 0,592M$$

$$\text{en 3} \quad \frac{M \times 21,33}{56,75} = 0,377M$$

$$\text{en 4} \quad \frac{M \times 21,33}{99} = 0,216M$$

$$\text{en 5} \quad \frac{M \times 21,33}{117,8} = 0,182M$$

$$\text{en 6} \quad \frac{M \times 21,33}{161} = 0,133M$$

$$\text{en 7} \quad \frac{M \times 21,33}{213} = 0,100M$$

Ce qui nous permet de déterminer la rotation provoquée par le moment  $M$

$$EI_0 \theta_m = 3M + \frac{1,592M}{2} \cdot 0,5 + \frac{0,969M}{2} \cdot 0,5 + \frac{0,593M}{2} \cdot 0,5 + \frac{0,398M}{2} \cdot 0,5 + \frac{0,315M}{2} \cdot 0,5 + \frac{0,233M}{2} \cdot 0,5,$$

d'où

$$\theta_m = \frac{4,023M}{EI_0} = \frac{4,023M}{E \times 21,3 \cdot 10^{-3}}$$



Le moment d'encastrement  $M$ , à l'angle du portique provoque, en pied de la béquille, un moment de répercussion  $M_1$ .

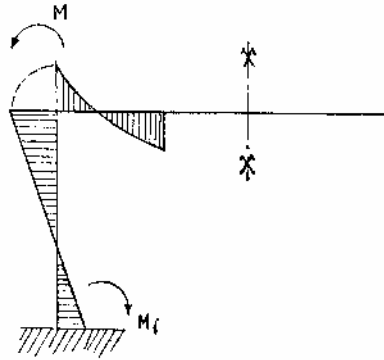


FIG. III.26.

Nous étudierons, par le même procédé, l'effet de ces deux moments dans la béquille.

Traisons tout d'abord, le diagramme rectifié, dans la béquille, sous l'effet du moment  $M$ .

Nous trouvons respectivement

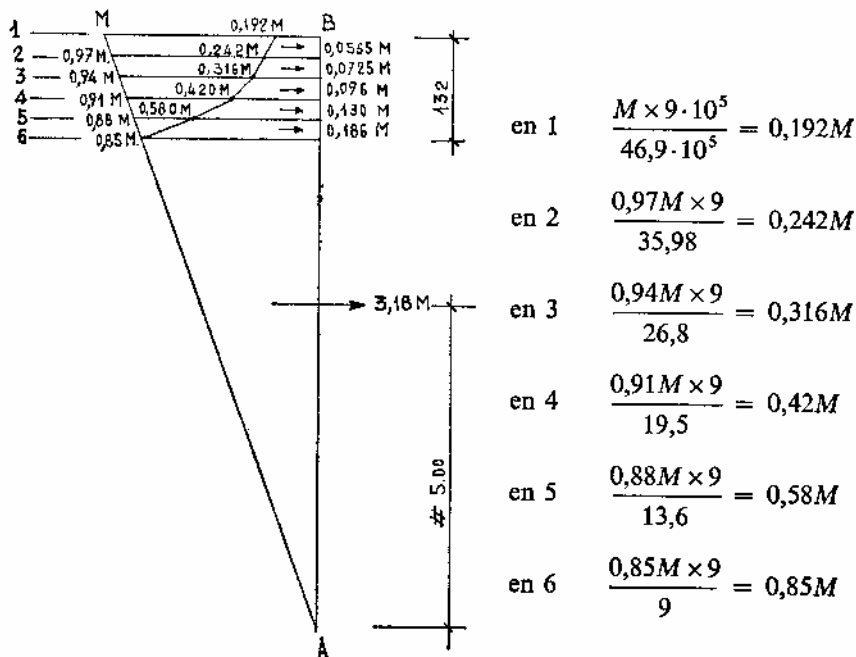
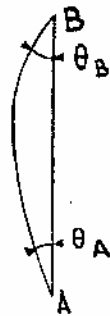


FIG. III.27.



Les rotations en *A* et *B* sont égales aux efforts tranchants en *A* et *B* du système de forces représenté sur la figure, divisés par  $EI_0$  (avec  $I_0 = 9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ )  
on trouve

$$\theta_B = \frac{2,3M}{EI_0} \quad \text{et} \quad \theta_A = -\frac{1,421M}{EI_0}$$

FIG. III.28.

D'une façon analogue l'effet du moment  $M_1$ , nous donne les résultats consignés sur la figure ci-contre.

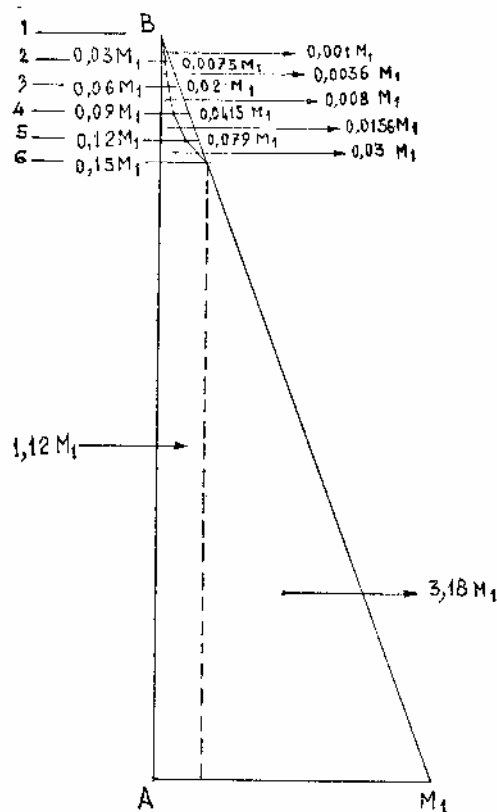


FIG. III.29.

en 2  $\frac{0,03M_1 \times 9}{35,98} = 0,0075M_1$

en 3  $\frac{0,06M_1 \times 9}{26,8} = 0,02M_1$

en 4  $\frac{0,09M_1 \times 9}{19,5} = 0,0415M_1$

en 5  $\frac{0,12M_1 \times 9}{13,6} = 0,079M_1$

Les rotations en  $A$  et  $B$  sous l'effet de  $M_1$  sont respectivement

$$\theta_{A_1} = \frac{2,918M_1}{EI_0},$$

et  $\theta_{B_1} = -\frac{1,44M_1}{EI_0}.$

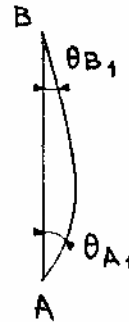


FIG. III.30.

Avec  $I_0 = 9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$

La somme des rotations en  $A$ , sous l'effet de  $M$  et  $M_1$  doit être nulle puisque nous avons un encastrement parfait.

Soit :  $-\frac{1,421M}{E \times 9 \cdot 10^{-3}} + \frac{2,918M_1}{E \times 9 \cdot 10^{-3}} = 0.$

D'où :  $1,421M = 2,198M_1$

Soit :  $M = 2,05M_1$

La somme des rotations en  $B$  donne :

$$\frac{2,3M}{E \times 9 \cdot 10^{-3}} - \frac{1,44M_1}{E \times 9 \cdot 10^{-3}},$$

ou encore  $\frac{2,3M - 0,7M}{E \times 9 \cdot 10^{-3}} = \frac{1,6M}{E \times 9 \cdot 10^{-3}}.$

L'équilibre du nœud  $B$ , où le moment en tête de la béquille doit être égal et opposé au moment de l'extrémité de la traverse, nous conduit à écrire que, sous l'effet du couple  $M$ , l'angle droit  $B$  est resté droit, c'est-à-dire que les deux rotations en  $B$  sont égales, ce qui s'écrit :

$$\frac{1,6M}{E \times 9 \cdot 10^{-3}} = \frac{179,452}{E \times 21,3 \cdot 10^{-3}} - \frac{4,023M}{E \times 21,3 \cdot 10^{-3}}$$

$$3,8M + 4,023M - 179,452 = 0,$$

$$M = \frac{179,452}{7,823} = 22,900 \text{ T.m.}$$

Le moment  $M_1$  vaut donc

$$M_1 = \frac{22,900}{2,05} = 11,180 \text{ T.m.}$$

Pour calculer la flèche de la traverse, il nous suffit de calculer le moment du diagramme rectifié par rapport au milieu de la poutre.

a) La flèche de la poutre isostatique serait

$$EI_0 f_i = 179,452 \times 6 - 121,5 \times 1,5 - 27 \times 1,125 - 15,4 \times 3,25 - 8,1 \times 3,75 - 4,1$$

$$\times 4,25 - 2,025 \times 4,75 - 1,040 \times 5,25 - 0,287 \times 5,67,$$

$$f_i = \frac{750}{EI_0}.$$

b) La flèche provoquée par le moment  $M$  serait

$$EI_0 f_m = 4,023M \times 6 - 3M \times 1,5 - 0,397M \times 3,25 - 0,242M \times 3,75 - 0,148M$$

$$\times 4,25 - 0,099M \times 4,75 - 0,079M \times 5,25 - 0,058M \times 5,75,$$

$$f_m = \frac{15,685M}{EI_0} = \frac{360}{EI_0} \quad \text{avec } M = 22,9 \text{ T.m.}$$

On a donc :

$$f_i - f_m = \frac{390}{EI_0}.$$

Avec :  $I_0 = 21,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$  et  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ T/m}^2$

On obtient :

$$f_i - f_m = \frac{390}{42,6 \cdot 10^3} = 0,0091 \text{ m} \quad \text{ou : } 9,1 \text{ mm.}$$

### III. Torsion

#### 1. Contraintes dues aux couples de torsion (Pièces homogènes à section constante).

##### Rappel

*Formule générale.* Soit une pièce de section constante sollicitée à ses extrémités  $A-B$  par deux couples appliqués sur un axe  $u'u$  parallèle à la fibre moyenne  $xx'$  et se faisant équilibre. La sollicitation de la pièce est une torsion simple. L'axe  $uu'$  est l'axe de torsion. Sur toute section comprise entre  $A$  et  $B$  s'exerce uniquement un moment de torsion  $C$ , qui détermine exclusivement des contraintes tangentielles.

Deux sections transversales  $M$  et  $M'$ , distantes de  $dx$  tournent l'une par rapport à l'autre d'un angle  $d\theta$ , autour de l'axe de torsion  $u'u$ .

La rotation unitaire  $\frac{d\theta}{dx}$  est proportionnelle à  $C$  :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C}{GJ},$$

- $C$  est le moment du couple de torsion appliqué ;
- $G$  est le module d'élasticité transversale du matériau constituant la pièce.

On prend généralement  $G = 0,4E$

—  $J$  est le module de torsion, il a les dimensions d'un moment d'inertie.

Il existe un axe de torsion  $u'u$  dont la trace sur le plan de la section transversale est le « centre de torsion » défini par la condition que tout effort extérieur, normal à la fibre moyenne et passant par ce point, n'entraîne aucune rotation relative des sections droites autour de la fibre moyenne.

Le centre de torsion coïncide avec le centre de gravité quand la section présente une double symétrie par rapport à deux axes rectangulaires.

NOTA : Pour les sections usuelles, voir le formulaire « Chambaud et Lebel » qui donne le module de torsion ainsi que la position du centre de torsion.

##### *Tubes à parois minces.*

Dans un tube à paroi mince, la circulation du vecteur  $t$  le long du contour fermé appartenant à la ligne moyenne de la section droite du tube, est égale au flux du vecteur  $2G \frac{d\theta}{dx}$  supposé traversant normalement l'aire  $S$

limitée par ce contour. Cette propriété se traduit dans le cas de la figure ci-dessous par l'équation (fig. III.31).

$$\int_L t \, dl = 2GS \frac{d\theta}{dx}.$$

S'il s'agit d'un tube cloisonné, la propriété que nous venons d'énoncer, s'applique aux différents contours fermés composant la ligne moyenne de

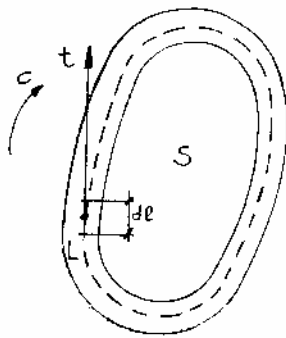


FIG. III.31.

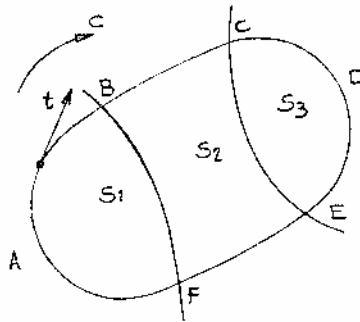


FIG. III.32.

la section transversale. On peut ainsi écrire pour une section correspondant à la figure III.32 :

$$\begin{aligned} \int_{ABFA} t \, dl &= 2GS_1 \frac{d\theta}{dx}, \\ \int_{BCEFB} t \, dl &= 2GS_2 \frac{d\theta}{dx}, \\ \int_{CDEEC} t \, dl &= 2GS_3 \frac{d\theta}{dx}, \\ \int_{ABCDEF A} t \, dl &= 2G(S_1 + S_2 + S_3) \frac{d\theta}{dx}. \end{aligned} \quad (1)$$

La contrainte de cisaillement  $t$  est sensiblement constante en grandeur et en direction dans l'épaisseur  $e$  de la paroi du tube.

Sa valeur est donnée par la formule

$$t = \frac{C}{2Se},$$

où  $S$  est l'aire limitée par le contour du tube  $L$ .

On a ainsi, avec  $\int_L t \, dl = 2GS \frac{d\theta}{dx}$ ,

$$\int_L \frac{C}{2Se} \, dl = 2GS \frac{d\theta}{dx}.$$

Ce qui peut s'écrire, en remarquant que  $\frac{d\theta}{dx} = \frac{C}{GJ}$ ,

$$\frac{C}{4S^2} \int_L \frac{dl}{e} = \frac{C}{J}.$$

Le module de torsion  $J$  du tube est donc défini par l'équation

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{4S^2} \int_L \frac{dl}{e}.$$

On peut remarquer ainsi que les modules de torsion des profils ouverts sont beaucoup plus faibles que ceux des tubes minces, à poids égal de matière.

En effet, si l'on considère les deux sections définies ci-après

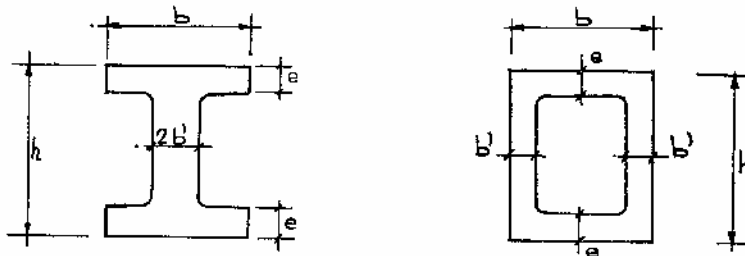


FIG. III.33.

Nous avons pour le double T

$$J_T = \frac{2be^3}{3} + \frac{(h-2e)(2b')^3}{3},$$

et pour le caisson

$$J_C = \frac{4[(h-e)(b-b')]^2}{\frac{2(b-b')}{e} + \frac{2(h-e)}{b'}}.$$

Ainsi si  $b = h = 20e$  et  $b' = e$   
il vient  $J_T = 61,3e^4$  et  $J_C = 6\,859e^4$ .

Dans le cas du tube cloisonné, on appelle flux de cisaillement, les valeurs

$$\begin{aligned}\phi_1 &= t_1 e_1 \\ \phi_2 &= t_2 e_2 \\ \phi_3 &= t_3 e_3\end{aligned}\quad (2)$$

Ces valeurs sont constantes le long des parois  $ABC$ ,  $CDA$  et  $AC$ .

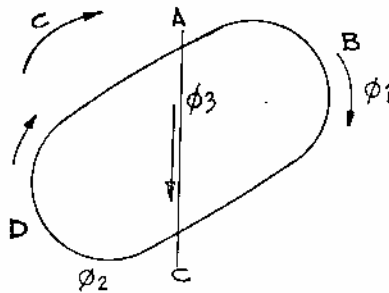


FIG. III.34.

Dans ces expressions  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  sont les épaisseurs des parois  $ABC$ ,  $CDA$  et  $AC$ , tandis que  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  sont les cisaillements dans ces parois.

$\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  sont par suite les flux de cisaillement dans ces mêmes parois.

On démontre que le flux de cisaillement entrant en  $C$  est égal à la somme des flux qui circulent le long de  $AC$  et de  $ABC$

$$\phi_2 = \phi_3 + \phi_1 \quad (3)$$

On démontre également, en appelant  $S_1$ , l'aire limitée par  $ABCA$  et  $S_2$  celle limitée par  $CDAC$  que

$$C = 2\phi_1 S_1 + 2\phi_2 S_2 \quad (4)$$

Les équations (1), (2), (3) et (4) permettent de déterminer les contraintes de cisaillement dans un tube cloisonné soumis à un couple de torsion  $C$ .

*Exemple* — Soit le tube à quatre cellules symétriques, représentées sur la figure, sollicité par un couple de torsion  $C$ . L'épaisseur commune de toutes les parois est 0,15 m. Les flux de cisaillement sont par raison de symétrie (fig. III.35).

- $\phi_1$  le long de  $JABC$  et de  $EFGH$
- $\phi_2$  le long de  $CD$ ,  $DE$ ,  $HI$  et  $IJ$
- $\phi_3$  le long de  $CJ$  et  $HE$
- $\phi_4$  le long de  $DI$



Dans le cas du tube cloisonné, on appelle flux de cisaillement, les valeurs

$$\begin{aligned}\phi_1 &= t_1 e_1 \\ \phi_2 &= t_2 e_2 \\ \phi_3 &= t_3 e_3\end{aligned}\quad (2)$$

Ces valeurs sont constantes le long des parois  $ABC$ ,  $CDA$  et  $AC$ .

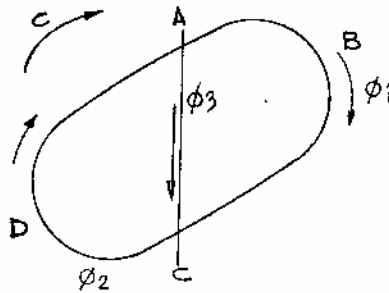


FIG. III.34.

Dans ces expressions  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  sont les épaisseurs des parois  $ABC$ ,  $CDA$  et  $AC$ , tandis que  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  sont les cisaillements dans ces parois.  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  sont par suite les flux de cisaillement dans ces mêmes parois.

On démontre que le flux de cisaillement entrant en  $C$  est égal à la somme des flux qui circulent le long de  $AC$  et de  $ABC$

$$\phi_2 = \phi_3 + \phi_1 \quad (3)$$

On démontre également, en appelant  $S_1$ , l'aire limitée par  $ABCA$  et  $S_2$  celle limitée par  $CDAC$  que

$$C = 2\phi_1 S_1 + 2\phi_2 S_2 \quad (4)$$

Les équations (1), (2), (3) et (4) permettent de déterminer les contraintes de cisaillement dans un tube cloisonné soumis à un couple de torsion  $C$ .

*Exemple* — Soit le tube à quatre cellules symétriques, représentées sur la figure, sollicité par un couple de torsion  $C$ . L'épaisseur commune de toutes les parois est 0,15 m. Les flux de cisaillement sont par raison de symétrie (fig. III.35).

- $\phi_1$  le long de  $JABC$  et de  $EFGH$
- $\phi_2$  le long de  $CD$ ,  $DE$ ,  $HI$  et  $IJ$
- $\phi_3$  le long de  $CJ$  et  $HE$
- $\phi_4$  le long de  $DI$

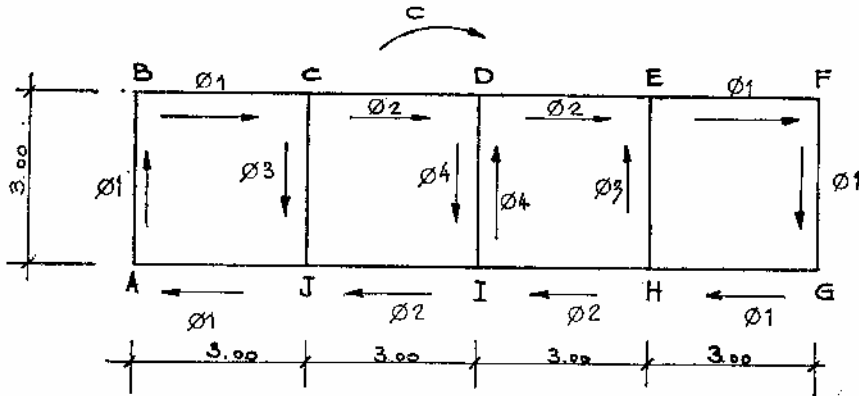


FIG. III.35.

Compte tenu de la symétrie  $\phi_4$  est nul.

On peut écrire par ailleurs :

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3 \quad (3)$$

L'aire enveloppée par chacun des contours tels que  $JABC$  est de  $9 \text{ m}^2$ .

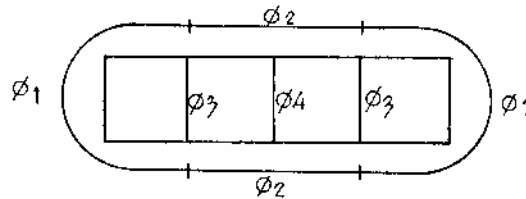


FIG. III.36.

L'équation (4) nous donne :

$$C = 2(2\phi_1 + 2\phi_2) \cdot 9 = 36(\phi_1 + \phi_2)$$

En appelant  $\alpha = \frac{d\theta}{dx}$  la rotation unitaire, on a par application des équations (1), après avoir remarqué que  $t_1 = \frac{\phi_1}{e} = \frac{\phi_1}{0,15}$

$$\phi_1 \frac{3 \times 3,00}{0,15} + \phi_3 \frac{3,00}{0,15} = 2G \cdot 9 \cdot \alpha,$$

et

$$\phi_2 \frac{2 \times 3,00}{0,15} - \phi_3 \frac{3,00}{0,15} = 2G \cdot 9 \cdot \alpha$$

Ces deux équations peuvent d'ailleurs s'écrire

$$60\phi_1 + 20\phi_3 = 18G\alpha$$

et

$$40\phi_2 - 20\phi_3 = 18G\alpha$$

Les équations donnant  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  et  $\alpha$  sont donc

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3$$

$$36(\phi_1 + \phi_2) = C$$

$$60\phi_1 + 20\phi_3 = 18G\alpha$$

$$40\phi_2 - 20\phi_3 = 18G\alpha$$

d'où on tire :

$$G\alpha = \frac{220C}{162 \times 36} \quad \phi_2 = \frac{2,5C}{162}$$

$$\phi_1 = \frac{2C}{162} \quad \phi_3 = -\frac{0,5C}{162}$$

Pour  $C = 243 \text{ T/m}$      $G = 88\,000 \text{ kg/cm}^2$  ou  $880\,000 \text{ T/m}^2$

$$\alpha = \frac{220 \times 243}{36 \times 162 \times 880\,000} = \frac{1}{96\,000} \text{ rd/m,}$$

$$t_1 = \frac{\phi_1}{e} = \frac{2 \times 243}{162 \times 0,15} = 20 \text{ T/m}^2 \quad \text{ou} \quad 2 \text{ kg/cm}^2,$$

$$t_2 = \frac{\phi_2}{e} = \frac{2,5 \times 243}{162 \times 0,15} = 25 \text{ T/m}^2 \quad \text{ou} \quad 2,5 \text{ kg/cm}^2,$$

$$t_3 = \frac{\phi_3}{e} = \frac{-0,5 \times 243}{162 \times 0,15} = -5 \text{ T/m}^2 \quad \text{ou} \quad -0,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Cette dernière valeur négative signifie que les cisaillements le long de  $CJ$  et  $EH$  sont dirigés respectivement de  $J$  vers  $C$  et de  $E$  vers  $H$ , alors qu'on avait attribué des sens inverses en écrivant les équations.

## 2. Pièces sollicitées en torsion

A) *Poutre à inertie constante, encastrée à ses extrémités.*

Soit à calculer les moments de torsion d'extrémité  $M_A$  et  $M_B$  provoqués par un moment  $M$ , sollicitant transversalement une poutre de portée  $l$ .

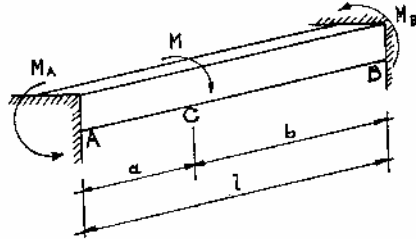


FIG. III.37.

Désignons par  $a$  la position de  $M$  par rapport à  $A$   
 et par  $b$  la position de  $M$  par rapport à  $B$

On a évidemment :

$$a + b = l.$$

Nous devons exprimer qu'en  $C$  le moment de torsion  $M_A$  provoque une rotation égale à celle provoquée par  $M_B$ .

Sous l'effet de  $M_A$ , nous avons en  $C$

$$\theta_A = \frac{M_A}{GJ} a.$$

D'une manière analogue,  $M_B$  donne une rotation en  $C$

$$\theta_B = \frac{M_B}{GJ} b = (M - M_A) \frac{(l - a)}{GJ}.$$

L'égalité des deux rotations a pour expression

$$M_A = \frac{M(l - a)}{l} = \frac{Mb}{l},$$

d'où

$$M_B = \frac{Ma}{l}.$$

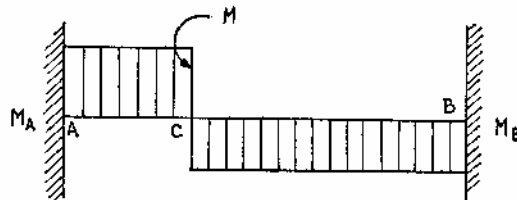


FIG. III.38.

B) *Consoles orthogonales de même section et de portées égales, sollicitées par une charge  $P$  à leur intersection, où elles sont parfaitement assemblées.*

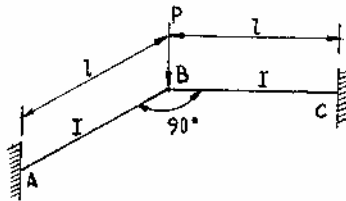


FIG. III.39.

Compte tenu de la symétrie, nous pouvons remarquer que chaque console supporte à son extrémité une charge  $\frac{P}{2}$ . Si les consoles étaient désolidarisées, la rotation en  $B$ , serait pour chaque console

$$\frac{P}{2} \frac{l^2}{2EI}$$

En réalité, la liaison entrave cette rotation et un moment de flexion  $M$  prend naissance (dans chacune des deux consoles) de telle manière que la rotation totale de flexion en  $B$ , dans l'une des deux consoles, soit égale à la rotation de torsion dans l'autre console.

La rotation totale de flexion en  $B$  s'écrit :

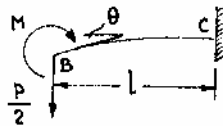


FIG. III.40.

$$\theta = \frac{Pl^2}{4EI} - \frac{Ml}{EI}$$

Dans l'autre console, la rotation de torsion est égale à :

$$\theta = \frac{Ml}{GJ}$$

L'égalité des deux rotations nous donne :

$$M = \frac{Pl}{4\left(1 + \frac{EI}{GJ}\right)}$$

*Dans le cas où les consoles ont une longueur différente*

Si les consoles étaient désolidarisées, nous exprimerions tout simplement, que les flèches sont égales en *B*

$$\frac{P_1 l^3}{3EI} = \frac{P_2 L^3}{3EI},$$

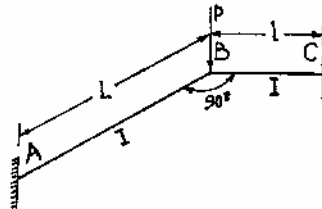


FIG. III.41.

$P_1$  = charge sollicitant la console *BC*

$P_2$  = charge sollicitant la console *BA*

avec

$$P_1 + P_2 = P$$

Cette expression permettrait de conserver les trois points *A*, *B*, et *C* dans un même plan.

Compte tenu de la liaison, il faut faire intervenir dans la console *L* un moment de flexion *M*, correspondant à un moment de torsion dans la console *l*. De même, au moment de flexion  $M_1$  de la console *l* doit correspondre un moment de torsion de la console *L*.

Il faut exprimer qu'au point *B*, il y a égalité des flèches et compatibilité des rotations.

Nous avons ainsi les quatre équations suivantes :

$$P_1 + P_2 = P, \tag{1}$$

$$\frac{P_1 l^3}{3EI} - \frac{M_1 l^2}{2EI} = \frac{P_2 L^3}{3EI} - \frac{ML^2}{2EI}, \tag{2}$$

$$\frac{P_1 l^2}{2EI} - \frac{M_1 l}{EI} = \frac{M_1 L}{GJ}, \tag{3}$$

$$\frac{P_2 L^2}{2EI} - \frac{ML}{EI} = \frac{Ml}{GJ}, \tag{4}$$

qui nous permettent de déterminer  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $M_1$  et  $M$

$I$  = Inertie des consoles       $J$  = Module de torsion des consoles

C) *Portique de rive supportant, en travée, une série de poutres orthogonales.*

Le degré d'encastrement des poutres dépend de la rigidité à la torsion du portique.

Si  $M_1$  et  $M_2$  sont les moments d'encastrement des poutres dans le portique, nous avons vu que les rotations de flexion des poutres doivent correspondre à la rotation de torsion de la traverse du portique.

Supposons que les poutres soient sollicitées par une charge uniformément répartie d'intensité  $p$ .

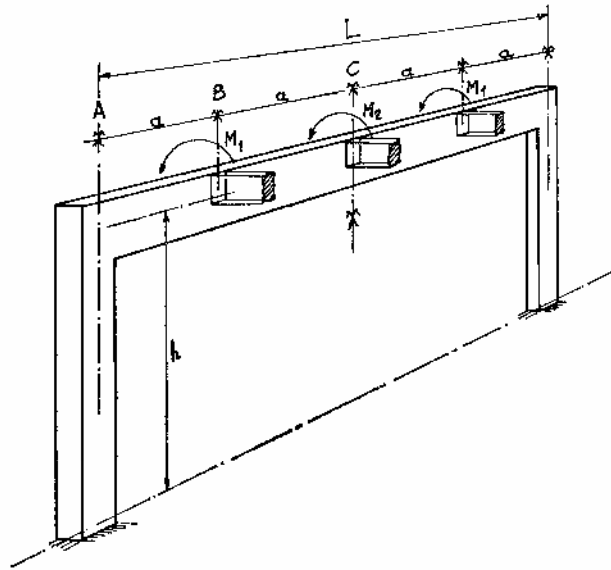


FIG. III.42.

La rotation, en  $B$ , de la poutre sera (en supposant que les poutres reposent librement sur l'autre appui).

$$\theta_B = \frac{pl^3}{24EI} - \frac{M_1 l}{3EI}.$$

La rotation en  $C$  de la poutre centrale sera :

$$\theta_C = \frac{pl^3}{24EI} - \frac{M_2 l}{3EI},$$

$l$  = portée des poutres ;

$I$  = moment d'inertie des poutres.

Le moment total de torsion en  $A$  est égal à  $M_A$

$$M_1 + \frac{M_2}{2} = M_A. \quad (1)$$

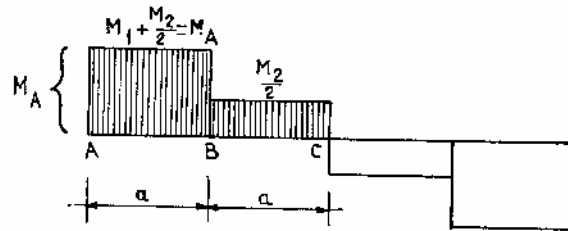


FIG. III.43.

Si on appelle  $i$  le moment d'inertie de la béquille du portique, la rotation de flexion en tête de cette béquille est égale à :

$$\theta_A = \frac{M_A h}{Ei}.$$

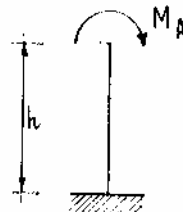


FIG. III.44.

Cette rotation correspond à un déplacement en tête, admissible, puisque les poutres reposent librement sur l'autre appui.

Il faut noter, en outre, que de  $A$  en  $B$ , le moment de torsion provoque une rotation de torsion égale à :

$$\frac{M_A a}{GJ},$$

en appelant  $J$  le module de torsion de la traverse du portique.

La rotation totale en  $B$  est par suite

$$\frac{M_A h}{Ei} + \frac{M_A a}{GJ}.$$



Cette rotation doit être compatible avec la rotation de la poutre prenant appui en  $B$ , ce qui nous donne :

$$\frac{M_A h}{Ei} + \frac{M_A a}{GJ} = \frac{pl^3}{24EI} - \frac{M_1 l}{3EI}. \quad (2)$$

De même en  $C$ , la rotation totale de la traverse sera

$$\frac{M_A h}{Ei} + \frac{M_A a}{GJ} + \frac{M_2 a}{2GJ},$$

d'où l'équation (3)

$$\frac{M_A h}{Ei} + \frac{M_A a}{GJ} + \frac{M_2 a}{2GJ} = \frac{pl^3}{24EI} - \frac{M_2 l}{3EI}. \quad (3)$$

Ces trois équations nous permettent de déterminer  $M_A$ ,  $M_1$ ,  $M_2$

D) *Moments de torsion dans une poutre à goussets.*

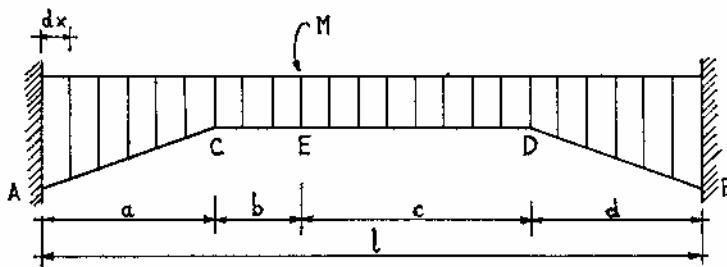


FIG. III.45.

Dans ce cas, on ne peut opérer que par intégration.

Pour chaque intervalle  $dx$  on a :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_t}{GJ}.$$

Sur la longueur du gousset (de longueur  $a$ ), on obtient :

$$\theta = \frac{M_t}{G} \int_A^c \frac{dx}{J}.$$

Ainsi, dans le cas, où l'on doit calculer les moments de torsion en  $A$  et  $B$  dans une poutre à goussets soumise, en travée, à un moment de torsion  $M$  (voir figure ci-dessus), on pourra partager la poutre en éléments égaux de longueur  $dx$  et écrire qu'en  $E$ , la rotation de torsion provoquée par le moment  $M_A$  :

$$\theta = \frac{M_A}{G} \int_A^E \frac{dx}{J},$$

est égale à celle provoquée par le moment de torsion  $M_B$

$$\theta = \frac{M_B}{G} \int_B^E \frac{dx}{J},$$

ce qui nous permet de calculer les deux moments  $M_A$  et  $M_B$ , sachant que :

$$M_A + M_B = M$$

Il faut préciser qu'en opérant ainsi, le projeteur devra calculer, sur toute la longueur du gousset, le module de torsion  $J$  correspondant à chaque élément  $dx$ .

E) *Poutres circulaires, dans un plan horizontal.*

Proposons nous de calculer les moments d'encastrement d'une poutre circulaire ayant un angle au centre de  $90^\circ$ , sollicitée par une charge verticale  $P$ , en son milieu (fig. 46).

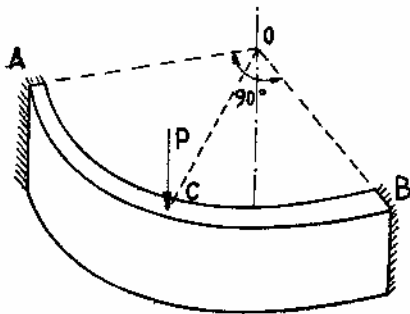


FIG. III.46.

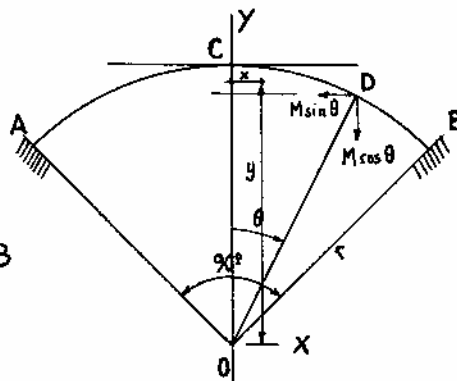


FIG. III.47.

Compte tenu de la symétrie (position de la charge sur l'axe  $OC$  de la poutre circulaire) on peut déduire que l'effort tranchant le long de  $AC$  ou le long de  $BC$  est égal à  $\frac{P}{2}$  et que le moment de torsion est nul au point  $C$ , milieu de  $AB$ .

Par contre le moment de flexion  $M$ , d'axe  $OC$ , est inconnu (fig. III.47).

En un point  $D$  quelconque, tel que  $OD$  forme un angle  $\theta$  avec l'axe de flexion  $OC$ , il nous est possible de déterminer en ce point le moment de flexion et le moment de torsion. Ces moments peuvent être exprimés en fonction de  $M$ , en tenant compte du moment de l'effort  $\frac{P}{2}$  (existant en  $D$ ) par rapport aux axes de référence passant par  $C$ .

En  $D$ , le moment  $M$  peut être décomposé suivant deux directions, l'une parallèle à  $OC$ , l'autre parallèle à la tangente en  $C$ . En tenant compte de l'effort  $\frac{P}{2}$ , on obtient :

$$\text{Flexion} \quad M_{\theta} = M \cos \theta - \frac{P}{2} r \sin \theta,$$

$$\text{Torsion} \quad C_{\theta} = M \sin \theta - \frac{P}{2} r(1 - \cos \theta).$$

Il nous est possible de déterminer la valeur de  $M$  en utilisant la « méthode des dérivées du potentiel interne ».

On a ici :

$$\frac{dM_{\theta}}{dM} = \cos \theta \quad \text{et} \quad \frac{dC_{\theta}}{dM} = \sin \theta.$$

Nous devons écrire :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M_{\theta}}{EI} \frac{dM_{\theta}}{dM} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{C_{\theta}}{GJ} \frac{dC_{\theta}}{dM} d\theta = 0,$$

et résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( M \cos^2 \theta - \frac{P}{2} r \sin \theta \cos \theta \right) d\theta \\ + \frac{1}{GJ} \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ M \sin^2 \theta - \frac{P}{2} r \sin \theta (1 - \cos \theta) \right] d\theta = 0. \end{aligned}$$

$$\text{En posant} \quad C = \frac{EI}{GJ}.$$

$$\text{On obtient} \quad M = Pr \frac{0,125 + 0,0215C}{0,643 + 0,1427C}.$$

La valeur de  $M$  nous permet de calculer le moment de flexion et le moment de torsion en un point quelconque de la poutre et par suite en  $A$  et  $B$ .

Le calcul des moments sollicitant une poutre circulaire, supportant une charge uniformément répartie peut être établi d'une façon similaire.

On doit noter que pour exprimer le moment en  $D$ , en fonction du moment  $M$  existant en  $C$ , on doit tenir compte de la charge uniformément répartie, d'intensité  $p$  sollicitant la poutre de  $C$  en  $D$ .

Il faut rappeler que les coordonnées du centre de gravité de l'arc  $CD$  par rapport aux axes  $Ox$  et  $Oy$  de la figure III.47 sont :

$$x = r \frac{1 - \cos \theta}{\theta},$$

et  $y = r \frac{\sin \theta}{\theta},$

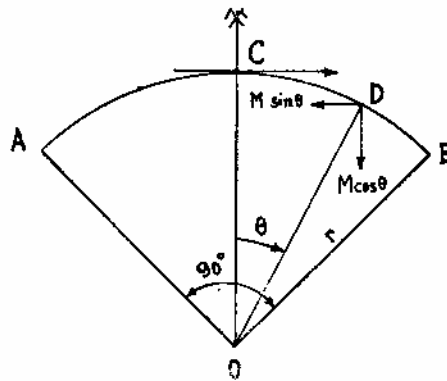


FIG. III.48.

d'où l'expression du moment de flexion et du moment de torsion

$$M_\theta = M \cos \theta - pr\theta r \left( \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \right),$$

$$C_\theta = M \sin \theta - pr\theta \left( r - r \frac{\sin \theta}{\theta} \right).$$

Soit :

$$M_\theta = M \cos \theta - pr^2(1 - \cos \theta)$$

$$C_\theta = M \sin \theta - pr^2(\theta - \sin \theta)$$

Pour déterminer  $M$ , nous devons écrire comme précédemment

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M_\theta}{EI} \frac{dM_\theta}{dM} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{C_\theta}{GJ} \frac{dC_\theta}{dM} d\theta = 0.$$

Cette expression nous permet d'obtenir :

$$M = pr^2 \frac{0,064 + 0,0093C}{0,643 + 0,1427C},$$

en posant

$$C = \frac{EI}{GJ},$$

d'où la valeur du moment de torsion et du moment de flexion en un point quelconque de la poutre.

### 3. Torsion et gauchissement

La torsion suivant St-Venant suppose la conservation des sections planes, c'est-à-dire la nullité de la contrainte normale en tout point de la section droite. Il n'existe que des contraintes tangentielles.

La théorie montre que seules les poutres de section droite circulaire présentent ces propriétés.

Si nous considérons, un profil ouvert, tel une console en  $U$ , soumise à son extrémité à un couple de torsion  $C$ , il y a deux façons d'équilibrer ce couple :

a) Par la torsion selon St-Venant qui fait appel à la rigidité de torsion  $GJ$  et qui se traduit par des cisaillements constituant de véritables couples répartis (fig. III.49).

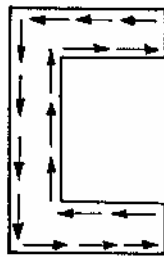


FIG. III.49.

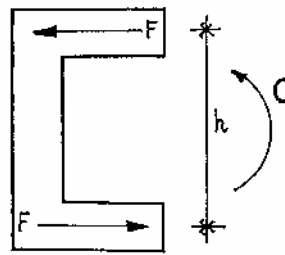


FIG. III.50.

b) Par l'encastrement des ailes, à l'appui notamment, qui fonctionnent comme des consoles indépendantes sous l'effet de l'effort (fig. III.50).

$$F = \frac{C}{h}$$

Dans cette hypothèse, on serait conduit à négliger la rigidité de torsion  $GJ$ . La contrainte normale ne serait plus nulle : c'est le phénomène de « gauchissement ».

B.Z. Vlassov a étudié le gauchissement des poutres profilées et a établi qu'une partie du couple  $C$  était reprise en « moment de gauchissement »  $C_w$ , et l'autre partie, en torsion de St-Venant  $C_r$ .

$$C = C_w + C_r$$

Le moment de torsion  $C_t$  correspond à l'équation :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_t}{GJ}$$

Le moment de gauchissement conduit à l'équation différentielle :

$$C_\omega = -EI_\omega \frac{d^3\theta}{dx^3}$$

où  $I_\omega$  est le moment d'inertie sectoriel, dont nous verrons la définition.

L'équation différentielle reliant la rotation de torsion au moment de torsion s'écrit donc :

$$C = GJ \frac{d\theta}{dx} - EI_\omega \frac{d^3\theta}{dx^3}$$

1° Définition des expressions intervenant dans l'étude du « gauchissement »

a) Aire sectorielle ( $L^2$ )

$$\omega = \int_0^s r ds,$$

b) Moment statique sectoriel ( $L^4$ )

$$S_\omega = \int_0^s \omega e ds,$$

c) Moment d'inertie sectoriel ( $L^6$ )

$$I_\omega = \int_0^s \omega^2 e ds,$$

d) Bimoment

Par définition le « Bimoment » est une grandeur statique, ayant la dimension  $\text{kg.cm}^2$ , ou  $\text{T.m}^2$

$$B = -EI_\omega \frac{d^2\theta}{dx^2}$$

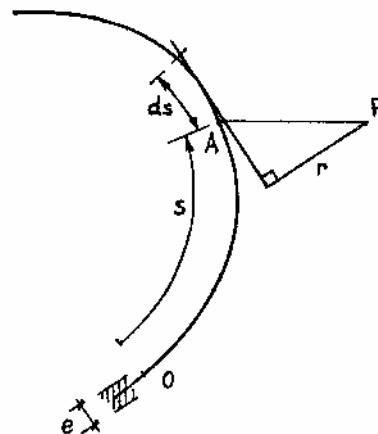


FIG. III.51.

e) Contrainte normale de gauchissement

$$n = - \frac{B\omega}{I_\omega},$$

f) Contrainte de cisaillement de gauchissement

$$t = \frac{- \frac{dB}{dx} S_\omega}{eI_\omega} = - \frac{C_\omega S_\omega}{eI_\omega},$$

g) Déplacement longitudinal d'un point  $M$

$$\Delta l(M) = - \frac{d\theta}{dx} \omega(M).$$

2° *Torsion et gauchissement d'une poutre en U*, encastree à la base et libre en tête (console), soumise à un couple d'extrémité  $C_0$ .

En appelant  $C_1$  la partie du couple de torsion  $C_0$  équilibrée suivant l'hypothèse de St-Venant et  $C_2$  la partie équilibrée par le gauchissement, nous avons :

$$C_0 = C_1 + C_2 \quad \text{et, en posant } a^2 = l^2 \frac{GJ}{EI_\omega}.$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_0}{GJ} \left[ 1 - \frac{\text{ch} \frac{(l-x)a}{l}}{\text{ch} a} \right] \quad (1)$$

$$C_1 = C_0 \left[ 1 - \frac{\text{ch} \frac{(l-x)a}{l}}{\text{ch} a} \right], \quad (2)$$

$$C_2 = C_0 \frac{\text{ch} \frac{(l-x)a}{l}}{\text{ch} a}, \quad (3)$$

L'équation (3) se retrouve en écrivant

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{C_0}{GJ} \frac{a}{l} \frac{\text{sh} \frac{(l-x)a}{l}}{\text{ch} a},$$

$$\frac{d^3\theta}{dx^3} = - \frac{C_0}{GJ} \frac{a^2}{l^2} \frac{\text{ch} \frac{(l-x)a}{l}}{\text{ch} a}.$$

On constate que la part  $C_2$  (du couple  $C_0$ ) équilibrée par le gauchissement correspond :

- à la totalité du couple  $C_0$  au voisinage de l'appui ( $x \neq 0$ ).
- à une part négligeable de  $C_0$  lorsqu'on s'éloigne suffisamment de l'appui ( $x \simeq l$ ). (Profil de grande longueur).

L'étude du gauchissement nous conduit à calculer :

a) 
$$C_2 = -EI_\omega \frac{d^3\theta}{dx^3}$$

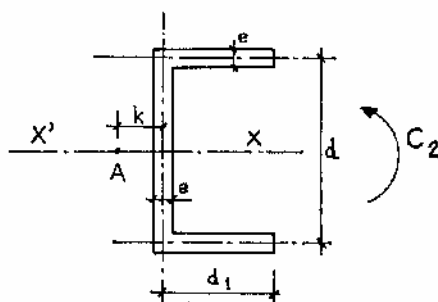


FIG. III.52.

b) 
$$I_\omega = \frac{1}{6}(d_1 - 3k)d^2 d_1^2 e + k^2 I_x,$$

avec 
$$k = \frac{ed^2 d_1^2}{4I_x} \quad I_\omega = \frac{d^2 d_1^2 e}{2} \left( \frac{d_1}{3} - \frac{k}{2} \right),$$

$I_x$  moment d'inertie par rapport à l'axe  $x'x$ .

c) L'aire sectorielle et le moment statique sectoriel de la section.

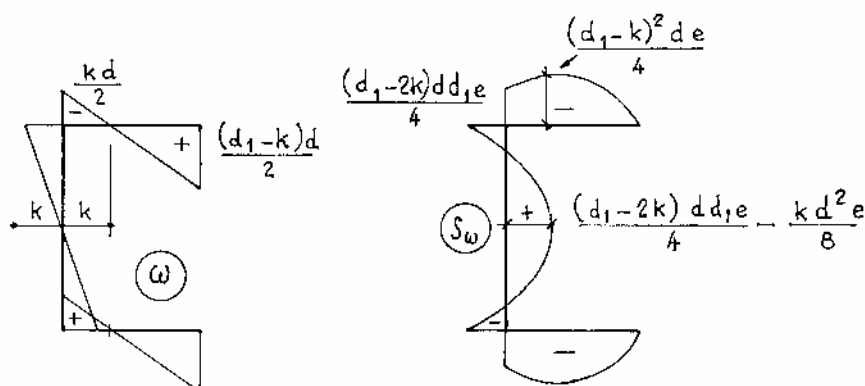


FIG. III.53.



d) Le bimoment créé dans un profil ouvert, par une charge  $P$  appliquée dans le sens longitudinal en un point  $K$ .

$$\text{On a : } B = P\omega_K$$

$\omega_K$  = aire sectorielle de la section au point  $K$ .

3° Equations générales de B.Z. Vlassov dans le cas des profils encastres à la base et libres en tête, sollicités transversalement par une charge  $P$ , distante de  $e$  du centre de torsion.

Si  $t$  désigne la cote où est appliquée la force  $P$  et  $l$  la longueur du profil, on a en posant :

$$a = l \sqrt{\frac{GJ}{EI_0}},$$

$$\text{— à la base } C_0 = P \cdot e$$

$$\text{et } B_0 = Pe \frac{l}{a} \frac{\text{sh } \frac{a}{l} (l-t) - \text{sh } a}{\text{ch } a},$$

— à une cote  $z$

$$\text{a) Si } 0 \leq z < t,$$

$$\theta'(z) = -\frac{B_0}{GJ} \frac{a}{l} \text{sh } \frac{a}{l} z + \frac{C_0}{GJ} \left( 1 - \text{ch } \frac{a}{l} z \right),$$

$$\text{soit avec } b = \frac{a}{l},$$

$$\theta'(z) = -\frac{Pe}{GJ} \frac{\text{sh } b(l-t) - \text{sh } bl}{\text{ch } bl} \text{sh } bz + \frac{Pe}{GJ} (1 - \text{ch } bz),$$

ou bien

$$\theta'(z) = -\frac{Pe}{GJ} \left[ \frac{\text{sh } b(l-t) \text{sh } bz - \text{sh } bl \text{sh } bz - \text{ch } bl + \text{ch } bl \text{ch } bz}{\text{ch } bl} \right],$$

ce qui s'écrit

$$\theta'(z) = \frac{Pe}{GJ} \left[ 1 - \frac{\text{ch } b(l-z)}{\text{ch } bl} - \frac{\text{sh } b(l-t)}{\text{ch } bl} \text{sh } bz \right].$$

On remarque que : si  $t = l$  on retrouve l'équation (1)

$$\theta'(z) = \frac{Pe}{GJ} \left[ 1 - \frac{\text{ch } b(l-z)}{\text{ch } bl} \right],$$

à partir de  $\theta'(z)$ , on obtient  $\theta''(z)$  et  $\theta'''(z)$

$$\theta''(z) = \frac{Pe}{GJ} b \left[ \frac{\text{sh } b(l-z)}{\text{ch } bl} - \frac{\text{sh } b(l-t)}{\text{ch } bl} \text{ch } bz \right],$$

$$\theta'''(z) = -\frac{Pe}{GJ} b^2 \left[ \frac{\text{ch } b(l-z)}{\text{ch } bl} + \frac{\text{sh } b(l-t)}{\text{ch } bl} \text{sh } bz \right],$$

pour  $z = 0$   $\theta'''(0) = -\frac{Pe}{EI_\omega}$ ,

et  $\theta'(0) = 0$ .

Le moment total de torsion, à la base, a pour valeur

$$C_0 = GJ\theta'_0 - EI_\omega\theta'''_0 = Pe,$$

b) Si  $t \leq z \leq l$

Lorsque  $z \geq t$ , l'effet du moment de torsion extérieur (il s'agit du moment total) disparaît, il faut donc en tenir compte.

Nous avons dans ce cas :

$$\theta'(z) = -\frac{B_0}{GJ} b \text{sh } bz + \frac{C_0}{GJ} (1 - \text{ch } bz) - \frac{Pe}{GJ} [1 - \text{ch } b(z-t)].$$

C'est la même formule que précédemment, sauf que l'on a tenu compte de la suppression du moment sur la distance  $(z-t)$ .

On peut donc écrire :

$$\theta'(z) = \frac{Pe}{GJ} \left[ 1 - \frac{\text{ch } b(l-z)}{\text{ch } bl} - \frac{\text{sh } b(l-t)}{\text{ch } bl} \text{sh } bz - 1 + \text{ch } b(z-t) \right],$$

ou

$$\theta'(z) = \frac{Pe}{GJ} \left[ \text{ch } b(z-t) - \frac{\text{ch } b(l-z)}{\text{ch } bl} - \frac{\text{sh } b(l-t)}{\text{ch } bl} \text{sh } bz \right].$$

Cette expression nous permet de calculer  $\theta''(z)$  et  $\theta'''(z)$ .

$$\theta''(z) = \frac{Pe}{GJ} b \left[ \text{sh } b(z-t) + \frac{\text{sh } b(l-z)}{\text{ch } bl} - \frac{\text{sh } b(l-t)}{\text{ch } bl} \text{ch } bz \right],$$

$$\theta'''(z) = -\frac{Pe}{GJ} b^2 \left[ \frac{\text{ch } b(l-z)}{\text{ch } bl} + \frac{\text{sh } b(l-t)}{\text{ch } bl} \text{sh } bz - \text{ch } b(z-t) \right].$$

Nous devons vérifier deux conditions :

que le bimoment est nul pour  $z = l$ ,

$\theta''(z)$  s'annule, en effet, pour  $z = l$ ,

que le moment de torsion total est nul sur toute la hauteur où

$$t \leq z \leq l$$

En écrivant

$$C = GJ \cdot \theta'(z) - EI_{\omega} \cdot \theta'''(z)$$

on obtient ici :

$$GJ\theta'(z) = Pe \left[ \text{ch } b(z-t) - \frac{\text{ch } b(l-z)}{\text{ch } bl} - \frac{\text{sh } b(l-t)}{\text{ch } bl} \text{sh } bz \right],$$

$$-EI_{\omega}\theta'''(z) = Pe \left[ \frac{\text{ch } b(l-z)}{\text{ch } bl} + \frac{\text{sh } b(l-t)}{\text{ch } bl} \text{sh } bz - \text{ch } b(z-t) \right].$$

La somme de ces deux expressions est bien nulle.

*Application* : Les équations de Vlassov sont très intéressantes pour l'étude des gaines (cages d'escaliers, gaines d'ascenseurs) que nous trouvons dans les bâtiments. Il faut, toutefois, la compléter en tenant compte de la présence des linteaux qu'on trouve, à chaque niveau, au droit des baies d'accès dans ces gaines.

Pour ce faire, nous aurons encore recours à l'étude, faite par Vlassov, relative aux déformations provoquées dans un profil ouvert par une charge  $P$ , parallèle aux génératrices et appliquée au bout d'une console encastree dans le profil ouvert.

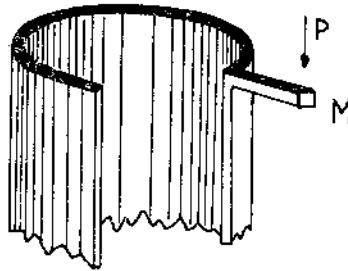


FIG. III.54.

Le bimoment est égal dans ce cas à :

$$\bar{B}_M = P \cdot \omega_M \quad \text{avec } \omega_M : \text{aire sectorielle en } M$$

Le déplacement correspondant à ce bimoment est égal à :

$$\delta = -\theta'_B \omega_M.$$

Les équations établies par Vlassov pour calculer  $\theta'_B$  sont les suivantes, dans le cas d'un profil ouvert, dont la base est encastrée et l'autre extrémité libre.

$$\text{Pour } z = 0 \text{ on a : } B_0 = \bar{B} \frac{\text{ch } b(l-t)}{\text{ch } bl}, \quad (4)$$

où  $t$  est la cote d'encastrement de la console

a) Pour  $0 \leq z < t$  on obtient :

$$\theta'(z) = -\frac{B_0}{GJ} b \text{ sh } bz,$$

$$B(z) = B_0 \text{ ch } bz.$$

On remarque ici que lorsque  $t = l$

$$B_0 = \frac{\bar{B}}{\text{ch } bl},$$

d'où 
$$\theta'(z) = -\frac{\bar{B}}{GJ} b \frac{\text{sh } bz}{\text{ch } bl},$$

et pour  $z = 0$   $\theta'_0 = 0.$

b) Pour  $t \leq z \leq l$  on a :

$$\theta'(z) = -\frac{B_0}{GJ} b \text{ sh } bz + \frac{P\omega_M}{GJ} b \text{ sh } b(z-t),$$

$$\theta''(z) = -\frac{B_0}{GJ} b^2 \text{ ch } bz + \frac{P\omega_M}{GJ} b^2 \text{ ch } b(z-t),$$

en remarquant que :

$$B(z) = -EI_\omega \theta''(z) \quad \text{on obtient :}$$

$$B(z) = B_0 \text{ ch } bz - P\omega_M \text{ ch } b(z-t)$$

pour  $z = l$  on a alors avec l'équation (4)

$$B(z) = \bar{B} \frac{\text{ch } b(l-t)}{\text{ch } bl} \text{ ch } bl - P\omega_M \text{ ch } b(l-t) = 0.$$

Avec les résultats que nous venons de définir, il nous est maintenant possible de traiter le problème du profil  $U$  (gaine fermée sur le 4<sup>e</sup> côté par une série de linteaux) sollicité par un moment de torsion extérieur.

Il nous suffit pour cela de commencer par considérer le profil comme pouvant se déformer après qu'une coupure ait été effectuée, dans un plan vertical, au droit de l'axe de chaque linteau (fig. III.55).

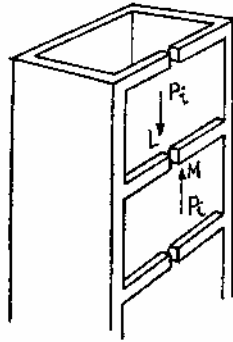


FIG. III.55.

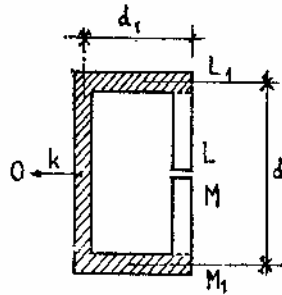


FIG. III.56.

1° Dans cette phase, nous savons déterminer les déplacements des lèvres  $L$  et  $M$  de la coupure à tous les niveaux :

$$\Delta l(i) = -\theta'(i) \cdot (\omega_L - \omega_M)$$

$\omega_L$  et  $\omega_M$  sont les aires sectorielles de la section en  $L$  et  $M$  (fig. III.56).

Les valeurs obtenues pour l'aire sectorielle en  $L_1$  et  $M_1$  sont :

$$(d_1 - k) \frac{d}{2} \quad \text{en} \quad L_1,$$

et 
$$-(d_1 - k) \frac{d}{2} \quad \text{en} \quad M_1,$$

nous devons tenir compte de la longueur des consoles (demie portée du linteau) pour calculer les aires sectorielles en  $L$  et  $M$ , c'est-à-dire que nous devons rajouter, à la valeur obtenue pour  $L_1$  par exemple, l'aire sectorielle

$$\int_{L_1}^L r \, ds = \int_{L_1}^L (k + d_1) \, ds = (k + d_1) \frac{d}{2},$$

d'où 
$$\omega_L = (d_1 - k) \frac{d}{2} + (k + d_1) \frac{d}{2} = d d_1,$$

et 
$$\omega_M = -(d_1 - k) \frac{d}{2} - (k + d_1) \frac{d}{2} = -d d_1.$$

Soit  $\omega_L - \omega_M = 2dd_1 = \Omega$   
 en appelant  $\Omega$  le double de la section du profil ouvert.

Le déplacement total de  $L$  et  $M$  dans cette première phase s'écrit donc :

$$\Delta l(i) = -\theta'(i) \Omega.$$

2° Nous devons engager au droit de chaque coupure des forces  $\pm P_i$  pour compenser le déplacement  $\Delta l(i)$  ainsi défini.

Les forces  $\pm P_i$  provoquent :

a) Une déformation de la console, telle que si :

$a$  : portée du linteau

$i$  : inertie du linteau de section  $S$

$$\Delta = \frac{Pa^3}{12Ei} + \frac{Pa}{GS},$$

pour un linteau de section rectangulaire, il est plus exact d'utiliser la formule :

$$\Delta = \frac{Pa^3}{12Ei} + \frac{1,2Pa}{GS}.$$

b) Un bimoment

$$\bar{B}_i = P_i(\omega_L - \omega_M) = P_i \Omega$$

qui provoque un déplacement des lèvres de la coupure  $L$  et  $M$ , à tous les niveaux

$$\delta_i = -\theta'(B_i) \Omega.$$

En écrivant qu'à chaque niveau le déplacement de  $L$  et  $M$ , après coupure du linteau, est compensé sous l'effet des forces  $P_i$ , par la déformation propre de la console (demi-linteau) et celles provenant des bimoments créés par les efforts  $P_i$ , on obtient un système d'équations qui nous permet de déterminer  $P_i$  à tous les niveaux.

Il en résulte que les bimoments créés sur toute la hauteur par les forces  $P_i$  viennent en diminution des bimoments obtenus, sans tenir compte de la présence des linteaux, d'où une réduction des contraintes normales de gauchissement, ainsi que des contraintes de cisaillement de gauchissement.

# **CALCUL PRATIQUE DES OSSATURES DE BATIMENTS EN BÉTON ARMÉ**

**Bâtiments courants — Bâtiments de grande hauteur**

par

**Albert FUENTÈS**

*Professeur à l'École Nationale des Ponts et Chaussées  
et à l'École Spéciale des Travaux Publics*

Préface de

**Roger LACROIX**

*Professeur de Béton Armé et Béton Précontraint  
à l'École Nationale des Ponts et Chaussées*

4<sup>e</sup> Edition

REVUE ET CORRIGÉE



61, boulevard Saint-Germain, 75005 PARIS

**1983**

---

## CHAPITRE IV

# CONTREVENTEMENT DES BATIMENTS

Dans ce chapitre, nous étudierons les méthodes permettant d'assurer la stabilité d'un bâtiment soumis à des efforts horizontaux (vent ou séisme).

Le contreventement peut être assuré grâce à l'intervention :

- a) des voiles ou murs, appelés couramment refends, entrant dans la composition de l'ouvrage ;
- b) du système « poteaux-poutres » formant portiques étagés ;
- c) des cages d'escaliers et d'ascenseurs ou « gaines » présentant une grande rigidité à la flexion et à la torsion.

Dans certains cas, il sera avantageux de faire intervenir simultanément les portiques et les refends, éventuellement les gaines.

## A. LES REFENDS

### 1° Refend plein

Si l'élanement est suffisant, le refend peut être assimilé à une console soumise aux effets du vent.

On en déduit le moment fléchissant et l'effort tranchant dans chaque section horizontale du refend.

Aux efforts ainsi déterminés, on ajoute ensuite les compressions dues aux charges verticales et la stabilité de l'ensemble est assurée aux deux conditions suivantes :

- La contrainte la plus élevée n'excède pas la limite permise.
- Il n'y a pas de traction (si le voile est constitué de maçonnerie ou de béton non armé).



## 2° Refend présentant des ouvertures isolées

Si le refend étudié présente des ouvertures placées de telle façon qu'elles n'altèrent pas le caractère monolithique de l'ensemble (passage de bielles à 45° à travers le système d'ouvertures), il est possible de considérer ce refend comme une console et de le calculer comme un refend plein, bien que des précautions doivent être prises aux voisinages des ouvertures : en effet, l'absence de béton et d'armatures au droit des baies renvoie sur le pourtour du trou les efforts qui normalement auraient été répartis dans la surface de l'ouverture. Il faut dans un tel cas entourer les ouvertures d'un cadre de béton armé. Les armatures de ce cadre sont déterminées pour résister aux cisaillements cumulés sur le pourtour de l'ouverture. On devra donc déterminer au droit des linteaux notamment, l'effort de glissement  $\frac{T \cdot m_s}{I}$  dans la console considérée monolithique et en déduire le cisaillement dans le linteau en fonction de ses dimensions.

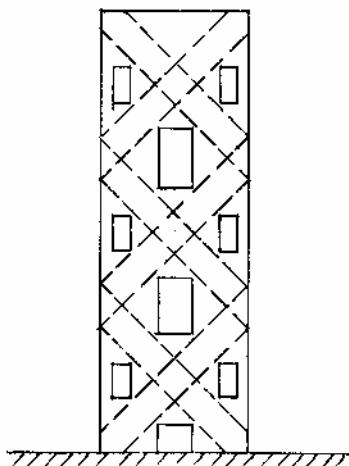


FIG. IV.1.

On a ci-dessus (fig. IV-1) un exemple de refend répondant à ces conditions.

## I. Distribution des efforts horizontaux dans les refends en maçonnerie — (Parpaings - Briques - Moellons)

Dans cette étude, nous supposons que :

- La raideur de torsion de chaque refend est nulle.
- L'assemblage de plusieurs refends, formant gaine d'ascenseur, par exemple, ou bien cage d'escalier, ne forme pas un ensemble rigide, pouvant présenter une raideur à la torsion. En d'autres termes, l'étude est menée (compte tenu notamment des faibles contraintes de cisaillement admissibles pour des éléments en parpaings, briques ou moellons) comme s'il s'agissait de plusieurs refends juxtaposés, sans liaison.

Nous précisons toutefois que *les résultats obtenus pour les refends parallèles*, aussi bien dans les systèmes isostatiques que dans les systèmes hyperstatiques, *sont valables pour les refends en béton armé de faible épaisseur*, ce qui permet de négliger leur raideur de torsion.

Par contre nous étudierons, séparément, l'influence de la raideur de torsion des gaines en Béton Armé (ascenseurs, escaliers, etc.) sur la distribution des efforts à travers les différents éléments de l'ossature.

#### a) Systèmes isostatiques

1° *Cas de deux refends parallèles* — En supposant le plancher infiniment rigide, les efforts dans les refends sont ceux d'un système isostatique, quelle que soit l'inertie des deux refends (fig. IV.2).

$$R_1 = \frac{Hb}{l},$$

$$R_2 = \frac{Ha}{l}.$$

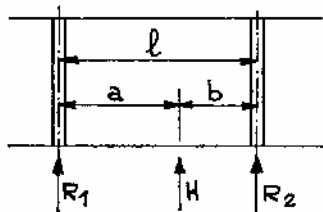


Fig. IV.2.

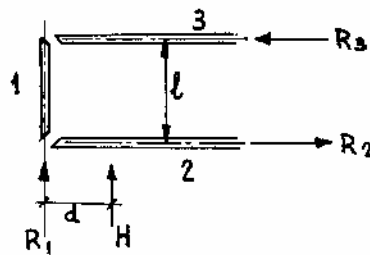


Fig. IV.3.

2° *Cas de trois refends en maçonnerie formant un ensemble en U* — Le système peut être ramené à une force  $R_1$ , agissant au droit du refend 1, à condition d'introduire un moment  $H.d$  (fig. III.3).

d'où  $R_1 = H,$

et  $R_2 = -R_3 = \frac{Hd}{l}.$

#### b) Systèmes hyperstatiques

Nous ferons les hypothèses suivantes :

- a) Les planchers sont indéformables horizontalement.
- b) Les refends sont parfaitement encastés, à leur base.
- c) L'inertie des refends est constante sur toute la hauteur ou bien la variation d'inertie suit la même loi pour tous les refends.
- d) Nombre d'étages, au moins égal à 4.

1° Refends parallèles

a) Si la résultante des efforts extérieurs coïncide avec le centre de gravité des inerties de tous les refends, l'effort sur chaque refend est proportionnel à son inertie. En effet, nous supposons les planchers indéformables, de sorte que tous les refends subissent un même déplacement.

Ce déplacement est de la forme :

$$e = \frac{Fh^3}{3EI}$$

(console d'inertie constante  $I$  soumise à un effort  $F$ , appliqué à une distance  $h$  de l'encastrement).

Ainsi, à un même niveau de hauteur  $h$ , subissant un déplacement uniforme  $e$ , on peut écrire :

$$F = \frac{3EIe}{h^3}$$

et déduire que cet effort est proportionnel à l'inertie du refend considéré, en supposant que le module d'élasticité  $E$  soit le même pour tous les refends.

b) Dans le cas où la résultante des efforts extérieurs ne correspond pas au centre de gravité des inerties (c'est le cas général) il y a modification des efforts par suite de l'existence d'un moment  $H.d$ .

$H$  = résultante des efforts horizontaux ;

$d$  = distance du centre de gravité des inerties de refend, à la résultante  $H$ .

Ce problème peut être résolu, en ramenant la résultante  $H$  au centre de gravité des inerties, ce qui nous permet de décomposer cette résultante proportionnellement aux inerties des refends,

$$R_i = \frac{HI_i}{\sum I_i}$$

puis en corrigeant les efforts obtenus en tenant compte du moment de flexion  $M = Hd$ , appliqué à une section dont les caractéristiques peuvent être définies, comme suit :

$$S = \sum I_i,$$

$$I = \sum I_i x_i^2,$$

$$V = x_i.$$

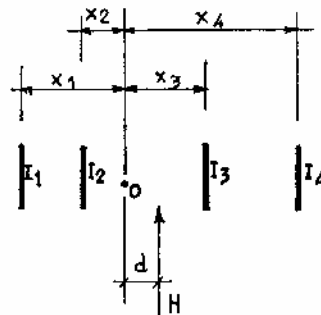


FIG. IV.4.

La formule classique nous donne

$$\sigma = \frac{MV}{I},$$

ou 
$$\frac{R_i''}{I_i} = \frac{Hdx_i}{\Sigma I_i x_i^2},$$

soit encore 
$$R_i'' = \frac{Hdx_i I_i}{\Sigma I_i x_i^2}.$$

L'effort sur chaque refend est, par suite, la somme des deux efforts obtenus :

- a) par la translation de la section  $\Sigma I_i$ ,
- b) par la rotation de cette même section.

Ce qui s'écrit :

$$R_i = R_i' + R_i'',$$

$$R_i = HI_i \left( \frac{1}{\Sigma I_i} + \frac{dx_i}{\Sigma I_i x_i^2} \right).$$

En utilisant la figure, ci-dessous, ce résultat peut être obtenu, en écrivant encore pour :

- a) la translation

$$R_1' = \frac{HI_1}{I_1 + I_2 + I_3}, \quad R_2' = \frac{HI_2}{I_1 + I_2 + I_3}, \quad R_3' = \frac{HI_3}{I_1 + I_2 + I_3}.$$

- b) la rotation, qui provoque les déplacements  $e_1, e_2,$  et  $e_3$ .

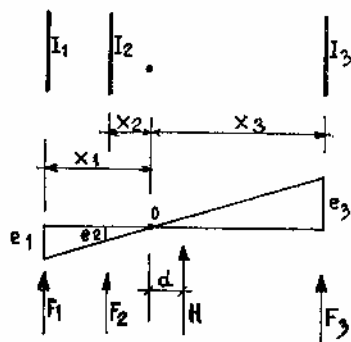


FIG. IV.5.

$$R_1'' = \frac{3EI_1 e_1}{h^3},$$

$$R_2'' = \frac{3EI_2 e_2}{h^3},$$

$$R_3'' = \frac{3EI_3 e_3}{h^3},$$

ou en posant

$$\frac{3E}{h^3} = k,$$

$$R_1'' = kI_1e_1, \quad R_2'' = kI_2e_2, \quad R_3'' = kI_3e_3,$$

et en exprimant  $e_2$  et  $e_3$  en fonction de  $e_1$

$$R_2'' = \frac{kI_2e_1x_2}{x_1},$$

$$R_3'' = \frac{kI_3e_1x_3}{x_1}.$$

L'équilibre des moments donne par suite

$$Hd = R_1''x_1 + R_2''x_2 + R_3''x_3,$$

ou 
$$Hd = kI_1e_1x_1 + \frac{kI_2e_1x_2^2}{x_1} + \frac{kI_3e_1x_3^2}{x_1},$$

ou 
$$Hd = \frac{ke_1}{x_1}(I_1x_1^2 + I_2x_2^2 + I_3x_3^2).$$

Si nous remplaçons dans cette formule  $e_1$  par  $\frac{R_1''}{kI_1}$ .

On obtient :

$$Hd = \frac{R_1''}{I_1x_1} \sum I_i x_i^2 \quad \text{ou} \quad R_1'' = \frac{HdI_1x_1}{\sum I_i x_i^2}.$$

En superposant l'effet de la translation et de la rotation, on obtient bien la formule déjà établie :

$$F_i = HI_i \left( \frac{1}{\sum I_i} + \frac{dx_i}{\sum I_i x_i^2} \right).$$

**REMARQUE IMPORTANTE :** Tous les refends en maçonnerie de moellons, briques ou parpaings, soumis à des efforts horizontaux, doivent être vérifiés comme suit :

1° L'excentricité de la charge verticale maximale, sollicitant l'élément, ne doit pas provoquer, sur la fibre la plus comprimée, une contrainte supérieure à celle admissible pour le matériau constituant l'élément.

2° L'excentricité de la charge verticale minimale, pouvant solliciter l'élément, ne doit provoquer aucune traction sur cet élément.

2° Bâtiment comportant une cage en maçonnerie, sans raideur à la torsion, à l'une de ses extrémités, la rigidité des autres éléments étant considérée comme négligeable.

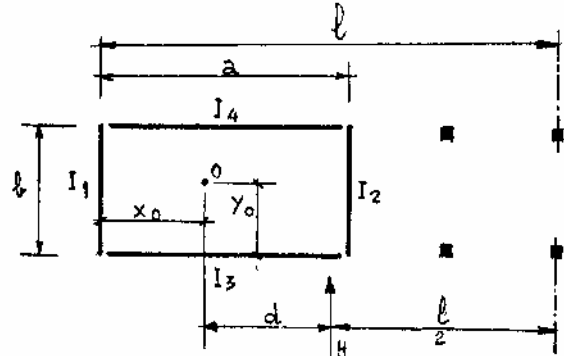


FIG IV.6.

Le centre de rotation est défini par :

$$X_0 = a \frac{I_2}{I_1 + I_2},$$

$$Y_0 = b \frac{I_4}{I_3 + I_4}.$$

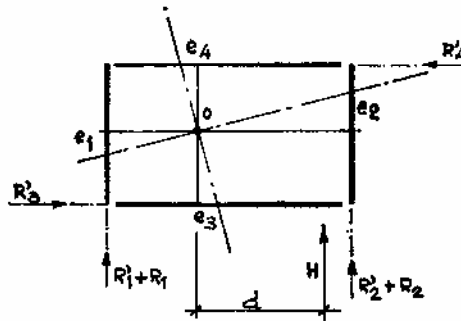


FIG. IV.7.

Sous l'effet de la résultante  $H$ , il y a tout d'abord l'effet de translation qui donne

$$R_1 = \frac{HI_1}{I_1 + I_2} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{HI_2}{I_1 + I_2},$$

puis l'effet de rotation qui provoque des déplacements  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  et  $e_4$ , et qui provoque de nouveaux efforts,

$$R'_1 = kI_1e_1 \quad \text{en posant } k = \frac{3E}{h^3}$$

$$R'_2 = kI_2e_2,$$

$$R'_3 = kI_3e_3,$$

$$R'_4 = kI_4e_4.$$

L'équilibre des moments nous donne

$$Hd = R'_1 X_0 + R'_2(a - X_0) + R'_3 Y_0 + R'_4(b - Y_0),$$

et en remarquant que

$$\frac{e_1}{X_0} = \frac{e_2}{a - X_0} = \frac{e_3}{Y_0} = \frac{e_4}{b - Y_0},$$

on obtient respectivement

$$R'_2 = \frac{kI_2 e_1(a - X_0)}{X_0} = \frac{R'_1 I_2(a - X_0)}{I_1 X_0},$$

$$R'_3 = \frac{kI_3 e_1 Y_0}{X_0} = \frac{R'_1 I_3 Y_0}{I_1 X_0},$$

et

$$R'_4 = \frac{kI_4 e_1(b - Y_0)}{X_0} = \frac{R'_1 I_4(b - Y_0)}{I_1 X_0},$$

d'où l'équation

$$Hd = R'_1 X_0 + \frac{R'_1 I_2(a - X_0)^2 + R'_1 I_3 Y_0^2 + R'_1 I_4(b - Y_0)^2}{I_1 X_0},$$

ou

$$Hd I_1 X_0 = R'_1 [I_1 X_0^2 + I_2(a - X_0)^2 + I_3 Y_0^2 + I_4(b - Y_0)^2],$$

d'où les valeurs de  $R'_1$ , puis de  $R'_2$ ,  $R'_3$  et  $R'_4$ .

Aux valeurs de  $R'_1$  et de  $R'_2$  ainsi déterminées, on devra rajouter les valeurs de  $R_1$  et  $R_2$  obtenues sous l'effet de la translation, d'où la règle générale pour un système de contreventement à refends orthogonaux d'inertie  $I_{ix}$  et  $I_{iy}$  :

La translation ne concerne que les refends parallèles à la direction de l'effort horizontal  $\frac{H I_{ix}}{\Sigma I_{ix}}$  (car  $I_{iy}$  est négligeable), alors que la rotation intéresse les refends des deux directions

$$\frac{H dx_i I_{ix}}{\Sigma I_{ix} x_i^2 + \Sigma I_{iy} y_i^2} \quad \text{ou} \quad \frac{H dy_i I_{iy}}{\Sigma I_{ix} x_i^2 + \Sigma I_{iy} y_i^2}$$

Les murs de refend de direction oblique peuvent être traités par décomposition de l'effort horizontal ( $Ox$  ou  $Oy$ ) suivant la direction du refend dont le déplacement suivant  $Ox$  ou  $Oy$  est obtenu par projection.

## II. Refends parallèles et cage (escalier ou ascenseur) ayant une rigidité à la torsion

Nous supposons dans cette étude que les planchers sont indéformables horizontalement, que les refends sont parfaitement encastrés à leur base et enfin que l'inertie des refends est constante sur toute la hauteur, ou bien que la variation d'inertie suit la même loi pour tous les refends.

Avec ces hypothèses, l'effort dans chaque refend est à la fois proportionnel à son inertie et au déplacement qu'il subit.

Par suite de l'hypothèse d'indéformabilité horizontale des planchers, il est évident que le problème posé est équivalent à un problème de flexion composée, dans lequel la section résistante serait constituée par l'ensemble des refends, chaque refend étant affecté d'un coefficient égal à son inertie propre.

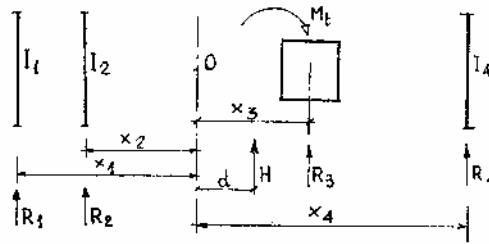


FIG. IV.8.

La formule classique de la flexion composée  $n = \frac{F}{S} + \frac{MV}{I}$  s'écrit avec

$$F = H \quad M = Hd - M_t \quad V = x_i$$

et

$$S = \sum I_i \quad I = \sum I_i x_i^2,$$

$$\frac{R_i}{I_i} = \frac{H}{\sum I_i} + \frac{(Hd - M_t)x_i}{\sum I_i x_i^2},$$

d'où la valeur de  $R_i$ .

Dans la déformation du bâtiment sous l'action du vent, les planchers tournent autour d'un axe fixe, le barycentre, centre de gravité des inerties des refends et de la cage.



Si la résultante  $H$  coïncide avec la position du centre de gravité des inerties des refends, et de la cage, la rotation est nulle et l'effort  $R_i$  est uniquement proportionnel à l'inertie du refend considéré.

$$R_i = \frac{HI_i}{\Sigma I_i}$$

Si la résultante  $H$  ne coïncide pas avec  $O$ , la déformation du bâtiment peut-être décomposée en une translation et une rotation autour de  $O$ .

a) Dans la translation, tous les points du bâtiment subissent le même déplacement.  $ABCD$  vient en  $A_1B_1C_1D_1$  et  $O$  vient en  $O_1$ .

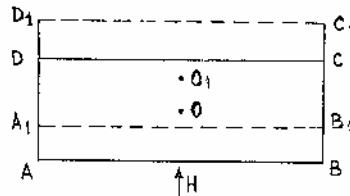


FIG. IV.9.

b) Dans la rotation tous les points tournent autour d'un axe passant par  $O_1$ .

$O_1$  a donc, dès la translation, sa position définitive.

Nous précisons, dans cette étude, que la cage présente deux axes de symétrie dont l'intersection correspond au centre de torsion de la cage.

Il suffit, par conséquent, de définir les déplacements que subissent les refends ou la cage, à chaque niveau, et d'écrire que pour chacun de ces

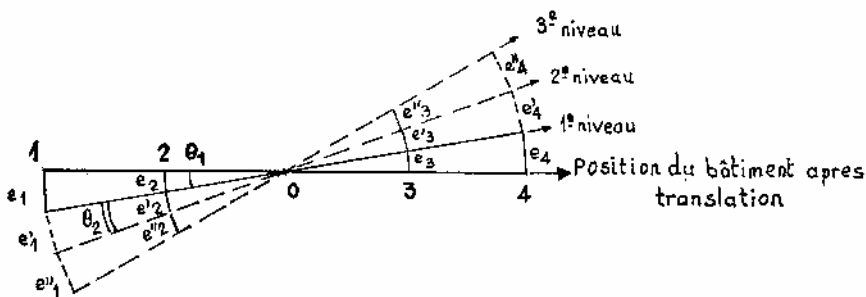


FIG. IV.10.

niveaux, l'angle de rotation de la cage et du plancher, (grâce auquel nous déterminerons le moment de torsion du niveau considéré) sont compatibles.

On peut expliquer les figures IV.10 et IV.11, en précisant que :

Le point  $O$  se déplace conformément à la translation, c'est-à-dire qu'il décrit la déformée du bâtiment, soumis à chaque niveau à un effort  $H_1, H_2, H_3, H_4$ , dont la somme est égale à la résultante  $H$ .

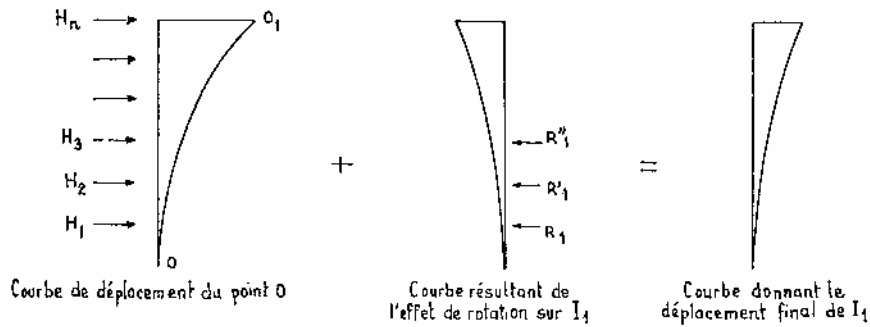


FIG. IV.11.

Les flèches finales des refends 1, 2, 3, 4 se déduisent, à chaque niveau, de la courbe de déplacement de  $O$ , en opérant par addition de deux courbes.

Ainsi dans la rotation, le refend 1 se déplace de  $e_1$  au 1<sup>er</sup> niveau, de  $e_1 + e'_1$  au 2<sup>e</sup> niveau, de  $e_1 + e'_1 + e''_1$  au 3<sup>e</sup> niveau, etc.

il suffit d'analyser les efforts qui ont provoqué ces déplacements : ce sont les efforts qui résultent de l'application de la formule de flexion composée, qui nous donne pour le refend 1

$$\frac{R_1}{I_1} = \frac{(H_1 d - M_{i1}) x_1}{\sum I_i x_i^2} \quad \text{au 1<sup>er</sup> niveau, d'où } R_1,$$

$$\frac{R'_1}{I_1} = \frac{(H_2 d - M_{i2}) x_1}{\sum I_i x_i^2} \quad \text{au 2<sup>e</sup> niveau, d'où } R'_1,$$

$$\frac{R''_1}{I_1} = \frac{(H_3 d - M_{i3}) x_1}{\sum I_i x_i^2} \quad \text{au 3<sup>e</sup> niveau, d'où } R''_1,$$

Au 1<sup>er</sup> niveau nous avons  $\theta_1 = \frac{e_1}{x_1}$ .

Or si  $GJ_3$  est la rigidité de torsion de la cage 3, nous avons, en appelant  $h$  la hauteur d'étage

$$\frac{d\theta}{dh} = \frac{M_t}{GJ_3},$$

$\left(\frac{d\theta}{dh} : \text{angle de torsion par unité de hauteur de cage}\right)$  et la valeur du moment de torsion au 1<sup>er</sup> niveau est par suite :

$$M_{t_1} = \frac{GJ_3}{h} \frac{e_1}{x_1}.$$

Au 2<sup>e</sup> niveau la valeur du moment de torsion sera :

$$M_{t_2} = \frac{GJ_3}{h} \theta_2 = \frac{GJ_3}{h} \frac{e'_1}{x_1},$$

notons que  $e'_1$  est le déplacement du 2<sup>e</sup> niveau par rapport au 1<sup>er</sup> niveau, de même que  $\theta_2$  est l'angle de rotation du 2<sup>e</sup> niveau par rapport au 1<sup>er</sup> niveau (voir fig. IV.10), l'angle de rotation total étant  $\theta_1 + \theta_2$ .

Au 3<sup>e</sup> niveau, on aura de même :

$$M_{t_3} = \frac{GJ_3}{h} \frac{e''_1}{x_1},$$

etc.

$M_{t_1}, M_{t_2}, M_{t_3}$ , etc. étant les inconnues, on détermine en fonction de  $R_1, R'_1, R''_1$ , etc. les valeurs des déplacements, à chaque niveau :

c'est-à-dire  $e_1 \quad e_1 + e'_1 \quad e_1 + e'_1 + e''_1, \quad \text{etc.},$

puis en partant du 1<sup>er</sup> niveau, on pourra calculer

$$M_{t_1} \text{ en fonction de } R'_1 R''_1 R'''_1 \dots R_{n-1} R_n,$$

$$M_{t_2} \text{ en fonction de } R''_1 R'''_1 \dots R_{n-1} R_n,$$

$$M_{t_3} \text{ en fonction de } R'''_1 \dots R_{n-1} R_n,$$

enfin au dernier niveau, on pourra déterminer la valeur de  $M_{t_n}$  d'où  $M_{t_{n-1}}$ , puis ...  $M_{t_3}, M_{t_2}$  et  $M_{t_1}$ .

*Exemple* : Considérons un bâtiment de 5 étages, la hauteur d'étage est de 3 m et la force horizontale due au vent, concentrée à chaque niveau, est de 4 t pour une façade de 10 m.

L'inertie du refend 1 est de 4,68 m<sup>4</sup>.  
 L'inertie de la cage 2 est de 2,34 m<sup>4</sup> et son module de torsion 3,46 m<sup>4</sup>.  
 L'inertie du refend 3 est également de 2,34 m<sup>4</sup>,  
 Ces valeurs sont valables sur toute la hauteur du bâtiment.

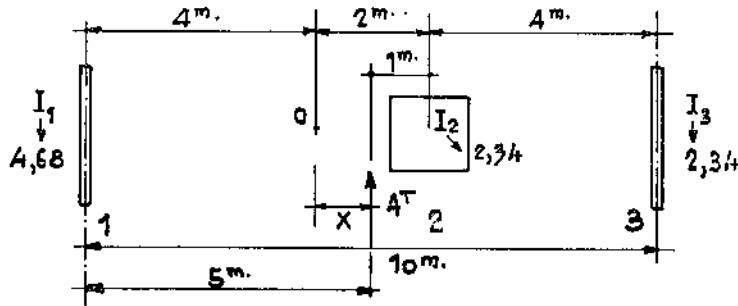


FIG. IV.12.

Dans le cas de l'exemple ci-dessus, où un moment  $M_t$  est appliqué au bâtiment nous allons chercher la position du centre de rotation.

La formule classique devient dans ce cas

$$\frac{R_i}{I_i} = \frac{H}{\Sigma I_i} + \frac{(Hx - M_t)x_i}{\Sigma I_i x_i^2}$$

Refend 1	$x_{i_1} = 5 - x$	$I_i x_i^2 = 4,68(5 - x)^2$
Refend 2	$x_{i_2} = 1 + x$	$+ 2,34(1 + x)^2$ ,
Refend 3	$x_{i_3} = 5 + x$	$+ 2,34(5 + x)^2$ .

On a donc :

$$R_1 = \frac{4 \times 4,68}{9,36} + \frac{(Hx - M_t)(5 - x)4,68}{4,68(5 - x)^2 + 2,34(1 + x)^2 + 2,34(5 + x)^2}$$

$$R_2 = \frac{4 \times 2,34}{9,36} + \frac{(Hx - M_t)(1 + x)2,34}{4,68(5 - x)^2 + 2,34(1 + x)^2 + 2,34(5 + x)^2}$$

$$R_3 = \frac{4 \times 2,34}{9,36} + \frac{(Hx - M_t)(5 + x)2,34}{4,68(5 - x)^2 + 2,34(1 + x)^2 + 2,34(5 + x)^2}$$

On doit avoir :  $R_1 + R_2 + R_3 = 4T$

Ce qui s'écrit :

$$\frac{4(4,68 + 2,34 + 2,34)}{9,36} + \frac{(Hx - M_t)[(1+x)2,34 + (5+x)2,34 - (5-x)4,68]}{\Sigma I_i x_i^2} = 4$$

$$(Hx - M_t)[(1+x)2,34 + (5+x)2,34 - (5-x)4,68] = 0,$$

ce qui donne  $-9,36 + 9,36x = 0$   $x = 1$  m soit  $d = 1$  m

Les efforts dans le cas où le moment de torsion existe, sont ainsi :

$$R_1 = \frac{4 \times 4,68}{9,36} - \frac{4,68(4 \times 1 - M_t)4}{168,56} = 2 - 0,445 + \frac{18,72 M_t}{168,56},$$

$$R_2 = \frac{4 \times 2,34}{9,36} + \frac{2,34(4 \times 1 - M_t)2}{168,56} = 1 + 0,110 - \frac{4,68 M_t}{168,56},$$

$$R_3 = \frac{4 \times 2,34}{9,36} + \frac{2,34(4 \times 1 - M_t)6}{168,56} = 1 + 0,335 - \frac{14,04 M_t}{168,56}.$$

Le moment de torsion a eu pour effet de rapprocher du point  $O$ , la résultante  $H$ , de la quantité  $\frac{M_t}{H}$ , de sorte que les efforts se déduisent du moment :

$$H \left( d - \frac{M_t}{H} \right) \quad \text{soit ici} \quad H \left( 1 - \frac{M_t}{H} \right).$$

En conclusion, il s'agit d'un problème de flexion composée pure, où les caractéristiques de la section ne changent pas.

Dans la rotation, on a donc pour le refend 1 :

$$\frac{P_1}{I_1} = \frac{(4 \times 1 - M_{t1})4}{168,56},$$

$$P_1 = \frac{(4 - M_{t1})4 \times 4,68}{168,56} = \frac{4 - M_{t1}}{9} \text{ au 1}^{\text{er}} \text{ niveau},$$

$$P_2 = \frac{4 - M_{t2}}{9} \text{ au 2}^{\text{e}} \text{ niveau},$$

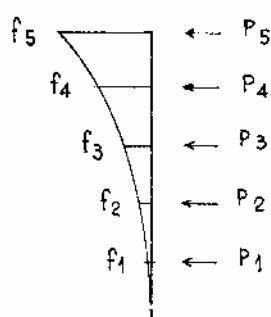
$$P_3 = \frac{4 - M_{t3}}{9} \text{ au 3}^{\text{e}} \text{ niveau}.$$

$$P_4 = \frac{4 - M_{t4}}{9} \text{ au } 4^{\text{e}} \text{ niveau,}$$

$$P_5 = \frac{4 - M_{t5}}{9} \text{ au } 5^{\text{e}} \text{ niveau.}$$

$P_1, P_2, P_3, P_4$  et  $P_5$  sont les efforts dus à la rotation uniquement.

Exprimons les déplacements à chacun des niveaux, en fonction de  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ , on trouve respectivement, par application du théorème du moment des aires dans une console.



$$f_1 = \frac{63P_5 + 49,5P_4 + 36P_3 + 22,5P_2 + 9P_1}{E \times 4,68},$$

$$f_2 = \frac{234P_5 + 180P_4 + 126P_3 + 72P_2 + 22,5P_1}{E \times 4,68},$$

$$f_3 = \frac{468P_5 + 364,5P_4 + 243P_3 + 126P_2 + 36P_1}{E \times 4,68},$$

$$f_4 = \frac{792P_5 + 576P_4 + 364,5P_3 + 180P_2 + 49,5P_1}{E \times 4,68},$$

$$f_5 = \frac{1\,125P_5 + 792P_4 + 486P_3 + 234P_2 + 63P_1}{E \times 4,68}.$$

FIG. IV.13.

Nous savons d'autre part que :

$$M_{t1} = \frac{GJ}{h} \frac{f_1}{x_1} = \frac{0,4E \times 3,46}{3} \frac{(63P_5 + 49,5P_4 + 36P_3 + 22,5P_2 + 9P_1)}{E \times 4,68 \times 4},$$

$$M_{t1} = \frac{1}{40} (63P_5 + 49,5P_4 + 36P_3 + 22,5P_2 + 9P_1), \quad (1)$$

$$M_{t2} = \frac{1}{40} (f_2 - f_1), \quad (2)$$

$$M_{t3} = \frac{1}{40} (f_3 - f_2), \quad (3)$$

$$M_{t4} = \frac{1}{40} (f_4 - f_3), \quad (4)$$

$$M_{t5} = \frac{1}{40} (f_5 - f_4). \quad (5)$$

Dans l'équation 1, on remplace  $P_1$  par  $\frac{4 - M_{t1}}{9}$  et on déterminera  $M_{t1}$  en fonction de  $P_2, P_3, P_4$  et  $P_5$ .

Dans l'équation 2, on remplacera la valeur de  $P_1$  par  $\frac{4-M_{t1}}{9}$  et  $P_2$  par  $\frac{4-M_{t2}}{9}$ . En portant la valeur trouvée précédemment pour  $M_{t1}$  en fonction de  $P_2, P_1, P_3$  et  $P_4$  et en écrivant à nouveau que  $P_2$  vaut  $\frac{4-M_{t2}}{9}$ , on aura  $M_{t2}$  en fonction de  $P_3, P_4, P_5$ .

Le calcul est conduit de la sorte jusqu'au 5<sup>e</sup> niveau, où l'on obtiendra la valeur de  $M_{t5}$ , qui nous permettra de déterminer  $M_{t4}, M_{t3}, M_{t2}$  et  $M_{t1}$ .

Les résultats ainsi obtenus pour l'exemple précédent sont :

$$M_{t5} = 2,82 \text{ T}\cdot\text{m},$$

$$M_{t4} = 2,74 \text{ T}\cdot\text{m},$$

$$M_{t3} = 2,29 \text{ T}\cdot\text{m},$$

$$M_{t2} = 1,85 \text{ T}\cdot\text{m},$$

$$M_{t1} = 0,77 \text{ T}\cdot\text{m}.$$

### III. Refend de faible hauteur

Lorsqu'un refend a une hauteur égale ou inférieure à sa longueur et lorsque sa base peut être considérée comme encastree, les déformations par flexion peuvent être négligées.

On ne prend en compte, dans ce cas, que les déformations par effort tranchant.

Si  $S$  : section du mur  
 $G$  : module d'élasticité transversale  
 $T$  : effort tranchant en tête du refend  
 $h$  : hauteur du refend.

Le déplacement  $\Delta$  en tête du refend est donné par la formule :

$$\Delta = \frac{Th}{GS}.$$

### IV. Refend à une seule file d'ouvertures

*Refend en maçonnerie ou en Béton Armé, présentant des ouvertures superposées sur toute sa hauteur, situées dans l'axe du refend.*

Le fait que les ouvertures soient superposées, crée un affaiblissement dans le plan vertical qui modifie la répartition des efforts dans la totalité du refend. Une telle disposition est incompatible avec l'hypothèse du voile indéformable.

Nous devons considérer dans ce cas, que l'ensemble est constitué de deux demi-refends de largeur égale, reliés par des éléments horizontaux (linteaux) de faible raideur relative, encastrée dans les demi-refends, à leurs extrémités.

Pour effectuer un tel calcul, nous devons écrire :

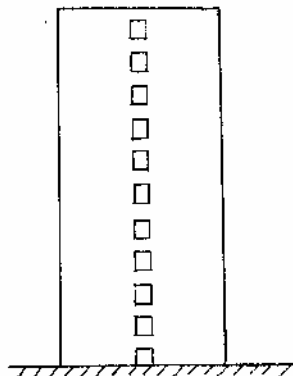


FIG. IV.14.

a) Que deux points  $A_1$  et  $B_1$  des fibres moyennes des demi-refends, situés dans un même plan horizontal (plancher) avant déformation, ont même déplacement horizontal après déformation.

b) Qu'une section plane  $A_1C_1$  ou  $B_1D_1$  perpendiculaire à la fibre moyenne sans sollicitation, reste plane et perpendiculaire à la déformée après déformation.

En supposant que le point d'inflexion du linteau se situe au milieu de  $b$ , le moment d'encastrement des linteaux est tel que si  $\Delta h$  est le déplacement qu'on constate entre les points  $C_1$  et  $D_1$  sous l'effet de la rotation  $\gamma'$  des demi-refends reliés par le linteau, ce linteau subit une déformation telle qu'au point  $O$ , milieu de  $b$ ,

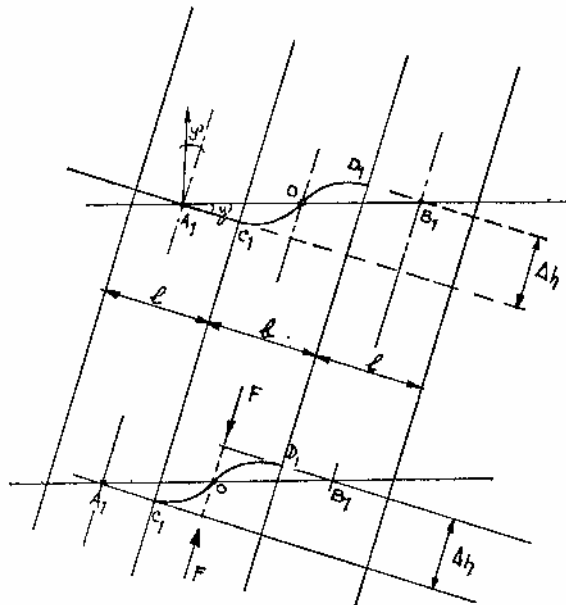


FIG. IV.15.



deux efforts  $F$  égaux et opposés sont créés; de sorte que la flèche du linteau s'écrira :

$$\frac{F \left(\frac{b}{2}\right)^3}{3Ei} = \frac{\Delta h}{2},$$

d'où 
$$F = \frac{3Ei\Delta h}{2 \frac{b^3}{8}} = \frac{24Ei\Delta h}{2b^3} = \frac{12Ei\Delta h}{b^3},$$

avec  $i$  = inertie du linteau

et  $F$  = effort tranchant dans le linteau

Le moment du linteau en  $C_1$  ou  $D_1$  est donc :

$$M_{C_1} = F \frac{b}{2} = \frac{6Ei\Delta h}{b^2},$$

en admettant un point de moment nul en  $O$ , milieu de  $CD$ .

$\Delta h$  s'exprime par rapport à  $y'_A$  (qui est égale à  $\frac{\Delta h}{b+l}$ ) par l'égalité suivante :

$$\Delta h = (b+l)y'_A,$$

et

$$M_{C_1} = \frac{6Ei(l+b)}{b^2} y'_A.$$

Le moment par rapport à la fibre neutre des demi-refends est :

$$M_{A_1} = F \frac{(l+b)}{2} = \frac{12Ei\Delta h}{b^3} \frac{l+b}{2} = \frac{6Ei\Delta h(l+b)}{b^3},$$

ou

$$M_{A_1} = \frac{6Ei(l+b)^2}{b^3} y'_A.$$

C'est le moment dû au linteau, à chaque niveau, exprimé en fonction de la rotation du demi-refend, à ce niveau.

On peut donc écrire le moment à chaque niveau en partant du haut du refend, de la façon suivante (voir figures IV.16 et IV.17).

Si  $P$  = charge horizontale concentrée à chaque niveau,

$I$  = inertie de chaque demi-refend,

et  $a$  = hauteur d'étage

on a 
$$M_B = Pa - \frac{6Ei(l+b)^2}{b^3} y'_A = Pa - Ky'_A,$$

en posant 
$$K = \frac{6Ei(l+b)^2}{b^3},$$

avec 
$$y'_A = y'_B + \frac{Pa^2}{2EI} - Ky'_A \frac{a}{EI},$$

d'où  $y'_B$  en fonction de  $y'_A$ ,

$$M_C = (2Pa + Pa) - K(y'_A + y'_B),$$

$2Pa + Pa =$  moment de console en C

avec

$$y'_B = y'_C + 2P \frac{a^2}{2EI} + Pa \frac{a}{EI} - K(y'_A + y'_B) \frac{a}{EI},$$

d'où  $y'_C$  en fonction de  $y'_B$  et par suite de  $y'_A$ .

On calculera de proche en proche la rotation à chaque niveau en fonction de  $y'_A$  que l'on déterminera, enfin, en écrivant que la rotation au niveau de l'encastrement, c'est-à-dire au R.C. est égale à zéro.

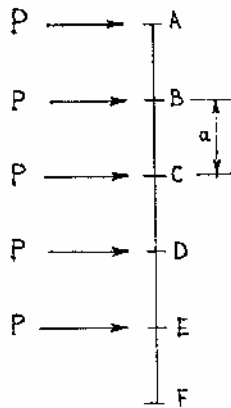


FIG. IV.16.

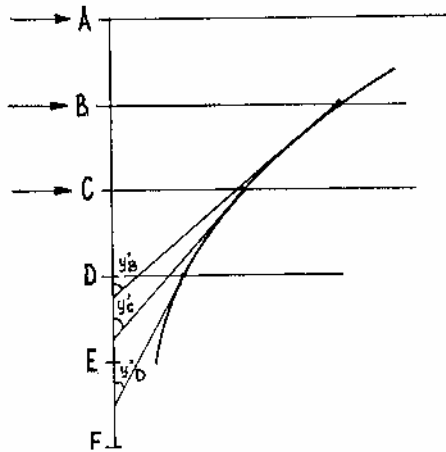


FIG. IV.17.

Le moment à chaque niveau sera obtenu en écrivant le moment de console, à ce niveau, diminué du moment dû à tous les linteaux situés au-dessus de ce niveau.

Puisque le moment dû au linteau, à chaque niveau, s'exprime en fonction de la rotation à ce niveau, et qu'une rotation, à un niveau quelconque peut s'exprimer en fonction de la rotation  $y'_1$  en tête, nous avons, d'une façon générale, à l'étage  $n$  en partant du sommet et après avoir calculé  $y'_1, y'_2, y'_3 \dots y'_{n-1}$  la valeur de  $y'_n$  en écrivant :

$$y'_{n-1} = y'_n + \text{moment console en } n-1 \cdot \frac{a}{EI} + \text{effort tranchant en } n-1 \cdot \frac{a^2}{2EI} - K(y'_1 + y'_2 + \dots + y'_{n-1}) \frac{a}{EI},$$

et la valeur du moment à l'étage  $n$ , en écrivant :

$$M_n = M_{n-1} + T_{n-1}a - K(y'_1 + y'_2 + \dots + y'_{n-1}),$$

$T_{n-1}$  = effort tranchant en  $n-1$

$M_{n-1}$  = moment de console en  $n-1$

$$K = \frac{6Ei(l+b)^2}{b^3},$$

$i$  = inertie du linteau

$I$  = inertie du demi-refend

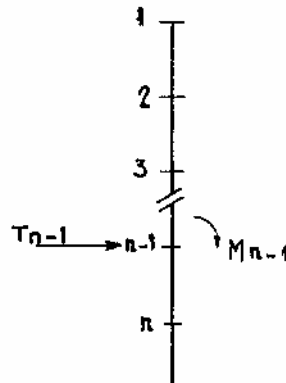


FIG. IV.18.

*Exemple* : Soit deux refends égaux sollicités par un effort horizontal donnant après partage (proportionnellement aux inerties), un effort de 1 T/m.l. La hauteur d'étage étant de 3 m, l'effort horizontal appliqué à chaque niveau est de 3 T.

Les linteaux ont une largeur de 0,40 m et une hauteur de 0,60 m.

On a ainsi :  $i = 0,0072 \text{ m}^4$

Les paramètres sont :  $a = 3,00 \text{ m}$

$$l = 7,20 \text{ m}$$

$$b = 1,60 \text{ m}$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ T/m}^2$$

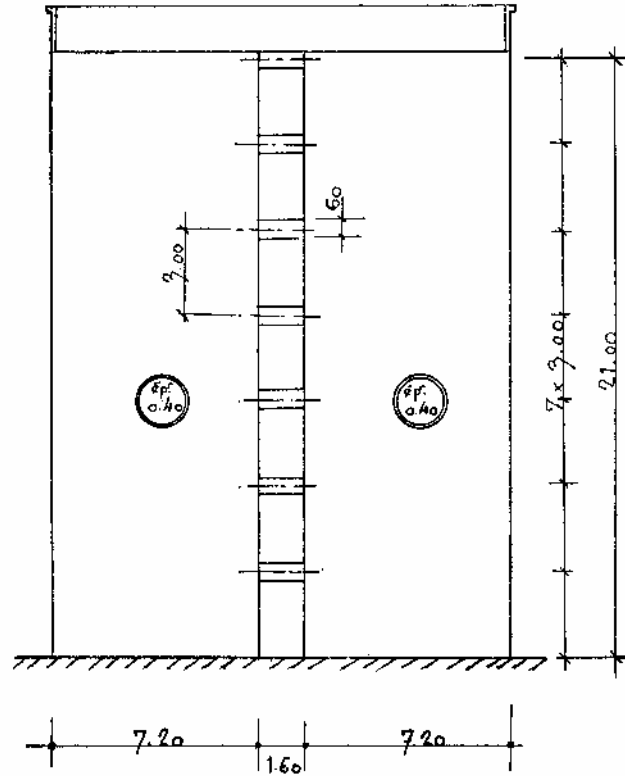


FIG. IV.19.

Nous pouvons ainsi déterminer les différents facteurs :

$$K = \frac{6Ei(l+b)^2}{b^3} = 1,62 \cdot 10^6,$$

$$EI = 2 \cdot 10^6 \frac{0,4 \times 7,2^3}{12} = 25 \cdot 10^6,$$

$$\frac{a}{EI} = \frac{3}{25 \cdot 10^6},$$

$$\frac{a^2}{2EI} = \frac{9}{50 \cdot 10^6},$$

$$\frac{Ka}{EI} = 0,192.$$

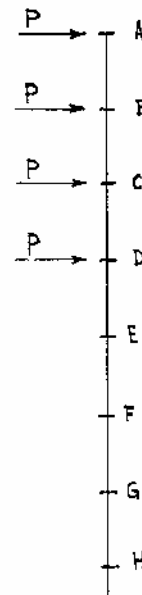


FIG. IV.20.

Hauteur de l'immeuble 21 m = 7 niveaux.

Nous savons que :

$$M_B = Pa - Ky'_A = 9 \text{ Tm} - 1,62 \cdot 10^6 y'_A.$$

Pour déterminer  $M_C$ , il faut écrire :

$$y'_A = y'_B + \frac{Pa^2}{2EI} - Ky'_A \frac{a}{EI} = y'_B + \frac{27}{50 \cdot 10^6} - 0,192 y'_A,$$

soit 
$$y'_B = 1,192 y'_A - \frac{27}{50 \cdot 10^6},$$

ou encore 
$$y'_B = 1,192 y'_A - 0,54 \cdot 10^{-6}.$$

Cette valeur nous permet de déterminer  $M_C$ .

$$M_C = Pa + 2Pa - K(y'_A + y'_B),$$

ce qui donne :

$$M_C = 3 \times 3 \times 3 - 1,62 \cdot 10^6 \left( y'_A + 1,192 y'_A - \frac{27}{50 \cdot 10^6} \right),$$

$$= 27 \text{ T} \cdot \text{m} + \frac{1,62 \times 27}{50} - 3,55 \cdot 10^6 y'_A,$$

$$M_C = 27,88 \text{ T} \cdot \text{m} - 3,55 \cdot 10^6 y'_A.$$

Pour déterminer  $M_D$ , il faut trouver la valeur de  $y'_C$ , avec la formule

$$y'_B = y'_C + \frac{Pa \cdot a}{EI} + \frac{2Pa^2}{2EI} - \frac{Ka}{EI} (y'_A + y'_B),$$

$$y'_B = y'_C + \frac{27}{25 \cdot 10^6} + \frac{27}{25 \cdot 10^6} - 0,192 \left( y'_A + 1,192 y'_A - \frac{27}{50 \cdot 10^6} \right),$$

ou 
$$y'_B = y'_C + \frac{54}{25 \cdot 10^6} - 0,192 y'_A - 0,228 y'_A + \frac{5,2}{50 \cdot 10^6}.$$

Soit encore

$$y'_C = 1,192 y'_A - \frac{27}{50 \cdot 10^6} - \frac{54}{25 \cdot 10^6} - \frac{5,2}{50 \cdot 10^6} + 0,42 y'_A,$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad y'_C &= 1,612 y'_A - \frac{140}{50 \cdot 10^6}, \\ y'_C &= 1,612 y'_A - 2,8 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

(Il sera intéressant de porter sur un tableau la somme des diverses rotations trouvées en fonction de  $y'_A$ ).

$$\text{ainsi} \quad y'_A + y'_B + y'_C = 3,804 y'_A - \frac{167}{50 \cdot 10^6},$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad M_D &= 6Pa - 1,62 \cdot 10^6 \left( 3,804 y'_A - \frac{167}{50 \cdot 10^6} \right), \\ &= 54 \text{ T} \cdot \text{m} - 6,15 \cdot 10^6 y'_A + 5,4 \\ M_D &= 59,4 \text{ T} \cdot \text{m} - 6,15 \cdot 10^6 y'_A. \end{aligned}$$

On détermine de la même façon

$$\begin{aligned} y'_D &= 2,347 y'_A - 8,35 \cdot 10^{-6}, \\ M_E &= 109 - 9,95 \cdot 10^6 y'_A, \\ y'_E &= 3,427 y'_A - 19,18 \cdot 10^{-6}, \\ M_F &= 185 - 15,5 \cdot 10^6 y'_A, \\ y'_F &= 5,267 y'_A - 38,6 \cdot 10^{-6}, \\ M_G &= 301 - 24 \cdot 10^6 y'_A, \\ y'_G &= 8,127 y'_A - 71,52 \cdot 10^{-6}, \\ M_H &= 480 - 37 \cdot 10^6 y'_A. \end{aligned}$$

Dans l'égalité qui suit :

$$y'_G = y'_H + 21Pa \frac{a}{EI} + \frac{7Pa^2}{2EI} - \frac{1,62 \cdot 10^6 \times 3}{25 \cdot 10^6} \left( 22,972 y'_A - \frac{7048}{50 \cdot 10^6} \right).$$

Nous devons écrire que :  $y'_H = 0$ .

Soit :

$$8,127 y'_A - \frac{3576}{50 \cdot 10^6} = \frac{42Pa^2 + 7Pa^2}{50 \cdot 10^6} - 4,4 y'_A + \frac{1360}{50 \cdot 10^6},$$

d'où  $12,527 y'_A = \frac{1\,320 + 3\,576 + 1\,360}{50 \cdot 10^6} = \frac{6\,256}{50 \cdot 10^6} = \frac{125}{10^6}$ ,

et  $y'_A = \frac{125}{12,5 \cdot 10^6} = \frac{10}{10^6} = \frac{1}{10^5}$ .

Pour chaque niveau, nous calculerons la valeur de deux moments :

— L'un au droit du parement supérieur du linteau (cette valeur correspond à celle calculée au cours de l'exercice)

$$M_n = \text{Moment extérieur} - K(y'_1 + y'_2 + y'_3 + \dots + y'_{n-1}).$$

— L'autre au droit du parement inférieur du linteau

$$M_n = \text{Moment extérieur} - K(y'_1 + y'_2 + y'_3 + \dots + y'_{n-1} + y'_n).$$

(La numérotation des étages est établie à partir du sommet des refends)

Nous avons ainsi :

a) Au droit du parement supérieur du linteau

$$\begin{aligned} M_A &= 0 \\ M_B &= 9 - 16,2 = -7,200 \text{ T}\cdot\text{m} \\ M_C &= 27 - 35,5 + 0,88 = -7,620 \text{ T}\cdot\text{m} \\ M_D &= 54 - 61,5 + 5,4 = -2,100 \text{ T}\cdot\text{m} \\ M_E &= 90 - 99,5 + 19 = 9,500 \text{ T}\cdot\text{m} \\ M_F &= 135 - 155 + 50 = 30 \text{ T}\cdot\text{m} \\ M_G &= 189 - 240 + 112 = 61 \text{ T}\cdot\text{m} \\ M_H &= 252 - 370 + 228 = 110 \text{ T}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

b) Au droit du parement inférieur du linteau

	$m_t$ de correction à chaque étage
$M_A = -16,200 \text{ T}\cdot\text{m}$	16,2
$M_B = 9 - 35,5 + 0,88 = -25,620 \text{ T}\cdot\text{m}$	18,4 (34,6 - 16,2)
$M_C = 27 - 61,5 + 5,4 = -29,100 \text{ T}\cdot\text{m}$	21,5 (56,1 - 34,6)
$M_D = 54 - 99,5 + 19 = -26,500 \text{ T}\cdot\text{m}$	24,4 (80,5 - 56,1)
$M_E = 90 - 155 + 50 = -15 \text{ T}\cdot\text{m}$	24,5 (105 - 80,5)
$M_F = 135 - 240 + 112 = +7 \text{ T}\cdot\text{m}$	23 (128 - 105)
$M_G = 189 - 370 + 228 = 47 \text{ T}\cdot\text{m}$	14 (142 - 128)
$M_H = 110 \text{ t}\cdot\text{m}$	—

$$\Sigma m_t = 142 \text{ T}\cdot\text{m}$$

Moment extérieur =  $3(21 + 18 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3) = 252 \text{ T}\cdot\text{m}$

Moment extérieur -  $\Sigma m_t = 110 \text{ T}\cdot\text{m} = M_H$ .

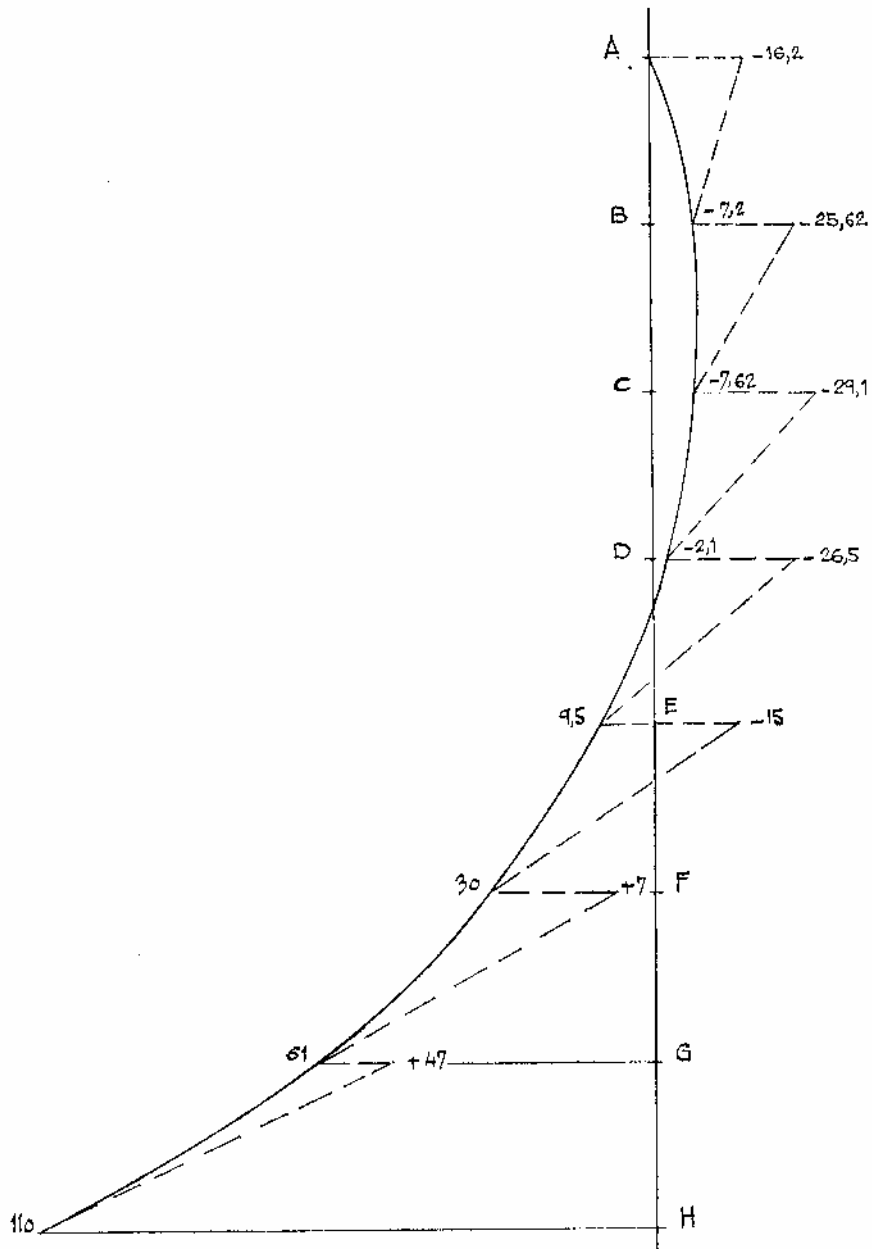


FIG. IV.21. — Moments obtenus sans tenir compte de l'effort normal.



Dans le cas où l'on veut tenir compte de l'effet de l'effort normal, c'est-à-dire des allongements et raccourcissements relatifs, provoqués par la force  $F$  agissant au droit de l'articulation  $O$ , on devra écrire :

a) Dans le cas de deux refends semblables :

$$\frac{F}{ES} + \frac{Fb^3}{24Ei} = \frac{\Delta h}{2} = \frac{(b+l)}{2} y', \quad (1)$$

$i$  = inertie du linteau

$S$  = section d'un demi-refend.

b) Dans le cas de deux refends différents (1)

$$\frac{F}{ES_1} + \frac{F}{ES_2} + \frac{Fb^3}{12Ei} = \Delta h,$$

avec

$$\Delta h = y' \frac{(b+l_1)}{2} + y' \frac{(b+l_2)}{2},$$

$$= y' \frac{(l_1 + 2b + l_2)}{2},$$

$i$  = inertie du linteau

$S_1$  = section du refend de longueur  $l_1$

$S_2$  = section du refend de longueur  $l_2$ .

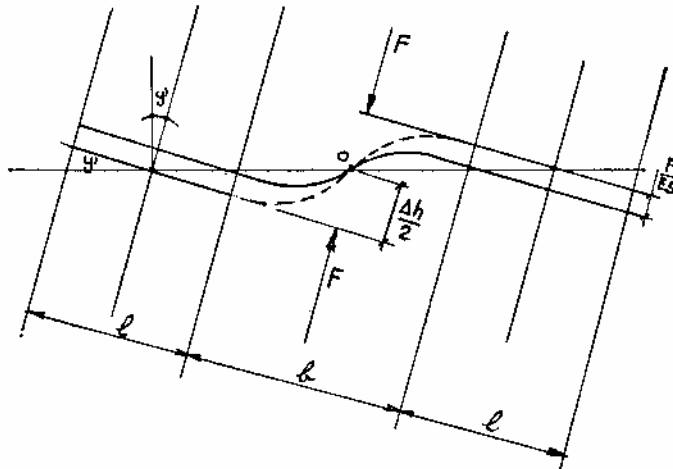


FIG. IV.22.

(1) Outre l'hypothèse du point d'inflexion au milieu du linteau, on considère que les efforts  $F$  concentrés au droit des linteaux se répartissent uniformément sur la hauteur séparant deux linteaux voisins le long de la fibre moyenne de chaque refend dont on suppose que la largeur  $l$  est suffisante pour satisfaire cette hypothèse ; il s'en suit un effort moyen sur chaque section du demi-refend  $dF = \frac{F}{a}$ , d'où une contrainte  $\frac{dF}{S}$  et un raccourcissement ou allongement relatif  $\frac{dF}{ES}$ , soit une déformation totale  $\frac{dF}{ES} \cdot a$  sur la hauteur d'étage.

En utilisant la méthode exposée précédemment, il faudra, à nouveau, partir du linteau se situant en tête des refends, et prendre pour inconnue la rotation  $y'_A$ , à ce niveau.

Les efforts normaux doivent être cumulés au fur et à mesure que l'on descend, et l'on doit tenir compte de ce cumul pour étudier l'effet des linteaux inférieurs.

En appelant  $A$  le sommet de deux refends semblables, on pourra écrire à un niveau  $N$

$$\frac{\sum_{A}^{N-1} F}{ES} + F_N \left( \frac{1}{ES} + \frac{b^3}{24Ei} \right) = \frac{b+l}{2} y'_N,$$

$y'_N$  s'exprime en fonction de  $y'_A$ , de même que les différentes valeurs de  $F$ , à chacun des niveaux.

Le moment de correction à chaque niveau est égal à

$$F \frac{b+l}{2},$$

et s'exprime par conséquent en fonction de  $y'_A$ , que nous déterminerons, encore, en pied du refend, en écrivant, qu'au niveau de l'encastrement la rotation est nulle.

Les calculs effectués, en tenant compte de l'effort normal, dans l'exemple précédent, donnent les résultats suivants :

avec 
$$\frac{1}{ES} = \frac{1}{2 \cdot 10^6 \times 2,88} = \frac{1}{57,6 \cdot 10^5},$$

et 
$$\frac{1}{ES} + \frac{b_3}{24Ei} = \frac{1}{57,6 \cdot 10^5} + \frac{4,1}{24(2 \cdot 10^6 \times 0,0072)},$$

soit 
$$\frac{1}{ES} + \frac{b_3}{24Ei} = \frac{1+68}{57,6 \cdot 10^5} = \frac{69}{57,6 \cdot 10^5}$$

En commençant par le linteau  $A$ , en tête des refends, on peut écrire :

$$F_7 \left( \frac{1}{ES} + \frac{b^3}{24Ei} \right) = \frac{b+l}{2} y'_A,$$

d'où 
$$F_7 = 3,66 \cdot 10^5 y'_A.$$

Le moment de correction, dû au linteau, est par suite

$$M_{At} = 3,66 \cdot 10^5 y'_A \times 4,4 = 16,1 \cdot 10^5 y'_A.$$

En utilisant la méthode exposée précédemment, il faudra, à nouveau, partir du linteau se situant en tête des refends, et prendre pour inconnue la rotation  $y'_A$ , à ce niveau.

Les efforts normaux doivent être cumulés au fur et à mesure que l'on descend, et l'on doit tenir compte de ce cumul pour étudier l'effet des linteaux inférieurs.

En appelant  $A$  le sommet de deux refends semblables, on pourra écrire à un niveau  $N$

$$\sum_A^{N-1} \frac{F}{ES} + F_N \left( \frac{1}{ES} + \frac{b^3}{24Ei} \right) = \frac{b+l}{2} y'_N,$$

$y'_N$  s'exprime en fonction de  $y'_A$ , de même que les différentes valeurs de  $F$ , à chacun des niveaux.

Le moment de correction à chaque niveau est égal à

$$F \frac{b+l}{2},$$

et s'exprime par conséquent en fonction de  $y'_A$ , que nous déterminerons, encore, en pied du refend, en écrivant, qu'au niveau de l'encastrement la rotation est nulle.

Les calculs effectués, en tenant compte de l'effort normal, dans l'exemple précédent, donnent les résultats suivants :

$$\text{avec} \quad \frac{1}{ES} = \frac{1}{2 \cdot 10^6 \times 2,88} = \frac{1}{57,6 \cdot 10^5},$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{ES} + \frac{b_3}{24Ei} = \frac{1}{57,6 \cdot 10^5} + \frac{4,1}{24(2 \cdot 10^6 \times 0,0072)},$$

$$\text{soit} \quad \frac{1}{ES} + \frac{b_3}{24Ei} = \frac{1+68}{57,6 \cdot 10^5} = \frac{69}{57,6 \cdot 10^5}$$

En commençant par le linteau  $A$ , en tête des refends, on peut écrire :

$$F_7 \left( \frac{1}{ES} + \frac{b^3}{24Ei} \right) = \frac{b+l}{2} y'_A,$$

$$\text{d'où} \quad F_7 = 3,66 \cdot 10^5 y'_A.$$

Le moment de correction, dû au linteau, est par suite

$$M_{A1} = 3,66 \cdot 10^5 y'_A \times 4,4 = 16,1 \cdot 10^5 y'_A.$$

En B, pour calculer  $F_6$ , on devra tenir compte de l'effet de  $F_7$  et écrire :

$$\frac{3,66 \cdot 10^5 y'_A}{57,6 \cdot 10^5} + F_6 \left( \frac{69}{57,6 \cdot 10^5} \right) = 4,4 y'_B,$$

avec 
$$y'_A = y'_B + \frac{27}{50 \cdot 10^6} - 16,1 \cdot 10^5 y'_A \frac{3}{25 \cdot 10^6},$$

$$y'_B = 1,192 y'_A - \frac{27}{50 \cdot 10^6},$$

d'où 
$$F_6 = 4,32 y'_A \cdot 10^5 - 0,199,$$

et 
$$M_{B1} = 4,4 F_6 = 19 \cdot 10^5 y'_A - 0,875,$$

on a ainsi 
$$M_{A1} + M_{B1} = 35,1 \cdot 10^5 y'_A - 0,875,$$

on obtient de la même façon :

$$F_5 = 5,82 y'_A \cdot 10^5 - 1,035$$

$$F_4 = 8,45 y'_A \cdot 10^5 - 3,05$$

$$F_3 = 12,62 y'_A \cdot 10^5 - 7,1$$

$$F_2 = 19,3 y'_A \cdot 10^5 - 14,6$$

$$F_1 = 29,4 y'_A \cdot 10^5 - 26,7$$

d'où la valeur des moments à chaque niveau.

En exprimant comme précédemment que  $y'_H = 0$  dans le calcul de  $y'_G$  on tire  $y'_A = \frac{1}{10^5}$ .

La valeur des moments, à chaque niveau, est par suite :

a) Au droit du parement supérieur du linteau

$$M_A = 0$$

$$M_B = 9 - M_{A1} = 9 - 16,1 = -7,100 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$M_C = 27 - M_{A1} - M_{B1} = 27 - 35,1 + 0,875 = -7,225 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$M_D = 54 - 60,7 + 5,425 = -1,275 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$M_E = 90 - 97,8 + 18,8 = 11 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$M_F = 135 - 153,3 + 50,125 = 31,825 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$M_G = 189 - 238,3 + 114,25 = 64,950 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$M_H = 252 - 367,8 + 231,25 = 115,450 \text{ T} \cdot \text{m}$$

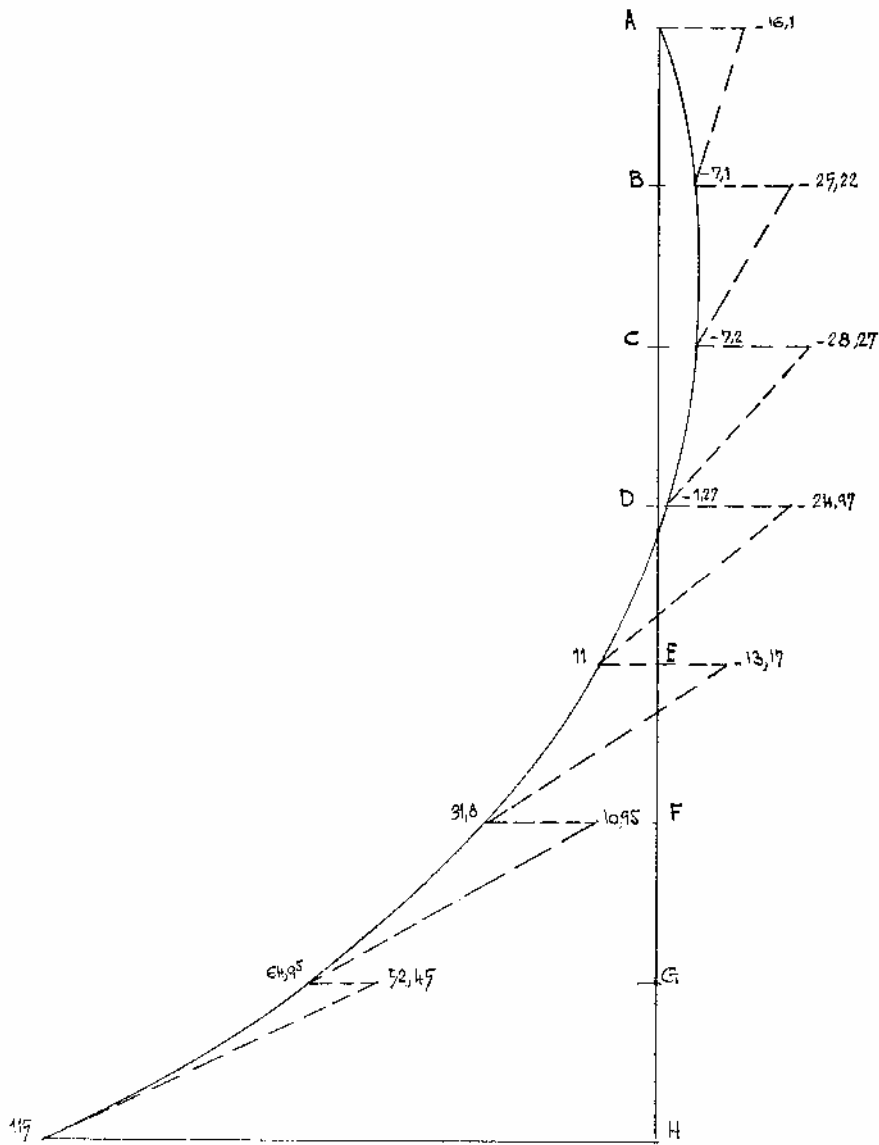


FIG. IV.24.

b) Au droit du parement inférieur du linteau

		$m_t$ de correction à chaque étage
$M_A = -16,100 \text{ T}\cdot\text{m}$		16,1 T·m
$M_B = 9 - 35,1 + 0,875 = -25,225 \text{ T}\cdot\text{m}$		18,1 T·m
$M_C = 27 - 60,7 + 5,425 = -28,275 \text{ T}\cdot\text{m}$		21 T·m
$M_D = 54 - 97,8 + 18,825 = -24,975 \text{ T}\cdot\text{m}$		23,7 T·m
$M_E = 90 - 153,3 + 50,125 = -13,175 \text{ T}\cdot\text{m}$		24,2 T·m
$M_F = 135 - 238,3 + 114,25 = 10,950 \text{ T}\cdot\text{m}$		20,85 T·m
$M_G = 189 - 367,8 + 231,25 = 52,450 \text{ T}\cdot\text{m}$		12,5 T·m
$M_H = 115,450 \text{ T}\cdot\text{m}$		
	$\Sigma m_t = 136,45 \text{ T}\cdot\text{m}$	

$$\Sigma F = \frac{136,45}{4,40} = 31,200 \text{ T.}$$

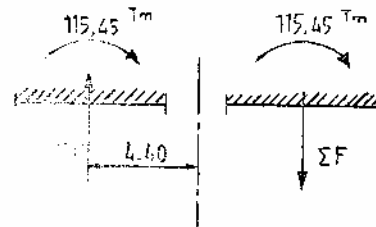


FIG. IV.23.

On s'aperçoit, qu'en tenant compte de l'effort normal,

- a) La valeur des rotations n'a pas changé.
- b) Cet effet peut être négligé dans le cas de bâtiments de faible hauteur (10 niveaux).

### V. Mur de refend à plusieurs files d'ouvertures

Si un mur est composé de plusieurs refends, liés par des linteaux, on doit noter qu'à chaque niveau, tous les refends doivent avoir un même déplacement lorsque le mur est sollicité par des efforts horizontaux.

Si tous les refends ont une inertie constante sur toute la hauteur du bâtiment et s'ils sont tous parfaitement encastres à la base, l'égalité des déplacements, dans un même plan horizontal, entraîne l'égalité des rotations dans ce même plan. Par suite de l'égalité des pentes des linteaux, au droit des refends, le point de moment nul dans ces linteaux se situe au milieu.

Comme nous l'avons vu, il y a tout d'abord, partage des efforts horizontaux proportionnellement aux inerties des refends, puis correction des moments fléchissants qui en résultent, compte tenu des réactions dues aux linteaux.

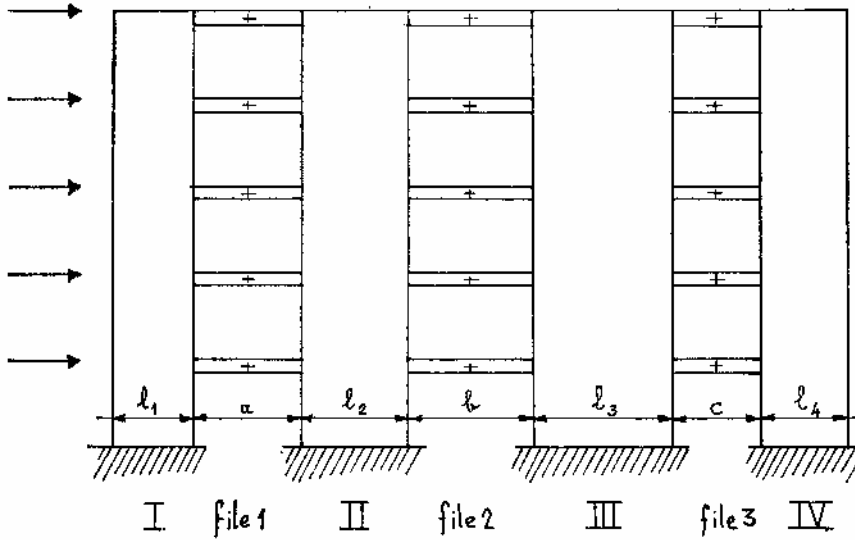


FIG. IV.25.

Pour les refends de rive, le problème est semblable au cas déjà traité pour les deux refends liés par un linteau à chaque niveau (mur de refend à une seule file d'ouvertures).

Pour les refends intermédiaires, le problème est un peu différent

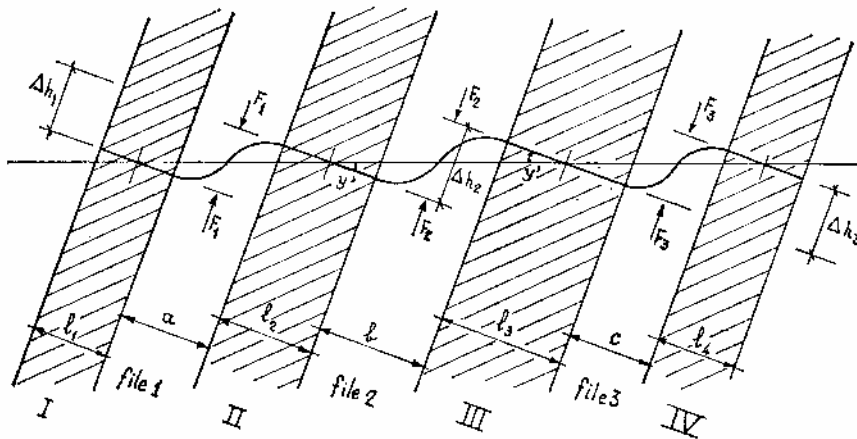


FIG. IV.26.

Dans le cas du refend II, le moment de correction dû aux forces  $F_1$  et  $F_2$  est :

$$M = F_1 \left( \frac{a+l_2}{2} \right) + F_2 \left( \frac{b+l_2}{2} \right),$$

avec 
$$F_1 = \frac{12Ei\Delta h_1}{a^3},$$

et 
$$F_2 = \frac{12Ei\Delta h_2}{b^3},$$

dans ces formules  $i$  = inertie des linteaux.

Par ailleurs, nous pouvons exprimer  $\Delta h_1, \Delta h_2, \Delta h_3$ , en fonction de  $y'$

$$\Delta h_1 = \frac{(l_1 + 2a + l_2)}{2} y',$$

$$\Delta h_2 = \frac{(l_2 + 2b + l_3)}{2} y',$$

$$\Delta h_3 = \frac{(l_3 + 2c + l_4)}{2} y'.$$

Ce qui donne pour  $F_1, F_2$  et  $F_3$  :

$$F_1 = \frac{6Ei}{a^3} (l_1 + 2a + l_2) y',$$

$$F_2 = \frac{6Ei}{b^3} (l_2 + 2b + l_3) y',$$

$$F_3 = \frac{6Ei}{c^3} (l_3 + 2c + l_4) y',$$

d'où les valeurs des moments de correction dans les différents refends en fonction de la rotation  $y'$  du niveau considéré :

Dans le refend I

$$M_1 = \frac{3Ei}{a^3} (l_1 + 2a + l_2)(a + l_1) y'.$$

Dans le refend II

$$M_2 = \frac{3Ei}{a^3} (l_1 + 2a + l_2)(a + l_2) y' + \frac{3Ei}{b^3} (l_2 + 2b + l_3)(b + l_2) y'.$$



Dans le refend III

$$M_3 = \frac{3Ei}{b^3}(l_2 + 2b + l_3)(b + l_3)y' + \frac{3Ei}{c^3}(l_3 + 2c + l_4)(c + l_3)y'.$$

Dans le refend IV

$$M_4 = \frac{3Ei}{c^3}(l_3 + 2c + l_4)(c + l_4)y'.$$

Le calcul peut donc être effectué comme dans le cas du mur de refend à une seule file d'ouvertures, en posant :

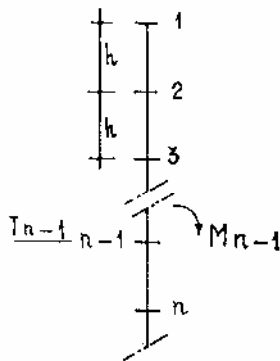


FIG. IV.27.

$$K_1 = \frac{3Ei}{a^3}(l_1 + 2a + l_2)(a + l_1),$$

$$K'_1 = \frac{3Ei}{a^3}(l_1 + 2a + l_2)(a + l_2),$$

$$K_2 = \frac{3Ei}{b^3}(l_2 + 2b + l_3)(b + l_2),$$

$$K'_2 = \frac{3Ei}{b^3}(l_2 + 2b + l_3)(b + l_3),$$

$$K_3 = \frac{3Ei}{c^3}(l_3 + 2c + l_4)(c + l_3),$$

$$K'_3 = \frac{3Ei}{c^3}(l_3 + 2c + l_4)(c + l_4).$$

L'égalité des déplacements et des rotations, à tous les étages de hauteur  $h$ , impose le partage de la somme des moments de correction d'un même niveau, proportionnellement aux inerties des refends, d'où la possibilité de déterminer les moments dans chaque refend en fonction de la rotation de l'étage considéré.

On calculera par récurrence la rotation du mur d'inertie  $\Sigma I$ , à un niveau quelconque, en partant du sommet et en écrivant :

$$y'_{n-1} = y'_n + M_{n-1} \frac{h}{\Sigma EI} + T_{n-1} \frac{h^2}{\Sigma 2EI} - (\Sigma K + \Sigma K')(y'_1 + y'_2 + \dots + y'_{n-1}) \frac{h}{\Sigma EI},$$

avec  $h$  = hauteur d'étage.

de même la valeur du moment à l'étage  $n$  sera donnée par l'expression

$$M_n = M_{n-1} + (T_{n-1} \cdot h) - \Sigma K'(y'_1 + y'_2 + \dots + y'_{n-1}) - \Sigma K(y'_1 + y'_2 + \dots + y'_{n-1}),$$

$M_{n-1}$  = Moment de console en  $n-1$  (sous effort ext. total)

$T_{n-1}$  = Effort tranchant en  $n-1$  (sous effort ext. total)

$M_n$  = Moment corrigé au-dessus du linteau de rang  $n$ .

Dans le cas où le projecteur tient compte de l'effort normal, c'est-à-dire des allongements et raccourcissements relatifs, provoqués par les forces  $F_1, F_2, F_3$  dans les refends, à un niveau déterminé, on devra écrire en appelant  $S_1, S_2, S_3, S_4$  les sections des refends I, II, III, IV :

$$\frac{F_1 a^3}{12Ei} = \Delta h_1 - \frac{F_1}{ES_1} - \frac{F_1 - F_2}{ES_2},$$

$$\frac{F_2 b^3}{12Ei} = \Delta h_2 + \frac{F_1 - F_2}{ES_2} - \frac{F_2 - F_3}{ES_3},$$

$$\frac{F_3 c^3}{12Ei} = \Delta h_3 + \frac{F_2 - F_3}{ES_3} - \frac{F_3}{ES_4}.$$

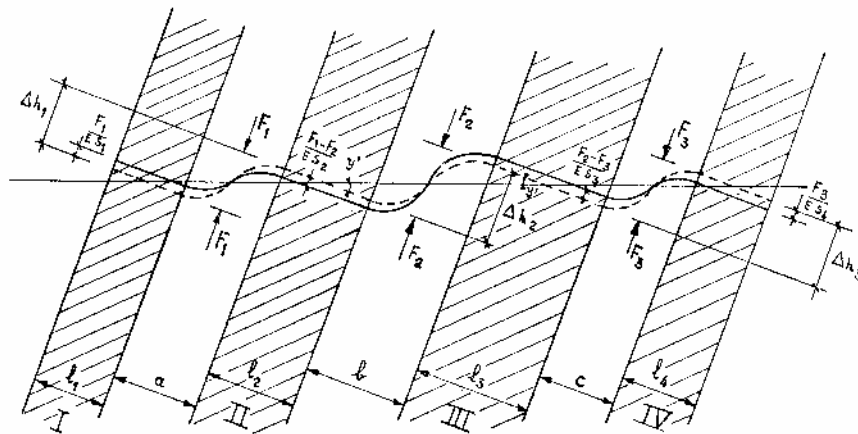


FIG. IV.28.

Les valeurs  $\Delta h_1, \Delta h_2, \Delta h_3$  calculées précédemment nous permettent de déterminer  $F_1, F_2, F_3$  en fonction de  $y'$ . On peut, par conséquent, trouver le moment de correction à chaque niveau en fonction de  $y'$  évidemment.

En appelant  $A$  le sommet du mur, on aura, pour le refend I, à un niveau  $N$  :

$$\frac{\sum_A^N F_1}{ES_1} + \frac{\sum_A^N F_1 - F_2}{ES_2} + \frac{F_1 a^3}{12Ei} = \frac{(l_1 + 2a + l_2)}{2} y'_N,$$

d'où les valeurs de  $F_1$  et  $F_2$ , en fonction de  $y'_N$  qui s'exprime à chacun des niveaux, en fonction de  $y'_A$ .

REMARQUE : Cette méthode, simple d'application, permet au projeteur, aussi bien pour les murs à une seule file d'ouvertures que pour ceux à plusieurs files d'ouvertures, de tenir compte, s'il le désire :

a) de la déformation du linteau sous l'effet de l'effort tranchant  $F_1$ ,  $F_2$  ou  $F_3$ ,

b) du raccourcissement des refends sous les charges verticales, qui les sollicitent, dans le cas où les contraintes de compression dues à ces charges sont sensiblement différentes sur les divers refends.

Il suffit pour cela, de rajouter deux termes aux formules déjà établies :

— un terme de la forme  $\delta_T = \frac{Fa}{2GS}$  pour la déformation d'effort tranchant.

— un terme de la forme  $\delta_P = \frac{P}{ES}$  pour le raccourcissement dû à la charge verticale.

Si les différents murs composant le refend ne sont pas réalisés à la même époque, on devra en outre tenir compte, pour évaluer  $\delta_P$ , des déformations instantanées et différées de chaque mur, jusqu'à ce que la liaison (linteaux), entre ces différents murs, soit effective.

## VI. Stabilité des fondations sous les refends

### 1° Refend plein

Le problème n'est pas différent de celui traité dans le cas de la semelle rectangulaire soumise à un effort normal  $N$  et à un moment de flexion  $M$ .

Il est nécessaire de calculer l'excentricité

$$e = \frac{M}{N},$$

dans l'hypothèse où :

- 1° La surcharge est appliquée sur tous les planchers.
- 2° La surcharge n'est appliquée sur aucun plancher.

La contrainte au sol est vérifiée dans ces deux cas de charge et ne doit pas dépasser les contraintes admissibles précisées dans le chapitre *Fondations semelles excentrées*, où nous avons traité

- a) la répartition trapézoïdale ;
- b) la répartition triangulaire.

Il est souvent nécessaire, dans le cas, où l'excentricité est trop importante de faire intervenir, sur la semelle considérée, une partie des charges supportées par les murs perpendiculaires au refend dont on vérifie la stabilité.

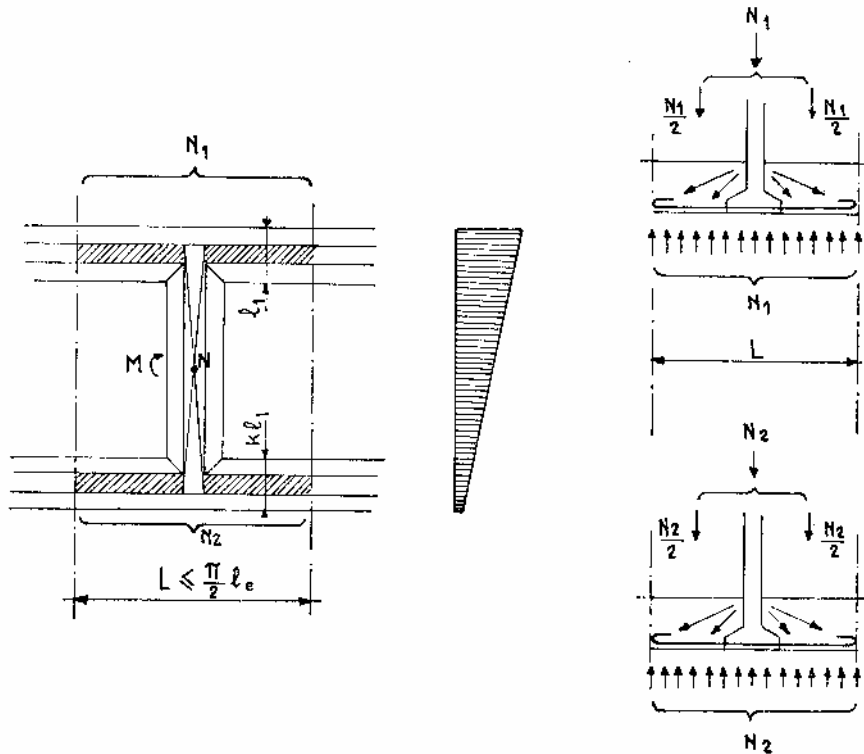


FIG. IV.29.

Il suffit de faire intervenir la charge correspondant à une longueur  $L$  de mur, sur chacune des façades.

Si  $N_1$  et  $N_2$  sont ces charges, exprimées en fonction de  $L$  et si  $N$  est la charge verticale sollicitant le refend, on peut déterminer la position de la

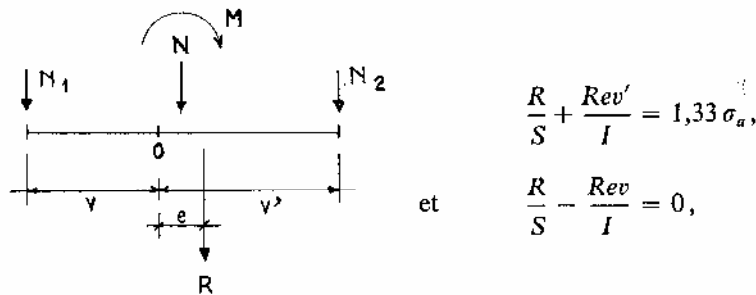
résultante des charges verticales, avant application du moment fléchissant  $M$  sollicitant le refend

Soit :  $R = N + N_1 + N_2$

Les largeurs des semelles de façades peuvent être appelées  $l_1$  et  $kl_1$  (la largeur de la semelle sous le refend peut être choisie à l'avance).

Il est ainsi possible de déterminer en fonction de  $L$  et de  $l_1$ , le moment d'inertie de la semelle affectant, en plan, la forme d'un  $I$ , ainsi que la position de l'axe neutre (autrement dit  $v$  et  $v'$ ), ainsi que la surface  $S$ .

Il suffira de calculer l'excentricité  $e$  de cette résultante après application du moment fléchissant  $M$  sollicitant le refend, et de vérifier que cette excentricité satisfait aux deux équations :



$$\frac{R}{S} + \frac{Rev'}{I} = 1,33 \sigma_a,$$

et  $\frac{R}{S} - \frac{Rev}{I} = 0,$

FIG. 1V.30.

qui nous permettent de déterminer  $L$  et  $l_1$

$\sigma_a$  est la contrainte admissible sur le sol d'assise (voir chapitre fondations : répartition triangulaire).

L'inertie des semelles sous murs perpendiculaires devra être suffisante, pour que les conditions de raideur soient telles que l'hypothèse de la répartition uniforme des contraintes soit satisfaite ; il faut vérifier que :

$$L \leq \frac{\pi}{2} l_e,$$

$l_e$  = longueur élastique de la semelle de largeur  $l_1$  ou  $kl_1$ .

La solution la plus pratique est celle qui consiste à utiliser la méthode des bielles pour déterminer les armatures inférieures. Ces armatures devront en outre être prévues pour reprendre les efforts sous contrainte admissible de l'acier.

2° Refend avec ouvertures

A. Semelle commune sous les deux demi-refends. Il est nécessaire de commencer par calculer la longueur élastique de la semelle

$$l_e = \sqrt[4]{\frac{4EI}{Kb}}$$

(voir chapitre fondations)

a) Dans le cas où aucun effort horizontal ne sollicite le refend, la semelle est soumise aux charges et surcharges verticales uniquement (fig. IV.31).

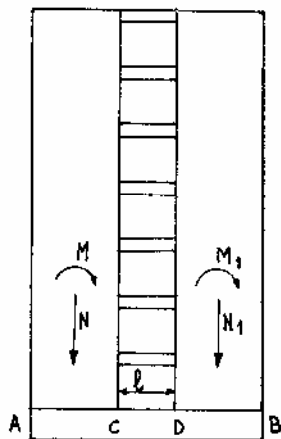


FIG. IV.31.

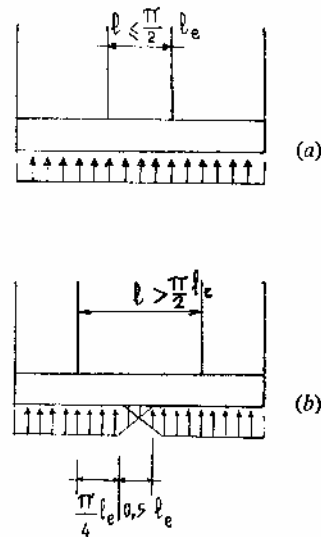


FIG. IV.32.

— si  $\frac{\pi}{2}l_e \geq l$  on a une répartition linéaire des contraintes sous la semelle (fig. IV.32a).

— si  $\frac{\pi}{2}l_e < l$  les contraintes sous la semelle sont distribuées comme indiqué dans le chapitre Fondations (fig. IV.32b).

b) Dans le cas où deux moments de flexion  $M$  et  $M_1$  agissent simultanément au-dessus de la semelle, les efforts  $N$  et  $N_1$  se déplacent respectivement de  $\frac{M}{N}$  et de  $\frac{M_1}{N_1}$  :

— si  $\frac{\pi}{2}l_e \geq l$  on a une répartition linéaire des contraintes sous la semelle, en considérant la position de la résultante  $R$  du système  $N$  et  $N_1$ , compte tenu des excentricités déduites des moments  $M$  et  $M_1$  (moments à la base des refends).

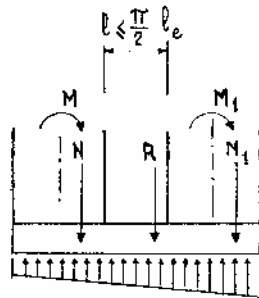


FIG. IV.33.

Ici  $N$  et  $N_1$  sont les résultantes : des charges verticales (ou charges et surcharges) et des efforts normaux dus à tous les linteaux dans chacun des refends.

— si  $\frac{\pi}{2}l_e < l$  on portera sur  $AC$  et sur  $BD$  deux segments égaux à :

$$\frac{\pi}{4}l_e + 0,5l_e,$$

soit  $C_1$  et  $D_1$  les deux extrémités des segments (fig. IV.34).

Nous considérons que les efforts  $N$  et  $N_1$  (compte tenu des excentricités déduites des moments  $M$  et  $M_1$ ) agissent sur deux semelles de longueur  $AC_1$  et  $BD_1$  (fig. IV.35).

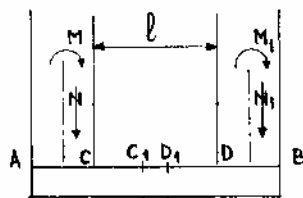


FIG. IV.34.

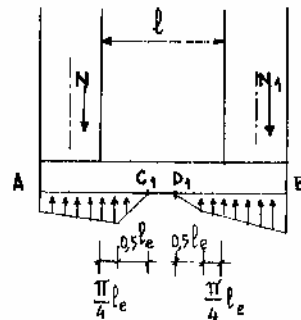


FIG. IV.35.

REMARQUE : Il est préférable de disposer sous les refends une semelle suffisamment rigide pour avoir  $l < \frac{\pi}{2} l_e$  et par suite une répartition linéaire des contraintes, en particulier dans le cas de refends liés par des linteaux (cette solution permet d'avoir la même rotation en pied).

Si les ouvertures sont en bordure de refend, dans le cas d'une semelle rigide, comme indiqué sur le dessin ci-contre, le moment dans la section  $CC'$  se calcule grâce au diagramme représentant les contraintes au sol.

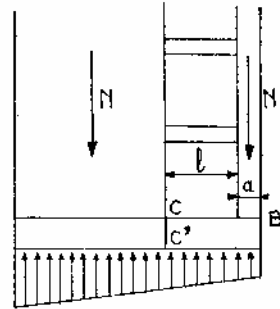


FIG. IV.36.

L'effort tranchant en  $B$ , de la poutre  $CB$ , doit être égal et opposé à  $N_1$ . S'il était supérieur à  $N_1$ , on calculerait le moment dans la section  $CC'$  en écrivant que ce moment correspond à celui d'une console  $CB$ , soumise aux contraintes du sol, d'une part, et à la force opposée  $N_1$ , d'autre part.

*B. Semelle indépendante sous chaque demi-refend.* On est ramené au cas de la semelle soumise à un effort normal et à un moment de flexion.

Ce cas a été traité dans le chapitre *Fondations*.

## B. CALCUL DES PORTIQUES SOUMIS A DES EFFORTS HORIZONTAUX

### I. Méthodes approchées

#### a) Hypothèses admises par les règlements français

Dans le cas où les poteaux d'un même étage ont tous la même hauteur et où les raideurs (rapport de l'inertie à la longueur) des différentes travées des poutres porteuses du plancher, parallèles aux forces appliquées et solidaires des poteaux, sont toutes supérieures au cinquième de la raideur du poteau le plus raide, on admet :

— que les forces horizontales agissant sur une file de poteaux se répartissent entre les différents poteaux de cette file proportionnellement



aux moments d'inertie des dits poteaux, les moments d'inertie des poteaux de rive, étant toutefois affectés du coefficient 0,8,

— que les poteaux des étages courants sont encastrés au niveau de chacun des planchers et articulés à mi-hauteur de l'étage.

Compte tenu de ces hypothèses, nous pouvons écrire :

1° Pour un seul niveau :

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

avec 
$$F_1 = \frac{F \cdot 0,8I_1}{0,8I_1 + I_2 + I_3 + 0,8I_4},$$

et 
$$F_2 = \frac{F \cdot I_2}{0,8I_1 + I_2 + I_3 + 0,8I_4},$$

de même pour  $F_3$  et  $F_4$

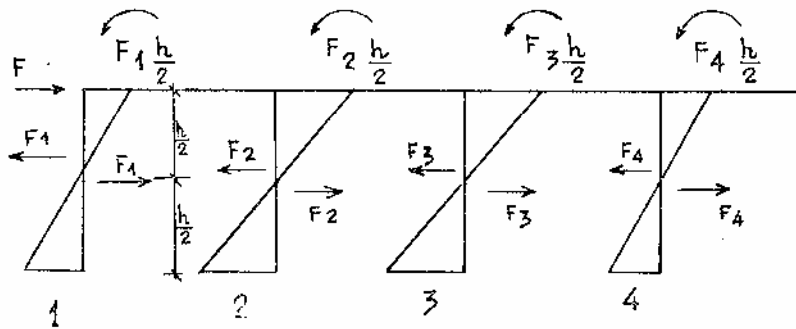


FIG. IV.37.

Nous avons au droit de chaque articulation des efforts égaux et opposés constituant un système en équilibre.

Ce sont :

Au-dessus de l'articulation, les réactions du portique supérieur dont les montants ont une hauteur égale à la moitié de la hauteur des poteaux.

Au-dessous de l'articulation, les efforts directement opposés à ces réactions, permettant l'équilibre.

— Les moments en tête et en pied de chacun des poteaux sont égaux et valent (moment positif agissant dans le sens des aiguilles d'une montre) respectivement :

$$-\frac{F_1 h}{2} - \frac{F_2 h}{2} - \frac{F_3 h}{2} - \frac{F_4 h}{2}.$$

— Les moments dans les traverses sont respectivement,  
 pour le nœud de la file 1 :  $\frac{F_1 h}{2}$  dans la file 1 et  $\frac{F_4 h}{2}$  dans la file 4

pour le nœud de la file 2 :  $\frac{F_2 h}{2} \frac{\frac{I_g}{l_g}}{\frac{I_g}{l_g} + \frac{I_d}{l_d}}$  à gauche du nœud 2

et  $\frac{F_2 h}{2} \frac{\frac{I_d}{l_d}}{\frac{I_d}{l_d} + \frac{I_g}{l_g}}$  à droite du nœud 2

même principe pour  $F_3$  que pour  $F_2$ .

- Nous avons ici  $I_g$  : inertie de la traverse de gauche
- $I_d$  : inertie de la traverse de droite
- $l_g$  : portée libre de la traverse de gauche
- $l_d$  : portée libre de la traverse de droite
- $h$  : hauteur entre faces supérieures de deux planchers consécutifs.

Nous poserons  $\frac{I_d}{l_d} = K_d$      $\frac{I_g}{l_g} = K_g$ .

2° Dans le cas de portiques superposés, au niveau du plancher de rang  $i$ ,

$$\Sigma F_i = F_i + F_{i+1} + F_{i+2} \dots + F_{i+n}$$

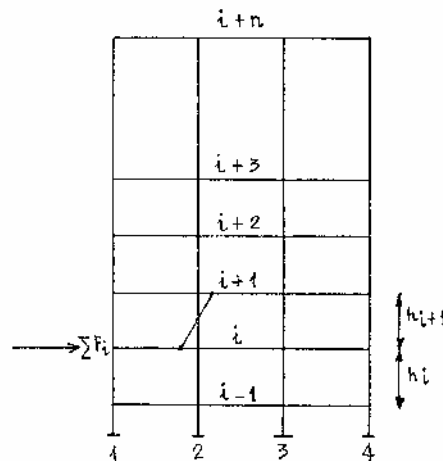


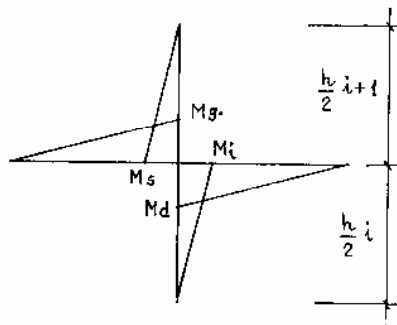
FIG. IV.38.

A l'étage de rang  $i+1$ , nous savons que : l'effort  $\Sigma F_{i+1}$  crée, en pied des poteaux supportant le plancher de rang  $i+1$ , des moments calculés conformément à ce qui a été exposé précédemment (après avoir fait le partage de  $\Sigma F_{i+1}$  suivant les inerties des poteaux supportant le plancher, avec coefficient de 0,8 pour les poteaux de rive), soit par exemple pour le poteau 2 de l'étage  $i+1$

$$M = -\frac{F_2 h_{i+1}}{2} \quad \text{avec} \quad F_2 = \frac{\Sigma F_{i+1} \cdot I_2}{0,8I_1 + I_2 + I_3 + 0,8I_4}$$

On opère de même en ce qui concerne l'effort  $\Sigma F_i$  ce qui nous permet de déterminer les moments en tête des poteaux supportant l'étage de rang  $i$ .

Au droit d'un nœud, il sera possible de calculer les moments dans les travées aboutissant à ce nœud, en fonction des moments  $M_s$  et  $M_i$  obtenus respectivement pour le poteau supérieur et le poteau inférieur correspondant à ce nœud, en écrivant :



$$M_g = - (M_s + M_i) \frac{K_g}{K_g + K_d}$$

$$M_d = - (M_s + M_i) \frac{K_d}{K_g + K_d}$$

pour un nœud intermédiaire.

FIG. IV.39.

et  $M_g$  ou bien  $M_d$  égal à  $-(M_s + M_i)$  pour un nœud de rive.

Pour des traverses égales, d'inertie constante, on a évidemment  $-\frac{M_s + M_i}{2}$  à droite et à gauche d'un nœud intermédiaire.

Les moments ainsi déterminés dans les poteaux et les traverses doivent venir s'ajouter aux moments déjà obtenus par application des charges et surcharges sur la structure.

Avec les moments résultants, on fera une vérification à la flexion composée dans les deux cas suivants :

- 1° flexion + charges permanentes + surcharges ;
- 2° flexion + charges permanentes.

A noter que le cas 2 est le plus défavorable pour la stabilité générale de l'ouvrage.

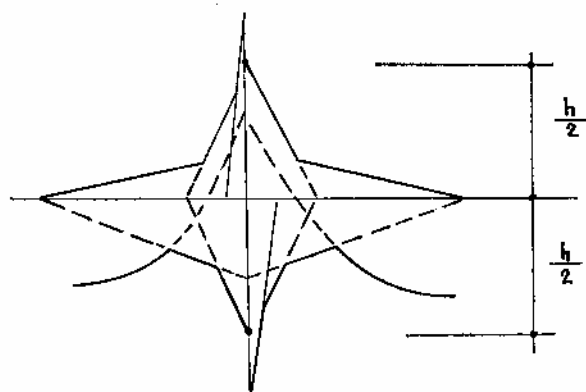


FIG. IV.40.

b) *La méthode de « Bowman »*

Cette méthode permet d'obtenir des résultats très voisins de ceux obtenus en utilisant des méthodes exactes.

L'effort tranchant total, à chacun des niveaux, se partage proportionnellement aux inerties des poteaux.

Les points d'inflexion dans les poteaux, de hauteur  $h$ , se situent :

- au dernier niveau, à  $0,65h$  de la partie supérieure du poteau.
- à l'avant dernier niveau, à  $0,60h$  de la partie supérieure du poteau.
- au niveau immédiatement au-dessous, à  $0,55h$  de la partie supérieure du poteau.

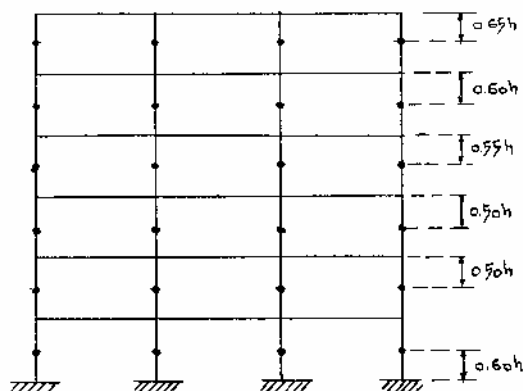


FIG. IV.41.

- à tous les autres niveaux, sauf au 1<sup>er</sup> niveau, à  $0,50h$ .
- au premier niveau, à  $0,60h$  à partir de la base du poteau.

Le partage des moments, dans les travées, sera effectué en opérant comme précédemment, c'est-à-dire proportionnellement aux raideurs des barres situées à droite et à gauche du nœud considéré.

Les résultats, obtenus par la méthode de Bowman, sont généralement meilleurs que ceux obtenus par la méthode qui consiste à admettre un point d'inflexion à mi-hauteur du poteau, à tous les niveaux.

### Stabilité des portiques

Sous l'effet du moment de renversement total, dû au vent, dont la valeur est

$$M = F \cdot H$$

avec

$F$  : résultante des efforts du vent ;

et

$H$  : distance de cette résultante par rapport aux fondations ;

des efforts de traction, ou de compression, prennent naissance dans les poteaux.

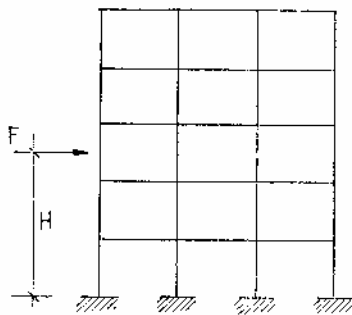


FIG. IV.42a

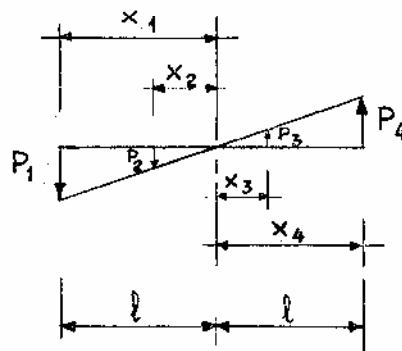


FIG. IV.42b

Les règlements nous permettent d'admettre que les efforts normaux verticaux des poteaux d'une même file, résultant de l'action des forces horizontales sont proportionnels à la distance de chacun des poteaux au point équidistant des deux poteaux de rive (C.C.B.A. 68-53, 12).

Soit

$$FH = P_1 X_1 + P_2 X_2 + P_3 X_3 + P_4 X_4$$

avec

$$l = X_1 = -X_4 \quad \text{d'où} \quad P_1 = -P_4$$

Ce résultat est satisfaisant pour une structure symétrique.

Dans le cas d'une structure dissymétrique, on pourra opérer de la façon suivante :

En fonction de la descente de charges, on détermine avec une contrainte légèrement minorée la section des poteaux, au niveau des fondations, soit  $S_1, S_2, S_3, S_4$  ces sections. On détermine également le centre de gravité de ces sections et on appelle  $d_1, d_2, d_3, d_4$  les distances des poteaux au centre de gravité, qui est en l'occurrence assimilable à l'axe neutre de la section totale ( $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ ).

Le moment d'inertie de la section totale est :

$$I = S_1 d_1^2 + S_2 d_2^2 + S_3 d_3^2 + S_4 d_4^2.$$

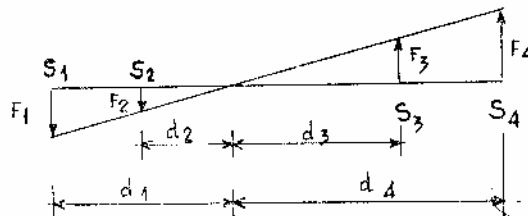


FIG. IV.43.

La formule donnant la contrainte  $n = \frac{MV}{I}$  d'où la force, si l'on connaît la section

$$F = \frac{MV}{I} S,$$

s'écrira dans ce cas :

$$F_1 = \frac{Md_1 S_1}{I} \quad \text{avec} \quad M = FH,$$

$$F_2 = \frac{Md_2 S_2}{I},$$

$$F_3 = \frac{Md_3 S_3}{I},$$

$$F_4 = \frac{Md_4 S_4}{I},$$

$F_1, F_2, F_3$  et  $F_4$  sont donnés ici en valeur absolue.

On devra vérifier la contrainte de compression maximale sur les poteaux avec les sollicitations :

$$G + P + V + T \quad (\text{C.C.B.A 68 art. 7,5})$$

Dans le cas d'une structure dissymétrique, on pourra opérer de la façon suivante :

En fonction de la descente de charges, on détermine avec une contrainte légèrement minorée la section des poteaux, au niveau des fondations, soit  $S_1, S_2, S_3, S_4$  ces sections. On détermine également le centre de gravité de ces sections et on appelle  $d_1, d_2, d_3, d_4$  les distances des poteaux au centre de gravité, qui est en l'occurrence assimilable à l'axe neutre de la section totale ( $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ ).

Le moment d'inertie de la section totale est :

$$I = S_1 d_1^2 + S_2 d_2^2 + S_3 d_3^2 + S_4 d_4^2.$$

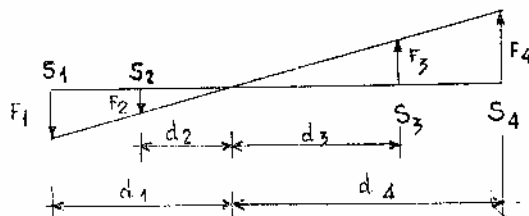


FIG. IV.43.

La formule donnant la contrainte  $n = \frac{MV}{I}$  d'où la force, si l'on connaît la section

$$F = \frac{MV}{I} S,$$

s'écrira dans ce cas :

$$F_1 = \frac{Md_1 S_1}{I} \quad \text{avec} \quad M = FH,$$

$$F_2 = \frac{Md_2 S_2}{I},$$

$$F_3 = \frac{Md_3 S_3}{I},$$

$$F_4 = \frac{Md_4 S_4}{I},$$

$F_1, F_2, F_3$  et  $F_4$  sont donnés ici en valeur absolue.

On devra vérifier la contrainte de compression maximale sur les poteaux avec les sollicitations :

$$G + P + V + T \quad (\text{C.C.B.A 68 art. 7,5})$$

et la contrainte de compression minimale ou éventuellement le soulèvement avec :

$$G+V \quad (\text{C.C.B.A 68 art. 8,3}).$$

## II. Calcul des portiques étagés — Méthodes exactes

Considérons une barre  $AB$ , dont les extrémités sont soumises à des rotations et déplacements provoqués par des charges sollicitant les travées voisines de cette barre, supposée d'inertie constante.

Proposons-nous de trouver la valeur des moments aux extrémités.

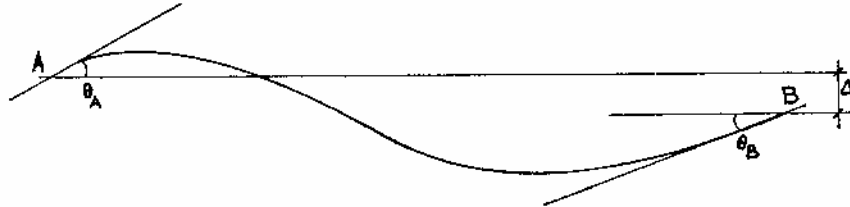


FIG. IV.44.

Nous considérons, comme positifs, les moments orientés dans le sens des aiguilles d'une montre.

Soit  $\theta_A$  la rotation en  $A$  et  $\theta_B$  la rotation en  $B$ .

$\Delta$  le déplacement de  $B$  par rapport à  $A$ .

Nous savons que ce déplacement correspond à un moment dans la poutre conjuguée, alors que les rotations correspondent à des efforts tranchants dans cette même poutre conjuguée (en portant au dénominateur le facteur  $EI$ ).

Si on appelle  $M_{AB}$  et  $M_{BA}$  les moments recherchés, le diagramme final se présentera comme indiqué sur la figure suivante :

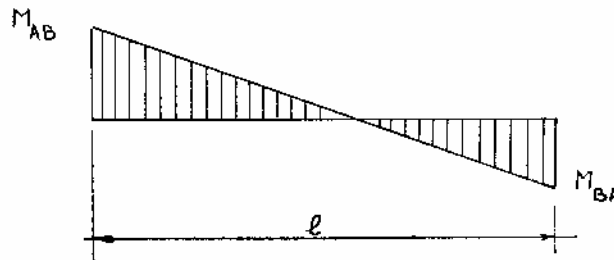


FIG. IV.45.



ce qui peut être représenté également par un diagramme équivalent.

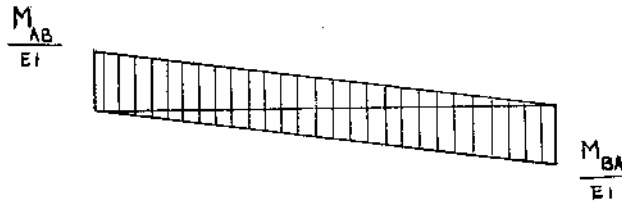


FIG. IV.46.

Nous pouvons, dès lors, représenter le diagramme de la poutre conjuguée, en appliquant au  $1/3$  de la portée les deux résultantes  $P_1$  et  $P_2$  qui nous donnent les réactions en  $A$  et  $B$ , c'est-à-dire les valeurs des rotations aux extrémités (après avoir divisé par  $EI$ ).

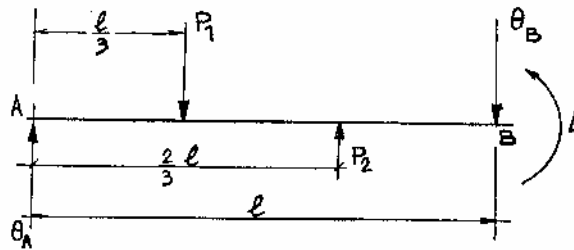


FIG. IV.47.

En ce qui concerne le déplacement  $\Delta$ , nous le considérons comme correspondant à un moment négatif si le déplacement se fait de haut en bas, ou bien, de la gauche vers la droite.

Les valeurs de  $P_1$  et  $P_2$  sont respectivement

$$P_1 = M_{AB} \frac{l}{2EI},$$

$$P_2 = M_{BA} \frac{l}{2EI}.$$

Ecrivons les moments par rapport à  $P_1$  et  $P_2$ , nous avons :  
par rapport à  $P_1$

$$\theta_A \frac{l}{3} - P_2 \frac{l}{3} + \theta_B \frac{2l}{3} - \Delta = 0,$$

ou

$$\theta_A + 2\theta_B - \frac{3\Delta}{l} = P_2.$$

par rapport à  $P_2$

$$\theta_A \frac{2l}{3} - \frac{P_1 l}{3} + \theta_B \frac{l}{3} - \Delta = 0,$$

$$2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta}{l} = P_1.$$

En posant  $\frac{I}{l} = K$  ou *raideur de la barre*, les deux résultats obtenus peuvent se mettre sous la forme

$$2EKP_2 = M_{BA} = 2EK \left( 2\theta_B + \theta_A - \frac{3\Delta}{l} \right),$$

et  $2EKP_1 = M_{AB} = 2EK \left( 2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta}{l} \right).$

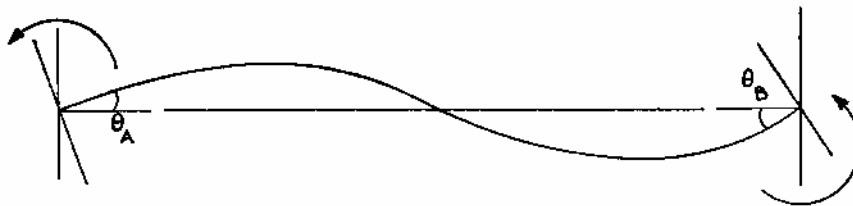


FIG. IV.48.

Dans le cas où cette barre supporte une charge, en plus des sollicitations dues aux barres voisines, on peut considérer qu'il y a superposition de deux systèmes, le premier correspondant au cas précédemment étudié et le second, correspondant au cas d'une barre parfaitement encastree à ses extrémités, sollicitée par une charge quelconque.

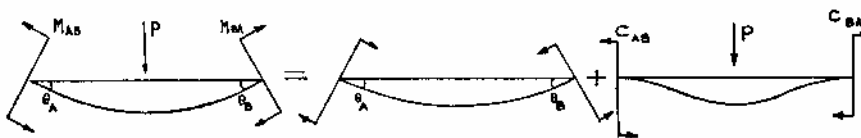


FIG. IV.49.

Avec la convention de signe adoptée, nous avons

$$M_{AB} = -C_{AB} + 2EK \left( 2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta}{l} \right),$$

et  $M_{BA} = C_{BA} + 2EK \left( 2\theta_B + \theta_A - \frac{3\Delta}{l} \right).$

En effet, si aucune rotation n'est possible aux extrémités, les moments obtenus sont ceux correspondant à l'encastrement parfait, sous l'effet de la sollicitation considérée. S'il y a possibilité de rotation et de déplacement aux extrémités, la valeur des moments peut être trouvée par les formules précédemment établies pour la barre non chargée soumise à ses extrémités à des rotations et déplacements. Les moments d'extrémité sont ainsi obtenus par simple addition.

NOTA : Dans le cas particulier où  $\theta_A = \theta_B = \theta$ , les formules générales, donnant les moments aux extrémités de la barre non chargée, se réduisent à :

$$M_{AB} = M_{BA} = 2EK \left( 3\theta - 3 \frac{\Delta}{l} \right).$$

Ce résultat peut être obtenu en procédant comme suit :

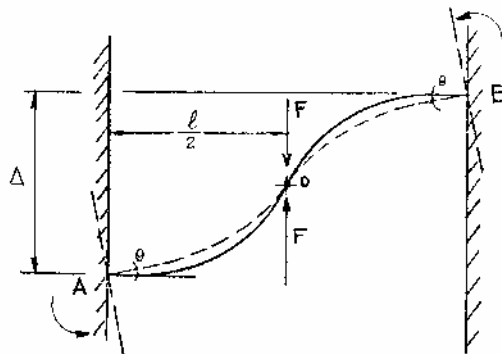


FIG. IV.50.

a) Supposons les barres parfaitement encastrées aux extrémités.

Faisons une coupure en O, milieu de AB. Nous avons :

$$\frac{Fl^3}{12EI} = \Delta \quad \text{soit} \quad F = \frac{12EI\Delta}{l^3},$$

d'où

$$M_{AB} = M_{BA} = -\frac{Fl}{2} = -\frac{6EI\Delta}{l^2}.$$

b) Si les extrémités A et B peuvent admettre une rotation  $\theta$ , l'écart  $\Delta$  entre les deux lèvres de la coupure n'est plus que :

$$\Delta - \theta l$$

En effet, si aucune rotation n'est possible aux extrémités, les moments obtenus sont ceux correspondant à l'encastrement parfait, sous l'effet de la sollicitation considérée. S'il y a possibilité de rotation et de déplacement aux extrémités, la valeur des moments peut être trouvée par les formules précédemment établies pour la barre non chargée soumise à ses extrémités à des rotations et déplacements. Les moments d'extrémité sont ainsi obtenus par simple addition.

NOTA : Dans le cas particulier où  $\theta_A = \theta_B = \theta$ , les formules générales, donnant les moments aux extrémités de la barre non chargée, se réduisent à :

$$M_{AB} = M_{BA} = 2EK \left( 3\theta - 3 \frac{\Delta}{l} \right).$$

Ce résultat peut être obtenu en procédant comme suit :

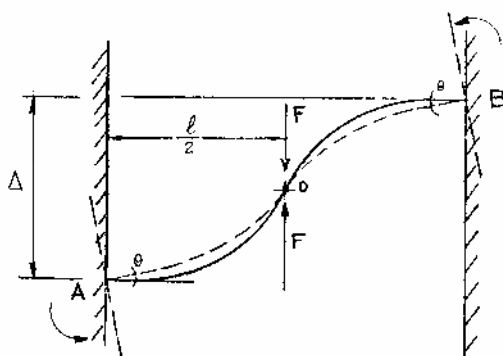


FIG. IV.50.

a) Supposons les barres parfaitement encastées aux extrémités. Faisons une coupure en O, milieu de AB. Nous avons :

$$\frac{Fl^3}{12EI} = \Delta \quad \text{soit} \quad F = \frac{12EI\Delta}{l^3},$$

d'où 
$$M_{AB} = M_{BA} = -\frac{Fl}{2} = -\frac{6EI\Delta}{l^2}.$$

b) Si les extrémités A et B peuvent admettre une rotation  $\theta$ , l'écart  $\Delta$  entre les deux lèvres de la coupure n'est plus que :

$$\Delta - \theta l$$

et la force se détermine en écrivant :

$$\frac{Fl^3}{12EI} = \Delta - \theta l \quad \text{soit} \quad F = \frac{12EI\Delta}{l^3} - \frac{12EI\theta}{l^2},$$

la valeur des moments est par suite :

$$M_{AB} = M_{BA} = -\frac{Fl}{2} = -\frac{l}{2} \left( \frac{12EI\Delta}{l^3} - \frac{12EI\theta}{l^2} \right),$$

et en posant  $\frac{I}{l} = K$ ,

$$M_{AB} = M_{BA} = 6EK\theta - 6EK\frac{\Delta}{l} = 2EK \left( 3\theta - 3\frac{\Delta}{l} \right).$$

### Méthode de calcul des moments dans les barres d'un système

#### 1. Poutre continue

a) Prendre pour inconnues, les rotations de chaque nœud.

b) Ecrire pour chaque extrémité de barre, la valeur du moment en fonction des rotations et éventuellement d'un tassement d'appui donné (déplacement vertical donné).

c) S'il y a une articulation sur le premier ou le dernier appui (appui de rive), exprimer que le moment est nul ; ce qui permet de déterminer la rotation de la barre sur l'appui de rive en fonction de celle du second ou de celle de l'avant dernier appui, suivant le cas.

S'il y a encastrement parfait sur l'un des appuis de rive, tenir compte de ce que la rotation est nulle, sur cet appui, en écrivant la valeur du moment.

d) En remarquant qu'il y a autant d'inconnues que d'appuis intermédiaires, il suffit d'écrire sur chacun de ces appuis (ou nœuds), que la somme des moments (à l'extrémité des barres qui y aboutissent) est nulle.

#### 2. Portique

##### 1° Système soumis à des forces horizontales

a) Prendre pour inconnues, les rotations de chaque nœud et le déplacement de chaque niveau.

b) Ecrire pour chaque extrémité de barre, la valeur du moment en fonction des rotations et du déplacement relatif de la barre.

c) Exprimer que les moments aux pieds du portique sont nuls, s'il y a des articulations ; ou bien, écrire que les rotations en pied sont nulles, s'il y a encastrement.

Dans le cas de l'articulation en pied, il est ainsi possible d'exprimer la rotation en pied de béquille, en fonction de la rotation et du déplacement en tête de cette béquille.

d) La somme des moments au droit de chaque nœud doit être nulle, de sorte que l'on peut obtenir autant d'équations qu'il y a de nœuds, donc de rotations inconnues.

Les équations supplémentaires permettant de résoudre le système, sont obtenues en écrivant, qu'à chaque niveau, la somme des moments, dans les béquilles, est égale au moment d'étage. (Effort tranchant en tête de l'étage multiplié par la hauteur d'étage). On obtient ainsi une équation pour chaque niveau, donc autant d'équations que de déplacements inconnus.

#### 2° Système soumis à des charges verticales

a) Si le portique est symétrique et s'il est symétriquement chargé, il n'y a pas de déplacements des nœuds.

On peut, en procédant comme précédemment, obtenir autant d'équations qu'il y a de nœuds, donc de rotations inconnues.

b) Si le portique est dissymétrique, il faut encore opérer comme précédemment et vérifier qu'à chaque niveau, la somme des efforts tranchants dans les béquilles est nulle.

Si cette somme n'est pas nulle, sur un ou plusieurs niveaux, c'est qu'il y a déplacement des nœuds à ces niveaux : il faut alors appliquer, à l'étage considéré, des forces fictives égales et opposées à la somme des efforts tranchants dans les béquilles.

On a, alors, un portique soumis à des charges horizontales : le calcul est mené comme indiqué précédemment.

On devra superposer les résultats des deux études, c'est-à-dire celle concernant le portique soumis aux charges horizontales fictives, et celle concernant le portique soumis aux charges verticales.

#### Exemples de barres, non chargées, soumises à des rotations et déplacements

a) *Tassement d'un des appuis d'une poutre continue* — Considérons une poutre d'inertie constante à quatre travées égales, sur laquelle un tassement d'appui a lieu en C. Soit  $\Delta$  ce tassement.

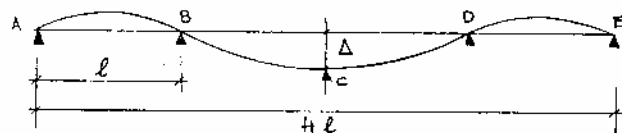


FIG. IV.51.

Supposons une articulation en  $A$ , on a par suite :

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B) = 0$$

Soit

$$2\theta_A + \theta_B = 0 \quad (1)$$

En  $B$ , nous avons

$$\widehat{M}_{BA} + \widehat{M}_{BC} = 0 \quad (2)$$

En  $C$ , compte tenu de la symétrie, la rotation  $\theta_C$  est nulle

$$\text{d'où} \quad 2EK(2\theta_B + \theta_A) + 2EK\left(2\theta_B - \frac{3\Delta}{l}\right) = 0. \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) nous permettent alors de déterminer  $\theta_A$  et  $\theta_B$

$$\text{d'où} \quad M_{BA}, M_{BC} \quad \text{et enfin} \quad M_{CB} = 2EK\left(\theta_B - \frac{3\Delta}{l}\right).$$

b) *Tassement d'un des appuis d'un portique symétrique encastré en pied.*  
La valeur de ce tassement sera prise égale à  $d$ . Si  $\Delta$  est le déplacement en tête des béquilles et si la traverse a même inertie et même longueur, donc même raideur que les béquilles, on pourra écrire en remarquant que les angles de rotation en  $B$  et  $C$  sont égaux (fig. IV.52) :

$$M_{AB} = 2EK\left(\theta - \frac{3\Delta}{l}\right),$$

$$M_{BA} = 2EK\left(2\theta - \frac{3\Delta}{l}\right),$$

$$M_{BC} = 2EK\left(3\theta - \frac{3d}{l}\right).$$

La somme des efforts tranchants dans  $AB$  et  $CD$  est nulle, c'est-à-dire :

$$\frac{2}{l}(M_{AB} + M_{BA}) = 0. \quad (1)$$

L'équilibre du nœud  $B$  nous donne

$$M_{BA} + M_{BC} = 0. \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) nous permettent alors de déterminer  $\theta$  et  $\Delta$ .

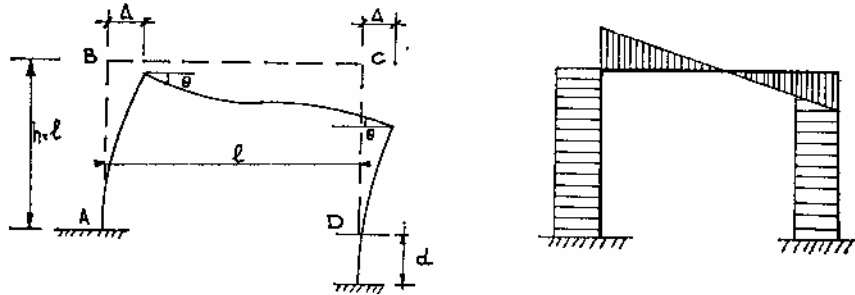


FIG. IV.52.

c) *Effets d'un écart de température, sur un portique* — Dans le cas d'une dilatation, les deux traverses *CD* et *BE* s'allongent et les bécquilles se déforment (fig. IV.53).

La rotation en *B* et *E* est  $\theta_1$  et  $-\theta_1$ .

La rotation en *C* et *D* est  $\theta_2$  et  $-\theta_2$ .

On peut écrire, en appelant  $\Delta$  le demi-allongement des traverses (fig. IV.54):

$$M_{BA} = 2EK \left( 2\theta_1 + 3\frac{\Delta}{h} \right),$$

et

$$M_{BE} = 2EK_1(2\theta_1 - \theta_2),$$

$$M_{BC} = 2EK(2\theta_1 + \theta_2),$$

$$M_{CB} = 2EK(2\theta_2 + \theta_1),$$

$$M_{CD} = 2EK_1(2\theta_2 - \theta_1).$$

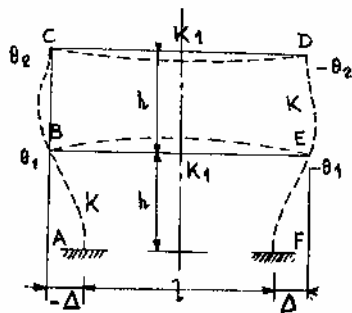


FIG. IV.53.

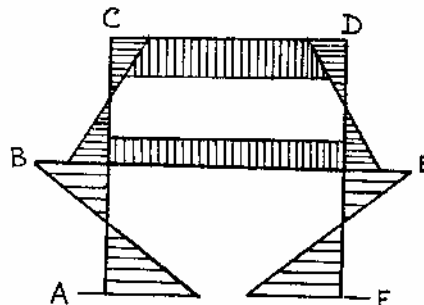


FIG. IV.54.



L'équilibre du nœud  $B$ , donne :  $M_{BA} + M_{BF} + M_{BC} = 0$ .

L'équilibre du nœud  $C$ , donne :  $M_{CB} + M_{CD} = 0$ .

D'où deux équations à deux inconnues en  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

*Exemples de barres, directement chargées*

a) Poutre continue, d'inertie constante, présentant deux travées de 20 m et un porte-à-faux de 10 m, reposant librement en  $C$ .

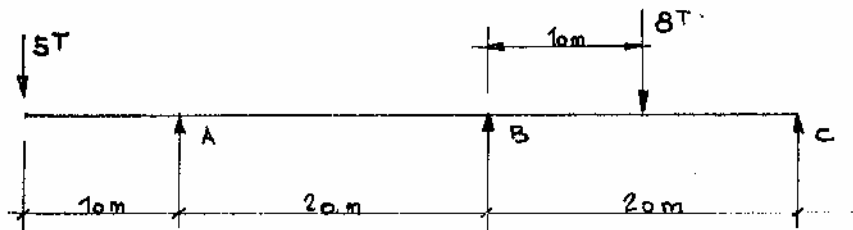


FIG. IV.55.

Nous pouvons écrire :

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B),$$

$$M_{BA} = 2EK(2\theta_B + \theta_A),$$

$$M_{BC} = 2EK(2\theta_B + \theta_C) - \frac{8 \times 20}{8},$$

$$M_{CB} = 2EK(2\theta_C + \theta_B) + \frac{8 \times 20}{8},$$

En  $A$ , nous devons avoir, une somme des moments égale à zéro

$$2EK(2\theta_A + \theta_B) + 50 = 0. \quad (1)$$

En  $B$ , nous devons avoir également

$$M_{BA} + M_{BC} = 2EK(2\theta_B + \theta_A) + 2EK(2\theta_B + \theta_C) - 20 = 0 \quad (2)$$

En  $C$ , le moment est égal à zéro, puisque la poutre repose librement

$$M_{CB} = 2EK(2\theta_C + \theta_B) + 20 = 0 \quad (3)$$

La résolution des équations (1), (2) et (3) nous permet de déterminer :

$$2EK \cdot \theta_A \quad 2EK \cdot \theta_B \quad 2EK \cdot \theta_C \quad \text{d'où } M_{AB} \quad M_{BA} \quad \text{et } M_{BC}.$$

b) Portique étagé à une seule travée, chargé uniformément sur la traverse  $CD$ , par une charge de  $15 \text{ T/m} \cdot l$  (fig. IV.56).

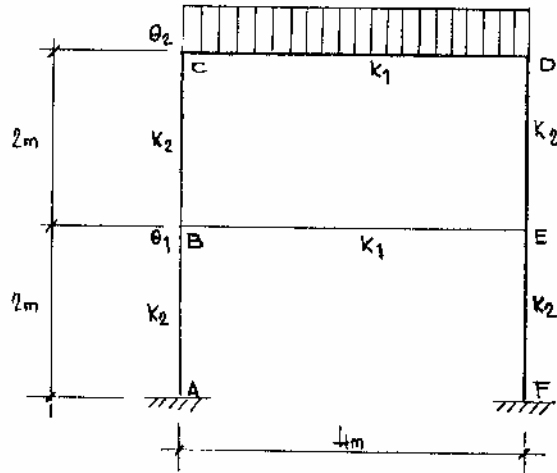


FIG. IV.56.

Compte tenu de la symétrie, nous n'avons pas de déplacement dans un tel système, d'une part, et, d'autre part, si nous appelons  $\theta_1$  la rotation en  $B$ ,  $\theta_2$  la rotation en  $C$ , nous avons respectivement  $-\theta_1$  en  $E$  et  $-\theta_2$  en  $D$ .

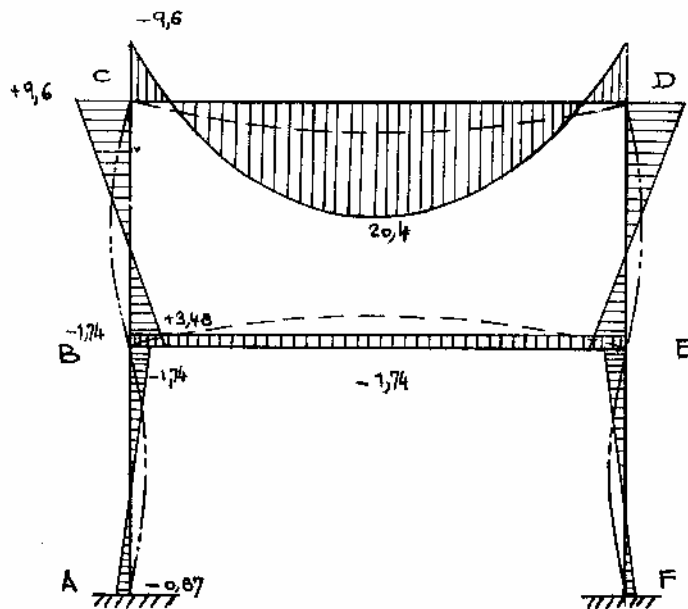


FIG. IV.57.

Nous pouvons écrire :

$$M_{BA} = 2EK_2(2\theta_1),$$

$$M_{AB} = 2EK_2\theta_1,$$

$$M_{BE} = 2EK_1(2\theta_1 - \theta_1),$$

$$M_{BC} = 2EK_2(2\theta_1 + \theta_2),$$

$$M_{CB} = 2EK_2(2\theta_2 + \theta_1),$$

$$M_{CD} = 2EK_1(2\theta_2 - \theta_2) - \frac{15 \times 4^2}{12}.$$

La somme des moments en B doit être nulle

$$M_{BA} + M_{BC} + M_{BE} = 0$$

$$4EK_2\theta_1 + 2EK_2(2\theta_1 + \theta_2) + 2EK_1(2\theta_1 - \theta_1) = 0$$

La somme des moments en C doit être également nulle

$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

$$2EK_2(2\theta_2 + \theta_1) + 2EK_1(2\theta_2 - \theta_2) - 20 = 0$$

Si nous prenons par exemple  $K_1 = 2$  et  $K_2 = 1$ , on a respectivement :

$$4E\theta_1 + 2E(2\theta_1 + \theta_2) + 4E\theta_1 = 0 \quad (1)$$

$$2E(2\theta_2 + \theta_1) + 4E\theta_2 - 20 = 0 \quad (2)$$

d'où l'on tire

$$E\theta_1 = -\frac{10}{23},$$

et

$$E\theta_2 = \frac{60}{23},$$

Ce qui permet de déterminer la valeur des moments aux angles du portique.

### Portique étagé soumis à des efforts horizontaux

Nous exposons ci-après une méthode exacte, dont la résolution sera effectuée par approximations successives. Les inconnues choisies sont les déplacements relatifs des étages et les rotations des différents nœuds.

Nous résumons, sur la figure ci-après, les différents paramètres utilisés dans cette étude.

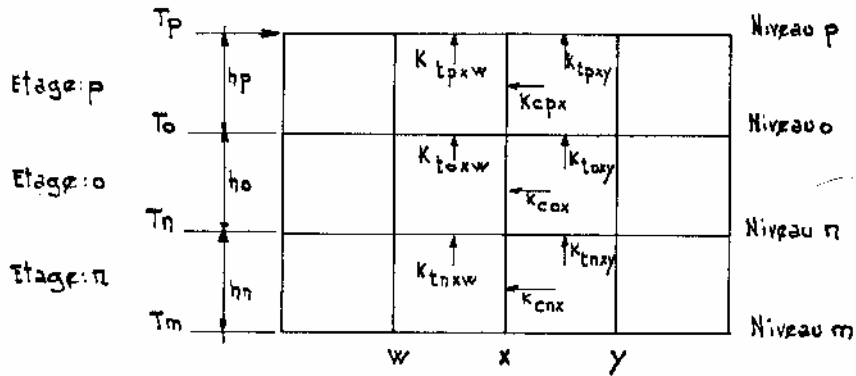


FIG. IV.58.

A partir des deux égalités obtenues précédemment

$$M_{AB} = 2EK \left( 2\theta_A + \theta_B - 3\frac{\Delta}{l} \right),$$

$$M_{BA} = 2EK \left( 2\theta_B + \theta_A - 3\frac{\Delta}{l} \right).$$

Nous déterminerons :

1° L'équation correspondant à l'équilibre d'un étage, dans laquelle on exprime que le moment extérieur intéressant l'étage considéré et la somme des moments, en tête et en pied, de tous les poteaux existant à cet étage, sont en équilibre.

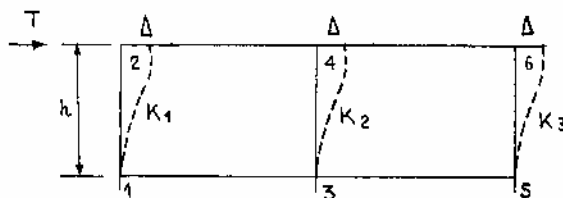


FIG. IV.59.

Les moments dans les poteaux sont respectivement :

$$M_{1-2} = 2EK_1 \left( 2\theta_1 + \theta_2 - \frac{3\Delta}{h} \right),$$

$$M_{2-1} = 2EK_1 \left( 2\theta_2 + \theta_1 - \frac{3\Delta}{h} \right),$$

$$M_{3-4} = 2EK_2 \left( 2\theta_3 + \theta_4 - \frac{3\Delta}{h} \right),$$

$$M_{4-3} = 2EK_2 \left( 2\theta_4 + \theta_3 - \frac{3\Delta}{h} \right),$$

$$M_{5-6} = 2EK_3 \left( 2\theta_5 + \theta_6 - \frac{3\Delta}{h} \right),$$

$$M_{6-5} = 2EK_3 \left( 2\theta_6 + \theta_5 - \frac{3\Delta}{h} \right).$$

En posant  $\frac{\Delta}{h} = \psi$ , la somme des moments, dans les poteaux de l'étage considéré, devient :

$$\begin{aligned} & 2EK_1(3\theta_1 + 3\theta_2 - 6\psi) \\ & + 2EK_2(3\theta_3 + 3\theta_4 - 6\psi) \\ & + 2EK_3(3\theta_5 + 3\theta_6 - 6\psi) \end{aligned}$$

On a ainsi :

$$6E[K_1(\theta_1 + \theta_2 - 2\psi) + K_2(\theta_3 + \theta_4 - 2\psi) + K_3(\theta_5 + \theta_6 - 2\psi)] + Th = 0$$

Ou bien encore :

$$12E\psi(K_1 + K_2 + K_3) = 6K_1(E\theta_1 + E\theta_2) + 6K_2(E\theta_3 + E\theta_4) + 6K_3(E\theta_5 + E\theta_6) + Th$$

Ce qui nous donne « l'équation d'étage »

$$E\psi = \frac{Th}{12(K_1 + K_2 + K_3)} + \frac{K_1(E\theta_1 + E\theta_2) + K_2(E\theta_3 + E\theta_4) + K_3(E\theta_5 + E\theta_6)}{2(K_1 + K_2 + K_3)},$$

que nous exprimerons d'une façon plus générale

$$E\psi_n = \frac{Th}{12\sum K_{c,n}} + \frac{\sum K_{c,n}(E\theta_{nx} + E\theta_{mx})}{2\sum K_{c,n}},$$

dans laquelle nous avons :

$\Sigma K_{cn}$  = somme des rigidités  $\frac{I}{h}$  des poteaux de l'étage considéré.

$\theta_{mx}$  et  $\theta_{nx}$  = rotations des nœuds d'un même poteau aux niveaux  $m$  et  $n$ .

$\psi_n$  = rapport du déplacement relatif des niveaux  $m$  et  $n$  à la hauteur  $h$  qui sépare ces deux niveaux.

2° L'équilibre d'un nœud quelconque, qui s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} &2EK_{1-2}(2\theta_1 + \theta_2 - 3\psi_0) \\ &+ 2EK_{1-3}(2\theta_1 + \theta_3) \\ &+ 2EK_{1-4}(2\theta_1 + \theta_4 - 3\psi_n) \\ &+ 2EK_{1-5}(2\theta_1 + \theta_5) \end{aligned} \right\} = 0$$

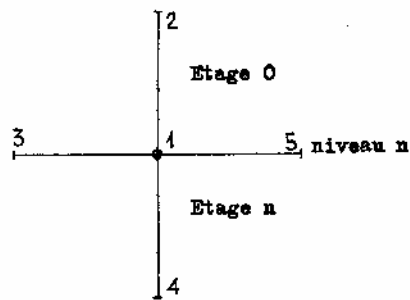


FIG. IV.60.

et qui peut s'écrire :

$$4E(K_{1-2}\theta_1 + K_{1-3}\theta_1 + K_{1-4}\theta_1 + K_{1-5}\theta_1) = 6EK_{1-2}\psi_0 + 6EK_{1-4}\psi_n - 2E(K_{1-2}\theta_2 + K_{1-3}\theta_3 + K_{1-4}\theta_4 + K_{1-5}\theta_5)$$

ou bien :

$$\frac{3EK_{1-2}\psi_0 + 3EK_{1-4}\psi_n - E(K_{1-2}\theta_2 + K_{1-3}\theta_3 + K_{1-4}\theta_4 + K_{1-5}\theta_5)}{2(K_{1-2} + K_{1-3} + K_{1-4} + K_{1-5})} = E\theta_1$$

L'équilibre d'un nœud de l'étage  $n$  s'exprimera d'une façon générale, par « l'équation de nœud »

$$E\theta_{nx} = \frac{3\Sigma K_c E\psi - \Sigma K_i E\theta_i}{2\Sigma K}$$

- où  $\Sigma K_c E\psi$  comprend tous les poteaux aboutissant au nœud  $nx$ , avec leur déplacement respectif ;
- $\Sigma K_i E\theta_i$  est la somme des produits  $KE\theta$  des autres extrémités de toutes les barres qui aboutissent au nœud étudié ;
- $\Sigma K$  est la somme des rigidités de toutes les barres qui aboutissent au nœud considéré.

Le problème consiste à trouver pour un même niveau des valeurs pour  $\psi_n$  et  $\theta_{n,x}$  qui satisfassent, à la fois, à « l'équation d'étage » et à « l'équation de nœud ».

#### Méthode de calcul par itération

La méthode proposée est une méthode par approximations successives<sup>1</sup>.

1° *La première approximation* va nous permettre de déterminer une première valeur du déplacement, en utilisant pour les rotations les résultats approchés suivants :

a) pour les niveaux supérieurs :

$$E\theta_n = \frac{M_n + M_0}{24\Sigma K_{t,n}}, \quad (a)$$

$M_0$  est le moment d'étage  $T_0 \cdot h$  ( $T_0$  = effort tranchant au niveau 0)  
 $M_n$  est le moment d'étage  $T_n \cdot h$  ( $T_n$  = effort tranchant au niveau  $n$ ) ;  
 $\Sigma K_{t,n}$  est la somme des raideurs de toutes les traverses de l'étage considéré.

b) lorsque le niveau 1 comporte des colonnes encastrees en pied :

$$E\theta_1 = \frac{M_1 + M_2}{24\Sigma K_{r,1} + 2\Sigma K_{c,1}}, \quad (b)$$

c) lorsque le niveau 1 comporte des colonnes articulées en pied :

$$E\theta_1 = \frac{2M_1 + M_2}{24\Sigma K_{r,1}}, \quad (c)$$

d'où la valeur du déplacement à retenir en première approximation

$$E\psi_n = \frac{M_n}{12\Sigma K_{c,n}} + \frac{E\theta_m + E\theta_n}{2}. \quad (d)$$

2° *La deuxième approximation*, va nous permettre de déterminer une valeur approchée des rotations, en utilisant la valeur obtenue en première approximation pour le déplacement, dans la formule exacte de l'équation de nœud.

<sup>1</sup> Les formules proposées de 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> approximation sont établies en annexe 2.

a) pour les niveaux supérieurs :

$$E\theta_{nx} = \frac{\Sigma K_c E\psi}{\Sigma K}, \tag{e}$$

b) lorsque le niveau 1 comporte des colonnes encastrees en pied :

$$E\theta_{1-x} = \frac{\Sigma K_c E\psi}{\Sigma K - \frac{1}{3} K_{c-1x}}, \tag{f}$$

avec  $\Sigma K_c E\psi = K_{c-1x} E\psi_1 + K_{c-2x} E\psi_2$

c) lorsque le niveau 1 comporte des colonnes articulées en pied :

$$E\theta_{1-x} = \frac{K_{c-1x} E\psi_1 + 2K_{c-2x} E\psi_2}{2\Sigma K - K_{c-1x}}. \tag{g}$$

REMARQUE : Pour accélérer la convergence, il est intéressant de séparer les nœuds en deux groupes, puis d'appliquer successivement la formule exacte de l'équation de nœud à chacun des deux groupes.

Les résultats obtenus pour les rotations sont utilisés pour le calcul du déplacement en utilisant la formule exacte de l'équation d'étage (voir exemple page 164).

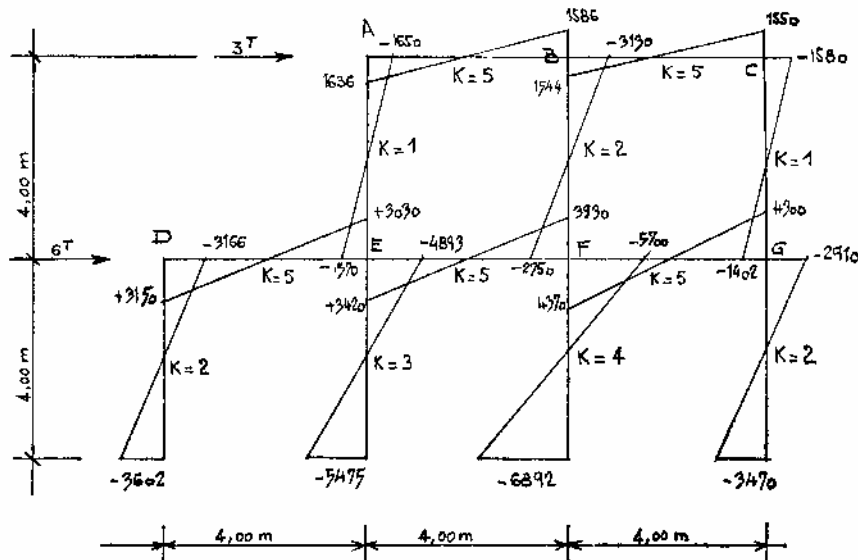


FIG. IV.61.



Les formules de première approximation peuvent facilement être établies, en supposant qu'il y a une articulation à mi-hauteur des poteaux pour les étages courants, à  $0,6h$  pour les étages inférieurs avec encastrement en pied et, enfin, à la base dans le cas d'un portique articulé en pied. On suppose en plus, que les rotations sont égales sur un même niveau.

Les formules de deuxième approximation sont établies en supposant que les extrémités des barres aboutissant à un même nœud ont même rotation sauf, évidemment, pour la barre articulée en pied ou bien celle encastree à la base.

*Exemple :* Considérons un portique correspondant aux caractéristiques indiquées sur le schéma page 163, sur lequel on a porté les raideurs de toutes les barres.

Commençons par calculer les valeurs des rotations et déplacements donnés par les formules de 1<sup>re</sup> approximation

$\Sigma K_c$	$24\Sigma K_t$	$M_n$	$\frac{M_n}{12\Sigma K_{c,n}}$	$E\theta$	$E\psi$
	240			0,05	0,338
4		12	0,25		
	360			0,126	0,336
11		36	0,273		

Dans la colonne  $E\theta$ , on écrit :

$$\text{au deuxième niveau} \quad E\theta_2 = \frac{12}{240} = 0,05, \quad (\text{formule } a)$$

$$\text{au premier niveau} \quad E\theta_1 = \frac{48}{360+22} = 0,126. \quad (\text{formule } b)$$

Dans la colonne  $E\psi$ , en appliquant la formule (d) on écrit :

$$\text{au deuxième niveau} \quad E\psi_2 = 0,25 + \frac{0,126+0,05}{2} = 0,338,$$

$$\text{au premier niveau} \quad E\psi_1 = 0,273 + \frac{0+0,126}{2} = 0,336.$$

Avec les valeurs de  $E\psi$ , on aura une deuxième approximation pour la valeur de la rotation, pour chaque nœud cette fois, en appliquant les formules (e) ou (f)

en A et C :  $E\theta = \frac{1 \times 0,338}{6} = 0,0565,$  (e)

en B :  $E\theta = \frac{2 \times 0,338}{12} = 0,0565,$  (e)

en D :  $E\theta = \frac{2 \times 0,336}{7 - \frac{2}{3}} = 0,106,$  (f)

en E :  $E\theta = \frac{3 \times 0,336 + 1 \times 0,338}{14 - \frac{3}{3}} = 0,104,$  (f)

en F :  $E\theta = \frac{4 \times 0,336 + 2 \times 0,338}{16 - \frac{4}{3}} = 0,137,$  (f)

en G :  $E\theta = \frac{2 \times 0,336 + 1 \times 0,338}{8 - \frac{2}{3}} = 0,137.$  (f)

Les résultats obtenus sont inscrits sur le schéma du portique.

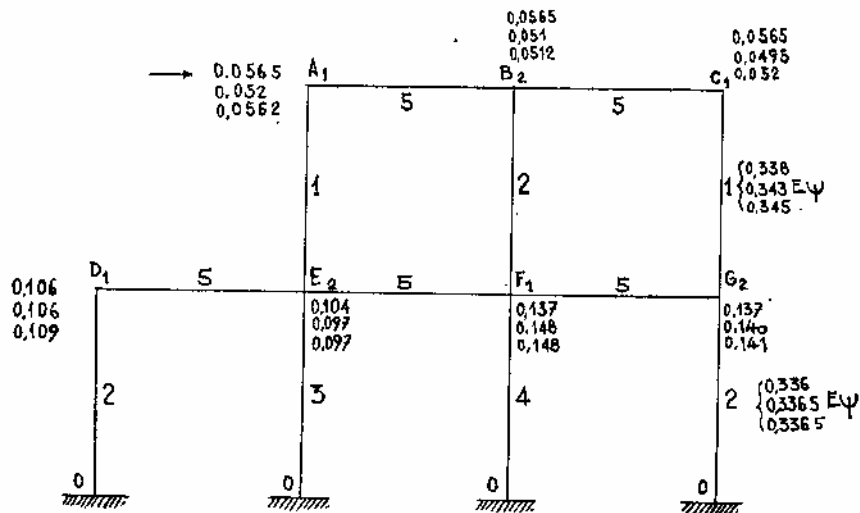


FIG. IV.62.

Pour accélérer la convergence, il est intéressant de séparer les nœuds en deux groupes, correspondant aux indices 1 et 2 des lettres désignant les nœuds sur le schéma.

On applique alors « l'équation de nœud » à tous les nœuds du groupe 1, en prenant pour  $\theta$  les valeurs approximatives du groupe 2, déjà notées sur le schéma et obtenues avec les équations (e) pour les étages supérieurs ou (f) pour le 1<sup>er</sup> niveau dont les colonnes sont encastrées en pied.

Ensuite, on applique « l'équation de nœud » à tous les nœuds du groupe 2, en prenant pour  $\theta$  les valeurs que l'on vient d'obtenir pour les nœuds du groupe 1.

Les résultats obtenus pour les deux groupes, sont notés sur le schéma du portique et sont utilisés pour le calcul de  $\psi$  par application de « l'équation d'étage ».

Ainsi dans l'exemple choisi, nous aurons

en  $A_1$

$$E\theta = \frac{3 \times 1 \times 0,338 - (5 \times 0,0565 + 1 \times 0,104)}{12} = 0,052$$

en  $C_1$

$$E\theta = \frac{3 \times 1 \times 0,338 - (5 \times 0,0565 + 1 \times 0,137)}{12} = 0,0495$$

en  $D_1$

$$E\theta = \frac{3 \times 2 \times 0,336 - (5 \times 0,104 + 2 \times 0)}{14} = 0,106$$

en  $F_1$

$$E\theta = \frac{3(4 \times 0,336 + 2 \times 0,338) - (5 \times 0,104 + 5 \times 0,137 + 2 \times 0,0565)}{32} = 0,148$$

Dans le groupe 2, on obtient avec les résultats précédents :

en  $B_2$

$$E\theta = \frac{3 \times 2 \times 0,338 - (5 \times 0,052 + 5 \times 0,0495 + 2 \times 0,148)}{24} = 0,051$$

en  $E_2$

$$E\theta = \frac{3(3 \times 0,336 + 1 \times 0,338) - (5 \times 0,106 + 5 \times 0,148 + 1 \times 0,052)}{28} = 0,097$$

en  $G_2$

$$E\theta = \frac{3(2 \times 0,336 + 1 \times 0,338) - (5 \times 0,148 + 1 \times 0,0495)}{16} = 0,14$$

Appliquons « l'équation d'étage ».

Au deuxième niveau, nous avons :

$$E\psi_2 = \frac{12}{12 \times 4} + \frac{1(0,052 + 0,097) + 2(0,051 + 0,148) + 1(0,0495 + 0,14)}{8} = 0,343$$

Au premier niveau, nous avons :

$$E\psi_1 = \frac{36}{12 \times 11} + \frac{2(0,106 + 0) + 3(0,097 + 0) + 4(0,148 + 0) + 2(0,14 + 0)}{22} \\ = 0,3365$$

Faisons une deuxième application des équations de « nœud » et « d'étage », en utilisant encore les groupes 1 et 2 et les déplacements que nous venons d'obtenir.

en  $A_1$

$$E\theta = \frac{3 \times 1 \times 0,343 - (5 \times 0,051 + 1 \times 0,097)}{12} = 0,0562,$$

en  $C_1$

$$E\theta = \frac{3 \times 1 \times 0,343 - (5 \times 0,051 + 1 \times 0,14)}{12} = 0,052,$$

en  $D_1$

$$E\theta = \frac{3 \times 2 \times 0,3365 - (5 \times 0,097 + 2 \times 0)}{14} = 0,109,$$

en  $F_1$

$$E\theta = \frac{3(4 \times 0,3365 + 2 \times 0,343) - (5 \times 0,097 + 5 \times 0,14 + 2 \times 0,051 + 4 \times 0)}{32} \\ = 0,148.$$

Puis avec le groupe 2

en  $B_2$

$$E\theta = \frac{3 \times 2 \times 0,343 - (5 \times 0,0562 + 5 \times 0,052 + 2 \times 0,148)}{24} = 0,0512,$$

en  $E_2$

$$E\theta = \frac{3(3 \times 0,3365 + 1 \times 0,343) - (5 \times 0,109 + 5 \times 0,148 + 1 \times 0,0562)}{28} = 0,097,$$

en  $G_2$

$$E\theta = \frac{3(2 \times 0,3365 + 1 \times 0,343) - (5 \times 0,148 + 1 \times 0,052)}{16} = 0,141.$$

Avec ces derniers résultats, « l'équation d'étage » nous donnera :

Au deuxième niveau :

$$E\psi_2 = \frac{12}{12 \times 4} + \frac{1(0,0562 + 0,097) + 2(0,0512 + 0,148) + 1(0,052 + 0,141)}{8}$$

$$= 0,345.$$

Au premier niveau :

$$E\psi_1 = \frac{36}{12 \times 11} + \frac{2(0,109 + 0) + 3(0,097 + 0) + 4(0,148 + 0) + 2(0,141 + 0)}{22}$$

$$= 0,3365.$$

Les valeurs données au droit des colonnes sont les valeurs de  $K_c$ .

Les valeurs des moments dans les barres sont obtenues en appliquant la formule générale.

### III. Portiques contreventés par des diagonales ou des remplissages

#### 1. Contreventement par diagonales

Nous étudierons tout d'abord l'effet des charges verticales puis celui des efforts horizontaux, puisque les contraintes dans les éléments du portique résulteront d'une superposition des contraintes obtenues dans une poutre en treillis, soumise à une flexion composée.

1° Charges verticales :

Le problème peut être résolu de la façon suivante :

Si  $E_c$  et  $E_d$  sont respectivement les modules d'élasticité des colonnes et des diagonales.

Si  $A_c$  et  $A_d$  sont respectivement les sections des colonnes et des diagonales.

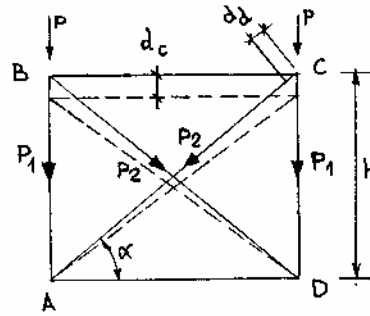


FIG. IV.63.

Il faut qu'il y ait compatibilité des raccourcissements des colonnes et des diagonales.

Nous avons  $AC \sin \alpha = h$

et  $d_c \sin \alpha = d_d$ .

Si  $P_1$  et  $P_2$  sont les parts de charges passant dans la colonne d'une part et dans la diagonale d'autre part, telles que  $P_1 + P_2 \sin \alpha = P$ , on peut écrire :

$$\frac{d_c}{h} = \frac{P_1}{A_c E_c} \quad \text{ou} \quad P_1 = \frac{d_c A_c E_c}{h},$$

et

$$\frac{d_d}{h \sin \alpha} = \frac{P_2}{A_d E_d} \quad \text{ou} \quad \frac{d_c \sin^2 \alpha}{h} = \frac{P_2}{A_d E_d},$$

nous pouvons alors exprimer  $P_1$  en fonction de  $P_2$

$$P_1 = \frac{P_2}{\sin^2 \alpha} \frac{A_c E_c}{A_d E_d},$$

et en portant la valeur de  $P_1$  dans,

$$P_1 + P_2 \sin \alpha = P$$

on obtient

$$P_2 = \frac{P \sin^2 \alpha}{\frac{A_c E_c}{A_d E_d} + \sin^3 \alpha}.$$

## 2° Efforts horizontaux :

Après avoir obtenu les efforts dans les colonnes et les diagonales, sous l'effet des charges verticales, on prendra en compte l'effort  $H$ , appliqué à chaque niveau de la façon suivante :

Soit  $H_1$  et  $H_2$  les efforts appliqués respectivement sur la triangulation, où la diagonale travaille en compression, d'une part, et sur celle où la diagonale travaille en traction, d'autre part.

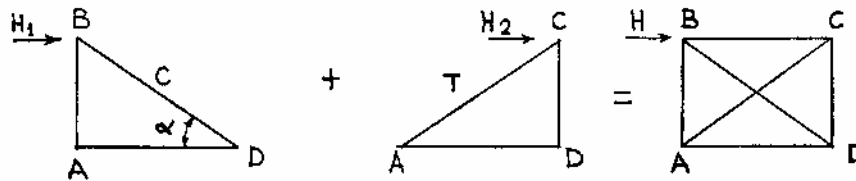


FIG. IV.64.

Nous avons  $H_1 + H_2 = H$

de sorte, qu'en appelant la compression  $BD = C$

et la traction  $AC = T$

nous obtenons  $C \cos \alpha + T \cos \alpha = H$

a) Dans le cas où, en faisant  $H_1 = H_2 = \frac{H}{2}$

l'effort résiduel dans la diagonale de traction, c'est-à-dire :

« Effort de compression dû aux charges verticales sans surcharges variables + effort de traction dû aux charges horizontales », est un effort de compression, ou bien un effort de traction provoquant dans le béton de la diagonale, une contrainte uniforme inférieure à 20 bars, autrement dit, une contrainte ne provoquant pas de fissuration dans le béton, on pourra traiter la diagonale de traction, comme la diagonale de compression (même section, mêmes armatures).

b) Dans le cas où l'effort résiduel provoque une contrainte de traction supérieure à 20 bars, on calculera l'allongement relatif de la diagonale, en tenant compte de la contrainte de l'acier dans un élément tendu et fissuré.

Les règlements nous donnent :

en appelant  $A_b$  la section de béton de la diagonale tendue,  
 $A_a$  la section d'acier,  
 $A_c$  la section de la diagonale comprimée,  
 $\sigma_b$  la contrainte de traction du béton à rupture,

- $\sigma_a$  la contrainte de traction de l'acier,
- $T$  l'effort de traction,
- $\Delta L$  l'allongement,
- $L$  la longueur de l'élément tendu,
- $\sigma_m$  contrainte moyenne de l'acier,
- $E_a$  module d'élasticité de l'acier,
- $E_d$  module d'élasticité de la diagonale comprimée.

la valeur 
$$\sigma_m = \frac{T}{A_a} - \frac{0,45A_b\sigma_b}{A_a},$$

et par suite 
$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{T}{A_a E_a} \left( 1 - \frac{0,45A_b\sigma_b}{T} \right).$$

Etudions la compatibilité de l'allongement de la diagonale tendue et du raccourcissement de la diagonale comprimée

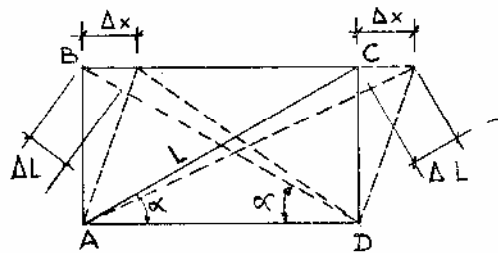


FIG. IV.65.

Nous avons 
$$\Delta x = \frac{\Delta L}{\cos \alpha},$$

or 
$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{T}{A_a E_a} \left( 1 - \frac{0,45A_b\sigma_b}{T} \right),$$

et 
$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{C}{A_d E_d} \quad \text{avec} \quad C \cos \alpha = H - T \cos \alpha,$$

d'où 
$$\frac{T}{A_a E_a} \left( 1 - \frac{0,45A_b\sigma_b}{T} \right) = \frac{H - T \cos \alpha}{\cos \alpha A_d E_d},$$

soit 
$$T \left( \frac{1}{A_a E_a} + \frac{1}{A_d E_d} \right) = \frac{H}{\cos \alpha A_d E_d} + \frac{0,45A_b\sigma_b}{A_a E_a}.$$

La valeur de  $T$  nous permettra de déterminer  $C$ .



La superposition des efforts dans les diagonales nous permettra de déterminer la section de béton et d'acier. Les efforts horizontaux pouvant être inversés, les deux diagonales auront la même section de béton et les mêmes armatures.

## 2. Portique contreventé par remplissage

Le remplissage est effectué en même temps que le portique. Il s'agit essentiellement d'un portique composé de *montants et traverses très souples*, jouant le rôle de *simples raidisseurs* de faibles dimensions.

a) Les charges verticales se répartissent uniformément dans le panneau inférieur, à condition de faire intervenir un coefficient d'équivalence égal au rapport des modules d'élasticité des deux matériaux, en l'occurrence le module d'élasticité des montants du cadre et celui du matériau remplissant ce cadre (parpaings pleins - briques creuses, etc.).

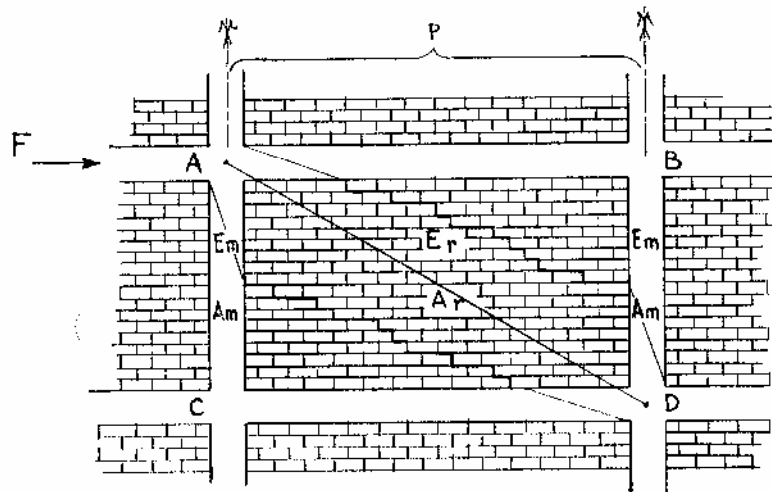


FIG. IV.66.

Cette hypothèse n'est valable que si le remplissage est effectué au fur et à mesure que le portique est réalisé de sorte que toutes les charges appliquées sur la traverse  $AB$ , viennent effectivement appuyer sur le remplissage monté sous cette traverse, sans lui permettre de prendre une flèche.

On réalise ainsi un système porteur, raidi par des poteaux et des chaînages horizontaux, tels la traverse  $AB$ .

Si  $A_m$  est la section des montants de module d'élasticité  $E_m$ , et  $A_r$  la section du remplissage de module d'élasticité  $E_r$ , la contrainte moyenne dans

le remplissage est, dans le cas où il existe une série de remplissages accolés

$$\sigma_m = \frac{P}{A_m \frac{E_m}{E_r} + A_r}$$

$P$  est la résultante générale des charges appliquées sur  $AB$ .

$E_m$  : module d'élasticité moyen du montant en  $BA$ .

$E_r$  : module d'élasticité résultant d'essais ou d'une fiche d'agrément.

b) Les charges horizontales de direction  $AB$  sont reprises par une bielle d'axe  $AD$ .

La largeur de cette bielle peut être obtenue en traçant pour chaque nœud, deux lignes  $mm_1$  et  $pp_1$

telles que

$$n_1 m_1 = 3 m n_1$$

et

$$n_1 p_1 = 3 p n_1$$

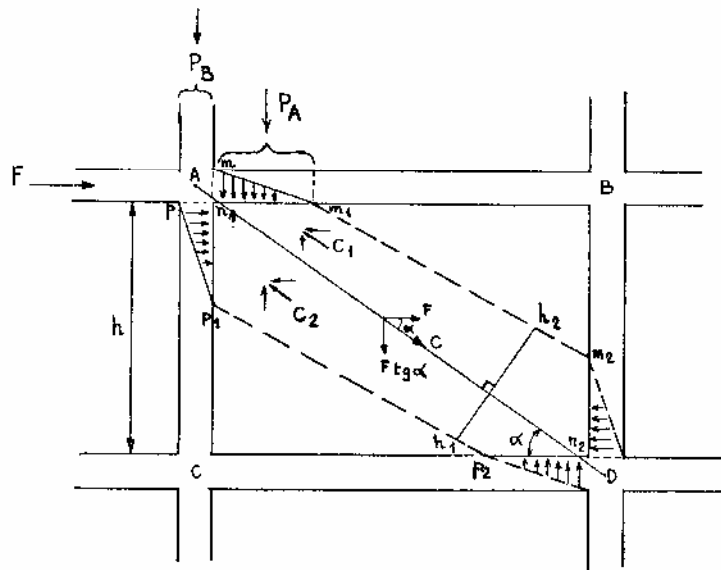


FIG. IV.67.

La même construction doit être faite au nœud  $D$ . La bielle de contreventement est la partie de remplissage comprise entre  $m_1 p_1 m_2 p_2$ . La section de cette bielle sera prise au droit de la plus courte perpendiculaire à  $AD$ . Soit  $h_1 h_2$ . (Cette distance varie dans le cas de montants et de traverses de dimensions différentes).

La figure 1.84 de l'ouvrage *Béton armé après fissuration* (Eyrolles) donne le fonctionnement d'ensemble d'un portique contreventé par remplissage.

L'effort passant dans la bielle est

$$C = \frac{F}{\cos \alpha}.$$

Cet effort peut être décomposé en deux parties  $C_1$  et  $C_2$ , telles que

$$C_1 + C_2 = C$$

$$C_1 = C \frac{n_1 m_1}{n_1 m_1 + n_1 p_1},$$

et

$$C_2 = C \frac{n_1 p_1}{n_1 m_1 + n_1 p_1}.$$

On devra vérifier que les armatures longitudinales de  $AB$  peuvent reprendre, d'une part, l'effort correspondant à la composante horizontale de  $C_1$  et d'autre part, le moment fléchissant, créé par la composante verticale de  $C_1$ , appliquée au milieu de  $n_1 m_1$ .

On pourra déduire de cette composante la charge  $P_A$  directement appliquée sur  $n_1 m_1$ .

De même, les armatures secondaires et la section du chaînage devront permettre la reprise de l'effort tranchant correspondant à

$$C_1 \sin \alpha - P_A$$

Si  $P_A$  est plus grand que  $C_1 \sin \alpha$ , on ne vérifiera le chaînage que sous l'effet de la composante horizontale.

La même vérification devra être faite pour  $CD$ .

On devra vérifier également que la composante verticale de  $C_2$  est inférieure à  $P_B$ .

On a ici

$$P_B = \frac{P_A E_m}{3 E_r} \quad (1)$$

Dans le cas contraire on vérifie que les armatures du montant, prévues en fonction de  $P_B$  sont suffisantes pour reprendre, d'une part, en traction, la différence  $C_2 \sin \alpha - P_B$  et d'autre part, le moment fléchissant créé par la composante  $C_2 \cos \alpha$  appliquée au milieu de  $n_1 p_1$ . Les armatures secondaires du montant et la section prévue, devront être suffisantes pour reprendre l'effort tranchant  $C_2 \cos \alpha$ .

La même vérification devra être faite pour le montant  $BD$ .

La vérification du remplissage sera faite de la façon suivante :

En posant

$e$  : épaisseur du remplissage  
 $b$  : distance  $h_1 h_2$

(1) Si montants et traverses ont même section.

la contrainte due à l'effort dans la bielle est

$$\sigma_{m_1} = \frac{C}{be} \quad (\text{contrainte moyenne})$$

Cette contrainte peut être décomposée, sur le plan horizontal, en une contrainte tangentielle  $\sigma_{m_1} \sin \alpha \cos \alpha$  et en une contrainte normale  $\sigma_{m_1} \sin^2 \alpha$ . La décomposition de cette contrainte, sur le plan vertical, donne de même une contrainte tangentielle  $\sigma_{m_1} \sin \alpha \cos \alpha$  et une contrainte normale  $\sigma_{m_1} \cos^2 \alpha$ . Le cercle de Mohr peut nous fournir la valeur des contraintes principales en tenant compte de la superposition de deux contraintes de compression sur le plan horizontal

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_{m_1} \sin^2 \alpha.$$

$\sigma_m$  est la contrainte de compression due aux charges verticales.

Ces contraintes doivent être inférieures ou égales aux contraintes admissibles pour le matériau de remplissage.

En ce qui concerne les risques de flambement, on devra observer la règle

$$h \leq 15e \quad \text{pour le remplissage}$$

$$h \leq 20e_1 \quad \text{pour le montant}$$

$e_1$  est la plus petite dimension transversale du montant.

#### IV. Portiques sollicités par des charges verticales

Nous avons précédemment établi les équations permettant de déterminer les moments aux extrémités d'une barre  $AB$ , sollicitée par des charges verticales et présentant, à ces mêmes extrémités, des rotations  $\theta_A$  et  $\theta_B$ .

En posant

$$K = \frac{I}{l^3},$$

avec  $I$  inertie de la barre,

$l$  longueur de la barre,

$\Delta$  déplacement de l'extrémité  $B$  par rapport à  $A$ ,

$C_{AB}$  et  $C_{BA}$  moments d'encastrement parfait respectivement en  $A$  et en  $B$  les deux équations obtenues sont :

$$M_{AB} = -C_{AB} + 2EK \left( 2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta}{l} \right),$$

$$M_{BA} = C_{BA} + 2EK \left( 2\theta_B + \theta_A - \frac{3\Delta}{l} \right).$$

A partir de ces deux équations, nous pouvons déterminer l'équilibre d'un nœud, en écrivant que la somme des moments appliqués à ce nœud est nulle.

$$M_{AC} + M_{AB} + M_{AE} + M_{AD} = 0$$

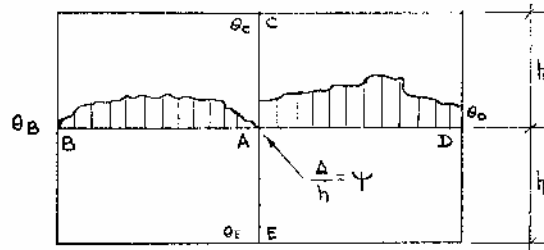


FIG. IV.68.

ou encore :

$$\left. \begin{aligned} M_{AC} &= 2EK_{AC}(2\theta_A + \theta_C - 3\psi) \\ M_{AB} &= 2EK_{AB}(2\theta_A + \theta_B) + C_{AB} \\ M_{AE} &= 2EK_{AE}(2\theta_A + \theta_E - 3\psi) \\ M_{AD} &= 2EK_{AD}(2\theta_A + \theta_D) - C_{AD} \end{aligned} \right\} = 0$$

Cette équation peut encore s'écrire :

$$4E\theta_A(K_{AC} + K_{AB} + K_{AE} + K_{AD}) = 6EK_{AC}\psi + 6EK_{AE}\psi + C_{AD} - C_{AB} - 2E(K_{AC}\theta_C + K_{AB}\theta_B + K_{AE}\theta_E + K_{AD}\theta_D)$$

ou bien d'une façon plus générale :

$$E\theta_A = \frac{6\Sigma K_C E\psi + C_{AD} - C_{AB} - 2\Sigma K_i E\theta_i}{4\Sigma K}$$

$\Sigma K_C$  est la somme des rigidités  $\frac{I}{h}$  des poteaux de l'étage considéré,

$\psi$  est le rapport du déplacement relatif du niveau  $BAD$  à la hauteur  $h$ ,

$\Sigma K_i E \theta_i$  est la somme des produits  $KE\theta$  des autres extrémités de toutes les barres qui aboutissent au nœud étudié.

$\Sigma K$  est la somme des rigidités de toutes les barres qui aboutissent au nœud considéré.

Pour déterminer la rotation de chaque nœud, nous procéderons en deux phases :

1° Nous admettrons qu'il n'y a pas de déplacement des nœuds, de sorte que la formule se réduit à l'expression

$$E\theta_A = \frac{C_{AD} - C_{AB} - 2\Sigma K_i E \theta_i}{4\Sigma K} \quad (1)$$

En première approximation, nous considérons les barres comme parfaitement encastées, sur les extrémités opposées à  $A$ , de sorte que la formule permettant d'obtenir une première valeur approchée de  $\theta_A$  sera

$$E\theta_A = \frac{C_{AD} - C_{AB}}{4\Sigma K} \quad (2)$$

Les résultats ainsi obtenus serviront à utiliser la formule (1) en donnant à  $\theta_i$  la valeur ainsi trouvée par la formule approchée (2).

Après une deuxième utilisation de la formule (1), les valeurs obtenues pour les rotations sont, le plus souvent suffisantes pour calculer les moments dans les barres.

2° Nous vérifierons ensuite, grâce aux moments dans les poteaux, que la somme des efforts tranchants dans les poteaux de chaque étage est nulle.

a) Si cette somme est nulle, c'est qu'il n'y a pas déplacement des nœuds. Les valeurs obtenues précédemment pour les moments sont les valeurs définitives.

b) Si cette somme n'est pas nulle, c'est qu'il y a déplacement des nœuds. Il faut alors calculer « l'effort tranchant résultant » à chacun des niveaux en additionnant algébriquement les efforts horizontaux calculés immédiatement au-dessus et immédiatement au-dessous du niveau considéré.

Il suffira pour rétablir l'équilibre d'appliquer à chaque niveau une force horizontale directement opposée à l'effort tranchant résultant trouvé au niveau considéré.

L'étude du portique soumis à une série de forces horizontales est un problème que nous avons déjà traité.

L'application de la méthode proposée, nous permettra d'obtenir des rotations et des moments qui, superposés aux valeurs déjà trouvées, dans l'hypothèse où il n'y a pas déplacements des nœuds, nous donneront les résultats définitifs.

*Exemple* — Considérons un portique à deux niveaux, comprenant deux travées. Les raideurs respectives de chacune des barres sont notées sur la figure ci-dessous. Les traverses du portique sont également chargées à chacun des niveaux par une charge uniformément répartie de  $2\text{ T/m}\cdot\text{l}$ .

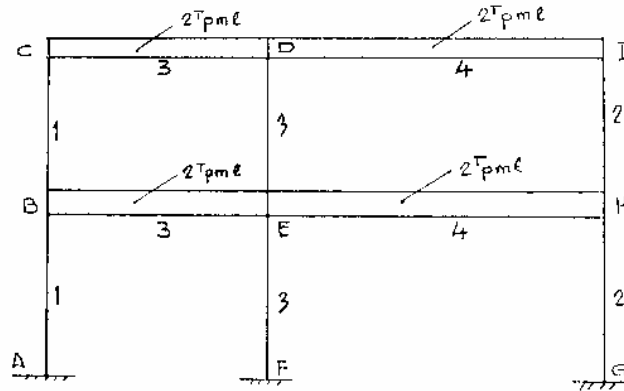


FIG. IV.69.

Les moments d'encastrement parfait sont pour  $CD = 4\text{ m}$  et  $DI = 6\text{ m}$  :

$$\frac{2\,000 \times 4^2}{12} = 2\,666\text{ kg}\cdot\text{m},$$

et

$$\frac{2\,000 \times 6^2}{12} = 6\,000\text{ kg}\cdot\text{m}.$$

En première approximation, nous supposons que seul le nœud considéré est susceptible de tourner et que les autres nœuds sont fixes.

On peut donc écrire :

$$E\theta_B = \frac{C_{BE}}{4\Sigma K} = \frac{2\,666}{4 \times 5} = 133,3,$$

$$E\theta_E = \frac{-C_{EB} + C_{EH}}{4 \times 13} = \frac{3\,334}{52} = 64,1,$$

$$E\theta_H = \frac{-C_{HE}}{4 \times 8} = \frac{-6\,000}{32} = -187,5,$$

$$E\theta_C = \frac{C_{CD}}{4 \times 4} = \frac{2\,666}{16} = 166,6,$$

$$E\theta_D = \frac{-C_{DC} + C_{DI}}{4 \times 10} = \frac{3\,334}{40} = 83,3,$$

$$E\theta_I = \frac{-C_{ID}}{4 \times 6} = \frac{-6\,000}{24} = -250.$$

Avec ces premiers résultats, nous pouvons appliquer la formule exacte, donnant la rotation d'un nœud dans l'hypothèse où, il n'y a pas déplacement des nœuds. Pour accélérer la convergence, nous partagerons les nœuds en deux groupes que nous désignerons par les indices 1 et 2.

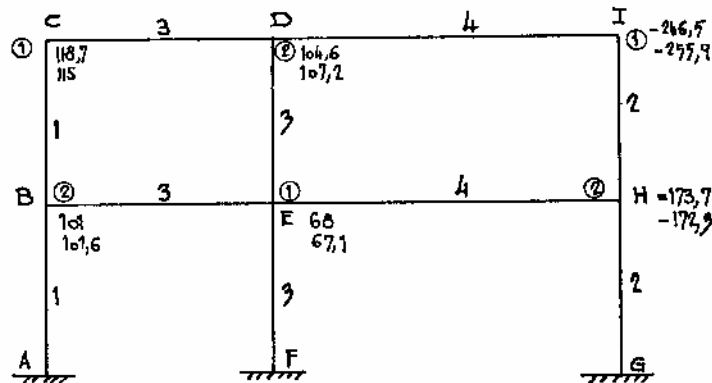


FIG. IV.70.

La première approximation nous donne :

$$E\theta_{E_1} = \frac{3\,334 - 2(3 \times 133,3 + 3 \times 83,3 - 4 \times 187,5)}{52} = 68,$$

$$E\theta_{C_1} = \frac{2\,666 - 2(1 \times 133,3 + 3 \times 83,3)}{16} = 118,7,$$

$$E\theta_{I_1} = \frac{-6\,000 - 2(4 \times 83,3 - 2 \times 187,5)}{24} = -246,5,$$

$$E\theta_{B_2} = \frac{2\,666 - 2(1 \times 118,7 + 3 \times 68)}{20} = 101,$$

$$E\theta_{H_2} = \frac{-6\,000 - 2(4 \times 68 - 2 \times 246,5)}{32} = -173,7,$$

$$E\theta_{D_2} = \frac{3\,334 - 2(3 \times 118,7 + 3 \times 68 - 4 \times 246,5)}{40} = 104,6.$$



Les résultats précédents nous permettent de faire la deuxième approximation :

$$E\theta_{C_1} = \frac{2\,666 - 2(1 \times 101 + 3 \times 104,6)}{16} = 115,$$

$$E\theta_{I_1} = \frac{-6\,000 - 2(4 \times 104,6 - 2 \times 173,7)}{24} = -255,9,$$

$$E\theta_{E_1} = \frac{3\,334 - 2(3 \times 101 + 3 \times 104,6 - 4 \times 173,7)}{52} = 67,1,$$

$$E\theta_{D_2} = \frac{3\,334 - 2(3 \times 115 + 3 \times 67,1 - 4 \times 255,9)}{40} = 107,2,$$

$$E\theta_{B_2} = \frac{2\,666 - 2(1 \times 115 + 3 \times 67,1)}{20} = 101,6,$$

$$E\theta_{H_2} = \frac{-6\,000 - 2(4 \times 67,1 - 2 \times 255,9)}{32} = -172,3.$$

Ces derniers résultats suffisent pour calculer la valeur des moments aux extrémités des différentes barres.

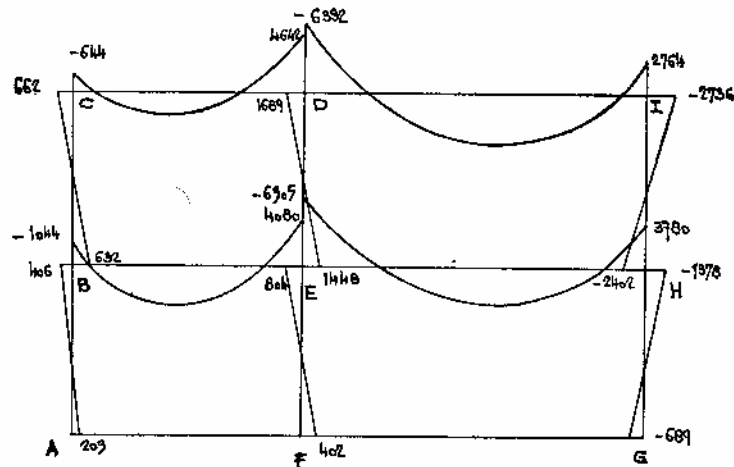


FIG. IV.71.

Les résultats obtenus dans cette phase du calcul, nous permettent de constater que les efforts tranchants, dans les poteaux, ne sont pas nuls.

En effet, le moment d'étage (produit de l'effort tranchant au sommet de l'étage considéré par la hauteur d'étage) est égal à la somme des moments dans les poteaux.

Cette somme correspond dans l'exemple traité :

a) au 2<sup>e</sup> niveau à :

$$(0,662 + 0,632) + (1\,689 + 1\,448) - (2\,736 + 2\,402) = -0,707 \text{ T.m.}$$

b) au 1<sup>er</sup> niveau à :

$$(0,406 + 0,203) + (402 + 804) - (1\,378 + 689) = -0,252 \text{ T.m.}$$

En appelant  $h$  la hauteur d'étage, le système résiduel peut être remplacé par le schéma ci-contre.

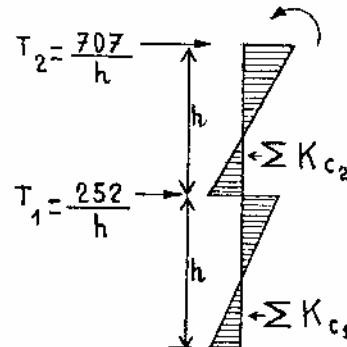


FIG. IV.72.

Pour supprimer les moments résiduels dans les poteaux, il suffit d'appliquer, à chaque niveau des efforts égaux et opposés aux efforts tranchants ainsi définis.

Nous avons ainsi à étudier un portique sollicité par le système de forces suivant :

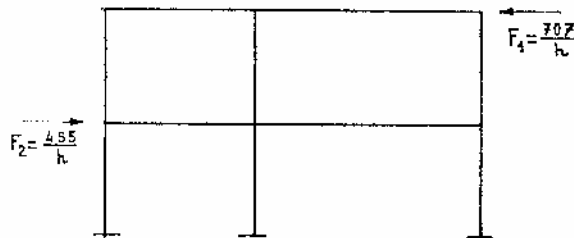


FIG. IV.73.

qu'on peut remplacer par :

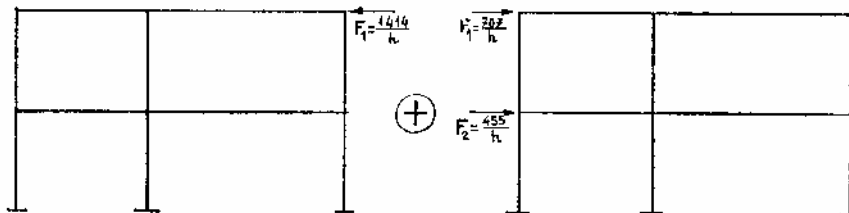


FIG. IV.74.

La superposition des résultats obtenus par l'étude de ce système nous permettra de corriger le diagramme des moments obtenus sous l'effet des seules charges verticales et d'avoir, par suite, à chaque niveau  $\Sigma H = 0$ .

## C. PORTIQUES ET REFENDS

### Portiques et refends disposés parallèlement

Dans le cas où une ossature est composée, à la fois de portiques et de murs de refends, disposés parallèlement, nous allons voir, comment opérer pour déterminer les efforts horizontaux, dans les refends, d'une part, et dans les portiques, d'autre part.

Une première solution consiste à attribuer une « inertie fictive » aux portiques. Pour déterminer cette inertie fictive, il suffira de calculer les déplacements de chaque portique au droit de chaque plancher, sous l'effet d'une série de forces horizontales égales à 1 tonne, par exemple, et de comparer ces déplacements aux flèches que prendrait un refend bien déterminé de l'ouvrage, sous l'effet du même système de forces horizontales (1 tonne à chaque niveau). Connaissant l'inertie du refend choisi, il est alors possible d'attribuer à chaque portique et pour chaque niveau, « une inertie fictive » puisque, dans l'hypothèse de la raideur infinie des planchers, nous devons obtenir la même flèche, à chaque niveau, pour les refends et pour les portiques.

En utilisant la méthode itérative que nous avons exposée précédemment, le calcul exact des déplacements du portique, sous l'effet de la série de forces égales à 1 tonne, pourra se faire sans difficulté.

Après avoir déterminé les « inerties fictives » de chaque portique, le problème se ramène à l'étude d'une série de refends parallèles dont l'inertie est connue.

Une deuxième solution, plus exacte, consiste à rechercher l'équilibre entre portiques et refends, en remplaçant les portiques par un système de forces, qui est fonction du déplacement imposé aux portiques par les refends. Cet équilibre peut être obtenu par itération.

Dans le cas d'un petit ouvrage ou d'un avant-projet pour lequel on désirerait avoir un ordre de grandeur des efforts horizontaux repris par les portiques, on pourra tout simplement :

1° Utiliser pour le calcul des déplacements du portique, les formules de première approximation proposées dans la méthode itérative, c'est-à-dire :

a) Calcul de la rotation d'étage.

— pour les niveaux supérieurs

$$E\theta_n = \frac{M_n + M_0}{24\Sigma K_{i,n}}, \quad (a)$$

— pour le niveau 1, si les colonnes sont encastrees en pied

$$E\theta_1 = \frac{M_1 + M_2}{24\Sigma K_{r,1} + 2\Sigma K_{c,1}}, \quad (b)$$

et si les colonnes sont articulées en pied

$$E\theta_1 = \frac{2M_1 + M_2}{24\Sigma K_{r,1}}. \quad (c)$$

b) Calcul du déplacement

$$E\psi_n = \frac{M_n}{12\Sigma K_{c,n}} + \frac{E\theta_m + E\theta_n}{2}. \quad (d)$$

2° Déterminer une « inertie fictive moyenne » du portique.

L'exemple, qui suit, est une application de ce calcul approché.

*Exemple :* Bâtiment de six niveaux de 3 m — (H = 18 m) à usage industriel, composé de deux murs de refends de 8 m (d'une épaisseur de 20 cm), de six poteaux et d'un mur pignon partiel de 6 m (épaisseur 20 cm).

Les six poteaux sont distants de 4,50 m dans le sens longitudinal et de 4 m dans l'autre sens. La surcharge sur le planchers est de 700 kg/m<sup>2</sup>. Le revêtement de sol sera pris égal à 80 kg/m<sup>2</sup> ; le vent à 100 kg/m<sup>2</sup> uniformément réparti.

Proposons-nous tout d'abord de déterminer les efforts dans les refends, en négligeant l'intervention des inerties de poteaux, puis, ensuite de calculer les sollicitations dans les poteaux, en supposant que les poutres de plancher sont parallèles aux refends, et constituent ainsi, avec ces poteaux, deux portiques semblables.

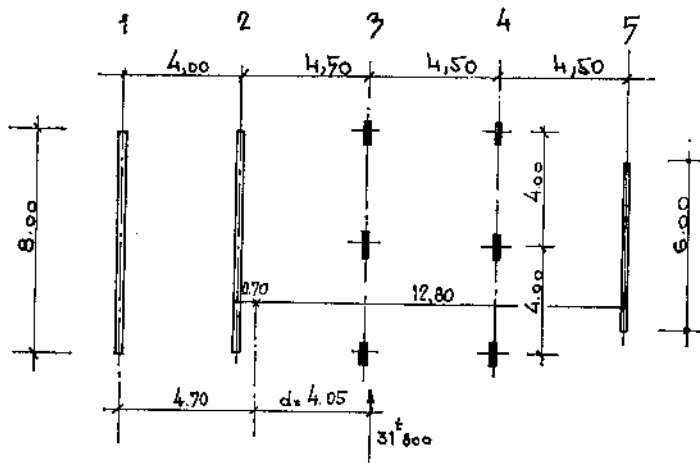


FIG. IV.75.

Largeur du bâtiment 17,70 m (hors tout)

Surface au vent  $S = 17,70 \times 18 = 318 \text{ m}^2$

Effort total dû au vent  $H = 318 \times 0,100 = 31,8 \text{ T}$ .

1° Sans tenir compte des deux portiques intermédiaires

Inerties des refends et pignon

$$I_1 = I_2 = \frac{0,2 \times 512}{12} = 8,53 \text{ m}^4,$$

$$I_3 = \frac{0,2 \times 216}{12} = 3,60 \text{ m}^4.$$

Position du centre de gravité des refends par rapport à l'axe du refend 1.

$$\frac{I_1 \bar{X}_1 + I_3 \bar{X}_3}{I_1 + I_3} = \frac{8,53 \times 4 + 3,60 \times 17,50}{20,66} = 4,70 \text{ m},$$

d'où  $d = 4,05$      $X_1 = -4,70$      $X_2 = -0,70$      $X_3 = +12,80$ .

a) Effet de la translation

$$F_1 = F_2 = \frac{31,8 \times 8,53}{20,66} = 13,15 \text{ T},$$

$$F_3 = \frac{31,8 \times 3,6}{20,66} = 5,55 \text{ T}.$$

b) Effet de la rotation

$$\Sigma I_i = 20,66 \quad I_1 X_1 = 8,53(-4,70) = -40$$

$$I_2 X_2 = 8,53(-0,70) = -6$$

$$I_3 X_3 = 3,6(+12,80) = 46$$

$$I_1 \bar{X}_1^2 = (-40)(-4,70) = 188$$

$$I_2 \bar{X}_2^2 = (-6)(-0,70) = 4,20$$

$$I_3 \bar{X}_3^2 = 46 \times 12,80 = 590$$

$$\Sigma I_i \bar{X}_i^2 = 782,20$$

$$F_1 = \frac{31,8 \times 4,05 (-40)}{782,20} = -6,55 \text{ T}$$

$$F_2 = \frac{31,8 \times 4,05 (-6)}{782,20} = -1,00 \text{ T}$$

$$F_3 = \frac{31,8 \times 4,05 \times 46}{782,20} = 7,55 \text{ T.}$$

L'effet des deux sollicitations donne :

$$F_1 = 13,15 - 6,55 = 6,60 \text{ T}$$

$$F_2 = 13,15 - 1,00 = 12,15 \text{ T}$$

$$F_3 = 5,55 + 7,55 = 13,10 \text{ T}$$

Ce calcul correspond à un calcul d'ensemble, c'est-à-dire à la décomposition de la résultante du vent, en trois efforts appliqués à chacun des refends sur le même plan horizontal que la résultante.

2° En tenant compte des deux portiques intermédiaires

Nous allons rechercher « l'inertie fictive » des portiques. Nous opérons en comparant les déplacements d'un portique (soumis, à chaque niveau, à une force égale à 1 T) aux flèches d'un refend, soumis au même système de forces, dont l'inertie est égal à 1 m<sup>4</sup>.

Le calcul des déplacements relatifs des portiques, sera effectué en utilisant les formules de première approximation.

Le calcul des flèches du refend sera obtenu par la méthode du « moment des aires ».

A. Portique

a) Traverses

$$I = 931\,290 \text{ cm}^4,$$

$$K = \frac{0,009\,31}{4} = 0,002\,33 = 2,33 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3,$$

soit pour deux traverses  $\Sigma K_{tr} = 4,66 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

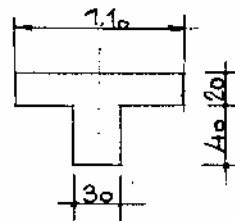


FIG. IV.76.

b) Poteaux

Charge + Surcharge au m <sup>2</sup> : Plancher (dalle de 20 cm)	500
Revêtement	80
1,2 P = Surcharge 700 × 1,2	840
Poutre répartie et poteau	100
	1 520 kg/m <sup>2</sup>

Charge + Surcharge sur poteau central

$$1\,520 \times 4 \times 4,5 = 27,300 \text{ T}$$

$$\text{Continuité } 15 \% = 4,100 \text{ T}$$

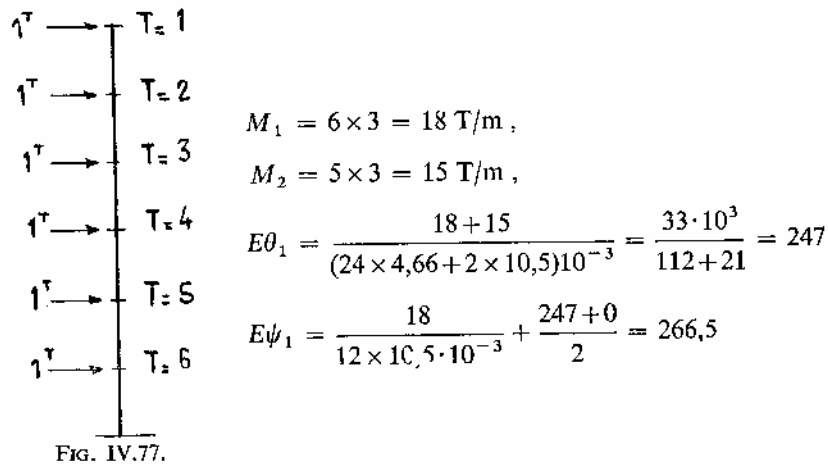
$$\frac{27,300 \text{ T} + 4,100 \text{ T}}{6} = 5,117 \text{ T}$$

Section :  $30 \times 75$ ,

Inertie :  $\frac{30 \times 75^3}{12} = 1\,055\,000 \text{ cm}^4$ ,

d'où  $\Sigma K_{c-n} = \frac{0,0105}{3} \cdot 3 = 10,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$  pour trois poteaux.

*Déplacement du niveau 1*



or  $\psi_1 = \frac{\Delta_1}{h}$  d'où  $\Delta_1 = \frac{266,5 \times 3}{E} = \frac{799,5}{E}$

*Déplacement du niveau 2*

$$E\theta_2 = \frac{5 \times 3 + 4 \times 3}{24 \times 4,66 \cdot 10^{-3}} = \frac{27 \cdot 10^3}{112} = 240$$

$$E\psi_2 = \frac{15}{12 \times 10,5 \cdot 10^{-3}} + \frac{247+240}{2} = 362,5$$

$$\Delta_2 = \frac{362,5 \times 3}{E} = \frac{1\,087,5}{E}$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \frac{1\,887}{E}$$

*Déplacement du niveau 3*

$$E\theta_3 = \frac{4 \times 3 + 3 \times 3}{112 \cdot 10^{-3}} = 188$$

$$E\psi_3 = \frac{12}{12 \times 10,5 \cdot 10^{-3}} + \frac{240+188}{2} = 309$$

$$\Delta_3 = \frac{309 \times 3}{E} = \frac{927}{E}$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \frac{2\,814}{E}$$

Déplacement du niveau 4

$$\Delta_4 = \frac{232,5 \times 3}{E} = \frac{697,5}{E} \quad \Sigma\Delta = \frac{3\,511,5}{E}$$

Déplacement du niveau 5

$$\Delta_5 = \frac{155 \times 3}{E} = \frac{465}{E} \quad \Sigma\Delta = \frac{3\,976,5}{E}$$

Déplacement du niveau 6

$$\Delta_6 = \frac{77,5 \times 3}{E} = \frac{232,5}{E} \quad \Sigma\Delta = \frac{4\,209}{E}$$

**B. Refend**

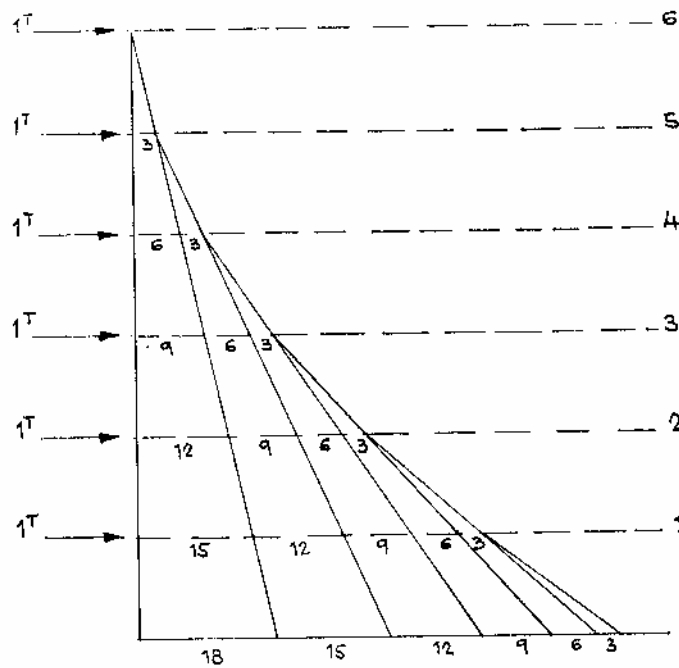


FIG. IV.78.



Flèche au niveau 1  $I = 1 \text{ m}^4$

$$f_1 = \frac{135 \times 1,5 + 18 \times 1,5 \times 2}{EI} = \frac{256}{E}$$

Flèche au niveau 2

$$f_2 = \frac{180 \times 3 + 90 \times 4 + 3 \times 1,5 \times 5}{EI} = \frac{922,5}{E}$$

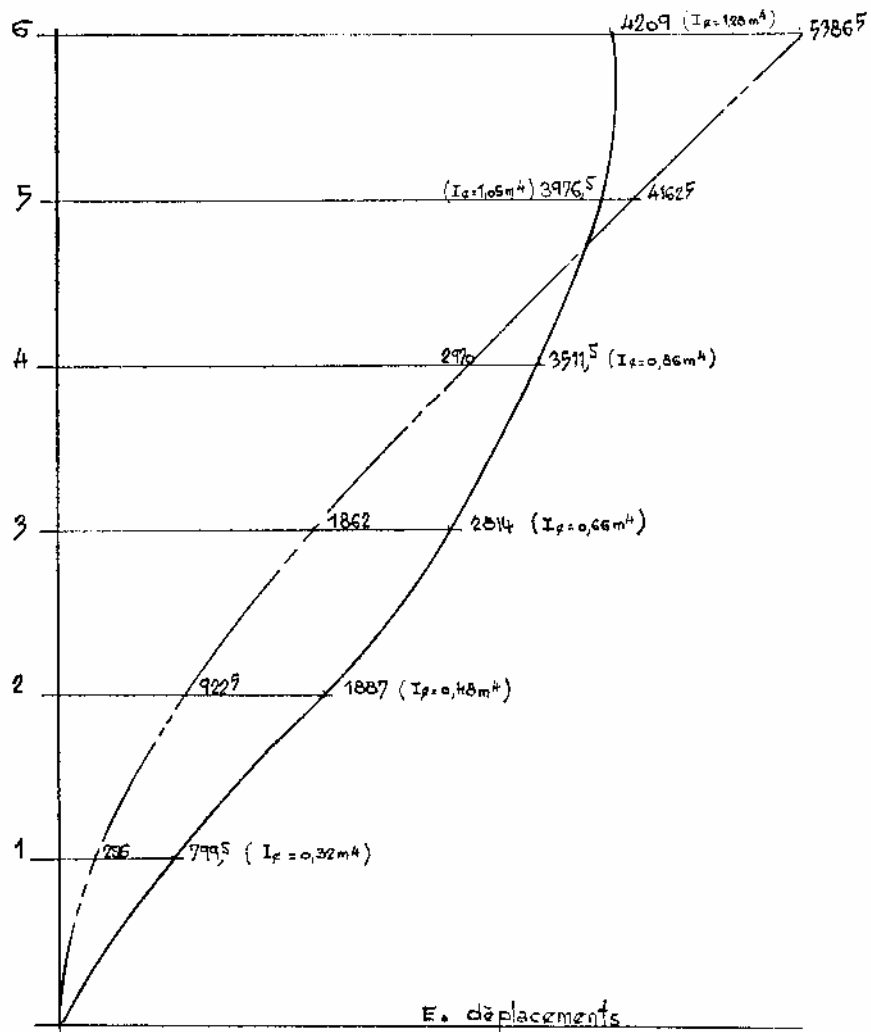


FIG. IV.79. --- Flèche du refend  $I = 1 \text{ m}^4$ .  
— Déplacement du portique.

Flèche au niveau 3

$$f_3 = \frac{162 \times 4,5 + 36 \times 4,5 \times 6 + 18 \times 7 + 3 \times 1,5 \times 8}{EI} = \frac{730 + 970 + 126 + 36}{EI} = \frac{1\ 862}{E}$$

Flèche au niveau 4

$$f_4 = \frac{648 + 1\ 728 + 364,5 + 180 + 49,5}{EI} = \frac{2\ 970}{E}$$

Flèche au niveau 5

$$f_5 = \frac{337,5 + 2\ 250 + 792 + 486 + 234 + 63}{EI} = \frac{4\ 162,5}{E}$$

Flèche au niveau 6

$$f_6 = \frac{1\ 944 + 4\ 162,5 + 1\ 008 + 607,5 + 288 + 76,5}{EI} = \frac{5\ 386,5}{E}$$

Dans le cas d'un avant-projet, il pourrait être suffisant d'estimer que l'inertie équivalente moyenne d'un portique est de l'ordre de 0,7 m<sup>4</sup> (pour avoir l'ordre de grandeur de l'effort repris par les portiques). Il suffit, en effet, de reprendre le problème en introduisant l'inertie des portiques, conformément à la disposition ci-dessous.

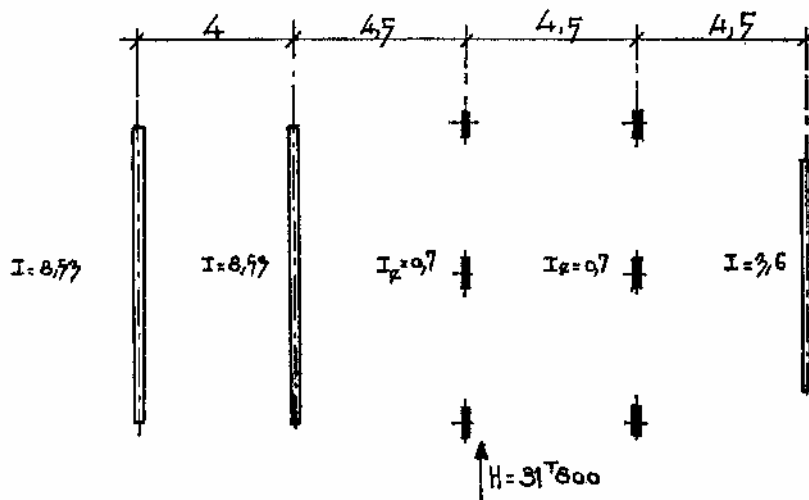


FIG. IV.80.

Il est certain que si le portique était étudié avec le résultat obtenu par ce calcul, les moments au 1<sup>er</sup> niveau seraient surestimés, tandis que les moments au 6<sup>e</sup> niveau seraient sous-estimés.

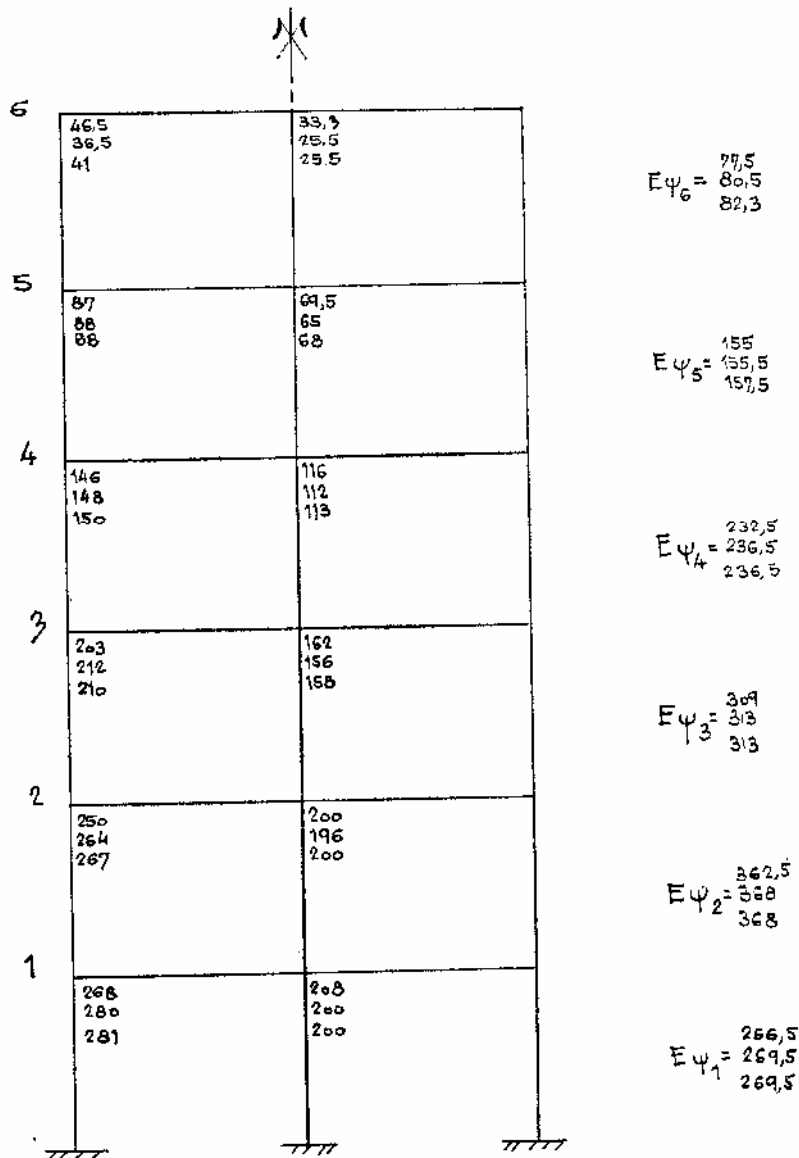


FIG. IV.81. — Rotations et déplacements

Un calcul correct exigerait, tout d'abord, d'étudier les déplacements des portiques, sans se limiter au déplacement de première approximation, puis de poursuivre l'étude en tenant compte des « efforts développés » par les portiques, niveau par niveau, en écrivant, qu'il y a compatibilité des déplacements entre portiques et refends, et de déterminer ainsi les nouvelles flèches, prises par les refends, en tenant compte de ces efforts. A partir des déplacements ainsi obtenus, on déduit les efforts réels, aussi bien dans les refends que dans les portiques.

Dans l'exemple traité précédemment, commençons par étudier les déplacements de chaque niveau et les rotations des nœuds de l'un des deux portiques, sous l'effet d'une force horizontale de 1 tonne appliquée à chaque niveau.

La méthode exposée précédemment nous permet d'obtenir les résultats consignés sur la figure IV.81 pour les rotations et les déplacements et figure IV.82 pour les moments fléchissants.

Le tableau comparatif, ci-après, nous donne les déplacements de chaque niveau sous l'effet de la force horizontale de 1 tonne appliquée à chaque étage :

Dans le refend d'inertie $I = 1 \text{ m}^4$		Dans le portique		
niveau 1	$\frac{256}{E}$	$E \psi_1 = 269,5$	$\Delta_1 = \frac{269,5 \times 3}{E} = \frac{808,5}{E}$	
niveau 2	$\frac{922,5}{E}$	$E \psi_2 = 368$	$\Delta_2 = \frac{368 \times 3}{E} = \frac{1104}{E}$	$\Sigma \Delta = \frac{1912,5}{E}$
niveau 3	$\frac{1862}{E}$	$E \psi_3 = 313$	$\Delta_3 = \frac{313 \times 3}{E} = \frac{939}{E}$	$\Sigma \Delta = \frac{2851,5}{E}$
niveau 4	$\frac{2970}{E}$	$E \psi_4 = 236,5$	$\Delta_4 = \frac{236,5 \times 3}{E} = \frac{709,5}{E}$	$\Sigma \Delta = \frac{3561}{E}$
niveau 5	$\frac{4162,5}{E}$	$E \psi_5 = 157,5$	$\Delta_5 = \frac{157,5 \times 3}{E} = \frac{472,5}{E}$	$\Sigma \Delta = \frac{4033,5}{E}$
niveau 6	$\frac{5386,5}{E}$	$E \psi_6 = 82,3$	$\Delta_6 = \frac{82,3 \times 3}{E} = \frac{246,9}{E}$	$\Sigma \Delta = \frac{4280,4}{E}$

En faisant abstraction des portiques, nous avons vu, que l'effet total du vent produisait (après translation et rotation autour du barycentre des refends) des efforts :

$$F_1 = 6,60 \text{ T} \quad F_2 = 12,15 \text{ T} \quad F_3 = 13,10 \text{ T}$$

avec  $H = 31,8 \text{ T}$

Pour un effort, dû au vent, de 5 300 kg par niveau, les efforts sont respectivement :

$$F_1 = 1,100 \text{ T} \quad F_2 = 2,025 \text{ T} \quad F_3 = 2,180 \text{ T}$$

Le centre de rotation se situe alors à 4,70 m du refend 1.

Il faut remarquer, que compte tenu de la grande rigidité des planchers, jouant le rôle d'entretroises dans le système, les déplacements des portiques sont limités à la droite *AOB* (fig. IV.83), en restant dans l'hypothèse où seuls les refends assurent le contreventement de l'ouvrage.

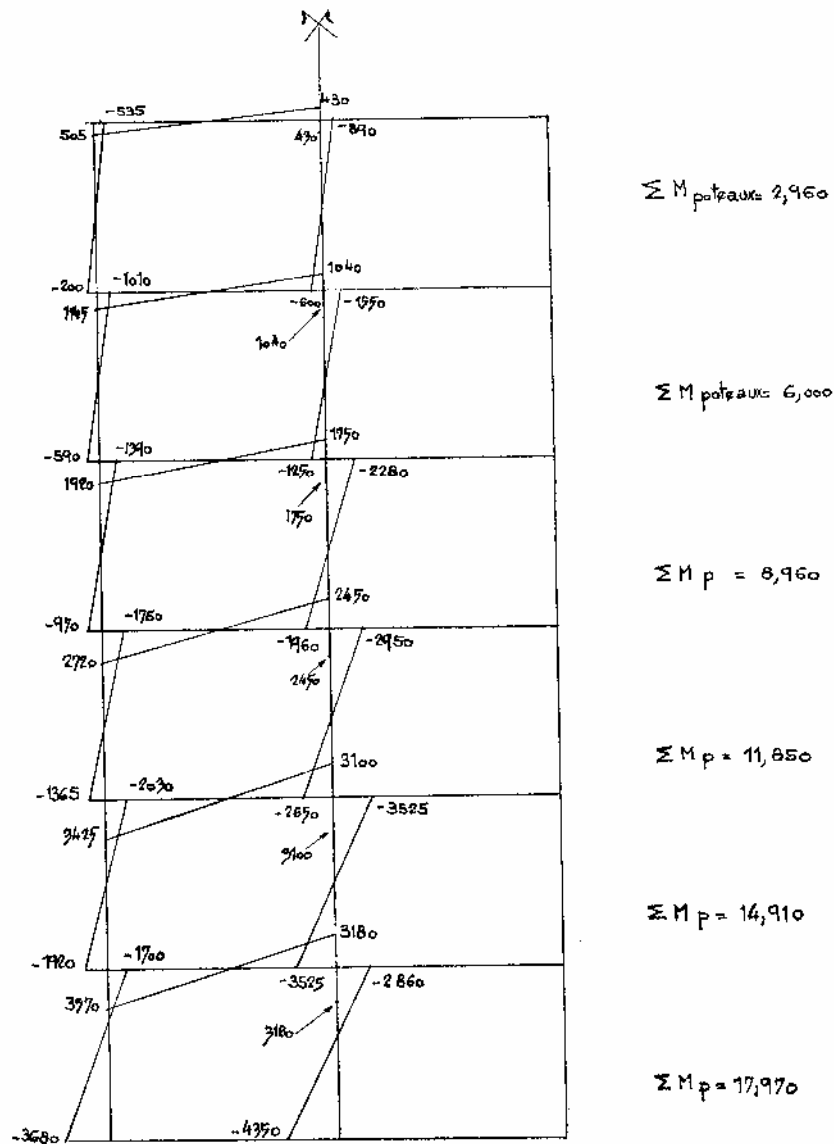


FIG. IV.82. — Diagramme des moments fléchissants.

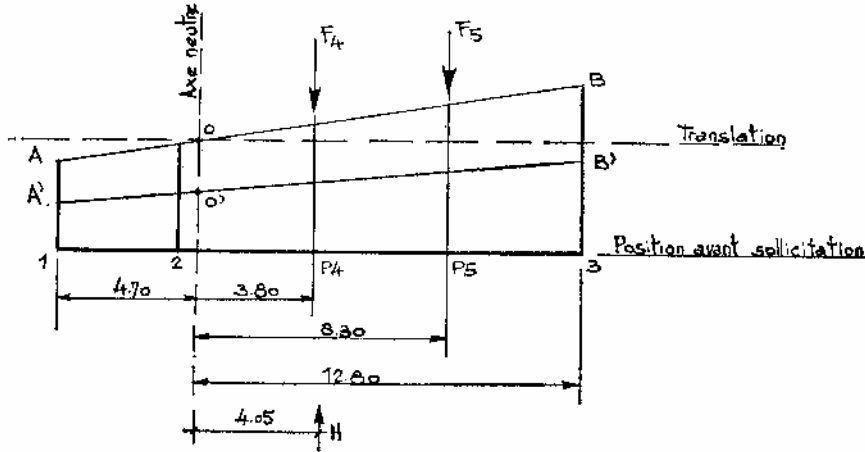


FIG. IV.83.

Les déplacements imposés à chaque portique, vont faire naître deux réactions  $F_4$  et  $F_5$  qui vont modifier, à chaque niveau, la position de la ligne  $AOB$  et la porter en  $A'O'B'$ .

Définissons, en premier lieu, la flèche du refend 3, dont l'inertie est de  $3,6 \text{ m}^4$ , soumis à chaque étage à une force de  $2,180 \text{ T}$  (voir résultats pour refends :  $I = 1 \text{ m}^4$  et  $F = 1 \text{ T}$ ).

En remarquant que le point  $O$  s'est déplacé sur l'axe neutre de la figure (axe parallèle aux trois refends, passant par le barycentre), sous l'effet de la translation uniquement, d'une valeur

$\frac{5,300 \times 256}{E \times 20,66} = \frac{66}{E}$	au 1 <sup>er</sup> niveau
$\frac{5,300 \times 922,5}{E \times 20,66} = \frac{237}{E}$	au 2 <sup>e</sup> niveau
$\frac{480}{E}$	au 3 <sup>e</sup> niveau
$\frac{765}{E}$	au 4 <sup>e</sup> niveau
$\frac{1\,070}{E}$	au 5 <sup>e</sup> niveau
$\frac{1\,380}{E}$	au 6 <sup>e</sup> niveau

il nous est possible de calculer les déplacements que subiraient  $P_4$  et  $P_5$ , si la droite  $AOB$  définissait la flèche définitive.

	en B	en O	au droit de P <sub>5</sub>	au droit de P <sub>4</sub>
niveau 1	$\frac{156}{E}$	$\frac{66}{E}$	$\frac{124}{E}$	$\frac{93}{E}$
niveau 2	$\frac{559}{E}$	$\frac{237}{E}$	$\frac{446}{E}$	$\frac{332}{E}$
niveau 3	$\frac{1\ 125}{E}$	$\frac{480}{E}$	$\frac{898}{E}$	$\frac{671}{E}$
niveau 4	$\frac{1\ 800}{E}$	$\frac{765}{E}$	$\frac{1\ 435}{E}$	$\frac{1\ 071}{E}$
niveau 5	$\frac{2\ 520}{E}$	$\frac{1\ 070}{E}$	$\frac{2\ 010}{E}$	$\frac{1\ 500}{E}$
niveau 6	$\frac{3\ 250}{E}$	$\frac{1\ 380}{E}$	$\frac{2\ 590}{E}$	$\frac{1\ 935}{E}$

Aux déplacements imposés à P<sub>4</sub> et P<sub>5</sub> correspondent des « réactions » que nous définissons à partir des résultats obtenus pour le portique soumis à une série de forces de 1 tonne, appliquée à chaque niveau. En effet, les déplacements relatifs, dans les portiques, sont proportionnels aux efforts tranchants.

Si R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>, R<sub>3</sub>, R<sub>4</sub>, R<sub>5</sub>, R<sub>6</sub> sont les efforts correspondants aux déplacements imposés au portique P<sub>5</sub>, on peut calculer ces efforts en écrivant :

$$\text{au 1}^{\text{er}} \text{ niveau : } \frac{808,5}{6E} (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6) = \frac{124}{E},$$

$$\text{au 2}^{\text{e}} \text{ niveau : } \frac{1\ 104}{5E} (R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6) + \frac{124}{E} = \frac{446}{E},$$

$$\text{au 3}^{\text{e}} \text{ niveau : } \frac{939}{4E} (R_3 + R_4 + R_5 + R_6) + \frac{446}{E} = \frac{898}{E},$$

$$\text{au 4}^{\text{e}} \text{ niveau : } \frac{709,5}{3E} (R_4 + R_5 + R_6) + \frac{898}{E} = \frac{1\ 435}{E}$$

$$\text{au 5}^{\text{e}} \text{ niveau : } \frac{472,5}{2E} (R_5 + R_6) + \frac{1\ 435}{E} = \frac{2\ 010}{E},$$

$$\text{au 6}^{\text{e}} \text{ niveau : } \frac{246,9}{E} R_6 + \frac{2\ 010}{E} = \frac{2\ 590}{E},$$

d'où nous tirons :

$$R_6 = 2,350 \text{ T} \quad R_3 = -0,335 \text{ T}$$

$$R_5 = 0,075 \text{ T} \quad R_2 = -0,465 \text{ T}$$

$$R_4 = -0,165 \text{ T} \quad R_1 = -0,540 \text{ T}$$

Les caractéristiques du portique  $P_4$  étant semblables à celles du portique  $P_5$ , on pourra déduire par similitude les forces agissant, à chaque niveau, sur  $P_4$ .

$$\begin{aligned} R'_6 &= 1,760 \text{ T} & R'_3 &= -0,250 \text{ T} \\ R'_5 &= 0,056 \text{ T} & R'_2 &= -0,350 \text{ T} \\ R'_4 &= -0,124 \text{ T} & R'_1 &= -0,405 \text{ T} \end{aligned}$$

À titre d'exercice, nous allons vérifier les ordres de grandeur des déplacements donnés par les forces agissant sur  $P_5$  (formules de 1<sup>re</sup> approximation).

$$\begin{aligned} E\theta_1 &= \frac{(920 + 1\,460)3}{112 + 21} = 53, \\ E\theta_2 &= \frac{(1\,925 + 1\,460)3}{112} = 91, \\ E\theta_3 &= \frac{(2\,260 + 1\,925)3}{112} = 112, \\ E\theta_4 &= \frac{(2\,425 + 2\,260)3}{112} = 125, \\ E\theta_5 &= \frac{(2\,425 + 2\,350)3}{112} = 128, \\ E\theta_6 &= \frac{2\,350 \times 3}{112} = 63, \end{aligned}$$

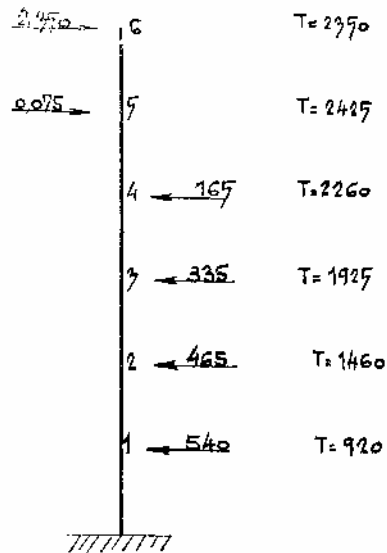


FIG. IV.34.

ce qui permet de déterminer :

$$\begin{aligned} E\psi_1 &= \frac{920 \times 3}{126} + \frac{53}{2} = 48,3, \\ E\psi_2 &= \frac{1\,460 \times 3}{126} + \frac{53 + 91}{2} = 34,5 + 72 = 106,5, \\ E\psi_3 &= \frac{1\,925 \times 3}{126} + \frac{91 + 112}{2} = 46 + 101,5 = 147,5, \\ E\psi_4 &= \frac{2\,260 \times 3}{126} + \frac{112 + 125}{2} = 54 + 118,5 = 172,5, \end{aligned}$$



$$E\psi_5 = \frac{2\,425 \times 3}{126} + \frac{125 + 128}{2} = 58 + 126,5 = 184,5,$$

$$E\psi_6 = \frac{2\,350 \times 3}{126} + \frac{128 + 63}{2} = 56 + 95,5 = 151,5.$$

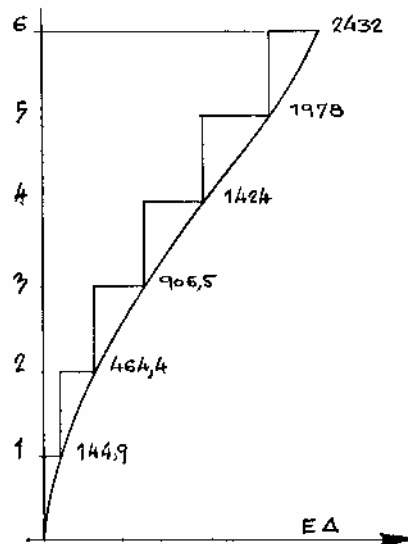


FIG. IV.85.

Pour obtenir les efforts à partir des déplacements, utiliser éventuellement la méthode plus exacte proposée dans l'exercice suivant (portique et refend dans le même plan de contreventement).

Il est évident que de telles forces apporteraient, à tous les niveaux, des corrections dans les flèches calculées, à partir du système composé de trois refends sollicités par une force extérieure de 5,300 T.

Calculons les forces qui résultent, dans le refend 3, après application du système de forces, dues aux portiques :

$$\text{Niveau 6} \quad F = 2,350 + 1,760 = 4,110 \text{ T}$$

$$M = 2,350 \times 8,30 + 1,760 \times 3,80 = 26,200 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$F'_3 = \frac{4,110 \times 3,6}{20,66} + \frac{26,200 \times 46}{782,2} = 0,715 + 1,540 = 2,255 \text{ T}$$

$$\text{Effort résiduel} \quad 2,180 - 2,255 = -0,075 \text{ T}$$

$$\text{Niveau 5} \quad F = 0,075 + 0,056 = 0,131 \text{ T}$$

$$M = 0,075 \times 8,3 + 0,056 \times 3,80 = 0,620 + 0,213 = 0,833 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$F'_3 = \frac{0,131 \times 3,6}{20,66} + \frac{0,833 \times 46}{782,2} = 0,023 + 0,049 = 0,072$$

$$\text{Effort résiduel} \quad 2,180 - 0,072 = 2,108 \text{ T}$$

$$\begin{aligned} \text{Niveau 4} \quad F &= (-0,165) + (-0,124) = -0,289 \text{ T} \\ M &= (-0,165)(8,30) + (-0,124)(3,80) = -1,840 \text{ T}\cdot\text{m} \\ F'_3 &= - \left[ \frac{0,289 \times 3,6}{20,66} + \frac{1,840 \times 46}{782,2} \right] = -0,050 - 0,108 = -0,158 \text{ T} \\ \text{Effort résiduel} \quad &2,180 - (-0,158) = 2,338 \text{ T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Niveau 3} \quad F &= (-0,335) + (-0,250) = -0,585 \text{ T} \\ M &= (-0,335)(8,30) + (-0,250)(3,80) = -3,725 \text{ T}\cdot\text{m} \\ F'_3 &= - \left[ \frac{0,585 \times 3,6}{20,66} + \frac{3,725 \times 46}{782,2} \right] = -0,102 - 0,219 = -0,321 \text{ T} \\ \text{Effort résiduel} \quad &2,180 - (-0,321) = 2,501 \text{ T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Niveau 2} \quad F &= (-0,465) + (-0,350) = -0,815 \text{ T} \\ M &= (-0,465)(8,30) + (-0,350)(3,80) = -5,180 \text{ T}\cdot\text{m} \\ F'_3 &= - \left[ \frac{0,815 \times 3,6}{20,66} + \frac{5,180 \times 46}{782,2} \right] = -0,142 - 0,305 = -0,447 \text{ T} \\ \text{Effort résiduel} \quad &2,180 - (-0,447) = 2,627 \text{ T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Niveau 1} \quad F &= (-0,540) + (-0,405) = -0,945 \text{ T} \\ M &= (-0,540)(8,30) + (-0,405)(3,80) = -6,040 \text{ T}\cdot\text{m} \\ F'_3 &= - \left[ \frac{0,945 \times 3,6}{20,66} + \frac{6,040 \times 46}{782,2} \right] = -0,164 - 0,355 = -0,519 \text{ T} \\ \text{Effort résiduel} \quad &2,180 - (-0,519) = 2,699 \text{ T} \end{aligned}$$

Le calcul de la flèche d'un refend de six niveaux, sollicité par des forces quelconques appliquées au droit de chaque plancher, est facilement effectué par la méthode du « moment des aires ».

Si  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$  sont ces forces, on obtient :

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{76,5R_6 + 63R_5 + 49,5R_4 + 36R_3 + 22,5R_2 + 9R_1}{EI}, \\ f_2 &= \frac{288R_6 + 234R_5 + 180R_4 + 126R_3 + 72R_2 + 22,5R_1}{EI}, \\ f_3 &= \frac{607,5R_6 + 486R_5 + 364,5R_4 + 243R_3 + 126R_2 + 36R_1}{EI}, \end{aligned}$$

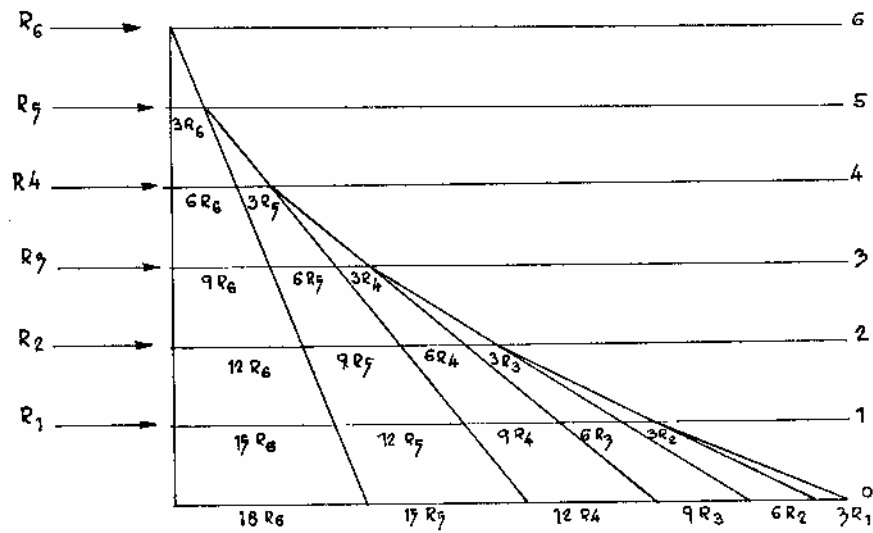


FIG. IV.86.

$$f_4 = \frac{1008R_6 + 792R_5 + 576R_4 + 364,5R_3 + 180R_2 + 49,5R_1}{EI}$$

$$f_5 = \frac{1462,5R_6 + 1125R_5 + 792R_4 + 486R_3 + 234R_2 + 63R_1}{EI}$$

$$f_6 = \frac{1944R_6 + 1462,5R_5 + 1008R_4 + 607,5R_3 + 288R_2 + 76,5R_1}{EI}$$

Les efforts résiduels dans le refend 3, vont nous donner la flèche que prendrait ce refend à chaque niveau, pour :

$$R_1 = 2,699 \text{ T} \quad R_4 = 2,338 \text{ T}$$

$$R_2 = 2,627 \text{ T} \quad R_5 = 2,108 \text{ T}$$

$$R_3 = 2,501 \text{ T} \quad R_6 = -0,075 \text{ T}$$

d'où

$$f_1 = \frac{116}{E} \quad f_4 = \frac{1240}{E}$$

$$f_2 = \frac{405}{E} \quad f_5 = \frac{1700}{E}$$

$$f_3 = \frac{800}{E} \quad f_6 = \frac{2150}{E}$$

En ce qui concerne le point  $O$ , nous devons remarquer que, sous l'effet des « réactions » des portiques  $P_4$  et  $P_5$ , sa position a varié sur l'axe neutre, et qu'il n'a subi qu'une translation.

La résultante des efforts extérieurs est :

au niveau 6 :  $5,300 - 4,110 = 1,190 \text{ T}$

au niveau 5 :  $5,300 - 0,131 = 5,169 \text{ T}$

au niveau 4 :  $5,300 + 0,289 = 5,589 \text{ T}$

au niveau 3 :  $5,300 + 0,585 = 5,885 \text{ T}$

au niveau 2 :  $5,300 + 0,815 = 6,115 \text{ T}$

au niveau 1 :  $5,300 + 0,945 = 6,245 \text{ T}$

d'où le tableau des flèches :

	en $B$	en $O$	au droit de $P_5$	au droit de $P_4$
niveau 1	$\frac{116}{E}$	$\frac{53}{E}$	$\frac{94}{E}$	$\frac{71,6}{E}$
niveau 2	$\frac{405}{E}$	$\frac{187}{E}$	$\frac{329}{E}$	$\frac{251,5}{E}$
niveau 3	$\frac{800}{E}$	$\frac{372}{E}$	$\frac{650}{E}$	$\frac{499}{E}$
niveau 4	$\frac{1\ 240}{E}$	$\frac{585}{E}$	$\frac{1\ 010}{E}$	$\frac{779}{E}$
niveau 5	$\frac{1\ 700}{E}$	$\frac{810}{E}$	$\frac{1\ 386}{E}$	$\frac{1\ 074}{E}$
niveau 6	$\frac{2\ 150}{E}$	$\frac{1\ 030}{E}$	$\frac{1\ 760}{E}$	$\frac{1\ 360}{E}$

La flèche exacte de chaque niveau se situe entre les deux résultats obtenus, d'une part en faisant abstraction des deux portiques, et d'autre part en tenant compte des « forces de rappel » provoqués par le déplacement de ces portiques (en supposant que les trois refends aient pu effectuer le déplacement correspondant à l'hypothèse suivant laquelle les deux portiques ne présentent aucune résistance).

Le résultat exact peut être obtenu par approximations successives.

Nous adopterons en première approximation, la flèche moyenne entre les deux résultats obtenus, soit au droit de  $P_5$

$$\begin{array}{ll} \text{niveau 1 :} & \frac{109}{E} & \text{niveau 4 :} & \frac{1\,222,5}{E} \\ \text{niveau 2 :} & \frac{387,5}{E} & \text{niveau 5 :} & \frac{1\,698}{E} \\ \text{niveau 3 :} & \frac{774}{E} & \text{niveau 6 :} & \frac{2\,175}{E} \end{array}$$

Ecrivons à nouveau :

$$\begin{array}{l} \text{au 1}^{\text{er}} \text{ niveau :} \quad \frac{808,5}{6E} (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6) = \frac{109}{E}, \\ \text{au 2}^{\text{e}} \text{ niveau :} \quad \frac{1\,104}{5E} (R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6) + \frac{109}{E} = \frac{387,5}{E}, \\ \text{au 3}^{\text{e}} \text{ niveau :} \quad \frac{939}{4E} (R_3 + R_4 + R_5 + R_6) + \frac{387,5}{E} = \frac{774}{E}, \\ \text{au 4}^{\text{e}} \text{ niveau :} \quad \frac{709,5}{3E} (R_4 + R_5 + R_6) + \frac{774}{E} = \frac{1\,222,5}{E}, \\ \text{au 5}^{\text{e}} \text{ niveau :} \quad \frac{472,5}{2E} (R_5 + R_6) + \frac{1\,222,5}{E} = \frac{1\,698}{E}, \\ \text{au 6}^{\text{e}} \text{ niveau :} \quad \frac{246,9}{E} R_6 + \frac{1\,698}{E} = \frac{2\,175}{E}, \end{array}$$

d'où nous tirons :

$$\begin{array}{ll} R_6 = 1,930 & R_3 = -0,240 \\ R_5 = 0,080 & R_2 = -0,390 \\ R_4 = -0,120 & R_1 = -0,450 \end{array}$$

et par suite au droit de  $P_4$

$$\begin{array}{ll} R'_6 = 1,470 & R'_3 = -0,182 \\ R'_5 = 0,061 & R'_2 = -0,297 \\ R'_4 = -0,092 & R'_1 = -0,340 \end{array}$$

Il faut vérifier que les efforts introduits dans le refend 3 par le système de forces :

- a) vent extérieur,
- b) force au droit de  $P_4$ ,
- c) force au droit de  $P_5$

crée une flèche compatible avec la flèche moyenne choisie.

Ce système de forces a pour valeur :

au 6<sup>e</sup> niveau

$$5,300 - 1,930 - 1,470 = 1,900 \text{ T}$$

$$M = 5,300 \times 4,05 - 1,930 \times 8,30 - 1,470 \times 3,80 = -0,100 \text{ T}\cdot\text{m}$$

$$F'_3 = \frac{1,900 \times 3,6}{20,66} - \frac{0,100 \times 46}{782,2} = 0,330 - 0,006 = 0,324 \text{ T}$$

au 5<sup>e</sup> niveau

$$5,300 - 0,080 - 0,061 = 5,159 \text{ T},$$

$$M = 5,300 \times 4,05 - 0,080 \times 8,30 - 0,061 \times 3,80 = 20,610 \text{ T}\cdot\text{m}$$

$$F'_3 = \frac{5,159 \times 3,6}{20,66} + \frac{20,610 \times 46}{782,2} = 0,900 + 1,210 = 2,110 \text{ T}$$

au 4<sup>e</sup> niveau

$$F'_3 = \frac{5,512 \times 3,6}{20,66} + \frac{22,850 \times 46}{782,2} = 0,965 + 1,340 = 2,305 \text{ T}$$

au 3<sup>e</sup> niveau

$$F'_3 = \frac{5,722 \times 3,6}{20,66} + \frac{24,190 \times 46}{782,2} = 1,000 + 1,420 = 2,420 \text{ T}$$

au 2<sup>e</sup> niveau

$$F'_3 = \frac{5,987 \times 3,6}{20,66} + \frac{25,440 \times 46}{782,2} = 1,040 + 1,490 = 2,530 \text{ T}$$

au 1<sup>er</sup> niveau

$$F'_3 = \frac{6,090 \times 3,6}{20,66} + \frac{26,550 \times 46}{782,2} = 1,060 + 1,560 = 2,620 \text{ T}$$

Calculons la flèche du refend 3 sous l'effet des forces  $F'_3$  ainsi obtenues, et comparons la à la flèche moyenne des deux résultats précédents.

Nous obtenons :

$$f_1 = \frac{122}{E} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{156 + 116}{2E} = \frac{136}{E},$$

$$f_2 = \frac{430}{E} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{559 + 405}{2E} = \frac{482}{E},$$

$$f_3 = \frac{855}{E} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{1\,125 + 800}{2E} = \frac{962,5}{E},$$

$$f_4 = \frac{1\,340}{E} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{1\,800 + 1\,240}{2E} = \frac{1\,520}{E},$$

$$f_5 = \frac{1\,850}{E} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{2\,520 + 1\,700}{2E} = \frac{2\,110}{E},$$

$$f_6 = \frac{2\,350}{E} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{3\,250 + 2\,150}{2E} = \frac{2\,700}{E}.$$

Au cours des déplacements des planchers, la position du point  $O$  a également varié sur l'axe neutre.

Calculons sa position à chaque niveau sous l'effet des efforts résultants :

$$f_1 = \frac{55}{E} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{53 + 66}{2E} = \frac{59,5}{E},$$

$$f_2 = \frac{196}{E} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{187 + 237}{2E} = \frac{212}{E},$$

$$f_3 = \frac{390}{E} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{372 + 480}{2E} = \frac{426}{E},$$

$$f_4 = \frac{615}{E} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{585 + 765}{2E} = \frac{675}{E},$$

$$f_5 = \frac{850}{E} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{810 + 1\,070}{2E} = \frac{940}{E},$$

$$f_6 = \frac{1\,085}{E} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{1\,030 + 1\,380}{2E} = \frac{1\,205}{E}.$$

La deuxième approximation consistera :

a) A adopter une flèche moyenne pour le refend 3, qui serait :

$$f_1 = \frac{122+136}{2E} = \frac{129}{E} \qquad f_4 = \frac{1\,340+1\,520}{2E} = \frac{1\,430}{E}$$

$$f_2 = \frac{430+482}{2E} = \frac{456}{E} \qquad f_5 = \frac{1\,850+2\,110}{2E} = \frac{1\,980}{E}$$

$$f_3 = \frac{855+962,5}{2E} = \frac{909}{E} \qquad f_6 = \frac{2\,350+2\,700}{2E} = \frac{2\,525}{E}$$

b) A adopter une flèche moyenne pour la position du point  $O$ , qui serait :

$$f_1 = \frac{55+59,5}{2E} = \frac{57,25}{E} \qquad f_4 = \frac{615+675}{2E} = \frac{645}{E}$$

$$f_2 = \frac{196+212}{2E} = \frac{204}{E} \qquad f_5 = \frac{850+940}{2E} = \frac{895}{E}$$

$$f_3 = \frac{390+426}{2E} = \frac{408}{E} \qquad f_6 = \frac{1\,085+1\,205}{2E} = \frac{1\,145}{E}$$

c) A en déduire les déplacements correspondants au droit de  $P_4$  et  $P_5$  et par suite les efforts au droit des portiques.

d) A déterminer de nouveaux efforts sur le refend 3, et à vérifier si ces efforts provoquent des flèches voisines ou égales aux flèches choisies en deuxième approximation.

Une troisième approximation, puis peut-être une quatrième devront être faites avant d'obtenir l'équilibre.

En supposant que la deuxième approximation soit satisfaisante, nous allons tracer la déformation du refend 3 (fig. IV.87) :

— Sans tenir compte de la raideur des deux portiques

— En tenant compte de la raideur des deux portiques

a) en leur attribuant une « inertie fictive » ou équivalente,

b) en effectuant un calcul plus exact, comme exposé ci-dessus.

Connaissant le déplacement du portique à chaque niveau et les forces qui le sollicitent, à chaque niveau également, on pourra obtenir les rota-



tions des nœuds, en utilisant la méthode itérative exposée précédemment, avec évidemment, le net avantage d'avoir la valeur  $\frac{\Delta}{h}$  à chaque étage.

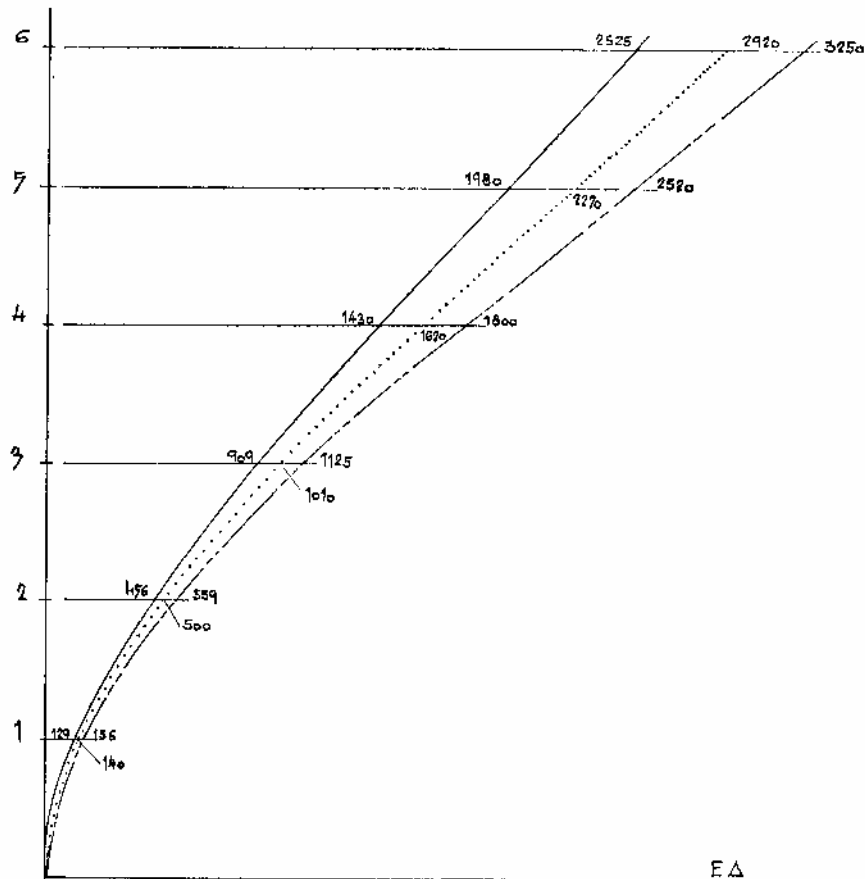


FIG. IV.87. — flèche du refend 3

- sans tenir compte des deux portiques
- ..... en attribuant une inertie équivalente à chaque portique
- en effectuant un calcul qui tient compte des déplacements des deux portiques à chaque niveau.

### Portique et Refend dans le même plan de contreventement

Ce cas correspond à celui représenté sur la figure IV.88, par exemple.

Le calcul d'un tel système peut être effectué en procédant en deux phases :

a) Dans une première phase, on suppose que tout l'effort est repris par le refend. La déformation du mur, sous une telle sollicitation, impose alors au portique un déplacement semblable à celui du refend.

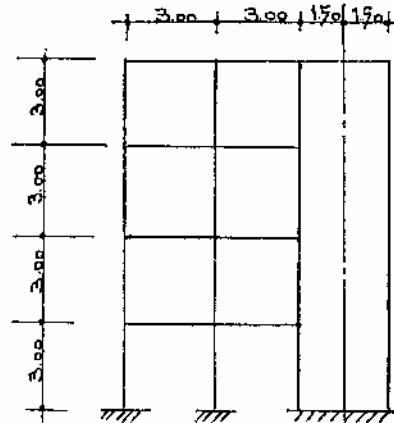


FIG. IV.88.

b) Dans la seconde phase du calcul, on détermine les « réactions » du portique dans l'hypothèse où il est soumis aux mêmes déplacements que le refend. Sous l'effet de ces « réactions », le refend prend une nouvelle position.

Nous avons ainsi deux cas limites entre lesquels se situe la flèche exacte du système portique-refend.

Le problème peut être résolu par itération :

On choisit, à chaque niveau, un déplacement correspondant à la moyenne des deux déplacements calculés au cours des deux étapes précédentes. A cette flèche, imposée au portique, correspondent des « réactions » bien déterminées.

Le refend est ainsi soumis à la totalité de l'effort extérieur diminué des « réactions » du portique. Il faut vérifier que, dans une telle sollicitation, le refend prend effectivement la déformation choisie.

S'il n'en est pas ainsi, on devra à nouveau fixer une flèche moyenne entre celle précédemment choisie et celle qui vient d'être calculée.

Le processus se poursuit jusqu'à ce que l'équilibre soit obtenu.

**Réactions du portique.** Elles sont déterminées à partir des déplacements imposés, à chaque niveau, au portique.

Le calcul des rotations des nœuds nous permet de connaître les moments dans les traverses et les poteaux. La somme des efforts tranchants, dans les

poteaux d'un même étage, représente précisément la réaction du portique pour le niveau considéré.

La déformation du système portique-refend, ainsi que les moments qui en résultent, sont représentés sur les deux figures ci-après.

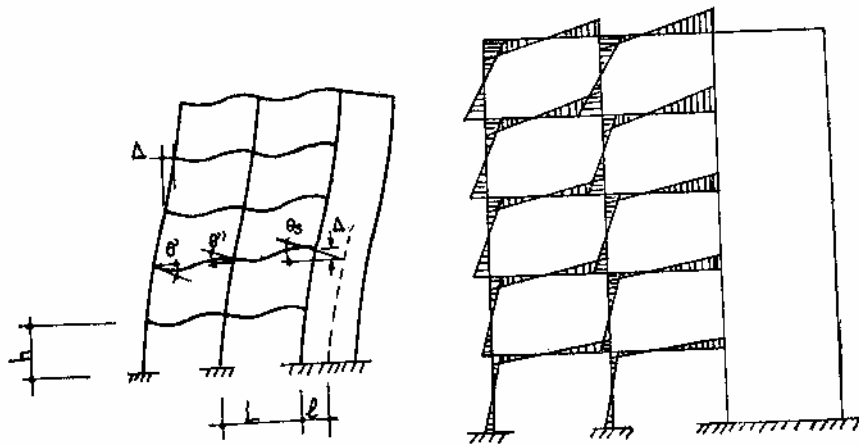


FIG. IV.89.

On doit noter qu'à l'effort horizontal, déterminé à chaque étage, vient s'ajouter l'effet du moment d'encastrement de la traverse dans le refend. Ce moment est calculé en tenant compte du déplacement vertical du parement intérieur du refend (ce déplacement s'exprime en fonction de la rotation du refend au niveau considéré).

Pour calculer les rotations dans le portique, nous devons exprimer que chaque nœud est en équilibre, en écrivant que la somme des moments au droit de ce nœud est nulle.

La première valeur de la rotation d'un nœud sera établie en supposant que la rotation du nœud, à l'extrémité opposée de la barre qui aboutit au nœud considéré, est nulle.

Les nœuds seront partagés en deux groupes afin d'accélérer la convergence.

Les rotations obtenues après trois tours, au cours desquels on a écrit que les nœuds sont en équilibre, permettent généralement d'avoir des résultats suffisants pour la détermination des réactions.

*Exemple.* Considérons un refend de 3 m de largeur et de 0,30 m d'épaisseur, lié à un portique dont les poteaux ont une inertie de  $9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$  et

les traverses une inertie de  $4,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ . La longueur des poteaux et des traverses est de 3 m. La hauteur du bâtiment correspond à 4 niveaux. Chaque niveau est soumis à une force horizontale de 1 tonne (fig. IV.90).

Il faut préciser qu'il s'agit là d'un portique très rigide (poteaux  $31,5 \times 70$  et traverses  $31,5 \times 55,5$ ) qui permettra de mettre en évidence les différentes phases du calcul.

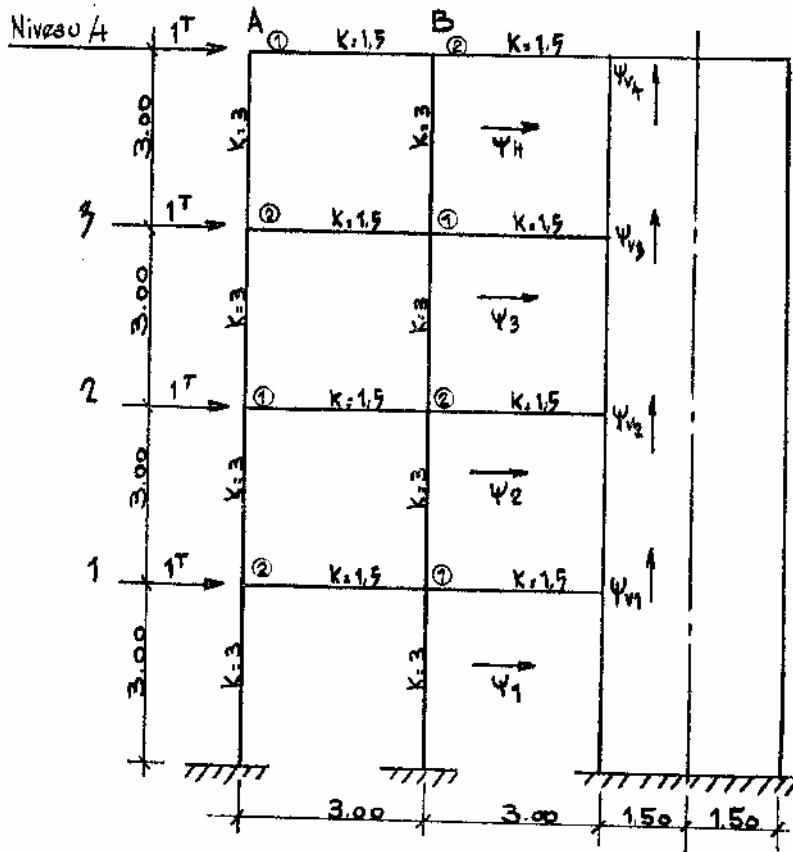


Fig. IV.90

$$\text{Inertie du refend : } \frac{0,30 \times 3,00^3}{12} = 0,675 \text{ m}^4 .$$

La flèche d'un refend, ayant ces caractéristiques, soumis à une série de forces  $R_1, R_2, R_3, R_4$  est facilement obtenu par la méthode du « moment des aires ».

Définissons le diagramme des moments (fig. IV.91).

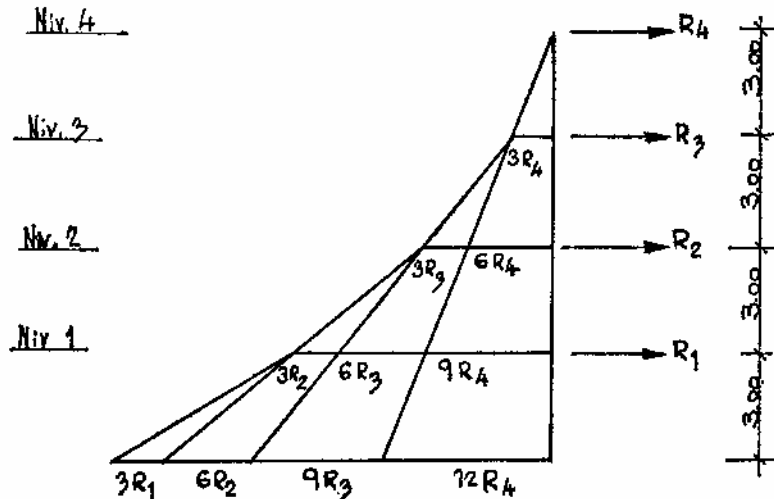


FIG. IV.91.

Nous obtenons ainsi :

$$f_1 = \frac{49,5R_4 + 36R_3 + 22,5R_2 + 9R_1}{E \times 0,675},$$

$$f_2 = \frac{180R_4 + 126R_3 + 72R_2 + 22,5R_1}{E \times 0,675},$$

$$f_3 = \frac{364,5R_4 + 243R_3 + 126R_2 + 36R_1}{E \times 0,675},$$

$$f_4 = \frac{576R_4 + 364,5R_3 + 180R_2 + 49,5R_1}{E \times 0,675}.$$

Pour  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$  tonne

$$f_1 = \frac{117}{E \times 0,675} = \frac{173}{E}$$

$$f_3 = \frac{769,5}{E \times 0,675} = \frac{1135}{E}$$

$$f_2 = \frac{400,5}{E \times 0,675} = \frac{595}{E}$$

$$f_4 = \frac{1170}{E \times 0,675} = \frac{1730}{E}$$

alors que la rotation, à chaque niveau, a pour valeur :

$$\begin{array}{ll} \text{au niveau 1 :} & \frac{106}{E} & \text{au niveau 3 :} & \frac{193}{E} \\ \text{au niveau 2 :} & \frac{167}{E} & \text{au niveau 4 :} & \frac{200}{E} \end{array}$$

Dans l'hypothèse où le refend, reprend à lui seul toutes les forces extérieures, les données permettant de déterminer les réactions du portique sont les suivantes :

a) Déplacements relatifs dans le plan horizontal.

$$\psi_1 = \frac{\Delta_1}{h} = \frac{173}{3E},$$

$$\psi_2 = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{h} = \frac{595 - 173}{3E} = \frac{422}{3E},$$

$$\psi_3 = \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{h} = \frac{1\,135 - 595}{3E} = \frac{540}{3E},$$

$$\psi_4 = \frac{\Delta_4 - \Delta_3}{h} = \frac{1\,730 - 1\,135}{3E} = \frac{595}{3E}.$$

b) Déplacements verticaux des traverses, au droit du parement intérieur du refend.

$$\Delta_{v_1} = \frac{106}{E} 1,5 = \frac{159}{E} \quad \text{d'où} \quad \psi_{v_1} = \frac{159}{EL} = \frac{159}{3E},$$

$$\Delta_{v_2} = \frac{167}{E} 1,5 = \frac{250}{E} \quad \text{d'où} \quad \psi_{v_2} = \frac{250}{3E},$$

$$\Delta_{v_3} = \frac{193}{E} 1,5 = \frac{289,5}{E} \quad \text{d'où} \quad \psi_{v_3} = \frac{289,5}{3E},$$

$$\Delta_{v_4} = \frac{200}{E} 1,5 = \frac{300}{E} \quad \text{d'où} \quad \psi_{v_4} = \frac{300}{3E}.$$

c) Raideurs des barres.

Pour les traverses  $K = 1,5 \cdot 10^{-3}$

Pour les poteaux  $K = 3 \cdot 10^{-3}$

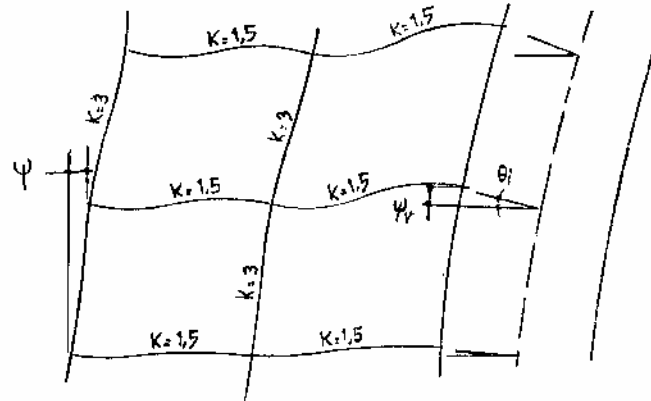


FIG. IV.92.

**Calcul des rotations**

Les nœuds sont partagés en deux groupes (fig. IV.90).

Pour le groupe 1, on suppose, dans un premier temps, que les autres extrémités des barres aboutissant au nœud considéré, ont une rotation nulle, de sorte qu'en exprimant pour le nœud  $A_4$  que la somme des moments est nulle, on doit écrire :

$$M_{A_4 \cdot B_4} + M_{A_4 \cdot A_3} = 0.$$

Soit :

$$2E \times 3 \left( 2\theta_{A_4} - \frac{595}{E} \right) + 2E \times 1,5(2\theta_{A_4}) = 0 \quad E\theta_{A_4} = 198$$

Pour le nœud  $B_3$  (l'indice 3 désigne le 3<sup>e</sup> niveau)

$$2E \times 1,5(2\theta_{B_3}) + 2E \times 3 \left( 2\theta_{B_3} - \frac{595}{E} \right) + 2E \times 3 \left( 2\theta_{B_3} - \frac{540}{E} \right) + 2E \times 1,5 \left( 2\theta_{B_3} + \frac{193}{E} + \frac{289,5}{E} \right) = 0$$

$$E\theta_{B_3} = 151$$

Pour le nœud  $A_2$   $E\theta_{A_2} = 192$

Pour le nœud  $B_1$   $E\theta_{B_1} = 77$

Pour le groupe 2, on se servira des valeurs du groupe 1 pour rechercher les rotations, on aura ainsi en  $B_4$  :

$$2E \times 3 \left( 2\theta_{B_4} + \frac{151}{E} - \frac{595}{E} \right) + 2E \times 1,5 \left( 2\theta_{B_4} + \frac{198}{E} \right) + 2E \times 1,5 \left( 2\theta_{B_4} + \frac{200}{E} + \frac{300}{E} \right) = 0$$

$$E\theta_{B_4} = 24$$

Puis en  $A_3$

$$2E \times 3 \left( 2\theta_{A_3} + \frac{198}{E} - \frac{595}{E} \right) + 2E \times 3 \left( 2\theta_{A_3} + \frac{192}{E} - \frac{540}{E} \right) + 2E \times 1,5 \left( 2\theta_{A_3} + \frac{151}{E} \right) = 0$$

$$E\theta_{A_3} = 134$$

et en  $B_2$

$$2E \times 3 \left( 2\theta_{B_2} + \frac{151}{E} - \frac{540}{E} \right) + 2E \times 3 \left( 2\theta_{B_2} + \frac{77}{E} - \frac{422}{E} \right) + 2E \times 1,5 \left( 2\theta_{B_2} + \frac{192}{E} \right) + 2E \times 1,5 \left( 2\theta_{B_2} + \frac{167}{E} + \frac{250}{E} \right) = 0$$

$$E\theta_{B_2} = 71,5$$

Enfin en  $A_1$

$$2E \times 3 \left( 2\theta_{A_1} + \frac{192}{E} - \frac{422}{E} \right) + 2E \times 3 \left( 2\theta_{A_1} - \frac{173}{E} \right) + 2E \times 1,5 \left( 2\theta_{A_1} + \frac{77}{E} \right) = 0$$

$$E\theta_{A_1} = 73$$

On devra poursuivre la recherche des rotations, en observant le même procédé, pendant encore deux cycles, au minimum.

A la fin du 3<sup>e</sup> cycle, il est nécessaire de vérifier si les nœuds sont en équilibre, en déterminant la valeur des moments à partir des rotations



obtenues sur le tableau ci-dessous, sur lequel on a noté la valeur des rotations au premier, deuxième et troisième cycles.

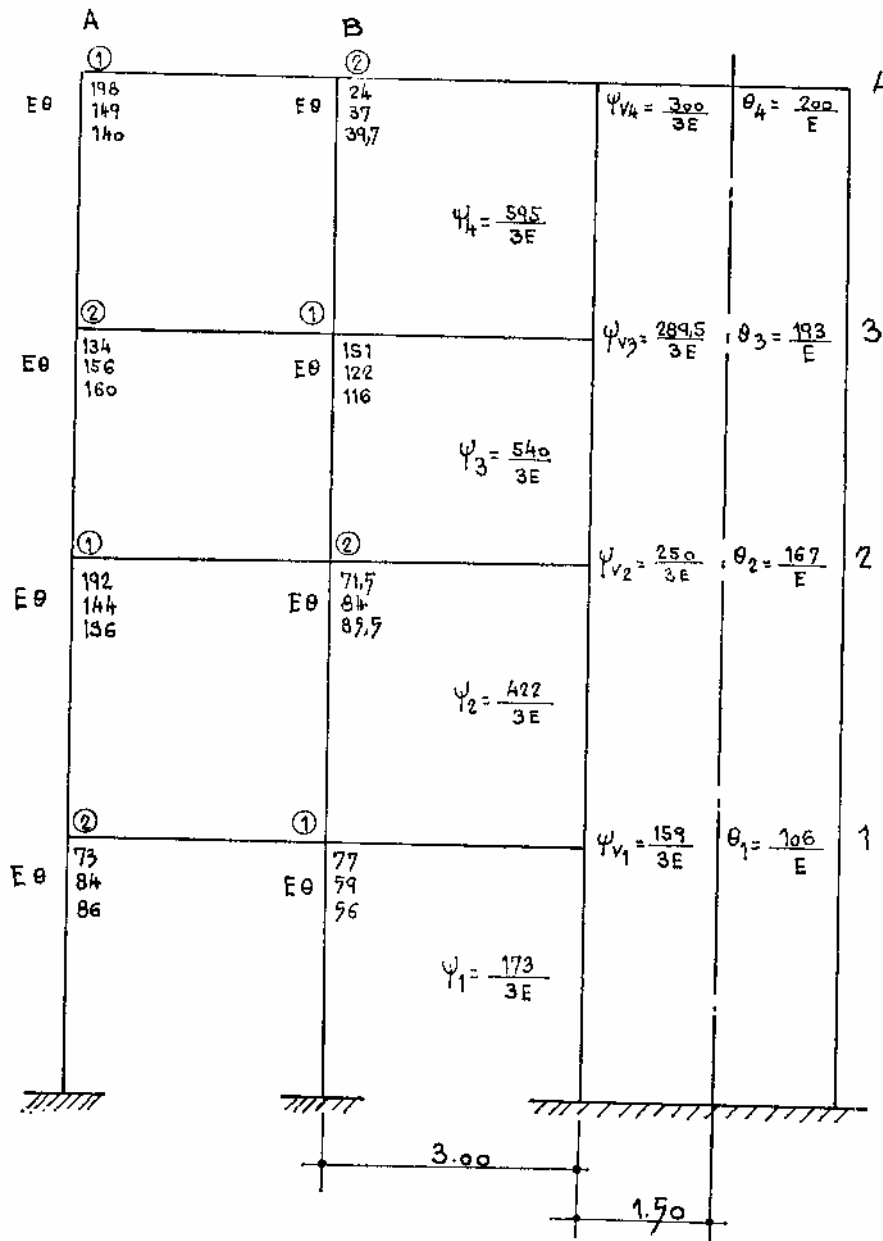


FIG. IV.93.

Dans l'exemple choisi, les moments ont pour valeur :

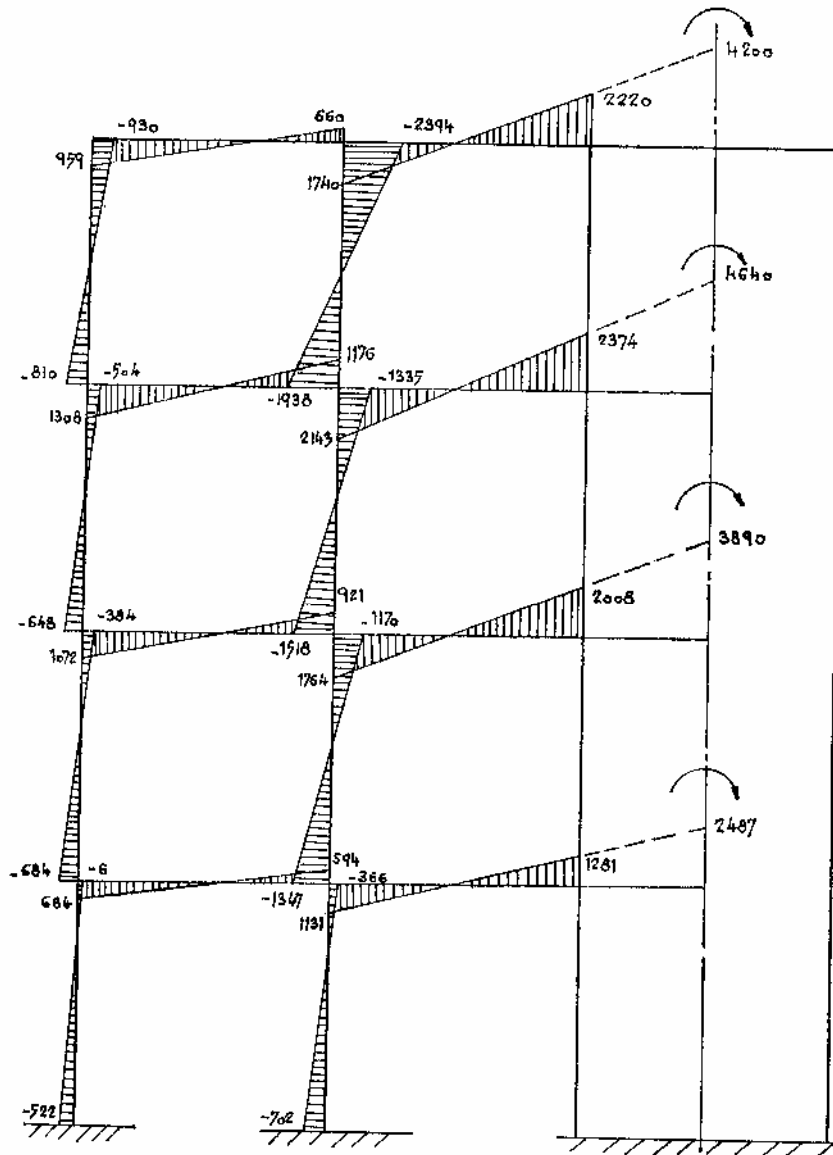


FIG. IV.94.

La somme des moments dans les poteaux de l'étage 4 est par suite

$$\Sigma M = -6\,072 \text{ kgm}$$

d'où la valeur de l'effort tranchant d'étage au niveau 4

$$T_4 = \frac{6\,072}{3} = 2\,024 \text{ kg.}$$

Ce diagramme des moments peut être remplacé par un système de forces au droit des nœuds :

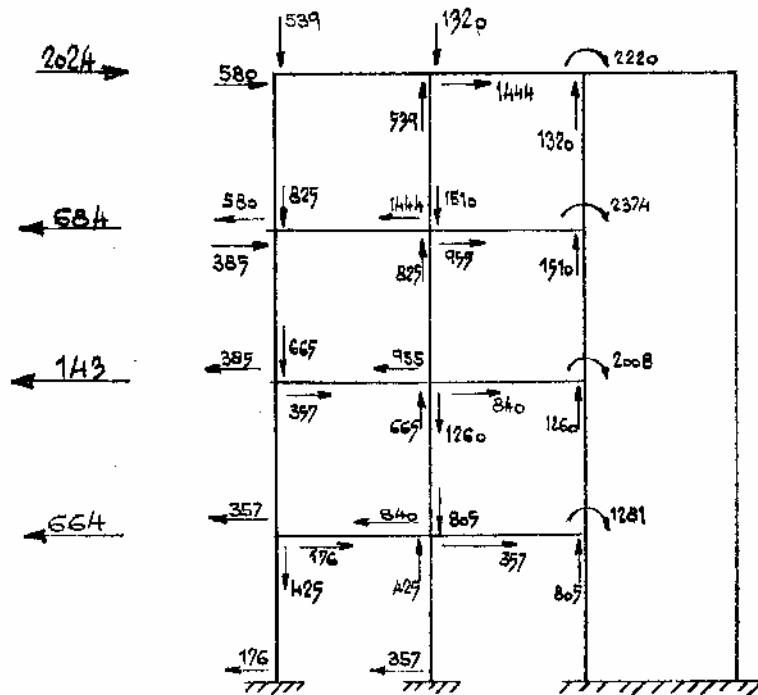


FIG. IV.95.

de sorte que les réactions du portique, appliquées au refend, sont représentées par le système de forces et de moments intégralement opposés.

Les efforts verticaux et les moments, existant le long du parement intérieur du refend, peuvent être remplacés par un moment appliqué dans l'axe vertical du refend et une force située sur ce même axe, à chaque niveau.

On a ainsi :

au 4<sup>e</sup> niveau  $M_4 = 2\,220 + 1\,320 \cdot 1,5 = 4\,200 \text{ kgm}$

au 3<sup>e</sup> niveau  $M_3 = 2\,374 + 1\,510 \cdot 1,5 = 4\,640 \text{ kgm}$

au 2<sup>e</sup> niveau  $M_2 = 3\,890 \text{ kgm}$

au 1<sup>er</sup> niveau  $M_1 = 2\,487 \text{ kgm}$

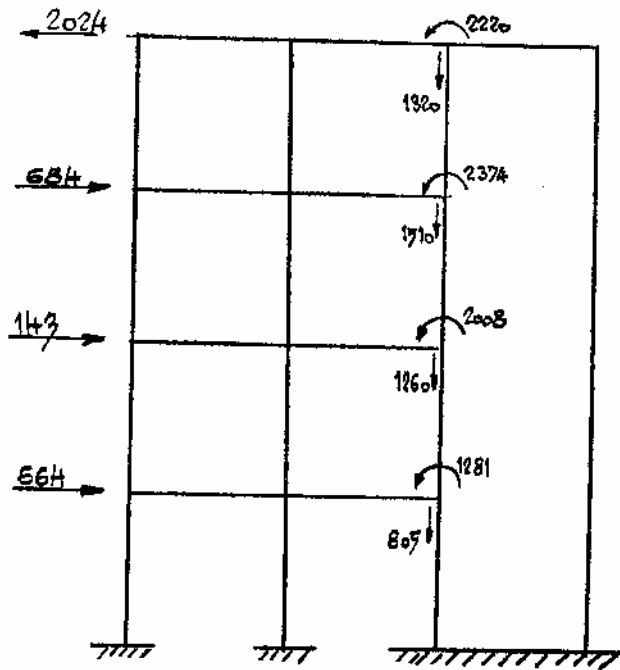


FIG. IV.96.

Calculons les nouvelles flèches du refend, soumis à ces moments, d'une part, ainsi qu'à la superposition de l'effort horizontal de 1 tonne (à chaque niveau) et des réactions horizontales du portique, d'autre part.

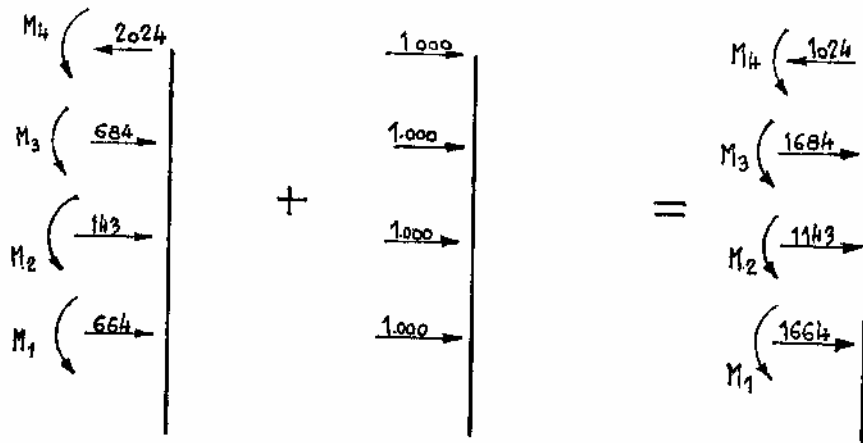


FIG. IV.97.

Les efforts horizontaux résultants donnent une flèche égale à :

$$f_1 = \frac{75}{E} \qquad f_3 = \frac{360}{E}$$

$$f_2 = \frac{218}{E} \qquad f_4 = \frac{463}{E}$$

Les moments donnent une flèche égale à :

$$f_1 = -\frac{102}{E} \qquad f_3 = -\frac{825}{E}$$

$$f_2 = -\frac{393}{E} \qquad f_4 = -\frac{1\,360}{E}$$

d'où la flèche du refend après application des réactions du portique :

$$\text{au 1}^\circ \text{ niveau} \qquad -\frac{27}{E},$$

$$\text{au 2}^\circ \text{ niveau} \qquad -\frac{175}{E},$$

$$\text{au 3}^\circ \text{ niveau} \qquad -\frac{465}{E},$$

$$\text{au 4}^\circ \text{ niveau} \qquad -\frac{897}{E}.$$

Pour chaque niveau, nous avons maintenant deux flèches limites entre lesquelles se situe la flèche exacte de chaque niveau.

La première itération consiste à adopter une flèche moyenne.

$$f_{m_1} = \frac{-27+173}{2E} = \frac{73}{E}$$

$$f_{m_2} = \frac{-175+595}{2E} = \frac{210}{E}$$

$$f_{m_3} = \frac{-465 + 1\ 135}{2E} = \frac{335}{E}$$

$$f_{m_4} = \frac{-897 + 1\ 730}{2E} = \frac{416,5}{E}$$

Si  $R'_1, R'_2, R'_3, R'_4$  sont les efforts qu'il faut appliquer au refend pour obtenir cette flèche moyenne, nous devons écrire :

$$\frac{49,5R'_4 + 36R'_3 + 22,5R'_2 + 9R'_1}{E \times 0,675} = \frac{73}{E}$$

$$\frac{180R'_4 + 126R'_3 + 72R'_2 + 22,5R'_1}{E \times 0,675} = \frac{210}{E}$$

$$\frac{364,5R'_4 + 243R'_3 + 126R'_2 + 36R'_1}{E \times 0,675} = \frac{335}{E}$$

$$\frac{576R'_4 + 364,5R'_3 + 180R'_2 + 49,5R'_1}{E \times 0,675} = \frac{416,5}{E}$$

d'où l'on tire

$$R'_1 = 1,620 \text{ T} \quad R'_3 = 2,750 \text{ T}$$

$$R'_2 = 0,550 \text{ T} \quad R'_4 = -1,550 \text{ T}$$

Calculons les rotations du refend, à chaque niveau, lorsqu'il est sollicité par les forces ainsi définies.

$$\theta_1 = \frac{-48,8 + 54,45 + 22,1}{E \times 0,675} = \frac{41}{E}$$

$$\theta_2 = \frac{-83,7 + 49,5 + 59,5 + 7,3}{E \times 0,675} = \frac{48,5}{E}$$

$$\theta_3 = \frac{-105 + 111 + 9,9 + 7,3}{E \times 0,675} = \frac{34,5}{E}$$

$$\theta_4 = \frac{-111 + 111 + 9,9 + 7,3}{E \times 0,675} = \frac{25,5}{E}$$

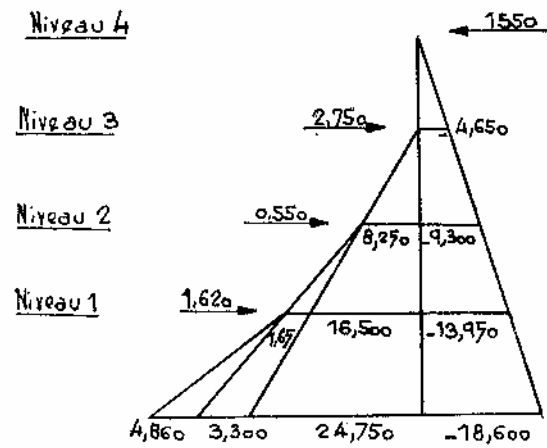


FIG. IV.98.

Ces rotations nous permettent de déterminer les déplacements verticaux du parement intérieur du refend, à la jonction avec la traverse :

$$\Delta_{v_1} = \frac{41}{E} 1,5 = \frac{61,5}{E} \quad \text{soit} \quad \psi_{v_1} = \frac{61,5}{EL} = \frac{61,5}{3E},$$

$$\Delta_{v_2} = \frac{48,5}{E} 1,5 = \frac{72,5}{E} \quad \text{soit} \quad \psi_{v_2} = \frac{72,5}{3E},$$

$$\Delta_{v_3} = \frac{34,5}{E} 1,5 = \frac{51,5}{E} \quad \text{soit} \quad \psi_{v_3} = \frac{51,5}{3E},$$

$$\Delta_{v_4} = \frac{25,5}{E} 1,5 = \frac{38,2}{E} \quad \text{soit} \quad \psi_{v_4} = \frac{38,2}{3E}.$$

Les déplacements correspondant à la flèche moyenne nous donnent horizontalement les déplacements relatifs suivants :

$$\Delta_1 = \frac{73}{E} \quad \text{soit} \quad \psi_1 = \frac{73}{3E} \quad \Delta_3 = \frac{335-210}{E} \quad \text{soit} \quad \psi_3 = \frac{125}{3E}$$

$$\Delta_2 = \frac{210-73}{E} \quad \text{soit} \quad \psi_2 = \frac{137}{3E} \quad \Delta_4 = \frac{416,5-335}{E} \quad \text{soit} \quad \psi_4 = \frac{81,5}{3E}$$

d'où le calcul des rotations des nœuds du portique :

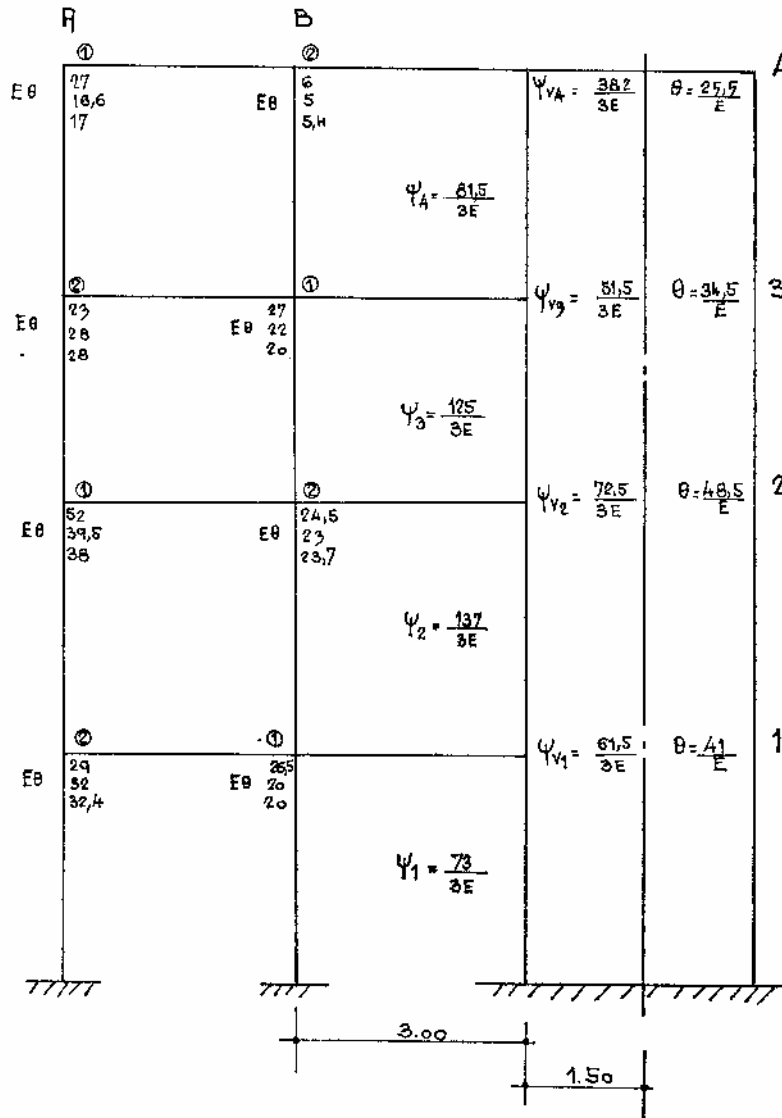


FIG. IV.99.



et par suite le diagramme des moments :

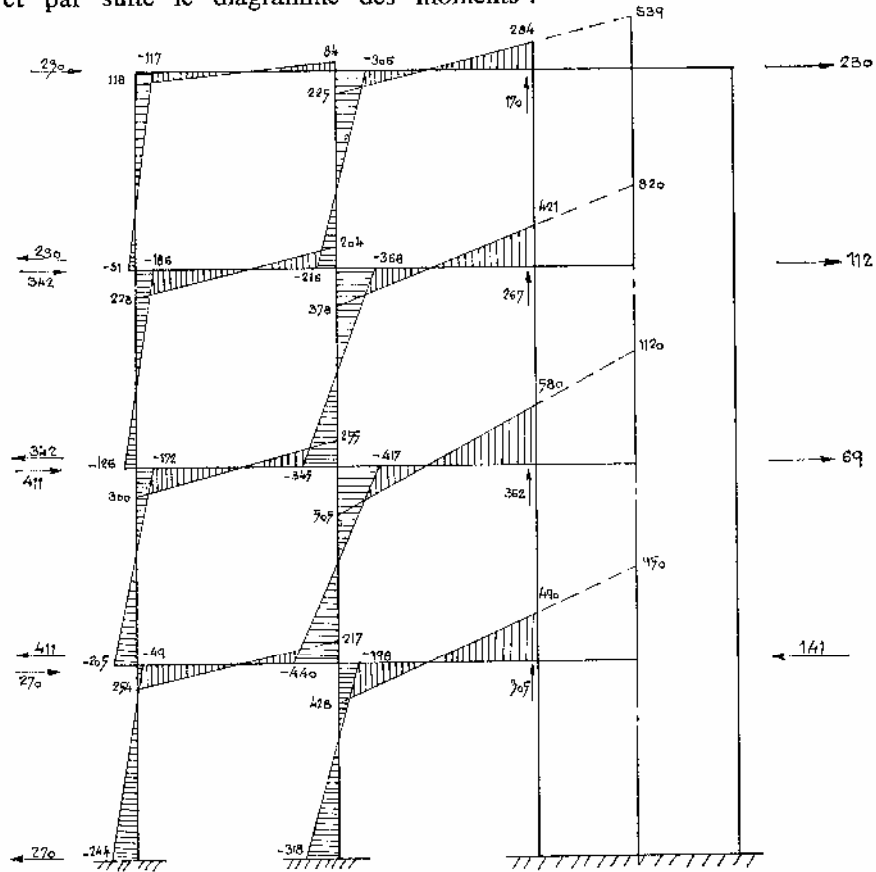


FIG. IV.100.

Les réactions du portique sont déterminées en inversant les résultats précédents, et, en les superposant à la sollicitation extérieure (1 tonne par niveau), conformément à la figure ci-après ; on obtient pour le refend :

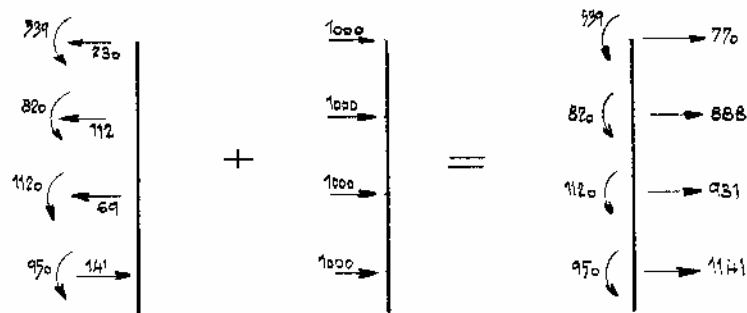


FIG. IV.101.

La superposition des flèches dues aux forces horizontales et aux moments donne, pour le refend, une flèche totale égale à :

$$f_1 = \frac{150 - 23}{E} = \frac{127}{E} \quad \text{au lieu de } \frac{73}{E},$$

$$f_2 = \frac{505 - 85,5}{E} = \frac{419,5}{E} \quad \text{au lieu de } \frac{210}{E},$$

$$f_3 = \frac{960 - 174}{E} = \frac{786}{E} \quad \text{au lieu de } \frac{335}{E},$$

$$f_4 = \frac{1\,470 - 275}{E} = \frac{1\,195}{E} \quad \text{au lieu de } \frac{416,5}{E}.$$

La deuxième itération consiste à adopter une flèche moyenne :

$$f_{m_1} = \frac{127 + 73}{2E} = \frac{100}{E} \quad f_{m_3} = \frac{786 + 335}{2E} = \frac{560,5}{E}$$

$$f_{m_2} = \frac{419,5 + 210}{2E} = \frac{315}{E} \quad f_{m_4} = \frac{1\,195 + 416,5}{2E} = \frac{806}{E}$$

Ces flèches correspondent aux efforts suivants, sur le refend :

$$R'_4 = -0,200 \text{ T} \quad R'_2 = 1,100 \text{ T}$$

$$R'_3 = 1,035 \text{ T} \quad R'_1 = 1,750 \text{ T}$$

Ce qui permet de déterminer les rotations du refend et les déplacements du parement intérieur :

$$\theta_1 = \frac{59}{E} \quad \text{soit} \quad \Delta_{v_1} = \frac{88,5}{E} \quad \text{et} \quad \psi_{v_1} = \frac{88,5}{3E},$$

$$\theta_2 = \frac{80,5}{E} \quad \text{soit} \quad \Delta_{v_2} = \frac{120,75}{E} \quad \text{et} \quad \psi_{v_2} = \frac{120,75}{3E},$$

$$\theta_3 = \frac{83,5}{E} \quad \text{soit} \quad \Delta_{v_3} = \frac{125}{E} \quad \text{et} \quad \psi_{v_3} = \frac{125}{3E},$$

$$\theta_4 = \frac{82}{E} \quad \text{soit} \quad \Delta_{v_4} = \frac{123}{E} \quad \text{et} \quad \psi_{v_4} = \frac{123}{3E}.$$

Les déplacements horizontaux correspondant à la flèche moyenne nous donnent les déplacements relatifs suivants :

$$\Delta_1 = \frac{100}{E} \quad \text{soit} \quad \psi_1 = \frac{100}{3E} \quad \Delta_3 = \frac{560,5 - 315}{E} \quad \text{soit} \quad \psi_3 = \frac{245,5}{3E}$$

$$\Delta_2 = \frac{315 - 100}{E} \quad \text{soit} \quad \psi_2 = \frac{215}{3E} \quad \Delta_4 = \frac{806 - 560,5}{E} \quad \text{soit} \quad \psi_4 = \frac{245,5}{3E}$$

Nous pouvons ainsi déterminer les rotations du portique :

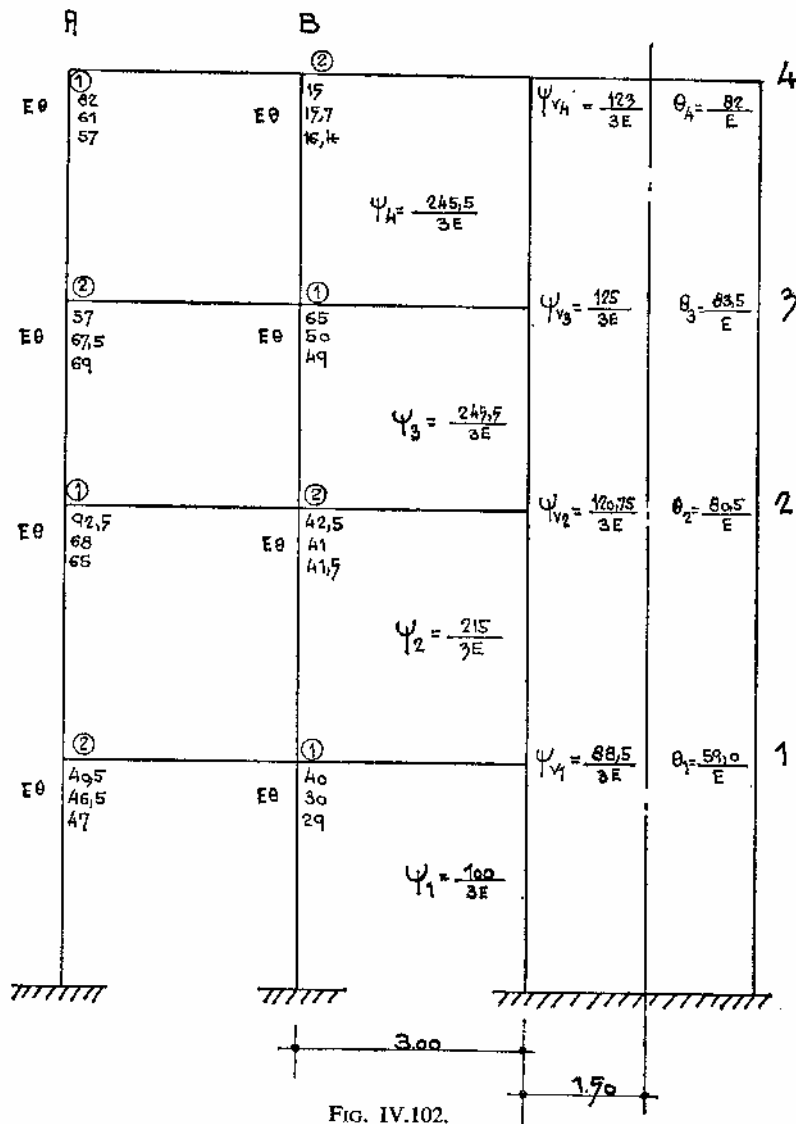


FIG. IV.102.

ainsi que les moments correspondants :

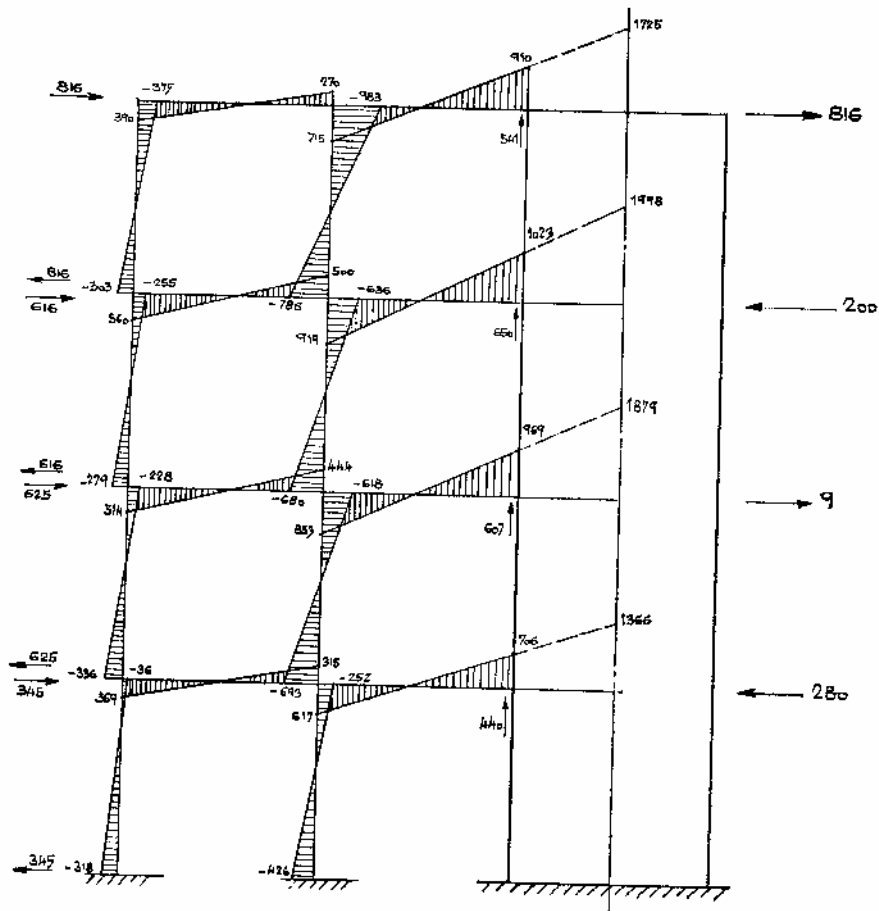


FIG. IV.103.

Le diagramme des moments nous permet d'en déduire les réactions du portique et de superposer ces réactions aux efforts extérieurs.

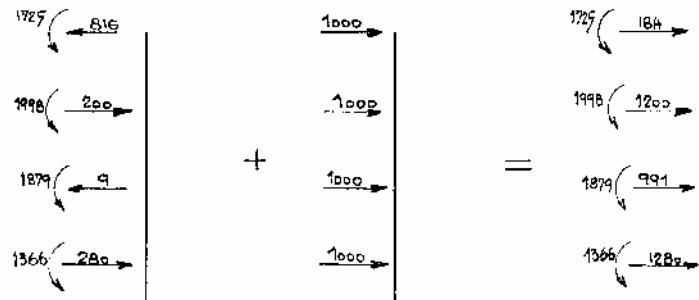


FIG. IV.104.

Les efforts horizontaux, d'une part, et les moments, d'autre part, appliqués aux refends, nous donnent les flèches suivantes :

$$f_1 = \frac{128 - 46}{E} = \frac{82}{E} \quad \text{au lieu de } \frac{100}{E},$$

$$f_2 = \frac{422 - 175}{E} = \frac{247}{E} \quad \text{au lieu de } \frac{315}{E},$$

$$f_3 = \frac{785 - 367}{E} = \frac{418}{E} \quad \text{au lieu de } \frac{560,5}{E},$$

$$f_4 = \frac{1\ 160 - 620}{E} = \frac{540}{E} \quad \text{au lieu de } \frac{806}{E}.$$

La troisième itération consistera à reprendre le calcul avec une flèche moyenne :

$$f_{m_1} = \frac{91}{E} \quad f_{m_3} = \frac{489}{E}$$

$$f_{m_2} = \frac{281}{E} \quad f_{m_4} = \frac{673}{E}$$

A titre indicatif, nous donnons ci-après le diagramme des moments obtenus à la fin de la deuxième itération :

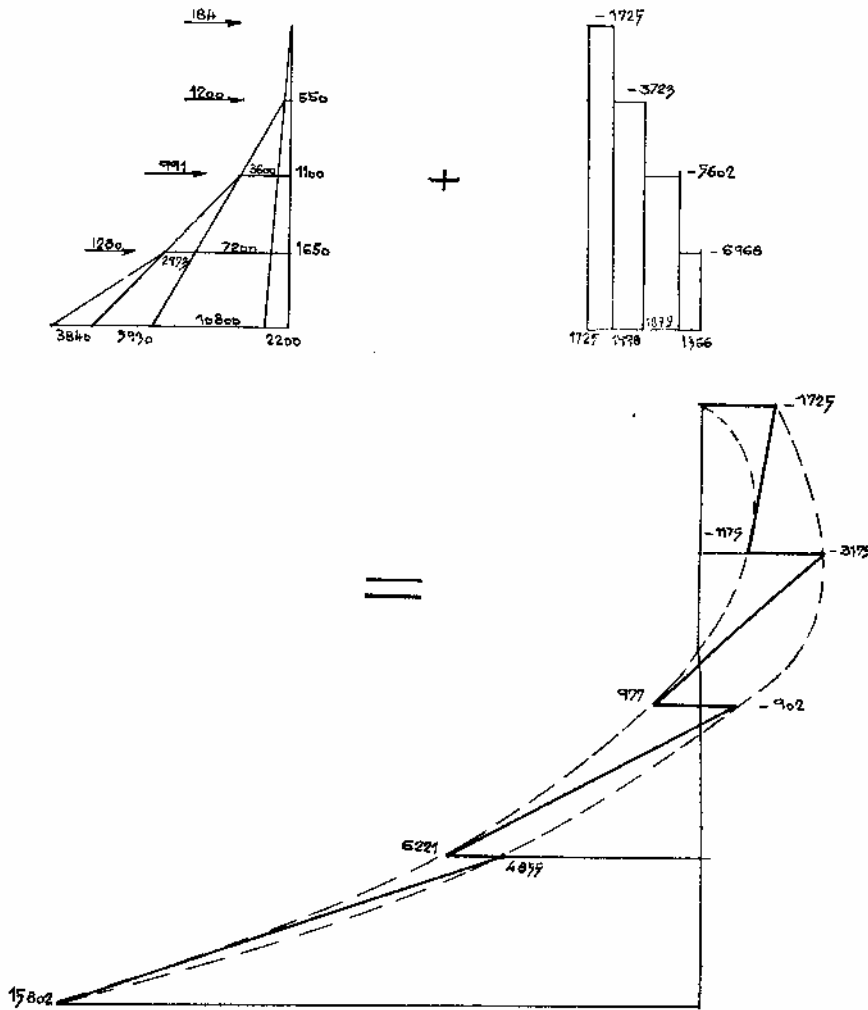


FIG. IV.105. — Moments fléchissants dans le refend à la fin de la 2<sup>e</sup> itération.

NOTA : Le moment fléchissant dans le refend est de 30 T·m sans intervention du portique. Il est de 15,802 T·m à la fin de la deuxième itération, et de l'ordre de 18 à 19 T·m lorsque l'équilibre sera obtenu.

En supposant que l'équilibre soit obtenu avec les flèches choisies pour la troisième itération, nous pouvons faire une comparaison entre les déplacements du refend, dans l'hypothèse où il reprend la totalité des efforts, et ceux obtenus en tenant compte de la raideur du portique.

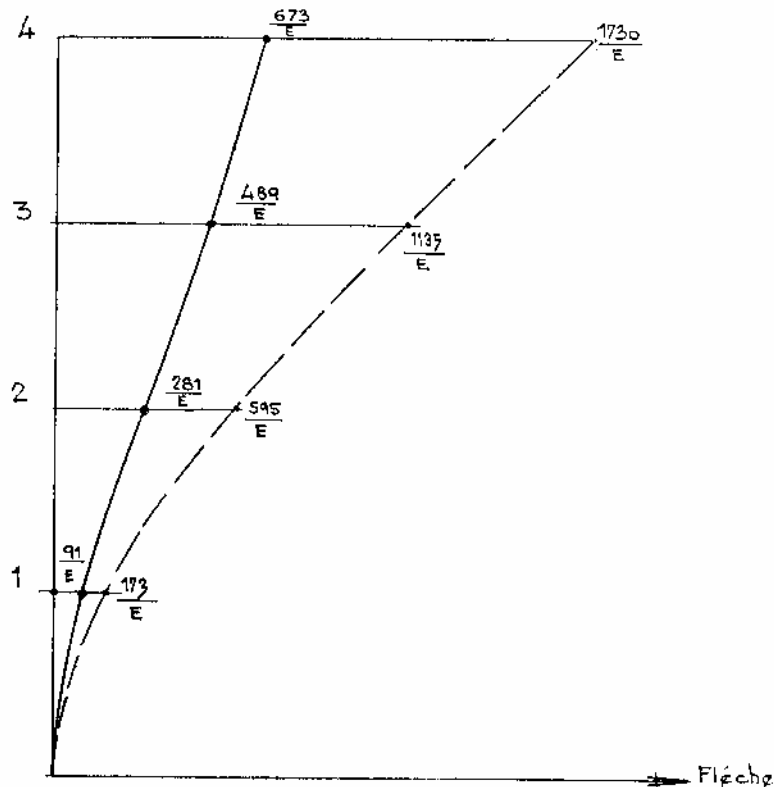


FIG. IV.106.

On constate que l'intervention du portique a, certes, diminué la flèche du refend, mais l'a également redressée en tête.

Avant de passer au calcul par itération, il y a lieu de vérifier, en considérant le portique, d'une part, et le refend, d'autre part, lequel de ces deux éléments est le plus rigide (effet d'une série de forces égales à 1 tonne à chaque niveau).

NOTA : Si le portique est plus rigide que le refend, il sera plus rapide d'appliquer la méthode que nous venons d'exposer, en commençant par faire reprendre la totalité de l'effort extérieur par le portique, puis d'étudier les « réactions » du refend.

### Ossature composée de portiques parallèles

Dans le cas où l'ossature est parfaitement symétrique, et lorsque tous les portiques qui la composent sont semblables, la raideur infinie des planchers impose à chaque portique, un même déplacement horizontal, ce qui nous permet de déduire que chaque portique est soumis, à chaque niveau, à un même effort horizontal.

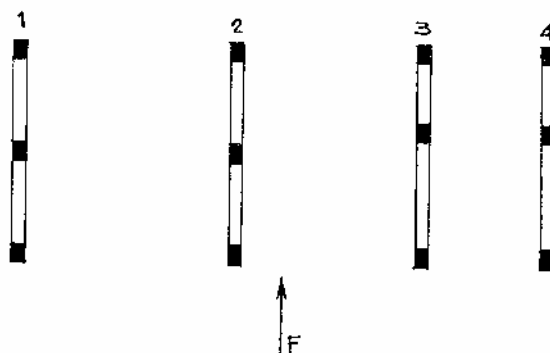


FIG. IV.107.

Lorsque l'ossature est composée de portiques de raideur différente, l'ouvrage subit, comme dans le cas de refends parallèles, une translation et une rotation. Il est possible de traiter ce problème, de la façon suivante, sans s'imposer la recherche du centre de rotation.

1° On calcule le déplacement de chaque portique sous l'effet d'une série de forces égales à 1 tonne, appliquée à chaque niveau.

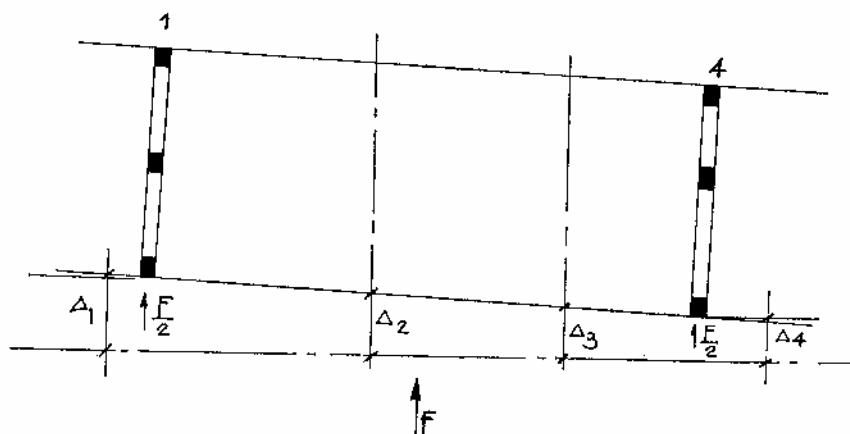


FIG. IV.108.



2° On suppose en premier lieu que l'effort  $F$  est repris uniquement par les deux portiques d'extrémité (1) et (4).

Chacun de ces deux portiques reprendra ainsi un effort  $\frac{F}{2}$  et subit, sous cet effort, un déplacement que nous pouvons déterminer, à chaque niveau, grâce à l'étude préalable qui a été faite.

Soit  $\Delta_1$  le déplacement du portique (1) à un niveau bien déterminé, et  $\Delta_4$  le déplacement du portique (4) à ce même niveau.

Dans cette hypothèse, les déplacements imposés aux portiques (2) et (3) sont respectivement  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$ , au niveau considéré.

Les déplacements  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$  sont calculés à tous les niveaux.

3° En opérant comme nous l'avons fait au cours des exercices précédents, nous déterminons à partir des résultats obtenus pour les portiques 2 et 3, soumis à la série de forces de 1 tonne appliquée à chaque niveau, les réactions  $F_2$  et  $F_3$ . (Nous avons vu que ces réactions sont différentes et peuvent même être de signes contraires, suivant les niveaux).

4° A chaque niveau, on décompose  $F_2$  et  $F_3$  en deux efforts  $F'_1$  et  $F'_4$ , appliqué respectivement au droit des portiques (1) et (4).

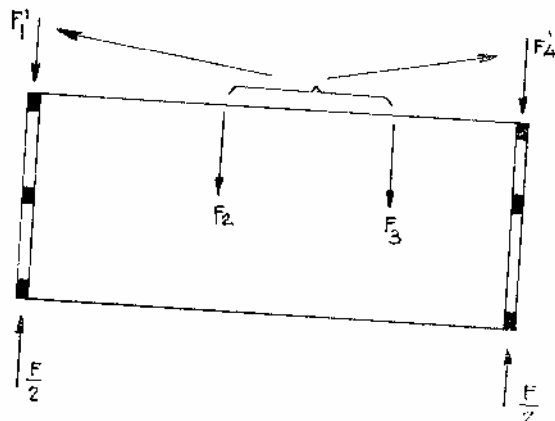


FIG. IV.109.

On calcule les flèches prises par les portiques (1) et (4) soumis au système de forces :

$$\frac{F}{2} - F'_1 \text{ à un niveau donné du portique (1)}$$

$$\frac{F}{2} - F'_4 \text{ à un niveau donné du portique (4)}$$

Soit  $\Delta'_1$  et  $\Delta'_4$  ces flèches. (Ces flèches doivent être évidemment déterminées à tous les niveaux).

A chaque niveau, la flèche réelle du portique se situe entre les deux résultats obtenus

$$\begin{aligned} \Delta_1 \text{ et } \Delta'_1 & \text{ d'une part ,} \\ \Delta_4 \text{ et } \Delta'_4 & \text{ d'autre part .} \end{aligned}$$

5° L'itération commence en adoptant la flèche moyenne entre ces deux valeurs extrêmes. Appelons  $\Delta_{m1}$  et  $\Delta_{m4}$ , ces flèches moyennes.

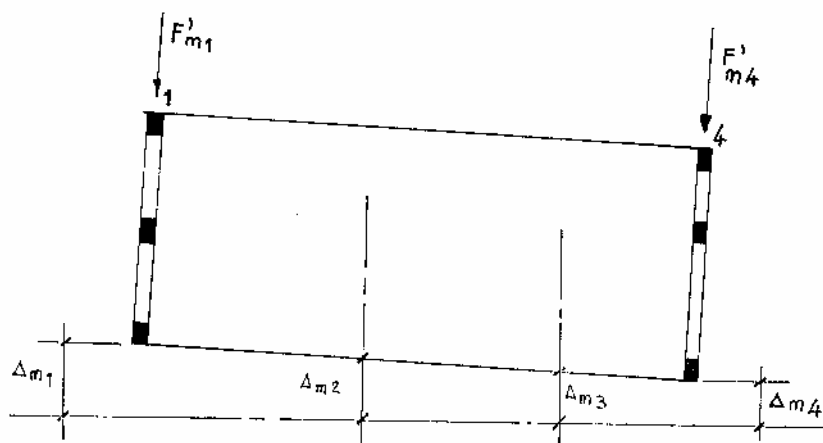


FIG. IV.110.

Les flèches  $\Delta_{m2}$  et  $\Delta_{m3}$  peuvent être déterminées, à chaque niveau, à partir des valeurs  $\Delta_{m1}$  et  $\Delta_{m4}$ . Les valeurs de  $\Delta_{m2}$  et  $\Delta_{m3}$  nous permettent de déterminer les efforts correspondant  $F'_{m1}$  et  $F'_{m4}$  au niveau considéré.

L'équilibre est obtenu si on vérifie que les portiques (1) et (4) prennent au niveau considéré, des flèches respectivement égales à  $\Delta_{m1}$  et  $\Delta_{m4}$  sous l'effet des efforts

$$\frac{F}{2} - F'_{m1} \quad \text{d'une part} \quad \text{et} \quad \frac{F}{2} - F'_{m4} \quad \text{d'autre part .}$$

6° Si cette vérification n'est pas satisfaisante, parce que l'on obtient, à ce niveau, sous les efforts

$$\frac{F}{2} - F'_{m1} \quad \text{et} \quad \frac{F}{2} - F'_{m4} ,$$

des flèches  $\Delta_{m_1}$  et  $\Delta_{n_1}$ , on applique le même procédé en se fixant, à l'avance, les flèches du niveau considéré :

$$\text{Soit} \quad \frac{\Delta_{m_1} + \Delta_{n_1}}{2},$$

$$\text{et} \quad \frac{\Delta_{m_2} + \Delta_{n_2}}{2}.$$

*Le calcul et la vérification doivent être effectués à tous les niveaux.*

Un résultat satisfaisant est obtenu généralement dès la troisième ou quatrième itération.

### Éléments quelconques disposés parallèlement

- Portiques et refends,
- Portiques et refends partiels,
- Portiques, gaines et refends avec ou sans rigidité à la torsion.

Pour appliquer la méthode itérative, telle que nous venons de l'exposer pour les portiques ou refends parallèles, le projeteur doit effectuer le calcul de chaque élément du contreventement, séparément :

Portique — Refend plein — Refends liés par des linteaux — Refend partiel lié à un portique dans le même plan de contreventement — Refend présentant une rigidité à la torsion — Gaine, etc.

Chaque élément doit être étudié sous l'effet d'un système de forces horizontales  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ .

Les résultats ainsi obtenus doivent permettre de déterminer :

a) Les déplacements de l'élément considéré lorsque l'intensité des forces  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$  varie.

b) L'intensité des forces  $F'_1, F'_2, F'_3, \dots, F'_n$  à partir de déplacements imposés.

La méthode itérative permettant d'obtenir l'équilibre à tous les niveaux est alors facilement applicable.

**REMARQUE :** Il est absolument nécessaire de calculer le centre de torsion de toute section ne présentant pas deux axes de symétrie, c'est le cas des profils en  $U$ , en  $I$  à talons inégaux, des murs en équerre, des tubes rectangulaires ou carrés, dont le quatrième côté est remplacé par une série de barrettes parallèles (voir § III *Contraintes dues au couple de torsion*), des profils en double équerre, etc.

Dans toute phase de l'itération, on doit tenir compte du fait que toute force (appliquée à l'une de ces sections) qui ne passe pas par le centre de torsion de l'élément, doit être remplacée par :

- a) une force égale passant par le centre de torsion ;
- b) un moment égal au produit de cette force par la distance qui la sépare du centre de torsion.

Il est préférable de faire une correction dans la répartition des efforts, en tenant compte de ce moment de torsion, avant de déterminer le moment de torsion qui se déduit de la rotation du plancher (compte tenu de la raideur à la torsion de l'élément considéré) et de poursuivre le calcul comme nous l'avons fait précédemment pour une gaine rigide présentant deux axes de symétrie... Cette correction peut être évitée en ramenant tous les efforts au droit du centre de torsion.

1<sup>er</sup> exemple :

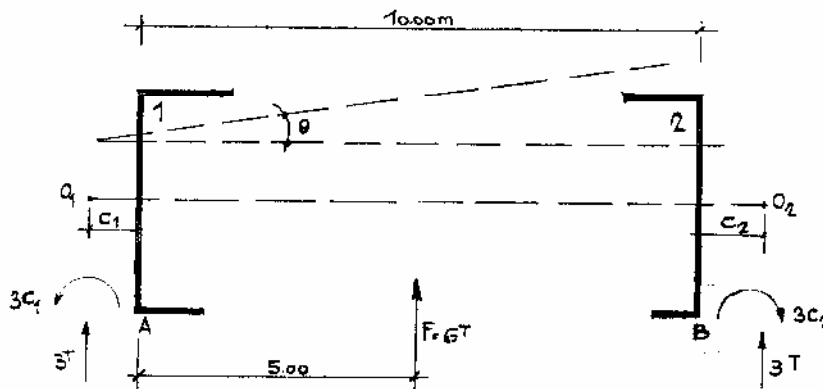


FIG. IV.111.

En *A* et *B*, l'effort appliqué est de 3 tonnes.

Ce système peut être remplacé :

- a) en  $O_1$  par un effort de 3 T  
+ un moment égal à  $3C_1$
- b) en  $O_2$  par un effort de 3 T  
+ un moment égal à  $3C_2$

Les déplacements des profils 1 et 2 peuvent ainsi être calculés à partir des efforts appliqués en  $O_1$  et  $O_2$  (compte tenu des deux moments) :

$$\text{en } O_1 \quad 3 + \frac{3C_2}{10+C_1+C_2} - \frac{3C_1}{10+C_1+C_2},$$

$$\text{en } O_2 \quad 3 + \frac{3C_1}{10+C_1+C_2} - \frac{3C_2}{10+C_1+C_2}.$$

Ce sont ces deux efforts qui permettront de déterminer les déplacements des profils 1 et 2 et par suite l'angle de rotation  $\theta$ .

On notera que les deux efforts résultants peuvent être obtenus directement, en prenant la portée

$$L = 10 + C_1 + C_2$$

ce qui donne en  $O_1$

$$\frac{6(5+C_2)}{10+C_1+C_2} = \frac{30+6C_2}{10+C_1+C_2},$$

et en  $O_2$

$$\frac{6(5+C_1)}{10+C_1+C_2} = \frac{30+6C_1}{10+C_1+C_2}.$$

2° exemple :

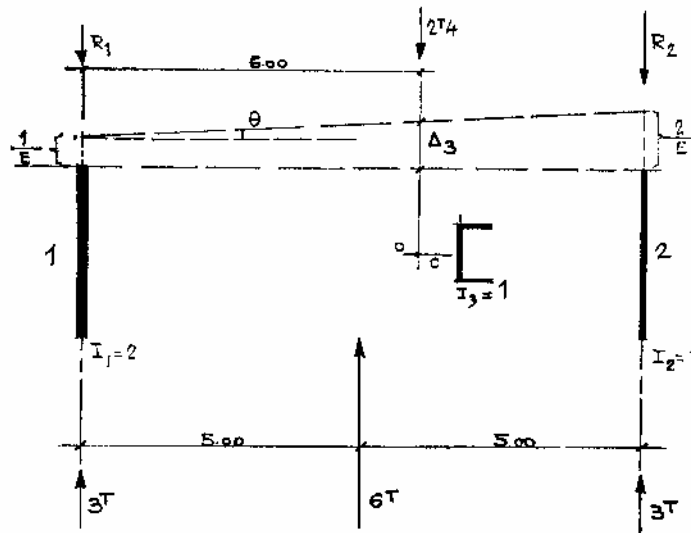


FIG. IV.112.

Dans ce cas, il est préférable de calculer directement le déplacement du centre de torsion de la cage 3.

On évite, de la sorte, l'intervention d'un moment, autre que celui créé par la rotation du plancher.

$$\text{On a ici} \quad \Delta_3 = \frac{1}{E} + \frac{6}{10E} = \frac{16}{10E},$$

$$\text{d'où l'on tire} \quad F_3 = 2,4 \text{ tonnes}$$

Les efforts qui s'opposent à ceux directement appliqués sur les refends 1 et 2 (3 tonnes sur chaque refend) par suite du déplacement imposé au centre de torsion de la cage 3, sont :

$$\text{sur le refend 1} \quad \frac{2,4 \times 4}{10} = R_1,$$

$$\text{sur le refend 2} \quad \frac{2,4 \times 6}{10} = R_2.$$

Le calcul se poursuit comme nous l'avons fait dans le cas de la cage centrale dont le centre de torsion correspond au centre de gravité de cette cage en calculant, pour chaque position du plancher, le moment de torsion en fonction de la rotation  $\theta$  et du module de torsion de la cage.

### Intervention des deux plans de contreventement dans l'équilibre général de l'ossature

Nous avons vu comment il était possible d'obtenir l'équilibre des différents éléments de contreventement, disposés parallèlement à la direction de l'effort extérieur.

Lorsque l'étude est menée jusqu'à ce stade, le projeteur peut estimer que les efforts obtenus sont dans le sens de la sécurité, en particulier, lorsque le bâtiment est soumis, non seulement à une translation, mais également à une rotation.

En effet, dans l'hypothèse de l'indéformabilité des planchers, la rotation d'angle  $\theta$  impose un déplacement aux éléments de contreventement, disposés dans la direction perpendiculaire à celle étudiée.

Ainsi, sur la figure IV.113, la façade  $AB$  se situe en  $A_1B_1$  après la rotation. Le déplacement  $\Delta_1$ , imposé aux éléments des façades  $AB$  ou  $CD$ , (dans la mesure où ils présentent une raideur certaine) provoque une « réaction » de la part de ces éléments. Les diverses « réactions » enregistrées sur les plans de contreventement parallèle à  $AB$ , correspondent à un moment qui va provoquer un nouvel état d'équilibre dans le système.

Si le projeteur veut tenir compte de ce moment, il pourra le faire intervenir dans l'itération, en même temps que le moment, dû aux « réactions », provoquées par suite de la « translation-rotation » du bâtiment, dans les éléments de contreventement disposés parallèlement à la direction de l'effort extérieur.

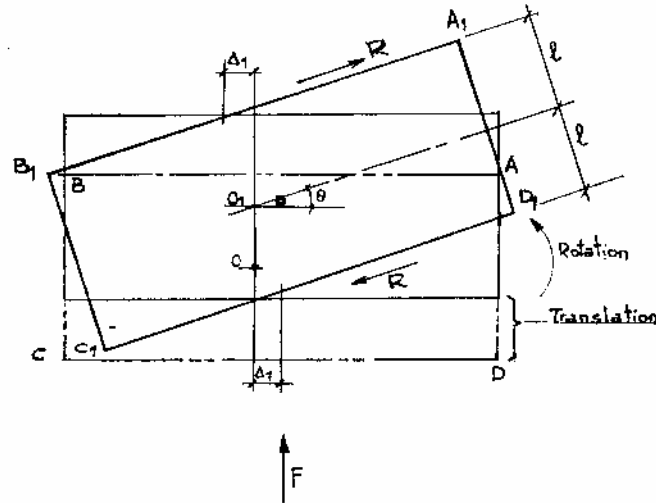


FIG. IV.113.

REMARQUE : Dans l'hypothèse de l'intervention des deux plans de contreventement, dans l'équilibre général de l'ossature, les raideurs à la flexion des divers éléments interviennent, dans chacune des deux directions, avec leur raideur respective. La raideur à la torsion n'intervient, évidemment, qu'une seule fois dans la recherche de l'équilibre, en créant un « moment de rappel ».

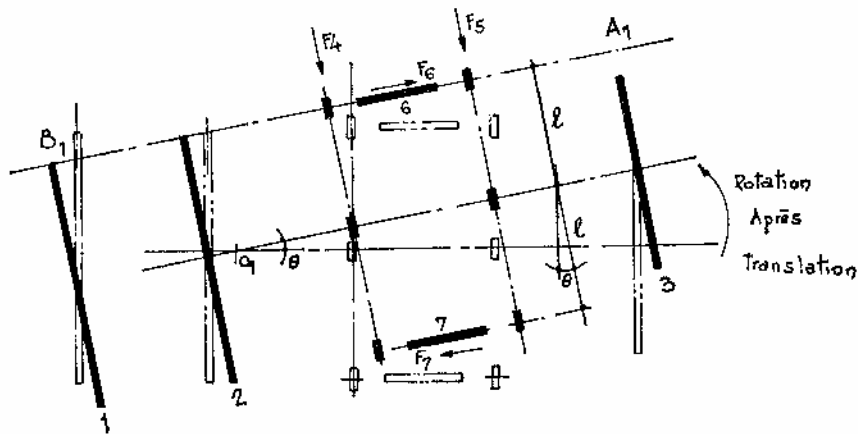


FIG. IV.114.

Dans l'exemple que nous avons traité précédemment (trois refends parallèles et deux portiques intermédiaires) supposons, par exemple, que le contreventement longitudinal soit assuré par deux refends *indépendants*, présentant une inertie  $I = 0,45 \text{ m}^4$  ( $0,20 \text{ m} \cdot 3,00 \text{ m}$ ) (fig. IV.114).

Nous rappelons que dans cet exemple, aucun élément du contreventement ne présente de raideur à la torsion.

Dès la première phase du calcul que nous avons établi, nous avons vu que le point  $O$  centre de rotation, s'était déplacé en  $O_1$ , que la droite  $AB$  était passée en  $A_1B_1$ , et que les deux portiques pouvaient être remplacés par deux réactions  $F_4$  et  $F_5$ , qui tendaient à créer un nouvel état d'équilibre.

Compte tenu, de ce que nous venons d'exposer, l'angle  $\theta$  de la droite  $A_1B_1$ , impose aux deux refends 6 et 7 (semblables dans l'exemple choisi) un déplacement :

$\theta l$ , si nous appelons  $2l$  la largeur du bâtiment.

Dans notre exemple, nous avons vu que, dans un état d'équilibre bien déterminé, cet angle  $\theta$  variait à chaque niveau.

Ainsi, pour tenir compte, dans le calcul, des « réactions » provoquées par les refends 6 et 7, il est nécessaire de déterminer les différentes valeurs de  $\theta l$  à chaque niveau.

Les valeurs de  $F_6 = -F_7$  à chaque niveau sont obtenues en écrivant que la flèche du refend sollicité par une série de forces  $F_{6-6}, F_{6-5}, F_{6-4}, F_{6-3}, F_{6-2}, F_{6-1}$  est égale, à un étage donné, à la valeur  $\theta l$  correspondante.

Il nous suffit donc de calculer la flèche, à chaque niveau, en fonction de  $F_{6-6}, F_{6-5}, F_{6-4}, F_{6-3}, F_{6-2}, F_{6-1}$ , par la méthode du moment des aires, et, d'écrire qu'elle est égale, suivant les niveaux, à  $\theta_6 l, \theta_5 l, \theta_4 l, \theta_3 l, \theta_2 l, \theta_1 l$ .

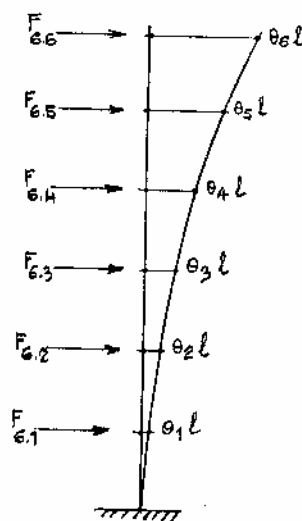


FIG. IV.115.



La résolution du système d'équations nous donne les différentes valeurs de  $F_6 = -F_7$  à chaque étage.

Si nous prenons par exemple, les valeurs retenues pour les positions du point  $O$ , d'une part, et du refend 3, d'autre part, après la deuxième approximation de l'exercice traité antérieurement, on obtient :

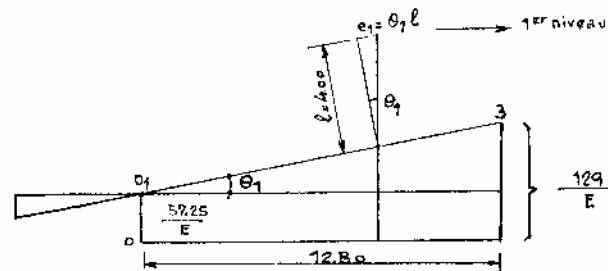


FIG. IV.116.

au 1<sup>er</sup> niveau :  $E\theta_1 = \frac{71,75}{12,80}$  d'où  $e_1 = \frac{4 \times 71,75}{E \times 12,80} = \frac{22,3}{E}$ ,

au 2<sup>e</sup> niveau :  $e_2 = \frac{79}{E}$ ,

au 3<sup>e</sup> niveau :  $e_3 = \frac{156}{E}$ ,

au 4<sup>e</sup> niveau :  $e_4 = \frac{245}{E}$ ,

au 5<sup>e</sup> niveau :  $e_5 = \frac{340}{E}$ ,

au 6<sup>e</sup> niveau :  $e_6 = \frac{431}{E}$ .

La résolution du système d'équation en

$$F_{6-6}, F_{6-5}, F_{6-4}, F_{6-3}, F_{6-2}, F_{6-1},$$

nous donne pour ces valeurs de  $e$

$$\begin{aligned} F_{6-6} &= -0,190 \text{ T} & F_{6-3} &= -0,630 \text{ T} \\ F_{6-5} &= 0,350 \text{ T} & F_{6-2} &= 0,325 \text{ T} \\ F_{6-4} &= 0,330 \text{ T} & F_{6-1} &= 0,240 \text{ T} \end{aligned}$$

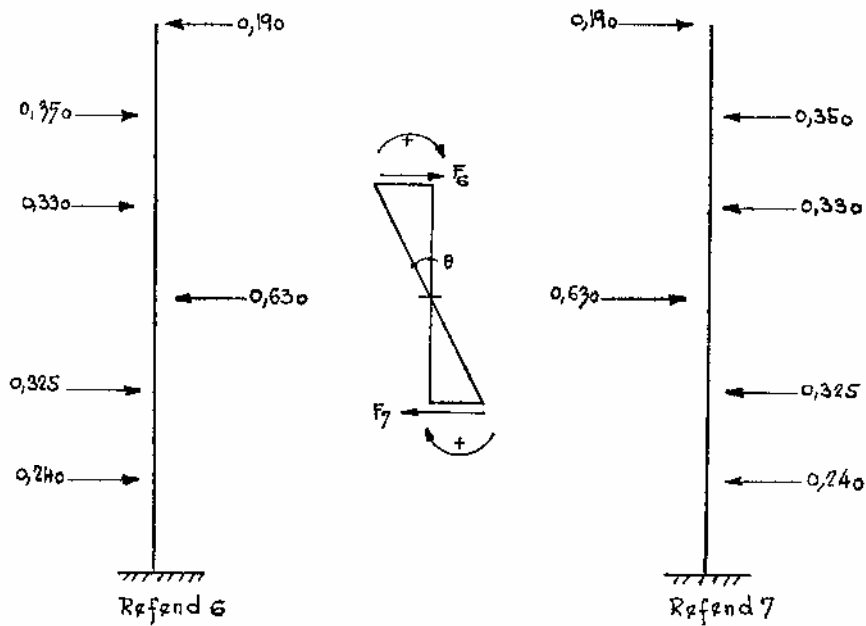


FIG. IV.117.

d'où la valeur des moments qui doivent venir s'ajouter algébriquement à ceux provoqués par  $F_4$  et  $F_5$ .

Soit :	au niveau 6	$-0,190 \times 8 = -1,520 \text{ T}\cdot\text{m}$
	au niveau 5	$0,350 \times 8 = 2,800 \text{ T}\cdot\text{m}$
	au niveau 4	$0,330 \times 8 = 2,640 \text{ T}\cdot\text{m}$
	au niveau 3	$-0,630 \times 8 = -5,040 \text{ T}\cdot\text{m}$
	au niveau 2	$0,325 \times 8 = 2,600 \text{ T}\cdot\text{m}$
	au niveau 1	$0,240 \times 8 = 1,920 \text{ T}\cdot\text{m}$

Le problème est un peu plus complexe lorsque le système de contreventement longitudinal est constitué par des éléments différents (un portique sur une façade et un refend sur l'autre façade par exemple).

Ce que nous savons dans ce cas, c'est que par suite de la rotation, ce système « réagit », comme dans le cas précédent, et, qu'à chaque niveau, nous devons encore avoir un couple où :

$$F_6 = -F_7.$$

NOTA : La position du point *O* peut facilement être fixée dans deux cas :

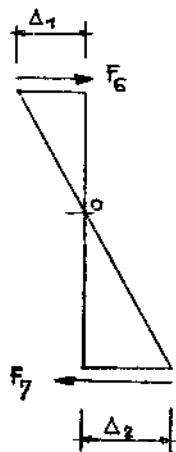


FIG. IV.118.

a) En fonction des *valeurs respectives* des inerties des refends 6 et 7, dans le cas où il s'agit de deux refends.

b) En fonction des *déplacements relatifs*, s'il s'agit de deux portiques. Il est nécessaire dans ce cas d'étudier chaque portique sous l'effet de la série de forces de 1 tonne à chaque niveau, puis de comparer les déplacements relatifs obtenus, puisque les déplacements relatifs sont proportionnels à l'effort tranchant, et qu'ici, l'effort tranchant, sollicitant chaque portique, est égal en valeur absolue (fig. IV.118).

Pour un système de contreventement longitudinal, constitué par des éléments différents, nous pouvons, toutefois, remarquer que pour une même rotation d'un plancher, de largeur bien déterminée, quelle que soit la position du point *O* sur l'axe neutre, la somme des déplacements de chaque élément de contreventement est constante puisque :

$$AA_1 = \theta a$$

$$CC_1 = \theta(l-a)$$

d'où  $AA_1 + CC_1 = \theta l$

ici  $l =$  largeur totale du bâtiment

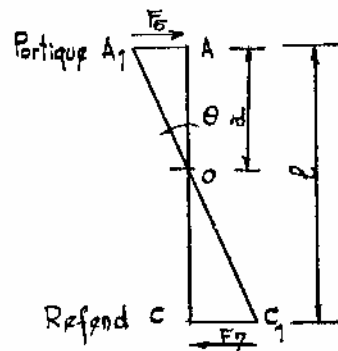


FIG. IV.119.

Il suffit donc d'écrire, qu'à chaque niveau, la somme des déplacements du refend, d'une part, et du portique, d'autre part, est égale à  $\theta l$  ( $\theta$  a une valeur différente à chaque étage).

Là encore, il y a lieu de résoudre un système d'équations, où il y a autant d'inconnues que d'étages.

Les inconnues sont :  $F_1, F_2, F_3, F_4, \dots, F_n$  (forces qui sollicitent aussi bien le portique que le refend, puisque ces forces sont égales et opposées à chaque niveau).

La position du point  $O$  est facilement déterminée, grâce à l'intensité des forces à chaque niveau et des déplacements qui en résultent.

Si un élément de contreventement existe entre les deux façades longitudinales et assure également la stabilité dans le sens longitudinal, on devra déterminer la position du point  $O$ , à chaque niveau, par l'étude préalable du contreventement longitudinal (application de l'itération, après avoir remplacé l'élément intermédiaire par une « réaction » due au déplacement imposé).

Connaissant la position du point  $O$ , à chaque niveau, le système de forces  $F_1, F_2, F_3$  doit être, pour chacun de ces niveaux, tel que :

- a) La somme de  $F_1, F_2, F_3$  est égale à zéro.
- b) La somme des déplacements des éléments de façade sous l'effet de  $F_1$ , d'une part, et de  $F_3$ , d'autre part, est égale à  $\theta l$ .
- c) Le déplacement de l'élément intermédiaire sous l'effet de  $F_2$  est égal à  $\theta d$ .

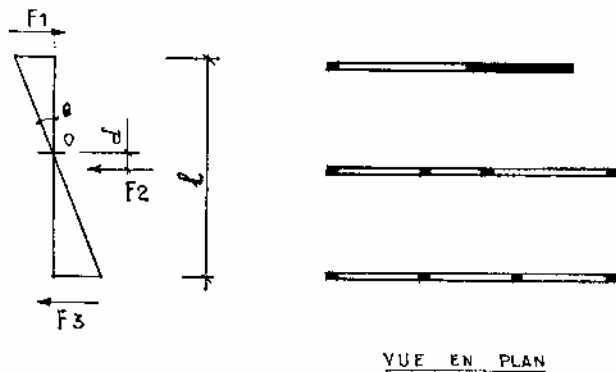


FIG. IV.120.

Pour trouver la position du centre de rotation, on devra tenir compte de la pente du plancher à la fin de l'itération qui a permis l'étude du contreventement longitudinal.

A ce stade, on connaît le déplacement de chaque élément de contreventement et l'angle  $\omega$  de rotation du plancher pour chacun des niveaux. Ces déplacements correspondent à une translation et à une rotation.

On sait également qu'à chaque niveau (fig. IV.121) :

un effort  $F'_1$  correspond à  $\Delta_1$

un effort  $F'_2$  correspond à  $\Delta_2$

un effort  $F'_3$  correspond à  $\Delta_3$

Chaque effort  $F'_1$   $F'_2$   $F'_3$  se décompose :

a) en un effort dû à la translation  $F_T$  correspondant à  $\Delta_T$

b) en un effort dû à la rotation  $F_R$  correspondant à  $\Delta_R$

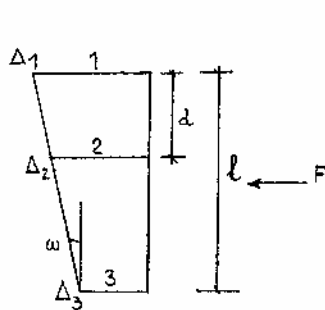


FIG. IV.121.

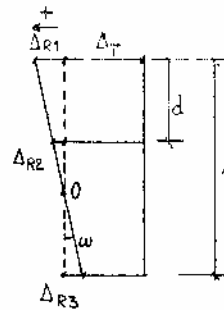


FIG. IV.122.

On a ainsi

$$F'_1 = F_{T_1} + F_{R_1},$$

$$F'_2 = F_{T_2} + F_{R_2},$$

$$F'_3 = F_{T_3} + F_{R_3}.$$

Dans la rotation, on doit avoir (fig. IV.122)

$$F_{R_1} + F_{R_2} + F_{R_3} = 0(*),$$

$$\Delta_{R_1} - \Delta_{R_3} = \omega l,$$

$$\Delta_{R_1} = \Delta_{R_2} + \omega d.$$

D'où la position du point  $O$ , à chaque niveau.

REMARQUE : Il est intéressant, également, de noter le cas où deux refends parallèles, assurant le contreventement transversal, reçoivent, en extrémité, et à chaque niveau, une poutre qui peut être considérée comme encastree

(\*)  $F_{Ri}$  s'exprime en fonction des  $\Delta_{Ri}$ .

à l'extrémité des deux refends, et qui doit, par suite, participer au contreventement longitudinal.

Si les deux refends ont mêmes dimensions, donc même inertie, et si le bâtiment subit une « translation-rotation », leurs fibres extrêmes ne présentent pas le même déplacement dans le plan vertical, puisque l'effet de rotation a fait varier les sollicitations qui étaient semblables après la simple translation.

Le même phénomène de « dénivellation » peut être constaté, a fortiori, si les deux refends ont des inerties différentes.

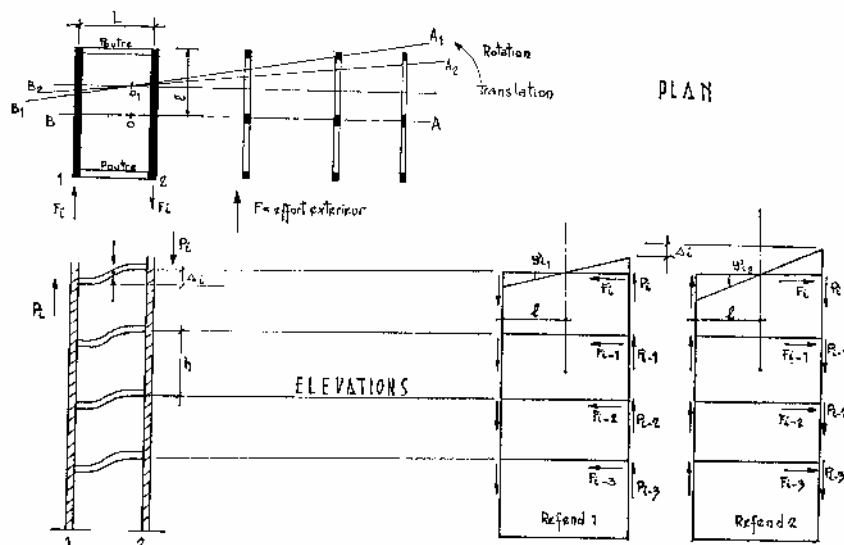


FIG. IV.123.

Il faut alors calculer, à chaque niveau, le déplacement vertical  $\Delta_i$  de la poutre et déduire les efforts verticaux qui en résultent, au droit des refends

$$\Delta_i = y'_{i_1} l - y'_{i_2} l,$$

$$\Delta_i = \frac{P_i L^3}{12EI_p},$$

d'où  $P_i = \frac{12EI_p \Delta_i}{L^3}$  avec  $I_p$  = inertie de la poutre.

Les différents efforts  $P_i$  corrigent le moment de flexion sollicitant les refends dans le sens transversal, et provoquent par suite un nouvel état d'équilibre. (Nous rappelons que nous avons supposé que les poutres étaient parfaitement encastées dans les extrémités des refends).

En effet, les moments, pris à chaque niveau, par rapport à l'axe vertical du refend

$$M = P_i l$$

provoquent, en pied du refend, un moment  $\Sigma P_i l$ . Ce moment peut être remplacé par une série de forces horizontales, agissant au droit du refend, telles que à chaque niveau, tous les moments dus aux efforts  $P_i$  (agissant au-dessus de ce niveau) correspondent à ceux provoqués par les efforts  $F_i$  appliqués à tous les niveaux situés au-dessus du niveau considéré. Les efforts  $F_i$  pourront être facilement déterminés, en commençant par l'étage supérieur, puis en opérant étage par étage.

À chaque étage, l'état d'équilibre antérieur est corrigé par le moment des forces  $F_i$ , pris par rapport au centre de rotation  $O$ , choisi pour la recherche de l'équilibre dans le sens transversal.

L'équilibre peut être obtenu, comme précédemment, en opérant par itération. Les efforts  $F_i$  qui devront être retenus, pour considérer que l'équilibre est réalisé, seront ceux qui correspondent à la vérification suivante :

La nouvelle position  $A_2 B_2$  de la droite  $AB$  par suite de l'effet des nouveaux moments introduits, fixe les flèches des refends à chaque niveau. Il faut vérifier à tous les niveaux, que les flèches des refends, dans une position déterminée de  $A_2 B_2$  (\*), correspondent effectivement à celles provoquées par les efforts :

$$R_{i1} + F_i \quad \text{sur le refend 1}$$

et 
$$R_{i2} - F_i \quad \text{sur le refend 2}$$

$R_{i1}$  et  $R_{i2}$  sont les efforts obtenus au niveau  $i$  sans tenir compte de la dénivellation  $\Delta_i$ .

Il faut remarquer que les moments des forces  $F_i$  par rapport au point  $O$ , provoquent une redistribution de tous les efforts dans le système de contreventement transversal.

La somme des efforts obtenus sur chaque élément du contreventement doit évidemment correspondre à l'effort extérieur du vent.

En conclusion, nous pouvons dire, que la présence d'une poutre transversale ou d'un plancher rigide encasté sur les refends, à chaque niveau, a contribué à donner une raideur de torsion à l'ensemble des deux refends.

D'une façon plus générale, l'intervention du système de contreventement, perpendiculaire à celui qui est directement sollicité, donne à l'ensemble de l'ouvrage une raideur de torsion, même si chaque élément du contreventement, pris séparément, n'en présente aucune.

(\*) Il s'agit de la flèche moyenne, choisie lorsqu'on opère par itération.

### D. STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS DE GRANDE HAUTEUR

Les constructions de grand élancement peuvent dans certaines conditions présenter une instabilité.

Soumise à une force horizontale  $F$ , appliquée à la hauteur du centre de gravité, la construction de poids  $P$ , peut s'incliner d'un angle  $\theta$ . La fondation exerce alors un couple de rappel  $C$  vers la verticale initiale.

Ce couple est proportionnel à l'angle  $\theta$ .

En appelant  $h$  la hauteur du centre de gravité, l'équilibre des moments par rapport à  $O$ , centre de la fondation s'écrit :

$$(Ph\theta) + (Fh) = C\theta. \quad (1)$$

Si  $F$  tend vers zéro, l'équation précédente définit une hauteur critique du centre de gravité.

$$h_c = \frac{C}{P}. \quad (2)$$

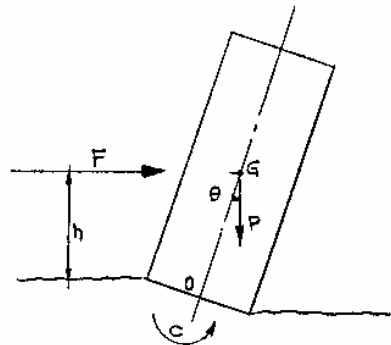


FIG. IV.124.

Si  $a$  est le rayon du cercle inscrit dans la base du bâtiment, on peut exprimer  $C$  par la formule :

$$C = \frac{4}{3} \frac{Ea^3}{1-\nu^2}, \quad (3)$$

où

$E$  = module d'élasticité du sol

$\nu$  = coefficient de Poisson du sol, supposé élastique.





b) pour  $h = 10$  cm

$$\omega = \frac{1}{0,1} \sqrt{\frac{1 \cdot 10^3 \times 0,01 \times 9,8}{2 \times 0,75 \times 7,6 \times \pi \times 0,1} - \frac{3}{4} 9,8 \times 0,1} = 52,$$

et 
$$T = \frac{2\pi}{52} = 12 \cdot 10^{-2} \text{ s}.$$

c) pour  $h = 50$  cm

$$\omega = \frac{1}{0,5} \sqrt{\frac{1 \cdot 10^3 \times 0,01 \times 9,8}{2 \times 0,75 \times 7,6 \times \pi \times 0,5} - \frac{3}{4} 9,8 \times 0,5} = 2,7,$$

et 
$$T = \frac{2\pi}{2,7} = 2,3 \text{ s}.$$

Précisons enfin que  $E$  et  $\gamma$  peuvent varier dans le temps. Leurs valeurs  $E'$  et  $\gamma'$  sont liées à  $E$  et  $\gamma$  par l'expression

$$\frac{E}{1+\nu} = \frac{E'}{1+\nu'} \quad (7)$$

Il sera donc important d'évaluer le tassement instantané et le tassement différé sous la construction. La formule (4) donne :

- a) avec  $E$  et  $\nu$  le tassement instantané  $W_b$ ,
- b) avec  $E'$  et  $\nu'$  le tassement final  $W_f$ .

La différence entre ces deux quantités représente le tassement différé qui, en définitive, est celui qui intéresse le plus le constructeur.

REMARQUE : Pour les sables et les argiles, normalement consolidés le module d'élasticité croît avec la profondeur, alors que le coefficient de Poisson reste à peu près constant.

#### Applications aux immeubles

1<sup>er</sup> exemple : Tour de section  $4 \times 6$  m et de 54 m de hauteur, reposant sur un radier élargi de  $7 \times 9$  m. On prendra

$$E = 1\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nu = 0,5.$$

Il s'agit d'un ouvrage très lourd, dont la masse volumique moyenne a pour valeur

$$\rho = 500 \text{ kg/m}^3$$

(Cette valeur correspond à une tour circulaire de 4 m de diamètre).

La formule (2) peut s'écrire :

$$h_c = \frac{C}{2h_c S \rho g},$$

ou

$$h_c = \sqrt{\frac{C}{2S\rho g}}.$$

On sera du côté de la sécurité en évaluant  $C$  par la formule (3), avec  $2a = 7$  m.

Par ailleurs  $S = \pi \cdot 2^2 = 12,5$  m<sup>2</sup>

On obtient ainsi :

$$C = \frac{4}{3} \frac{1 \cdot 10^4 \times 3,5^3}{0,75} = 76 \cdot 10^4,$$

d'où  $h_c = \sqrt{\frac{76 \cdot 10^4}{2 \times 12,5 \times 0,5 \times 9,8}} = 10 \sqrt{\frac{7\,600}{122}} = 79$  m .

Soit  $2h_c = 158$  m ,

valeur très supérieure à la valeur réelle.

Le calcul de la pulsation du mouvement périodique donne :

$$\omega = \frac{1}{27} \sqrt{\frac{1 \cdot 10^4 \times 3,5}{2 \times 0,75 \times 0,5 \times \pi \times 27}} - \frac{3}{4} 9,8 \times 27 = 0,68 .$$

Soit  $T = \frac{2\pi}{0,68} = 9,3$  s .

Pour un vent exceptionnel de 150 kg/m<sup>2</sup>, une tranche de 1 m de hauteur, sur la façade de 6 m de largeur, reçoit 900 kg, soit pour toute la façade :

$$54 \times 0,9 = 48,500 \text{ tonnes.}$$

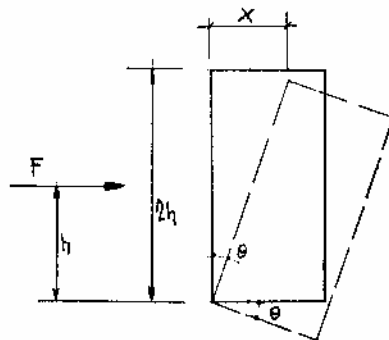


FIG. IV.125.

Si le bâtiment est considéré comme infiniment rigide, la rotation  $\theta$ , sur la fondation, peut encore s'écrire :

$$\theta = \frac{X}{2h} = \frac{X}{54},$$

en appelant  $X$  l'amplitude du déplacement du sommet.

L'équation (1)  $Fh = 0(C - Ph)$

devient :

$$48,5 \times 27 = \frac{X}{54} (76 \cdot 10^4 - 54 \times 12,5 \times 0,5 \times 9,8 \times 27),$$

d'où l'on tire

$$X = 0,105 \text{ m}$$

**Fondations rectangulaires. Coefficients de forme**

**1° Action d'une charge concentrée en O**

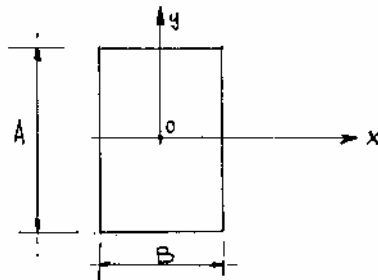


FIG. IV.126.

Dans ce cas le déplacement est uniforme et l'on peut écrire :

$$W = W_0 = f \frac{1 - \nu^2}{EB} P \tag{8}$$

où  $f$  est un coefficient de forme et  $B$  une longueur caractérisant les dimensions de la fondation. Les valeurs de  $f$  sont résumées dans le tableau suivant :

$B/A$	1	1,2	1,6	1,8	2	3	4	5
$f$	0,87	0,94	1,07	1,13	1,18	1,4	1,55	1,68

## 2° Action d'un couple

Sous l'action d'un couple  $M$  autour de  $OX$ , la fondation subit une rotation  $\theta$  autour de ce même axe.

$$\text{On a} \quad \theta = k \frac{1-\nu^2}{E} \frac{M}{A^2 B}. \quad (9)$$

Le coefficient de forme  $k$  est fonction du rapport des dimensions  $A$  et  $B$  de la fondation.

Les valeurs de  $k$  sont reproduites dans le tableau suivant :

$B/A$	$k$	$B/A$	$k$	$B/A$	$k$
0,2	2,18	0,7	3,48	1,80	4,26
0,25	2,41	0,8	3,62	2,00	4,30
0,33	2,72	0,9	3,71	2,33	4,40
0,40	2,92	1,00	3,80	3,00	4,52
0,50	3,14	1,20	3,95	4,00	4,65
0,60	3,32	1,40	4,05	5,00	4,72
—	—	—	—	$\infty$	5,01

Il est à noter que tout système de charges verticales appliquées à la fondation, peut être réduit à une force concentrée  $O$  et à des couples dirigés suivant  $ox$  et  $oy$ .

## 3° Etude du tassement

Le comportement élastique d'un sol parfaitement saturé est caractérisé par :

a) Les coefficients réels  $E'$  d'élasticité et  $\nu'$  de Poisson. Ces coefficients concernent les grains solides, abstraction faite de l'eau interstitielle.

b) Les coefficients apparents  $E$  et  $\nu$  qui tiennent compte de la pression interstitielle.

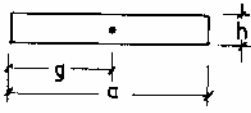
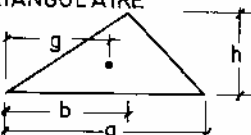
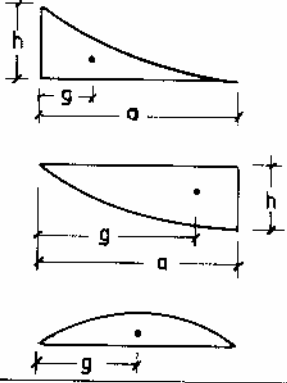
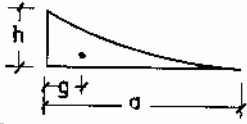
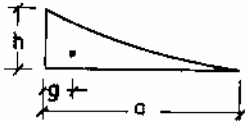
Pratiquement on prend  $\nu = 0,5$

Nous avons vu que ces coefficients étaient reliés entre eux par la relation (7).

$$\frac{E}{1+\nu} = \frac{E'}{1+\nu'}$$

Pour une fondation rectangulaire les équations (8) et (9) permettent d'obtenir directement le tassement instantané  $W_0$  et la rotation  $\theta_0$  en utilisant les coefficients  $E$  et  $\nu$ , ou bien les valeurs finales en utilisant les coefficients  $E'$  et  $\nu'$ .

ANNEXE 1

DIAGRAMME DES MOMENTS	AIRE	POSITION DU CENTRE DE GRAVITE
<p>RECTANGULAIRE</p> 	$A = ah$	$g = \frac{a}{2}$
<p>TRIANGULAIRE</p> 	$A = \frac{1}{2} ah$	$g = \frac{a + b}{3}$
<p>PARABOLE DU SECOND DEGRE</p> 	$A = \frac{1}{3} ah$ $A = \frac{2}{3} ah$ $A = \frac{2}{3} ah$	$g = \frac{1}{4} a$ $g = \frac{5}{8} a$ $g = \frac{1}{2} a$
<p>PARABOLE CUBIQUE</p> 	$A = \frac{1}{4} ah$	$g = \frac{1}{5} a$
<p>PARABOLE DE DEGRE "n"</p> 	$A = \frac{1}{n+1} ah$	$g = \frac{1}{n+2} a$

ANNEXE 2

## ÉTABLISSEMENTS DES FORMULES PROPOSÉES

### Pour les portiques soumis à des efforts horizontaux

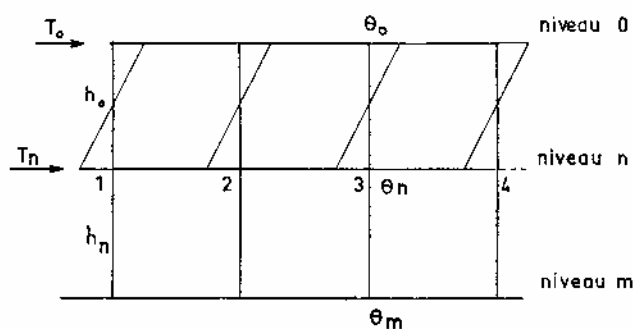
#### 1° Première approximation

On adoptera pour valeur initiale de  $\theta_n$  une valeur unique pour tous les nœuds d'un même niveau.

a) Pour les niveaux supérieurs

$$E\theta_n = \frac{M_n + M_0}{24\Sigma K_{in}} \quad (a)$$

où  $M_0$  est le moment d'étage  $T_0 \cdot h$  ( $T_0$  = effort tranchant au niveau 0);  
 $M_n$  est le moment d'étage  $T_n \cdot h$  ( $T_n$  = effort tranchant au niveau  $n$ );  
 $\Sigma K_{in}$  est la somme des raideurs de toutes les traverses de l'étage considéré.



On suppose dans cette formule approchée qu'une articulation existe à mi-hauteur des colonnes situées immédiatement au-dessus et au-dessous du niveau considéré, de sorte que la somme des moments en pied des colonnes situées au-dessus du niveau considéré «  $n$  » est égale à  $\frac{T_0 h_0}{2}$

$$\text{Soit } \frac{M_0}{2} = \frac{T_0 h_0}{2}$$

de même la somme des moments en tête des colonnes situées au-dessous du niveau considéré «  $n$  » est égale à  $\frac{T_n h_n}{2}$

$$\frac{M_n}{2} = \frac{T_n h_n}{2}$$

Ces moments doivent être absorbés par les traverses qui ne subissent pas de déplacement vertical, de sorte que l'on a, en admettant une rotation semblable pour tous les nœuds du niveau «  $n$  », à considérer l'action de deux moments  $\frac{M_0}{2}$  et  $\frac{M_n}{2}$  sur une barre de rigidité  $\Sigma K_{t \cdot n}$ .

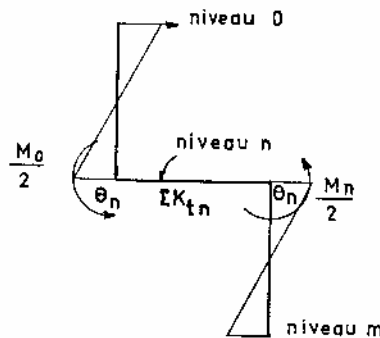
Les formules générales nous donnent ainsi :

$$\frac{M_0}{2} = 2E\Sigma K_{t \cdot n}(2\theta_n + \theta_n)$$

$$\frac{M_n}{2} = 2E\Sigma K_{t \cdot n}(2\theta_n + \theta_n)$$

$$\text{soit } \frac{M_0 + M_n}{2} = 4E\Sigma K_{t \cdot n} \cdot 3\theta_n$$

$$\text{ou } E\theta_n = \frac{M_0 + M_n}{24\Sigma K_{t \cdot n}}$$



b) Lorsque le niveau « 1 » comporte des colonnes encastrées en pied, on adoptera la formule de première approximation :

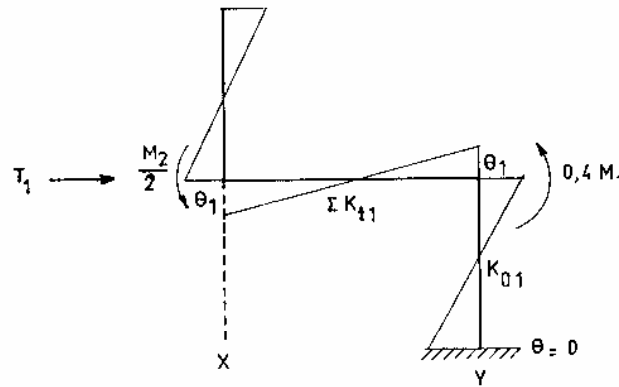
$$E\theta_1 = \frac{M_1 + M_2}{24\Sigma K_{t \cdot 1} + 2\Sigma K_{e \cdot 1}} \quad (b)$$



qui exprime que la raideur des colonnes du 1<sup>er</sup> niveau, parfaitement encastées en pied, intervient et doit réduire la rotation des nœuds du 1<sup>er</sup> niveau. En effet en utilisant les formules approchées de BOWMAN on s'aperçoit que sur le 1<sup>er</sup> niveau le point d'inflexion est placé à 0,4 h du sommet et par suite à 0,6 h de l'encastrement des colonnes, de sorte que la somme des moments en tête des colonnes de l'étage « I » n'est plus, comme pour les niveaux courants

$$T_1 \cdot 0,5h = 0,5T_1h = 0,5M_1$$

mais  $T_1 \cdot 0,4h = 0,4T_1h = 0,4M_1$ .



Nous avons par conséquent, dans la traverse :

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_2}{2} &= 2E\Sigma K_{t.1}(2\theta_1 + \theta_1) \\ +0,4M_1 &= 2E\Sigma K_{t.1}(2\theta_1 + \theta_1) \end{aligned} \right\} 12E\theta_1\Sigma K_{t.1}$$

Or, par rapport aux colonnes du 1<sup>er</sup> niveau, nous pouvons également écrire, en faisant abstraction du déplacement :

$$0,4M_1 = 2E\Sigma K_{c.1} \cdot 2\theta_1$$

ou  $0,1M_1 = E\Sigma K_{c.1} \cdot \theta_1$

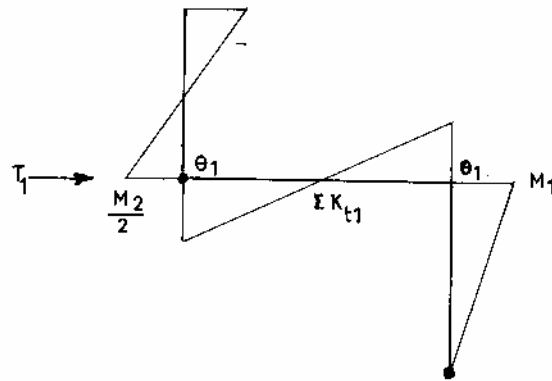
ainsi  $\frac{M_2}{2} + \frac{M_1}{2} - E\Sigma K_{c.1} \theta_1 = 12E\theta_1 \Sigma K_{t.1}$

soit  $M_2 + M_1 = E\theta_1(24\Sigma K_{t.1} + 2\Sigma K_{c.1})$

c) Lorsque le niveau « 1 » comporte des colonnes articulées en pied, on adoptera la formule de première approximation :

$$E\theta_1 = \frac{2M_1 + M_2}{24\Sigma K_{t.1}} \quad (c)$$

Cette formule s'explique encore par le fait que la somme des moments en tête de colonnes de l'étage « 1 » est dans ce cas égale à  $T_1 h$ , de sorte que nous écrirons ici :



$$\frac{M_2}{2} = 2E\Sigma K_{t.1}(2\theta_1 + \theta_1) \text{ soit } M_2 = 12E\theta_1\Sigma K_{t.1}$$

$$M_1 = 2E\Sigma K_{t.1}(2\theta_1 + \theta_1) \text{ ou } 2M_1 = 12E\theta_1\Sigma K_{t.1}$$

Ce qui donne bien :

$$M_2 + 2M_1 = 24E\theta_1\Sigma K_{t.1}.$$

Compte tenu de l'hypothèse suivant laquelle on suppose que tous les nœuds ont même rotation à un même niveau, on peut obtenir *une première approximation du déplacement*, en utilisant la formule générale donnant l'équation d'étage.

Ce qui donne :

$$E\psi_n = \frac{M_n}{12\Sigma K_{c.n}} + \frac{E\theta_m + E\theta_n}{2} \quad (d)$$

### 2° Deuxième approximation

Avant de passer à la vérification des « équations d'étage et de nœud » avec les résultats obtenus, notamment avec la 1<sup>re</sup> approximation du déplacement, on pourra, éventuellement avoir une *deuxième approximation* des rotations, en supposant, *dans la formule générale* de l'équation de nœud, que toutes les autres extrémités des barres aboutissant à un même nœud, ont même rotation que le nœud considéré. On a ainsi *pour les niveaux supérieurs* :

$$E\theta_{n \cdot x} = \frac{\Sigma K_c \cdot E\psi}{\Sigma K} \quad (e)$$

cette égalité provient de « l'équation de nœud », en faisant  $\theta_i = \theta_{n \cdot x}$  ; en effet :

$$E\theta_{n \cdot x} \cdot 2\Sigma K + \Sigma K \cdot E\theta_{n \cdot x} = 3\Sigma K_c \cdot E\psi$$

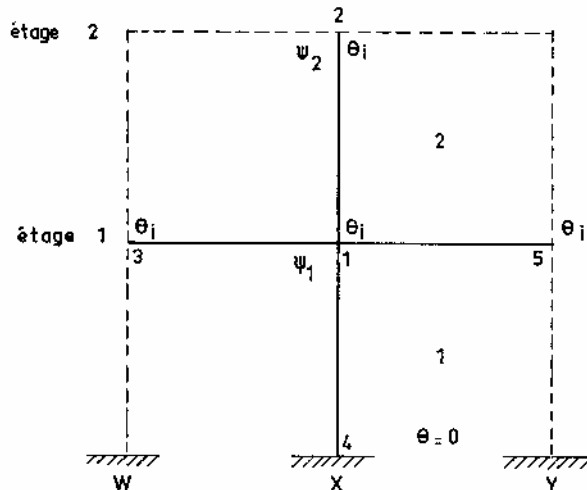
ce qui donne bien :

$$\Sigma K \cdot E\theta_{n \cdot x} = \Sigma K_c \cdot E\psi.$$

Lorsque le niveau « 1 » comporte des colonnes encastrees en pied, on adoptera la formule de deuxième approximation :

$$E\theta_{1x} = \frac{\Sigma K_c \cdot E\psi}{\Sigma K - \frac{1}{3} K_{c \cdot 1x}} \quad (f)$$

Cette formule a été établie en écrivant encore que la somme des moments dans les différentes barres était nulle, au droit d'un nœud.



$$\begin{aligned} \text{On a : } & 2EK_{1-2}(2\theta_i + \theta_i - 3\psi_2) \\ & 2EK_{1-3}(2\theta_i + \theta_i) \\ & 2EK_{1-4}(2\theta_i - 3\psi_1) \\ & 2EK_{1-5}(2\theta_i + \theta_i) \\ & 6EK_{1-2}\theta_i + 6EK_{1-3}\theta_i + 4EK_{1-4}\theta_i + 6EK_{1-5}\theta_i = 6EK_{1-2}\psi_2 + 6EK_{1-4}\psi_1 \end{aligned}$$

$$\text{ou } 6E\theta_i \left( \Sigma K - \frac{1}{3} K_{1-4} \right) = 6E\psi_2 K_{1-2} + 6E\psi_1 K_{1-4}$$

Nous trouvons bien la formule proposée, puisque

$$K_{1-4} = K_{c \cdot 1x} \quad \text{et} \quad \theta_i = \theta_{1x}$$

$$\text{et par suite } E\theta_{1x} = \frac{\Sigma K_c E\psi}{\Sigma K - \frac{1}{3} K_{c \cdot 1x}}$$

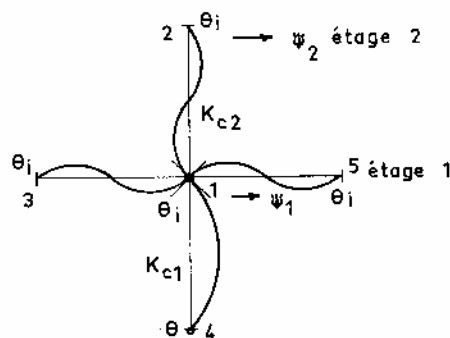
et si le niveau « 1 », comporte des colonnes articulées en pied, on adoptera la formule de deuxième approximation :

$$E\theta_{1 \cdot x} = \frac{K_{c \cdot 1x} E\psi_1 + 2K_{c \cdot 2x} E\psi_2}{2\Sigma K - K_{c \cdot 1x}} \quad (g)$$

On remarque, dans le cas d'une barre quelconque soumise à une rotation  $\theta_1$  et un déplacement  $\psi_1$  à une extrémité, et dont l'autre extrémité est articulée, que la rotation  $\theta$  au droit de l'articulation est égale à :

$$\frac{3\psi_1 - \theta_i}{2}$$

$$\text{En effet } M_{4-1} = 2EK(2\theta + \theta_i - 3\psi_1) = 0$$



Soit 
$$\theta = \frac{3\psi_1 - \theta_i}{2}$$

La relation générale d'équilibre des moments, peut donc s'écrire :

$$\left. \begin{array}{l} 2EK_{1-3}(2\theta_i + \theta_i) \\ 2EK_{1-5}(2\theta_i + \theta_i) \\ 2EK_{c.2}(2\theta_i + \theta_i - 3\psi_2) \\ \text{et } 2EK_{c.1} \left( 2\theta_i + \frac{3\psi_1 - \theta_i}{2} - 3\psi_1 \right) \end{array} \right\} = 0$$

ce qui donne :

$$6EK_{1-3}\theta_i + 6EK_{1-5}\theta_i + 6EK_{c.2}\theta_i + 3EK_{c.1}\theta_i = 6EK_{c.2}\psi_2 + 3EK_{c.1}\psi_1$$

ou  $3\theta_i(2\Sigma K - K_{c.1}) = 6EK_{c.2}\psi_2 + 3EK_{c.1}\psi_1$

d'où la formule proposée.

ANNEXE 3

I. POUTRE D'INERTIE CONSTANTE  
SUR APPUI CONTINU ÉLASTIQUE

1. Poutre infinie.

a) Charge concentrée.

La pression correspond à  $p(x) = Ky$  (fig. IV.1)

la longueur élastique  $l_e$  est telle que  $a = \frac{1}{l_e} = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}}$

( $EI$  est la rigidité de flexion de la poutre et  $K = c \cdot b$  le produit du module de fondation  $c$  par la largeur de la semelle  $b$ .)

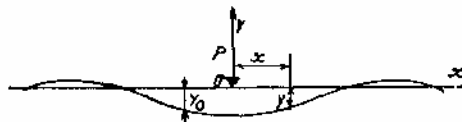


FIG. IV.1.

$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$	
$y = -\frac{Pa}{2K} \phi(ax)$	$y_0 = -\frac{Pa}{K}$	$y = \frac{Pa}{2K} \phi(ax)$	enfoncement
$y' = -\frac{Pa^2}{K} \zeta(ax)$	$y'_0 = 0$	$y' = \frac{Pa^2}{K} \zeta(ax)$	rotation
$M = \frac{P}{4a} \psi(ax)$	$M_0 = \frac{P}{4a}$	$M = \frac{P}{4a} \psi(ax)$	moment fléchissant
$T = \frac{P}{2} \theta(ax)$	$T_0 = \pm \frac{P}{2}$	$T = -\frac{P}{2} \theta(ax)$	effort tranchant

$$\phi = e^{-ax} (\cos ax + \sin ax)$$

$$\theta = e^{-ax} \cos ax$$

$$\psi = e^{-ax} (\cos ax - \sin ax)$$

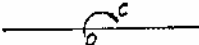
$$\zeta = e^{-ax} \sin ax$$

Les résultats ci-après pourront être d'une grande utilité :

$$\begin{array}{llll} \phi' = -2 a \zeta & \psi' = -2 a \theta & \theta' = -a \phi & \zeta' = a \psi \\ \phi'' = -2 a^2 \psi & \psi'' = 2 a^2 \phi & \theta'' = 2 a^2 \zeta & \zeta'' = -2 a^2 \theta \\ \phi''' = 4 a^3 \theta & \psi''' = -4 a^3 \zeta & \theta''' = 2 a^3 \psi & \zeta''' = 2 a^3 \phi \\ \phi'''' = -4 a^4 \phi & \psi'''' = -4 a^4 \psi & \theta'''' = -4 a^4 \theta & \zeta'''' = -4 a^4 \zeta \end{array}$$

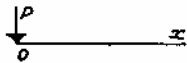
et

$$\begin{array}{ll} \int \phi dx = -\frac{\theta}{a} & \int \psi dx = \frac{\zeta}{a} \\ \int \theta dx = -\frac{\psi}{2a} & \int \zeta dx = -\frac{\phi}{2a} \\ \int x \phi dx = -\frac{\psi}{2a^2} - \frac{x\theta}{a} & \int x \psi dx = \frac{\phi}{2a^2} + \frac{x\zeta}{a} \\ \int x \theta dx = \frac{\zeta}{2a^2} - \frac{x\psi}{2a} & \int x \zeta dx = -\frac{\theta}{2a^2} - \frac{x\phi}{2a} \end{array}$$

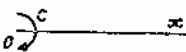
b) Couple appliqué en un point  (fig. IV.2.)

$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$	
$y = \frac{Ca^2}{K} \zeta(ax)$	$y_0 = 0$	$y = -\frac{Ca^2}{K} \zeta(ax)$	enfoucement
$y' = -\frac{Ca^3}{K} \psi(ax)$	$y'_0 = -\frac{Ca^3}{K}$	$y' = -\frac{Ca^3}{K} \psi(ax)$	rotation
$M = -\frac{C}{2} \theta(ax)$	$M_0 = \pm \frac{C}{2}$	$M = \frac{C}{2} \theta(ax)$	moment fléchissant
$T = -\frac{Ca}{2} \phi(ax)$	$T_0 = -\frac{Ca}{2}$	$T = -\frac{Ca}{2} \phi(ax)$	effort tranchant

**2. Poutre demi-infinie.**

a) Charge concentrée à l'extrémité  (fig. IV.3).

$y = -\frac{2 Pa}{K} \theta(ax)$	$y_0 = -\frac{2 Pa}{K}$	enfoncement
$y' = +\frac{2 Pa^2}{K} \phi(ax)$	$y'_0 = \frac{2 Pa^2}{K}$	rotation
$M = -\frac{P}{a} \zeta(ax)$	$M_0 = 0$	moment fléchissant
$T = -P\psi(ax)$	$T_0 = -P$	effort tranchant

b) Couple  $C$  à l'extrémité  (fig. IV.4).

$y = \frac{2 Ca^2}{K} \psi(ax)$	$M = C.\phi(ax)$
$y' = \frac{-4 Ca^3}{K} \theta(ax)$	$\frac{Pa}{2K} T = -2 Ca.\zeta(ax)$

Nota. Le formulaire Courtand et Lebellet donne :

- les valeurs des fonctions  $\phi \theta \psi \zeta$  pour  $x$  variant de 0 à 8,
- les tables de Magnel permettant de définir  $y, M$  et  $T$  pour une position quelconque de  $P$  sur une poutre demi-infinie.

**II. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE FOURIER**

1) Charge uniforme partielle de longueur  $2c$  (fig. IV.5)

$$q(x) = \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi d}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}$$

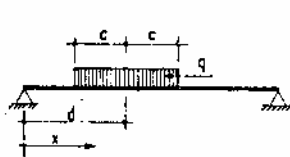


FIG. IV.5.



FIG. IV.6.



Soit en prenant le premier terme de la série  $m = 1$

$$q(x) = \frac{4q}{\pi} \sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi d}{l} \sin \frac{\pi x}{l}$$

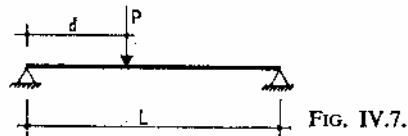
si  $2d = 2c = l$  (charge uniforme complète)

$$q(x) = \frac{4q}{\pi} \sin \frac{\pi x}{l}$$

pour

$$x = \frac{l}{2} \quad q_1 = \frac{4q}{\pi} \quad (\text{fig. IV.6})$$

2) Charge concentrée en un point quelconque (fig. IV.7)



$$q(x) = \frac{2P}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi d}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}$$

soit en prenant le premier terme de la série  $m = 1$

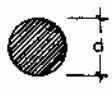
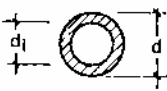
$$q(x) = \frac{2P}{l} \sin \frac{\pi d}{l} \sin \frac{\pi x}{l}$$

si  $d = \frac{l}{2}$

$$q(x) = \frac{2P}{l} \sin \frac{\pi x}{l}$$

### III. TORSION

TABLEAU IV.1 — Contrainte de cisaillement et module de torsion de sections usuelles

SECTIONS	$\tau_{\max} = \frac{C}{W}$	Module de torsion J
	$\frac{16}{\pi} \frac{C}{d^3}$	$\frac{\pi d^4}{32}$
	$\frac{16}{\pi} \frac{d}{d^4 - d_i^4} C$	$\frac{\pi}{32} (d^4 - d_i^4)$


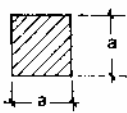
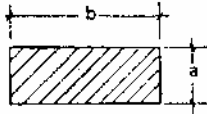
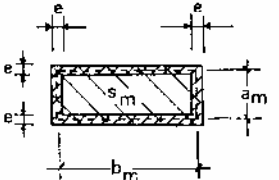


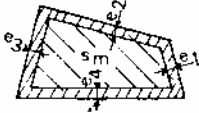
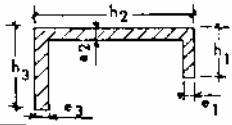
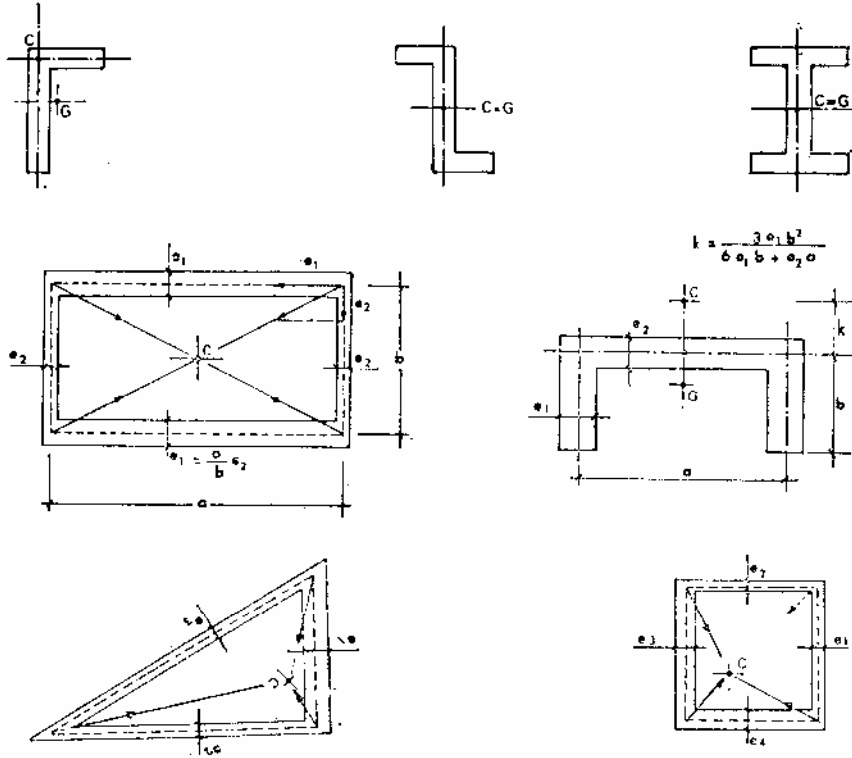
SECTIONS	$T_{max} = \frac{C}{W}$	Module de torsion J																											
	$\sim \frac{2}{\pi} \frac{C}{t d_m^2}$	$\sim \frac{\pi t d_m^3}{4}$																											
	$4,81 \frac{C}{a^3}$	$0,141 a^4$																											
	$\beta \frac{C}{a^2 b}$	$\propto a^3 b$																											
	<table border="1" data-bbox="614 884 1141 1041"> <thead> <tr> <th>b/a</th> <th>1,5</th> <th>2,0</th> <th>3,0</th> <th>4,0</th> <th>6,0</th> <th>8,0</th> <th>10,0</th> <th><math>\infty</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\alpha</math></td> <td>0,196</td> <td>0,229</td> <td>0,263</td> <td>0,281</td> <td>0,299</td> <td>0,307</td> <td>0,313</td> <td>0,333</td> </tr> <tr> <td><math>\beta</math></td> <td>4,33</td> <td>4,07</td> <td>3,74</td> <td>3,55</td> <td>3,35</td> <td>3,26</td> <td>3,20</td> <td>3,00</td> </tr> </tbody> </table>	b/a	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	$\infty$	$\alpha$	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333	$\beta$	4,33	4,07	3,74	3,55	3,35	3,26	3,20	3,00	
	b/a	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	$\infty$																				
$\alpha$	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333																					
$\beta$	4,33	4,07	3,74	3,55	3,35	3,26	3,20	3,00																					
 $s_m = b_m a_m \quad   \quad L = 2 a_m + 2 b_m$	$\frac{C}{2 s_m e_{min}}$	$\frac{4 s_m^2}{\int_L \frac{d\ell}{e}}$																											
	$\sim 5,32 \frac{C}{d^3}$	$0,1152 d^4$																											
	$\sim 5,41 \frac{C}{d^3}$	$0,1076 d^4$																											
	$\frac{C}{2 s_m e_{min}}$	$\frac{4 s_m^2}{\int_L \frac{d\ell}{e}}$																											
	$\frac{3 C e_i}{\int h_i e_i^3}$	$\frac{\int h_i e_i^3}{3}$																											

TABLEAU IV.2. — Centres de torsion de quelques profils



## BIBLIOGRAPHIE

- J. BLEVOT. — *Fondations des Bâtiments.*
- J. VERDEYEN. — *Mécanique du Sol.*
- S. TIMOSHENKO. — *Résistance des Matériaux - Tome I.*
- J. COURBON. — *Résistance des Matériaux - Tome I et II.*
- R. CHAMBAUD et P. LEBELLE. — *Formulaire du Béton Armé - Tome I.*
- M. COURTAND et P. LEBELLE. — *Formulaire du Béton Armé - Tome II.*
- P. ANDERSEN. — *Structures hyperstatiques.*
- B.Z. VLASSOV. — *Pièces longues en voiles minces.*
- M. ALBIGES et J. GOULET. — *Contreventement des Bâtiments (Annales I.T.B.T.P.).*
- P. HABIB et A. PUYO. — *Stabilité des constructions de grande hauteur (Annales I.T.B.T.P.).*