

Notions avancées de flexion

17.1 INTRODUCTION

Au chapitre 4, nous avons étudié un aspect particulier de la flexion, pour lequel une poutre droite, constituée d'un seul matériau, possédait une section symétrique par rapport au plan de chargement ou, du moins, un axe principal de la section coïncidant avec ce plan.

Nous aborderons maintenant certaines notions avancées concernant la flexion. Nous nous intéresserons en premier lieu aux poutres constituées de plus d'un matériau élastique, mais satisfaisant par ailleurs à toutes les hypothèses énoncées au chapitre 4.

Nous entreprendrons ensuite l'étude de la *flexion gauche*, cas général qui comprend la flexion d'une poutre droite de section quelconque, donc d'une poutre qui ne possède pas nécessairement un axe de symétrie. Dans un tel cas, le plan de chargement est en général incliné par rapport aux axes principaux de la section.

Nous orienterons enfin l'étude de la flexion gauche vers la résolution des problèmes pratiques posés par des profilés à parois minces, ouverts ou fermés. Nous compléterons ainsi l'étude amorcée au chapitre 16, qui concernait les notions avancées de torsion.

17.2 POUTRES HÉTÉROGÈNES À COMPORTEMENT ÉLASTIQUE

Il arrive souvent qu'on utilise des poutres constituées de plus d'un matériau ; on réalise ainsi une certaine économie tout en tirant parti des propriétés mécaniques de chacun de ces matériaux. Pensons notamment au béton armé qui, alliant la grande résistance du béton en compression à la résistance de l'acier en tension, est un matériau de construction économique, résistant et souvent esthétique. L'utilisation conjointe de l'acier et du bois, ou celle de l'aluminium et du plastique, sont d'autres exemples de combinaisons employées pour la fabrication de poutres particulières.

Nous n'étudierons ici que les poutres composées de matériaux à comportement élastique. La figure 17.1a présente schématiquement une telle poutre, constituée de deux matériaux A et B répartis uniformément sur toute sa longueur. Pour les besoins du développement mathématique, nous supposons (comme nous l'avons fait au chapitre 4, sect. 4.1) que, pour une poutre homogène, aucun effort tranchant n'agit et que la poutre est par conséquent soumise à une flexion pure.

Comme à l'article 4.2.1, nous admettons également ici que les plans transversaux demeurent plans après déformation (fig. 17.1b) et que l'équation 4.1 s'applique intégralement, soit :

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \tag{17.1}$$

Par contre, il faut modifier les développements des articles 4.2.2 à 4.2.4 pour tenir compte du fait que le module d'élasticité E n'est pas constant dans toute la section, mais qu'il a une valeur différente selon qu'on a affaire à la zone du matériau A (E_A) ou à celle du matériau B (E_B). On a donc ici, à partir de l'équation 4.2 :

$$(\sigma_x)_A = E_A \epsilon_x \tag{17.2a}$$

$$(\sigma_x)_B = E_B \epsilon_x \tag{17.2b}$$

Les figures 17.1b et 17.1c illustrent la répartition de contrainte qui résulte de la combinaison des équations 17.1 et 17.2. On peut constater qu'il y a discontinuité dans cette répartition de contrainte au niveau du plan de jonction entre les deux matériaux.

La combinaison de l'expression des conditions d'équilibre (équat. 4.3) avec les relations 17.2 fournit la solution recherchée.

On détermine l'équilibre des forces selon l'axe des x (équat. 4.3a) grâce à l'équation :

$$\int_A \sigma_x dA = -\frac{1}{\rho} \left[\int_{A_A} E_A y dA + \int_{A_B} E_B y dA \right] = 0 \tag{17.3}$$

où A_A et A_B sont, respectivement, les aires des sections transversales des parties de la poutre constituées des matériaux A et B.

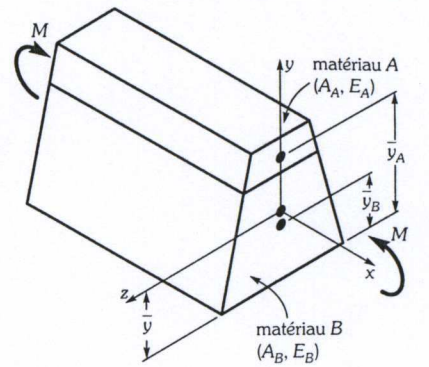
L'équation 17.3 permet de déterminer la position de l'axe neutre. Ainsi, lorsqu'on connaît les centroïdes \bar{y}_A et \bar{y}_B (fig. 17.1a), on peut trouver la valeur de \bar{y} qui satisfait à l'équation 17.3, soit :

$$E_A \bar{y}_A A_A + E_B \bar{y}_B A_B = (E_A A_A + E_B A_B) \bar{y} \tag{17.4a}$$

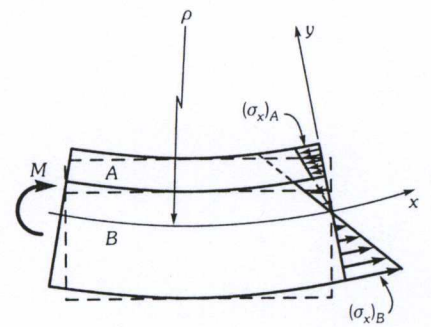
d'où

$$\bar{y} = \frac{E_A \bar{y}_A A_A + E_B \bar{y}_B A_B}{E_A A_A + E_B A_B} \tag{17.4b}$$

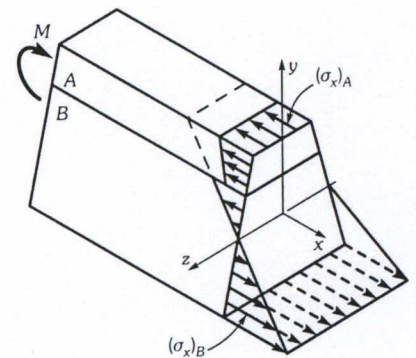
Soit l'équation d'équilibre des moments autour de l'axe des y (équat. 4.3e) :



(a)



(b)



(c)

Figure 17.1 a) Étude d'une poutre à comportement élastique composée de deux matériaux ; b) géométrie de déformation et répartition des contraintes ; c) répartition des contraintes normales (vue isométrique).

$$\int_A \sigma_{xz} dA = -\frac{1}{\rho} \left[\int_{A_A} E_A y z dA + \int_{A_B} E_B y z dA \right] = 0 \quad (17.5)$$

Cette équation est satisfaite si la section est symétrique à tous points de vue (géométrie et matériau) par rapport à l'axe des y ou à l'axe des z .

On définit l'équilibre des moments par rapport à l'axe des z (équat. 4.3f combinée aux rel. 17.2) :

$$\int_A \sigma_{xy} dA + M = -\frac{1}{\rho} \left[\int_{A_A} E_A y^2 dA + \int_{A_B} E_B y^2 dA \right] + M = 0 \quad (17.6)$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_A I_A + E_B I_B} \quad (17.7)$$

où I_A et I_B sont, respectivement, les seconds moments des sections A_A et A_B par rapport à l'axe des z .

La symétrie de la section et le fait qu'on ait affaire à une flexion pure assurent la satisfaction des autres conditions d'équilibre (équat. 4.3b, 4.3c et 4.3d).

Enfin, la combinaison des équations 17.7, 17.2 et 17.1 donne ce qui suit :

$$(\sigma_x)_A = -\frac{My}{I_A + \frac{E_B}{E_A} I_B} \quad (17.8a)$$

$$(\sigma_x)_B = -\frac{My}{I_B + \frac{E_A}{E_B} I_A} = \frac{E_B}{E_A} (\sigma_x)_A \quad (17.8b)$$

NOTE : Les équations 17.4b et 17.8a indiquent qu'il suffit de remplacer l'aire A_B et le second moment de la section I_B par une aire A_e et un second moment de la section I_e équivalents, donnés par :

$$A_e = A_B \frac{E_B}{E_A} \quad (17.9a)$$

$$I_e = I_B \frac{E_B}{E_A} \quad (17.9b)$$

pour pouvoir résoudre le problème comme si la poutre était constituée d'un seul matériau. La figure 17.2 montre qu'il suffit d'augmenter les dimensions horizontales de la section constituée du matériau B , dans la proportion E_B/E_A , mais sans en modifier la dimension verticale, pour pouvoir satisfaire simultanément aux équations 17.9a et 17.9b. L'exemple 17.1 donne en détail le calcul d'une poutre constituée de deux matériaux.

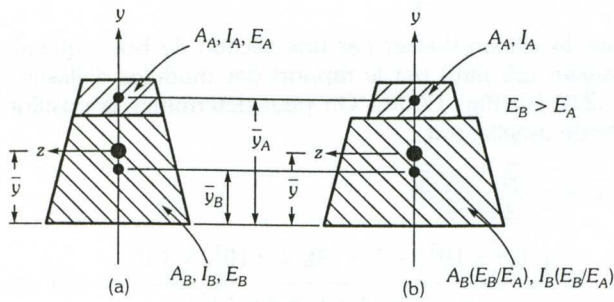


Figure 17.2 Utilisation de la notion de section équivalente pour l'étude d'une poutre composée de deux matériaux (plan de flexion vertical) : a) section composée de deux matériaux, avec les dimensions réelles des deux sous-sections ; b) on a remplacé la sous-section faite de matériau B par une section équivalente, faite de matériau A.

EXEMPLE 17.1

Une poutre composée de bois et d'acier (fig. 17.3a) est soumise à un moment fléchissant M de 20 kN·m. Calculer les contraintes normales maximales qui agissent dans le bois et dans l'acier.

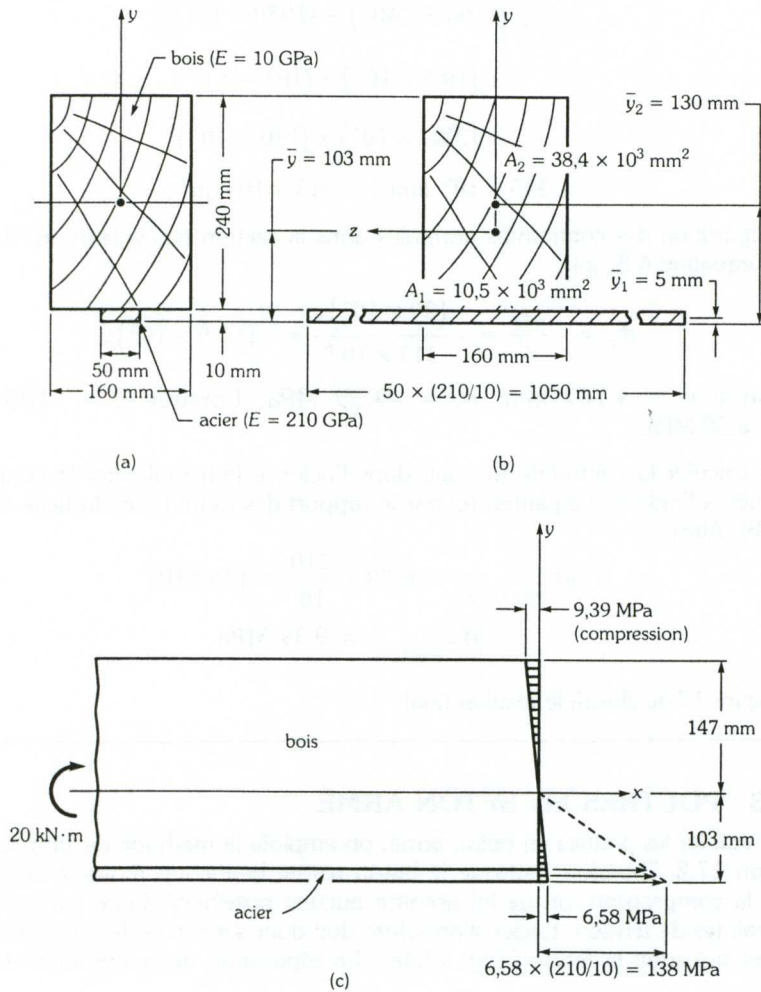
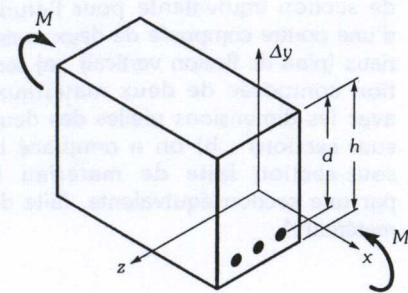
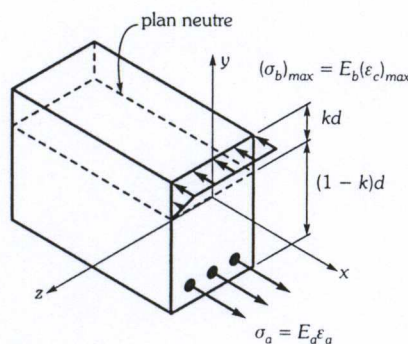


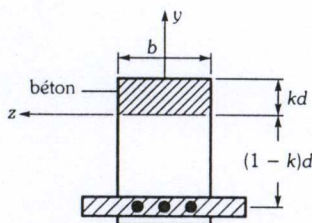
Figure 17.3 Exemple 17.1.



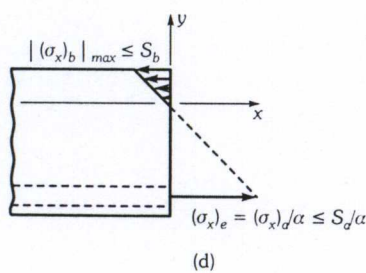
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 17.4 Poutre en béton armé.

Solution

On remplace la section d'acier par une section de bois équivalente, en multipliant sa largeur (50 mm) par le rapport des modules d'élasticité de ces deux matériaux (210/10) [fig. 17.3b]. On peut déterminer la position du centroïde par la méthode usuelle, soit

$$\bar{y} = \frac{A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2}{A_1 + A_2} = \frac{(10,5 \times 10^3) \times 5 + (38,4 \times 10^3) \times 130}{(10,5 \times 10^3) + (38,4 \times 10^3)} = 103 \text{ mm} \quad (a)$$

On détermine le second moment I de la section équivalente par rapport à l'axe des z d'après l'équation suivante :

$$I = \sum \left[\frac{b_i h_i^3}{12} + A_i (\bar{y} - \bar{y}_i)^2 \right] = \frac{1}{12} \left[(160 \times 240^3) + (1050 \times 10^3) \right] + (10,5 \times 10^3) \times (103 - 5)^2 + (38,4 \times 10^3) \times (130 - 103)^2 = 313 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 313 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (b)$$

La répartition des contraintes normales dans la section équivalente est donnée par l'équation 4.8, soit

$$\sigma_x = - \frac{My}{I} = - \frac{(20 \times 10^3)y}{313 \times 10^{-6}} = -(63,9 \times 10^6)y \quad (c)$$

Lorsque $y = +147 \text{ mm}$, $\sigma_x = -9,39 \text{ MPa}$. Lorsque $y = -103 \text{ mm}$, $\sigma_x = 6,58 \text{ MPa}$.

Pour calculer la contrainte qui agit dans l'acier, il faut multiplier la contrainte calculée à l'aide de l'équation (c) par le rapport des modules d'élasticité (équat. 17.8b). Ainsi :

$$|\sigma_x|_{\text{max acier}} = 6,58 \times \frac{210}{10} = 138 \text{ MPa} \quad (d)$$

$$|\sigma_x|_{\text{max bois}} = 9,39 \text{ MPa} \quad (e)$$

La figure 17.3c illustre le résultat final.

17.3 POUTRES EN BÉTON ARMÉ

Pour étudier les poutres en béton armé, on emploie la méthode développée à la section 17.2. Toutefois, puisque le béton résiste beaucoup moins à la tension qu'à la compression, on ne lui accorde aucune possibilité d'être soumis à des contraintes de tension. L'acier d'armature doit donc être situé dans la zone de la poutre qui subit la tension (fig. 17.4a). La répartition des contraintes dans le

béton et dans l'acier est alors celle qu'on voit à la figure 17.4b. Si α est le rapport des modules d'élasticité de l'acier et du béton, on peut écrire :

$$\alpha = \frac{E_a}{E_b} \quad (17.10)$$

À ce stade, on remplace la section d'acier par une section équivalente de béton, donnée par :

$$A_e = \alpha A_a \quad (17.11)$$

et la contrainte qui agit dans l'acier est :

$$(\sigma_x)_a = \alpha(\sigma_x)_e \quad (17.12)$$

On peut déterminer la position du plan neutre kd (fig. 17.4c) à partir du premier moment de la section équivalente (qui, nous l'avons vu, doit être nul par rapport à l'axe des z situé dans le plan neutre) ; on a alors :

$$bkd \frac{kd}{2} - \alpha A_a (1 - k)d = 0$$

d'où

$$k^2 + \frac{2\alpha A_a k}{bd} - \frac{2\alpha A_a}{bd} = 0 \quad (17.13)$$

La solution de l'équation 17.13 donne la valeur de k . Si, pour une conception optimale, on impose à l'acier et au béton d'atteindre simultanément leur limite de résistance S_a et S_b (fig. 17.4d), l'équation suivante donne la valeur de k :

$$k = \frac{S_b}{\frac{S_a}{\alpha} + S_b} \quad (17.14)$$

Le calcul et la conception de poutres en béton armé sont des tâches qu'on confie à des spécialistes. Nous avons simplement voulu souligner ici l'aspect particulier de l'étude de cet important matériau composé.

17.4 EFFORTS INTERNES ASSOCIÉS AU CAS GÉNÉRAL DE LA FLEXION GAUCHE

Avant d'entreprendre l'étude détaillée d'une poutre quelconque soumise à une flexion gauche, il est utile de rappeler comment on détermine les expressions des efforts internes (effort tranchant et moment fléchissant) qui résultent, à une section quelconque de la poutre, de l'application du chargement externe. La figure 17.5a montre les vecteurs \vec{V} et \vec{M} orientés de façon quelconque par rapport au système d'axes de la poutre. À la figure 17.5b, on voit \vec{V} et \vec{M} décomposés selon les axes des y et des z , selon la convention de signes adoptée au chapitre 3.

À l'exemple 17.2, on verra que, pour établir les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants dans le cas de la flexion gauche, on suit la même méthode que dans le cas de la flexion simple (chap. 3).

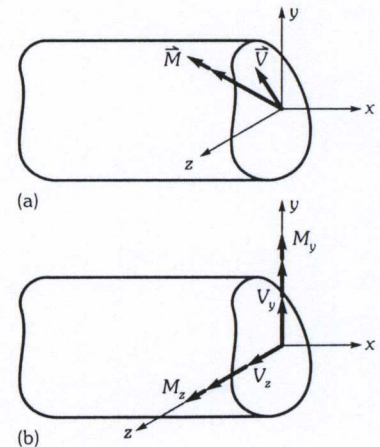


Figure 17.5 Cas général d'une poutre soumise à une flexion : efforts internes.

EXEMPLE 17.2

Étudier la répartition des efforts tranchants et des moments fléchissants dans la poutre illustrée à la figure 17.6a.

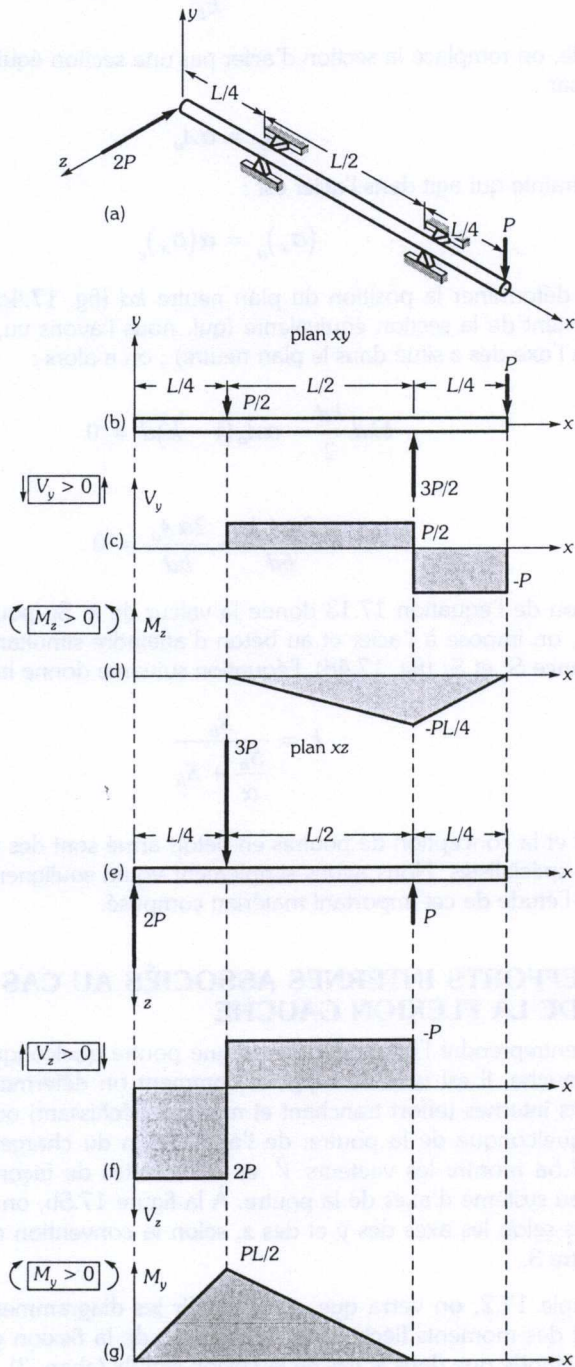


Figure 17.6 Exemple 17.2.

Solution

On considère séparément les deux plans de chargement xy et xz , et on trouve les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants de la même façon qu'au chapitre 3.

17.5 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ÉQUILIBRE

Comme le montre la figure 17.7, il est possible de déterminer les conditions d'équilibre d'un élément de longueur d'une poutre soumise à une flexion gauche de la même façon qu'au chapitre 3, à condition d'étudier chaque plan de chargement séparément et de tenir compte de la convention de signes correspondante. Ainsi, pour le chargement agissant selon le plan xy (fig. 17.7a), on obtient l'élément de la figure 17.7c. Les conditions d'équilibre $(\Sigma F)_y = 0$ et $(\Sigma M)_z = 0$ donnent, après qu'on ait fait tendre Δx vers 0 :

$$\frac{dV_y}{dx} = -q_y \quad (17.15a)$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -V_y \quad (17.15b)$$

De la même façon, pour le chargement agissant selon le plan xz (fig. 17.7b et 17.7d), on trouve :

$$\frac{dV_z}{dx} = -q_z \quad (17.16a)$$

$$\frac{dM_y}{dx} = V_z \quad (17.16b)$$

Les équations développées pour la flexion simple (chap. 3) sont donc directement applicables à la flexion gauche (au signe près, en ce qui concerne l'équation 17.16b).

17.6 ANALYSE DES CONTRAINTES ASSOCIÉES À LA FLEXION GAUCHE

Pour comprendre l'analyse des contraintes associées à la flexion gauche, nous étudierons d'abord le cas d'une poutre soumise à des moments de flexion purs M_y et M_z (les efforts tranchants V_y et V_z étant nuls ; fig. 17.8, section 17.7). Dans cette situation, la solution exacte est relativement facile à obtenir (comme lors de l'étude de la flexion symétrique, au chapitre 4). Pour ce faire, il faut respecter les trois étapes fondamentales de résolution dans l'ordre suivant :

1. l'étude des déplacements et de la compatibilité géométrique ;
2. l'application des relations contraintes/déformations ;
3. l'étude des conditions d'équilibre.

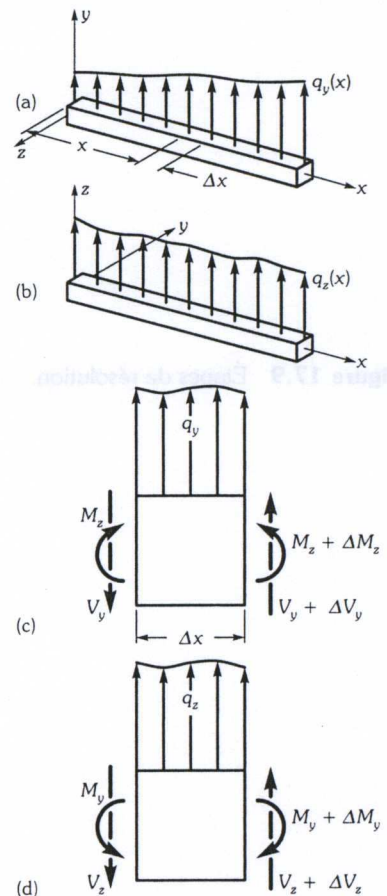


Figure 17.7 Équilibre différentiel dans le cas d'une flexion gauche.

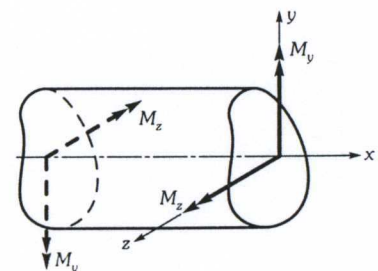


Figure 17.8 Poutre soumise à une flexion pure.

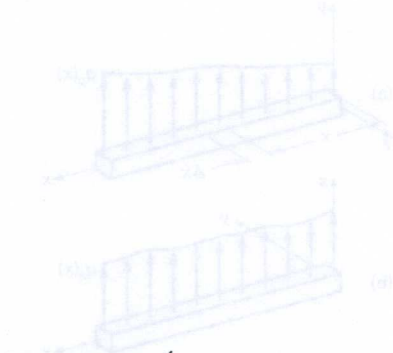
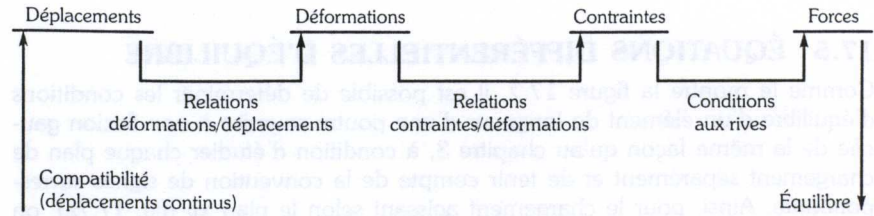


Figure 17.9 Étapes de résolution.



17.7 CONTRAINTES DUES À LA FLEXION PURE

En plus du fait que les efforts tranchants doivent être nuls, il convient d'imposer les conditions suivantes à la poutre étudiée :

- a) Avant chargement, la poutre est droite.
- b) Le matériau est homogène, isotrope et à comportement élastique.
- c) La section, quoique quelconque, est uniforme sur toute la longueur de la poutre.

Nous nous inspirerons des hypothèses émises et vérifiées au chapitre 4 pour accélérer la résolution du problème. Ces hypothèses sont au nombre de deux :

- a) Les sections qui sont planes avant déformation demeurent planes et normales à l'axe longitudinal de la poutre, après déformation. Ainsi :

$$\gamma_{xy} = \gamma_{zx} = 0 \tag{17.17}$$

- b) La poutre étant relativement «mince» (sa longueur est de beaucoup supérieure à sa plus grande dimension transversale), les composantes de contrainte qui sont nulles aux parois latérales sont également nulles en tout point ; autrement dit :

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \tag{17.18}$$

Nous vérifierons ces hypothèses une fois que nous aurons résolu le problème posé par la flexion pure. Les articles 17.7.1 à 17.7.5 décrivent les étapes de résolution à suivre.

17.7.1 Étude des déplacements

Puisque les sections planes demeurent planes après déformation, le déplacement u , dans la direction x (normale à la section), doit satisfaire à l'équation d'un plan ; ainsi :

$$u = a_0 + b_0y + c_0z \tag{17.19}$$

où a_0 , b_0 , et c_0 sont fonction de x seulement.

À partir de l'équation 17.17, de la relation 8.6 et de l'équation 17.19, on obtient :

$$\gamma_{xy} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = b_0 + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (17.20)$$

d'où

$$b_0 = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

De la même façon, on peut écrire :

$$\gamma_{zx} = 0 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = c_0 + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (17.21)$$

d'où

$$c_0 = - \frac{\partial w}{\partial x}$$

En remplaçant, dans l'équation 17.19, b_0 et c_0 par leurs valeurs (équat. 17.20 et 17.21), on trouve :

$$u = a_0 - \frac{\partial v}{\partial x} y - \frac{\partial w}{\partial x} z \quad (17.22)$$

Il reste à déterminer les valeurs des déplacements v et w , ce qu'on fera à la section 17.10.

17.7.2 Étude des déformations

On peut trouver l'expression de la déformation longitudinale ε_x à partir de la relation déformation/déplacement (équat. 8.6) et de l'équation 17.22 ; ainsi, on a :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \quad (17.23)$$

On a déjà par ailleurs émis l'hypothèse (équat. 17.17) selon laquelle les composantes γ_{xy} et γ_{zx} sont nulles.

On trouvera à l'article suivant les expressions des trois autres composantes ε_y , ε_z et γ_{yz} .

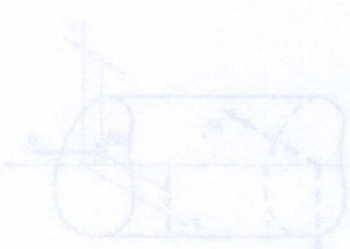
17.7.3 Relations contraintes/déformations

Pour un matériau au comportement élastique, nous avons déjà établi (chap. 9) les équations reliant les six composantes de contrainte aux six composantes de déformation. On a tout d'abord :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \quad (17.24)$$

Cependant, selon l'hypothèse b) [équat. 17.18], on a $\sigma_y = \sigma_z = 0$; donc, à partir de l'équation 17.23, on peut obtenir :

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \left[\frac{\partial a_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \right] \quad (17.25)$$



On trouve ensuite :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (17.26)$$

Enfin, on sait que les composantes de cisaillement sont toutes trois nulles, puisqu'on a (équat. 17.17 et 17.18) :

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0 \quad (17.27a)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0 \quad (17.27b)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = 0 \quad (17.27c)$$

La seule contrainte non nulle est donc σ_x .

17.7.4 Conditions d'équilibre aux rives

La figure 17.10 montre un élément de longueur de la poutre soumis, d'une part, à la seule composante de contrainte non nulle (σ_x) et, d'autre part, aux deux moments fléchissants (M_y et M_z). Les conditions d'équilibre suivantes doivent ici être satisfaites :

$$(\Sigma F)_x = 0, \quad \int_A \sigma_x dA = 0 \quad (17.28a)$$

$$(\Sigma M)_y = 0, \quad M_y = \int_A \sigma_x z dA \quad (17.28b)$$

$$(\Sigma M)_z = 0, \quad M_z = - \int_A \sigma_x y dA \quad (17.28c)$$

17.7.5 Solution et vérification

Il est à présent possible de combiner les relations établies aux articles 17.7.1 à 17.7.4 pour résoudre le problème posé par une poutre soumise à une flexion pure.

À partir des équations 17.28 et 17.25, on a :

$$0 = E \left[\frac{\partial a_0}{\partial x} \int_A dA - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \int_A y dA - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_A z dA \right] \quad (17.29a)$$

$$M_y = E \left[\frac{\partial a_0}{\partial x} \int_A z dA - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \int_A yz dA - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_A z^2 dA \right] \quad (17.29b)$$

$$-M_z = E \left[\frac{\partial a_0}{\partial x} \int_A y dA - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \int_A y^2 dA - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_A yz dA \right] \quad (17.29c)$$

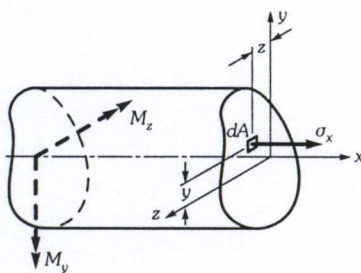


Figure 17.10 Équilibre d'un élément d'une poutre soumise à une flexion pure.

Si on pose que l'axe des x passe par le centroïde de la section, on obtient :

$$\int_A y \, dA = \int_A z \, dA = 0 \quad (17.30)$$

Par ailleurs, on connaît les expressions des seconds moments et du moment produit de la section (app. A), soit :

$$I_y = \int_A z^2 \, dA \quad (17.31a)$$

$$I_z = \int_A y^2 \, dA \quad (17.31b)$$

$$I_{yz} = \int_A yz \, dA \quad (17.31c)$$

Si on insère les relations 17.30 et 17.31 dans les équations 17.29, le résultat est le suivant :

$$0 = \frac{\partial a_0}{\partial x} A \quad (17.32a)$$

$$M_y = E \left[-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} I_{yz} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} I_y \right] \quad (17.32b)$$

$$-M_z = E \left[-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} I_z - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} I_{yz} \right] \quad (17.32c)$$

De plus, en combinant les équations 17.32b et 17.32c, on trouve :

$$\frac{\partial a_0}{\partial x} = 0 \quad (17.33a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} [M_y I_{yz} + M_z I_y] \quad (17.33b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{-1}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} [M_z I_{yz} + M_y I_z] \quad (17.33c)$$

L'insertion des équations 17.33 dans l'expression 17.25 donne ce qui suit :

$$\sigma_x = -\frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2} [(M_y I_{yz} + M_z I_y)y - (M_z I_{yz} + M_y I_z)z] \quad (17.34)$$

En outre, on sait pour l'avoir défini précédemment (équat. 17.18 et 17.27) que toutes les autres composantes de contrainte sont nulles. On détient donc la solution du problème, puisqu'on connaît toutes les composantes de contrainte.

Cette solution et les hypothèses formulées sont exactes, puisque la condition d'équilibre différentiel des contraintes (équat. 7.8) est bien satisfaite. En effet, on a :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0$$

Les termes différentiels de l'équation précédente sont bel et bien nuls, et aucune force de volume F_x n'agit sur la poutre.

Pour faciliter les calculs en flexion gauche, il est souvent avantageux de redéfinir les propriétés de la section de la façon suivante.

$$\text{Soit } I_y^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_z} \quad I_z^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_y} \quad I_{yz}^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_{yz}} \quad (17.35a)$$

L'équation 17.34 devient :

$$\sigma_x = - \left(\frac{M_y}{I_{yz}^*} + \frac{M_z}{I_z^*} \right) y + \left(\frac{M_z}{I_{yz}^*} + \frac{M_y}{I_y^*} \right) z \quad (17.35b)$$

Noter que pour $I_{yz} = 0$, on a : $I_{yz}^* = \infty$, $I_y^* = I_y$ et $I_z^* = I_z$.

17.7.6 Plan neutre

Nous avons défini le plan neutre (chap. 4) comme le lieu des points de la poutre où la contrainte normale est nulle. Dans le cas d'une flexion simple (chap. 4), le plan neutre coïncide toujours avec un des axes principaux ou avec un axe de symétrie de la section et est normal au plan de chargement. Dans le cas d'une flexion gauche, par contre, le plan neutre est incliné par rapport au plan de chargement (fig. 17.11).

Si on reprend l'équation 17.34 et qu'on pose $\sigma_x = 0$, on obtient :

$$(M_y I_{yz} + M_z I_y) y - (M_z I_{yz} + M_y I_z) z = 0 \quad (17.36)$$

L'équation 17.36 est l'équation d'une droite appartenant au plan yz . Cette droite est l'axe neutre (fig. 17.11) qui passe par le centroïde de la section et qui fait avec l'axe des z un angle α donné par :

$$\text{tg } \alpha = \frac{dy}{dz} = \frac{M_z I_{yz} + M_y I_z}{M_y I_{yz} + M_z I_y} \quad (17.37)$$

On peut exprimer l'angle α en fonction de l'angle β , qui représente l'inclinaison par rapport à l'axe des z du vecteur du moment fléchissant résultant \vec{M} , angle correspondant à :

$$\text{tg } \beta = \frac{M_y}{M_z} \quad (17.38)$$

Alors, à partir des équations 17.38 et 17.37, on peut établir :

$$\text{tg } \alpha = \frac{I_{yz} + I_z \text{tg } \beta}{I_{yz} \text{tg } \beta + I_y} \quad (17.39)$$

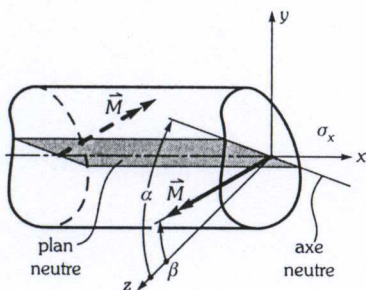


Figure 17.11 Inclinaison du plan neutre dans le cas d'une flexion gauche (remarquer le sens positif des angles α et β mesurés à partir de l'axe des z).

On peut voir la convention de signes pour les angles α et β à la figure 17.11 (le vecteur \vec{M} est normal au plan de chargement).

NOTES : a) Lorsque $M_y = 0$, $\beta = 0$ et $\text{tg } \alpha = I_{yz}/I_y$. Pour que $\alpha = 0$, il faut que $I_{yz} = 0$, ce qui suppose que les axes principaux de la section coïncident avec les axes des y et des z . C'est le cas, en particulier, si l'axe des y ou des z est un axe de symétrie de la section.

b) Comme nous le verrons plus loin, une poutre soumise à une flexion gauche fléchit dans la direction normale au plan neutre. La connaissance de la valeur de l'angle α nous renseigne donc immédiatement sur le mode de fléchissement de la poutre.

c) Lorsque $I_{yz} = 0$, l'équation 17.39 devient :

$$\text{tg } \alpha = \frac{I_z}{I_y} \text{tg } \beta \quad (17.40)$$

Si, par ailleurs, les dimensions de la section sont telles que $I_y \ll I_z$, une faible inclinaison ($\beta \simeq 0$) du moment fléchissant résultant \vec{M} entraîne une forte inclinaison du plan neutre ($\alpha > 0$). Il faut éviter cette situation qui peut avoir des conséquences néfastes : augmentation du niveau de contrainte, déversement latéral de la poutre et instabilité. L'exemple 17.3 illustre cette situation dans le cas d'un profilé en I.

d) Toujours lorsque $I_{yz} = 0$, l'équation 17.34 (ou 17.35b) est considérablement simplifiée et devient :

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (17.41)$$

L'équation 17.41 indique que, pour calculer σ_x , il suffit de superposer, et ce à l'aide de la formule de la flexion simple (équat. 4.8), les contraintes, considérées séparément, dues à M_z et à M_y . L'exemple 17.3 montre comment réaliser un tel calcul.

EXEMPLE 17.3

Un profilé en I (fig. 17.12a) est soumis à un moment fléchissant M agissant selon l'axe des z .

1. Étudier l'effet qu'exercerait une légère inclinaison β du plan de chargement par rapport à l'axe des y sur l'inclinaison α du plan neutre par rapport à l'axe des z (fig. 17.12b).
2. Étudier également la variation de la contrainte normale maximale $(\sigma_x)_{\text{max}}$ en fonction de β , pour la même intensité de moment fléchissant $M = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$.

Solution

1. Effet de l'inclinaison du plan de chargement sur l'inclinaison du plan neutre

Puisqu'on a affaire ici à une section symétrique, $I_{yz} = 0$ et l'équation 17.40 s'applique intégralement. Donc :

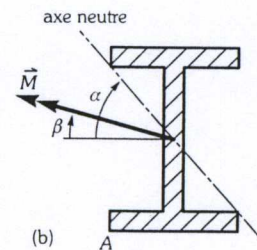
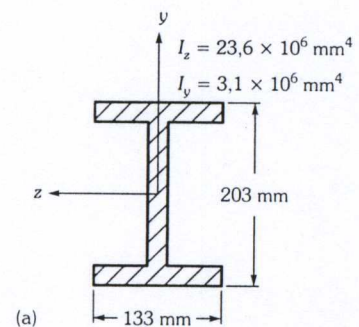


Figure 17.12 Exemple 17.3.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \beta = \frac{23,6 \times 10^6}{3,1 \times 10^6} \operatorname{tg} \beta = 7,61 \operatorname{tg} \beta \quad (\text{a})$$

2. Variation de $(\sigma_x)_{\max}$ en fonction de β

Le point A étant le plus éloigné du plan neutre (fig. 17.12b), il sera le plus sollicité (tension). Pour ce point, l'équation 17.41 s'applique donc, avec les coordonnées suivantes :

$$y = -\frac{203}{2} = -101,5 \text{ mm}$$

$$z = \frac{133}{2} = 66,5 \text{ mm}$$

Les moments M_y et M_z correspondants sont :

$$M_y = M \sin \beta = 1000 \times 10^3 \sin \beta \quad (\text{N}\cdot\text{mm})$$

$$M_z = M \cos \beta = 1000 \times 10^3 \cos \beta \quad (\text{N}\cdot\text{mm})$$

On a donc (équat. 17.41) :

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{\max} &= \frac{10^6 \cos \beta \times 101,5}{23,6 \times 10^6} + \frac{10^6 \sin \beta \times 66,5}{3,1 \times 10^6} \\ &= 4,3 \cos \beta + 21,4 \sin \beta \quad (\text{MPa}) \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Le tableau 17.1 donne quelques valeurs particulières de α et de $(\sigma_x)_{\max}$ en fonction de certaines valeurs de l'angle β .

Pour un angle β relativement faible, l'inclinaison du plan neutre est considérable, et le niveau de contrainte élevé.

Tableau 17.1 Inclinaison du plan neutre et contraintes maximales pour l'exemple 17.3

β (degré)	α (degré)	$(\sigma_x)_{\max}$ pour $\bar{M} = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$ (MPa)
0	0	4,3
1	7,6	4,7
2	14,9	5,0
5	33,7	6,1
10	53,3	8,0
15	63,9	9,7

L'exemple 17.4 illustre l'application de l'équation générale 17.34 pour le calcul de la contrainte normale.

EXEMPLE 17.4

Une cornière (fig. 17.13a) est soumise à un moment fléchissant $M_z \neq 0$ ($M_y = 0$). Calculer la valeur de la contrainte normale maximale $(\sigma_x)_{\max}$ en fonction de M_z , et déterminer où elle agira dans cette section.

Solution

En utilisant la méthode et les équations proposées à l'appendice A, on détermine tout d'abord les propriétés et les caractéristiques de la section (à cause de la symétrie de la section, l'axe a - a incliné à 45° est un axe principal). Il est préférable de décomposer la section de la façon illustrée à la figure 17.13b.

1. Localisation du centroïde

On fait un calcul pour déterminer la position du centroïde :

$$\bar{y} = \bar{z} = \frac{(148 \times 8 \times 0) + (8 \times 148 \times 74)}{(148 \times 8) + (8 \times 148)} = 37 \text{ mm}$$

2. Calcul des seconds moments de la section

On détermine les seconds moments :

$$\begin{aligned} I_y = I_z &= (148 \times 8)(0 - 37)^2 + (8 \times 148)(74 - 37)^2 \\ &\quad + \frac{148 \times 8^3}{12} + \frac{8 \times 148^3}{12} \\ &= 5,409 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

3. Calcul du moment produit de la section

Moment produit :

$$I_{yz} = [(148 \times 8)(0 - 37)(74 - 37)] \times 2 = -3,242 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

On procède ensuite au calcul de la contrainte $(\sigma_x)_{\max}$. Pour ce faire, on localise d'abord le point le plus sollicité de la section en calculant en premier lieu l'inclinaison de l'axe neutre.

4. Calcul de l'inclinaison de l'axe neutre

Puisque $M_y = 0$, $\tan \beta = 0$, et (équat. 17.39)

$$\tan \alpha = \frac{I_{yz}}{I_y} = \frac{-3,242}{5,409} = -0,5993$$

d'où

$$\alpha = -30,93^\circ$$

5. Coordonnées des points les plus sollicités

Le résultat ci-dessus apparaît à la figure 17.13c, laquelle montre clairement que les points A ou B, qui sont les plus éloignés de l'axe neutre, seront les plus sollicités.

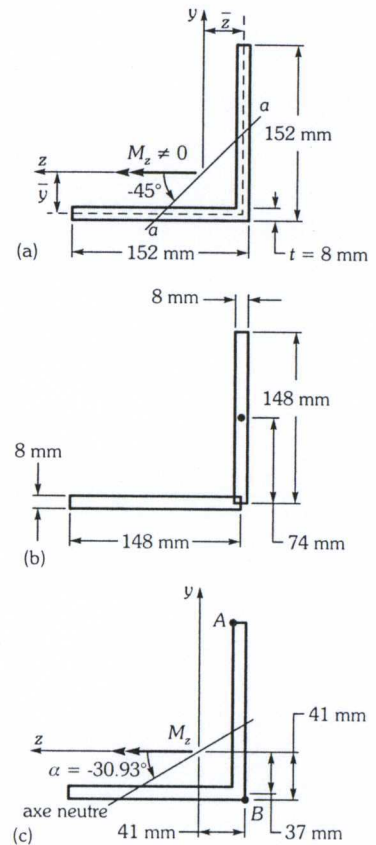


Figure 17.13 Exemple 17.4.

a) Point A

$$y = 152 - 41 = 111 \text{ mm}$$

$$z = 8 - 41 = -33 \text{ mm}$$

b) Point B

$$y = -41 \text{ mm}$$

$$z = -41 \text{ mm}$$

6. Calcul de σ_x

Lorsque $M_y = 0$, l'équation 17.34 devient :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{I_y I_x - I_{yz}^2} (M_z I_y y - M_z I_{yz} z) \\ &= -5,333 \times 10^{-5} (5,409y + 3,242z) M_z \end{aligned}$$

(en mégapascals, avec M_z en newtons-mètres et y et z en millimètres)

d'où, pour le point A :

$$(\sigma_x)_A = -0,0268 M_z \quad (\text{MPa})$$

et, pour le point B :

$$(\sigma_x)_B = +0,0185 M_z \quad (\text{MPa})$$

17.8 EFFORTS TRANCHANTS ASSOCIÉS À LA FLEXION GAUCHE

Les équations développées à la section précédente sont rigoureusement exactes si aucun effort tranchant ne se produit dans la poutre. Cette condition suppose en outre que les moments fléchissants M_y et M_z sont constants tout le long de la poutre. Or, il s'agit d'un cas particulier qu'on rencontre rarement en pratique. C'est pourquoi, dans cette section, nous étudierons le cas plus général où les efforts tranchants agissent eux aussi.

La présence de V_y et de V_z entraîne des variations de M_y et de M_z (sect. 17.5) ainsi qu'une répartition des contraintes de cisaillement dans la section de la poutre. Ces deux conséquences ne facilitent pas le développement d'une solution exacte. En fait, les quelques solutions exactes obtenues par les méthodes basées sur la théorie de l'élasticité ne s'appliquent qu'à des cas très particuliers de chargements simples et elles n'offrent qu'un intérêt pratique limité.

Nous développerons donc ici une solution qui, bien qu'elle soit approximative, est parfaitement applicable, du point de vue pratique, aux membrures longues et minces. Nous avons d'ailleurs utilisé la même approximation au chapitre 4, lorsque nous avons développé les équations relatives à l'effort tranchant associé à la flexion symétrique.

Nous analyserons surtout les profilés à parois minces, car ce sont ceux qui exigent le plus d'attention lorsqu'on veut étudier les effets de l'effort tranchant.

17.8.1 Méthode d'analyse

La méthode d'analyse, qui est essentiellement la même que celle adoptée au chapitre 4 pour la flexion symétrique, peut se résumer aux trois étapes suivantes :

1. On suppose que les relations 17.34 ou 17.35, qui concernent la flexion pure, s'appliquent également en présence de V_y et de V_z .
2. On fait en sorte que les conditions d'équilibre soient satisfaites, compte tenu de la présence de V_y et de V_z .
3. On ne se préoccupe pas de la compatibilité géométrique puisque, en présence d'efforts tranchants, les sections planes ne demeurent pas planes après le chargement.

17.8.2 Système de coordonnées, formulation du problème et équations de base

Comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents lorsqu'il s'agissait d'étudier les profilés à parois minces, nous utiliserons ici le système de coordonnées locales n, s, x (fig. 17.14).

Les composantes de contrainte σ_n , τ_{ns} et τ_{xn} (fig. 17.14) sont nulles aux parois latérales de la poutre et, puisque la paroi est mince, on peut les négliger ; on peut donc écrire :

$$\sigma_n = \tau_{ns} = \tau_{xn} = 0 \tag{17.42}$$

Comme le montre la figure 17.15, la composante de contrainte σ_s doit, elle aussi, être nulle pour satisfaire aux conditions d'équilibre selon le plan ns ; on a alors :

$$\sigma_s = 0 \tag{17.43}$$

Les deux seules composantes de contrainte non nulles sont par conséquent σ_x et τ_{xs} (fig. 17.16a). Pour déterminer σ_x , on utilise les équations 17.34 ou 17.35, en adoptant, comme précédemment, le système général de coordonnées x, y, z .

Pour déterminer τ_{xs} , on a encore une fois recours à la notion de flux de cisaillement, puisqu'on peut supposer que la valeur de cette contrainte est pratiquement constante dans la faible épaisseur t de la paroi. On obtient :

$$q = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xs} \, dn \simeq \tau_{xs} t \tag{17.44}$$

La figure 17.16b montre un élément de la paroi. On peut y voir les composantes de contrainte, ainsi que leurs variations, qui exercent un effet sur l'équilibre selon la direction x . Nous avons ici, lorsque $(\Sigma F)_x = 0$:

$$-q \, dx + (q + dq) \, dx - \sigma_x t \, ds + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) t \, ds = 0$$

d'où

$$dq = -t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} ds \tag{17.45}$$

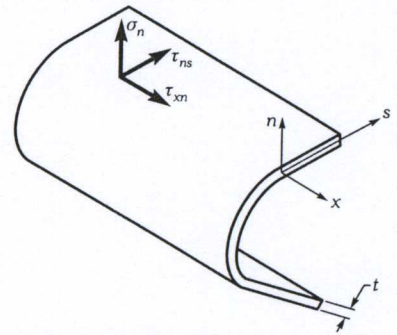


Figure 17.14 Poutre à paroi mince : système de coordonnées locales.

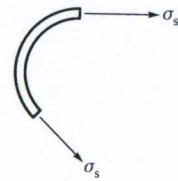
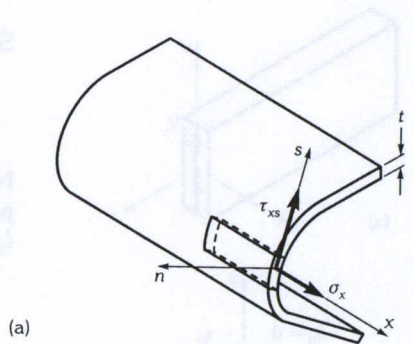
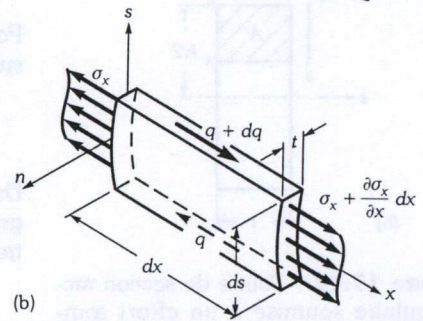


Figure 17.15 Les conditions d'équilibre exigent que $\sigma_s = 0$.



(a)



(b)

Figure 17.16 Poutre à paroi mince, composantes de contrainte non nulles.

L'intégration de l'équation 17.45 donne, pour l'intervalle qui sépare s_0 de s , la variation Δq suivante :

$$\Delta q = q_s - q_0 = \int_{s_0}^s \left(-t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) ds \quad (17.46)$$

d'où

$$q_s = \int_{s_0}^s \left(-t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) ds + q_0 \quad (17.47)$$

On établit l'expression de la contrainte de cisaillement à partir de la relation 17.44, soit

$$\tau_{xs} = \frac{q_s}{t} \quad (17.48)$$

Dans l'équation 17.47, on obtient la valeur de $\partial \sigma_x / \partial x$ en dérivant l'expression 17.34 ; ainsi :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2} \left[\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} I_{yz} + \frac{\partial M_z}{\partial x} I_y \right) y - \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} I_{yz} + \frac{\partial M_y}{\partial x} I_z \right) z \right] \quad (17.49)$$

Cependant, selon les équations 17.15b et 17.16b, il est possible de remplacer $\partial M_y / \partial x$ et $\partial M_z / \partial x$ respectivement par $-V_y$ et V_z . On a alors :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2} \left[(V_z I_{yz} - V_y I_y) y - (-V_y I_{yz} + V_z I_z) z \right] \quad (17.50a)$$

Si on avait utilisé les équations 17.35, on aurait obtenu :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\left(\frac{V_z}{I_{yz}^*} - \frac{V_y}{I_z^*} \right) y + \left(\frac{-V_y}{I_{yz}^*} + \frac{V_z}{I_y^*} \right) z \quad (17.50b)$$

NOTE : Comparons les expressions concernant le flux de cisaillement trouvées jusqu'ici avec celles développées au chapitre 4. Pour ce faire, posons $V_z = 0$ et $I_{yz} = 0$ dans l'équation 17.50a ; on obtient alors :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{V_y}{I_z} y \quad (a)$$

Pour une poutre de section rectangulaire (fig. 17.17), q_0 est nul à la paroi supérieure. L'équation 17.47 devient donc :

$$q_s = \frac{V_y}{I_z} \int_{s_0}^s - (yt) ds \quad (b)$$

Dans l'expression (b), en tenant compte de la relation linéaire entre y et s , l'intégrale représente le premier moment Q de la surface A' par rapport à l'axe neutre. On obtient donc finalement :

$$q_s = -\frac{V_y Q}{I_z} \quad (c)$$

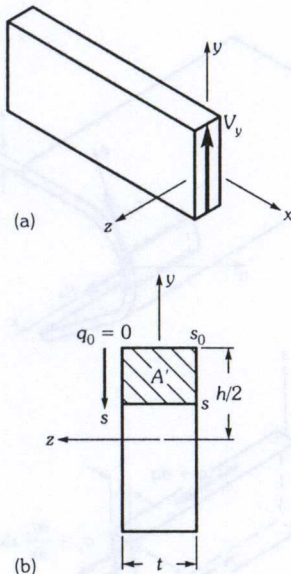


Figure 17.17 Poutre de section rectangulaire soumise à un effort tranchant $V_y \neq 0$.

L'expression (c) est similaire à l'équation 4.16, sauf que, à la figure 17.17b, q_s est positif vers le bas.

17.8.3 Méthode de résolution

Pour déterminer la répartition du flux de cisaillement q_s , il est nécessaire de résoudre l'équation 17.47 et, pour y arriver, il faut connaître le flux de cisaillement q_0 au point de départ s_0 de l'intégrale. La méthode de résolution étant différente selon que la section est «ouverte» ou «fermée», nous verrons les deux cas séparément.

Section ouverte. La figure 17.18 montre une poutre dont la section est dite ouverte. Dans une telle section (déjà définie lors de l'étude de la torsion, chap. 16), le flux de cisaillement ne peut pas se propager en circuit fermé (fig. 17.18b). Sachant que le flux de cisaillement est nul au niveau des arêtes longitudinales (fig. 17.18a), on peut commencer l'intégration de l'équation 17.47 à ces endroits (fig. 17.18b). Les étapes suivantes résument la méthode de résolution, que nous illustrons plus loin, à l'exemple 17.5.

1. À partir de chacune des arêtes longitudinales, on peut intégrer l'équation 17.47 jusqu'aux intersections, pour y déterminer la valeur de q_s , soit

$$q_s = \int_{s_0}^s \left(-t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) ds \quad (17.51)$$

2. Aux intersections, les valeurs des divers flux de cisaillement s'additionnent pour y donner la valeur du flux total.
3. À partir d'une intersection, on intègre de nouveau l'équation 17.47 jusqu'à l'intersection suivante et ainsi de suite. Entre deux intersections, on obtient la valeur du flux de cisaillement à partir de l'équation 17.47, mais en donnant à q_0 la valeur calculée pour q_s , à l'intersection où s redevient s_0 .
4. La convention de signes concernant q_s est la suivante : il est positif lorsqu'il agit dans le sens de l'intégration (c'est-à-dire de s_0 vers s).

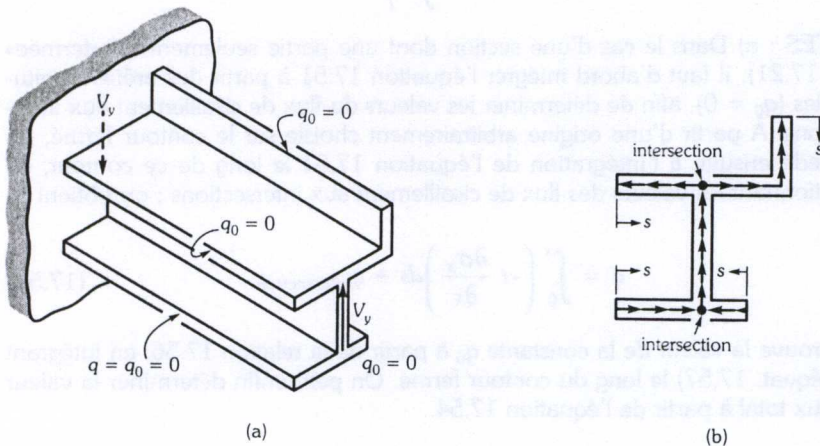


Figure 17.18 Flux de cisaillement dans une section «ouverte».

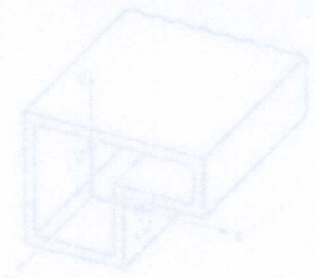


Figure 17.19 Section fermée

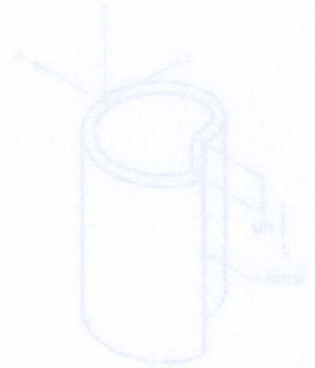


Figure 17.20 Mécanisme de torsion qui produit le flux de cisaillement circulaire

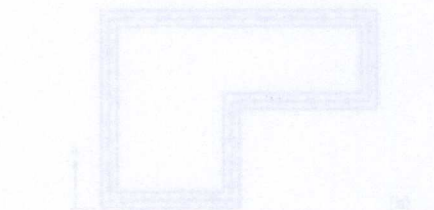


Figure 17.21 Section ouverte



Figure 17.22 Section ouverte

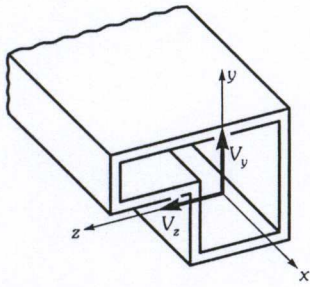


Figure 17.19 Section «fermée».

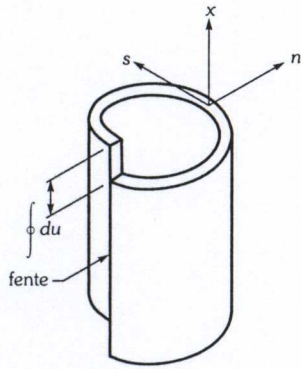


Figure 17.20 Mouvement relatif qui se produirait si on fendait la poutre longitudinalement.

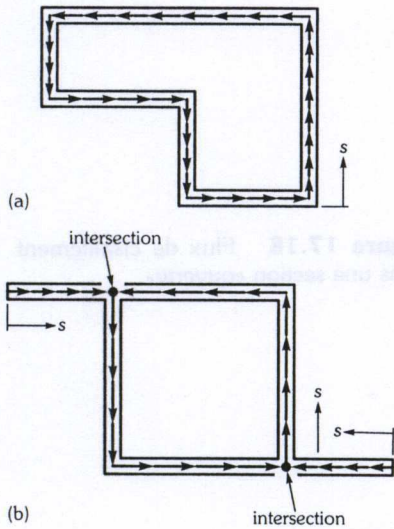


Figure 17.21 a) Section fermée ; b) section dont une partie seulement est fermée.

Section fermée. Dans une section dite fermée (fig. 17.19), il n'y a aucun endroit où le flux de cisaillement est connu comme nul (comme c'était le cas pour les sections ouvertes), si bien que la constante q_0 , dans l'équation 17.47, est indéterminée. Pour résoudre le problème, il faut donc étudier le mode de déformation de la section dans la direction x .

On peut récrire l'équation 16.75a (développée pour l'étude des sections fermées soumises à la torsion) de la façon suivante :

$$\oint du = \frac{1}{G} \oint q_s \frac{ds}{t} - \beta \oint r ds \tag{17.52}$$

Puisque, ici, la poutre n'est pas soumise à une torsion, $\beta = 0$ et l'équation 17.52 devient :

$$\oint du = \frac{1}{G} \oint q_s \frac{ds}{t} \tag{17.53}$$

On sait (équat. 17.46) que :

$$q_s = \Delta q + q_0 \tag{17.54}$$

Si on remplace q_s par son équivalent (équat. 17.54) dans l'équation 17.53, compte tenu du fait que q_0 n'est pas fonction de s , on trouve :

$$\oint du = \frac{1}{G} \left[\oint \Delta q \frac{ds}{t} + q_0 \oint \frac{ds}{t} \right] \tag{17.55}$$

La figure 17.20 montre le mouvement relatif $\oint du$ qui se produirait si on «ouvrait» la section en pratiquant une fente longitudinale dans la poutre. La section étant «fermée», un tel déplacement relatif ne peut se produire, et on obtient (équat. 17.55) :

$$q_0 = \frac{-\oint \Delta q \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} \tag{17.56}$$

NOTES : a) Dans le cas d'une section dont une partie seulement est «fermée» (fig. 17.21), il faut d'abord intégrer l'équation 17.51 à partir des arêtes longitudinales ($q_0 = 0$), afin de déterminer les valeurs du flux de cisaillement aux intersections. A partir d'une origine arbitrairement choisie sur le contour fermé, on procède ensuite à l'intégration de l'équation 17.51 le long de ce contour, en additionnant les valeurs des flux de cisaillement aux intersections ; on obtient :

$$q = \int_0^s \left(-t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) ds + q_{\text{intersection}} \tag{17.57}$$

On trouve la valeur de la constante q_0 à partir de la relation 17.56, en intégrant Δq (équat. 17.57) le long du contour fermé. On peut enfin déterminer la valeur du flux total à partir de l'équation 17.54.

b) Lorsqu'une section fermée est symétrique par rapport à la direction de l'effort tranchant, le flux de cisaillement est nul au niveau de l'axe de symétrie (fig. 17.22). Pour de telles sections, il est donc avantageux de choisir l'origine de l'intégrale de contour au niveau de l'axe de symétrie, car, dans ce cas, $q_0 = 0$. Nous appliquerons cette méthode de résolution concernant les sections fermées plus loin, à l'exemple 17.6.

17.8.4 Flux de cisaillement maximal

Le flux de cisaillement étant maximal lorsque $dq/ds = 0$, on peut appliquer directement l'équation 17.45 ; on a alors :

$$\frac{dq}{ds} = -t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \tag{17.58}$$

Cette condition est satisfaite pour l'axe neutre puisque, par définition, σ_x y est nul. La figure 17.23 montre la répartition du flux de cisaillement dans une poutre en Z soumise à une charge verticale. Dans les exemples 17.5 et 17.6, nous localiserons également le flux de cisaillement maximal.

EXEMPLE 17.5

La cornière de l'exemple 17.4 est soumise à des efforts tranchants $V_y = 1000$ N et $V_z = 500$ N (fig. 17.24a). Étudier la répartition du flux de cisaillement dans cette section ($I_y = I_z = 5,409 \times 10^6$ mm⁴ et $I_{yz} = -3,242 \times 10^6$ mm⁴).

Solution

L'équation 17.50a donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= -\frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2} \left[(V_z I_{yz} - V_y I_y) y + (V_y I_{yz} - V_z I_z) z \right] \\ &= (5,333 \times 10^{-8}) (7030y + 5946z) \end{aligned} \tag{a}$$

(N/mm³ ; y et z sont en millimètres)

1. Intégration de A vers B (fig. 17.24b)

D'après l'équation 17.51 :

$$q_s = \int_0^s \left(-8 \times \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) ds, \quad \text{où } 0 \leq s \leq 148 \text{ mm} \tag{b}$$

Sur la partie AB, on a $y = -37$ mm et $z = 111 - s$ (mm). L'équation (b) devient alors :

$$q_s = -8 \times 10^{-6} \left[375(-37)s + 317,2 \left(111 - \frac{s}{2} \right) s \right] \tag{c}$$

(N/mm ; s est en millimètres)

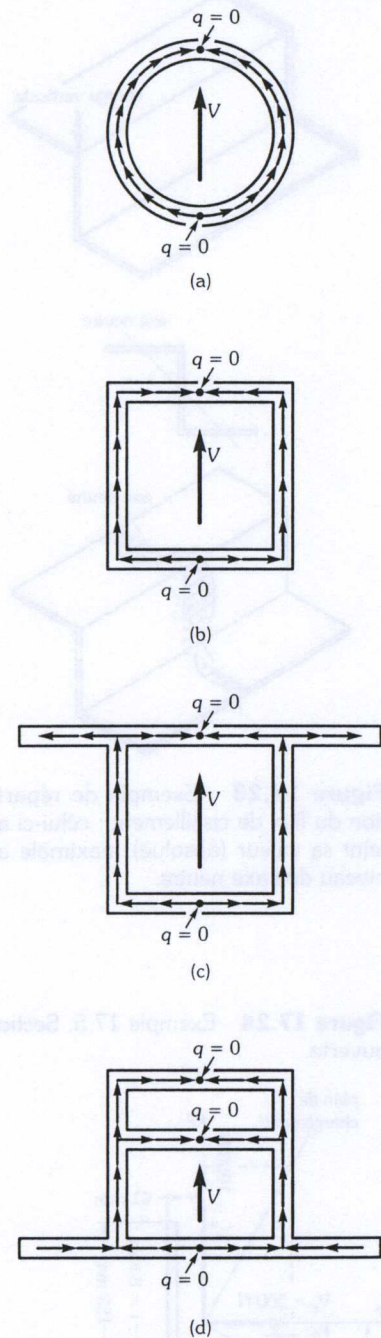


Figure 17.22 Sections symétriques par rapport à la direction de l'effort tranchant.

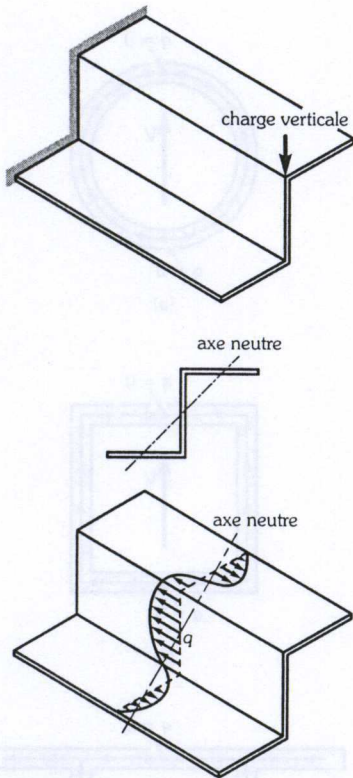


Figure 17.23 Exemple de répartition du flux de cisaillement : celui-ci atteint sa valeur (absolue) maximale au niveau de l'axe neutre.

2. Intégration de C vers B

L'équation (b) est encore valide, sauf que, sur la partie CB, on a $y = 111 - s$ (mm) et $z = -37$ mm.

Donc (équat. [b]) :

$$q_s = -8 \times 10^{-6} \left[375 \left(111 - \frac{s}{2} \right) s + 317,2(-37)s \right]$$

(N/mm ; s est en millimètres) (d)

La figure 17.24c montre la répartition de q_s dont les valeurs sont établies à partir des équations (c) et (d). Le sens du flux de cisaillement est illustré à la figure 17.24d (selon la convention de signes). Le flux de cisaillement a la même valeur à l'intersection. Il a fallu, pour obtenir un résultat aussi précis, garder un bon nombre de chiffres significatifs dans les calculs.

La valeur maximale du flux de cisaillement est de 9,53 N/mm sur la partie CB et de 5,74 N/mm sur la partie AB. Comme on l'a démontré à l'article 17.8.4, c'est au niveau de l'axe neutre que le flux de cisaillement est maximal. On peut calculer (équat. 17.38 et 17.39) l'orientation de l'axe neutre, en se rappelant que, dans l'équation 17.38, le vecteur \vec{M} est normal au plan de chargement (fig. 17.24a). On a donc ici (équat. 17.38) :

$$\text{tg } \beta = \frac{M_y}{M_z}$$

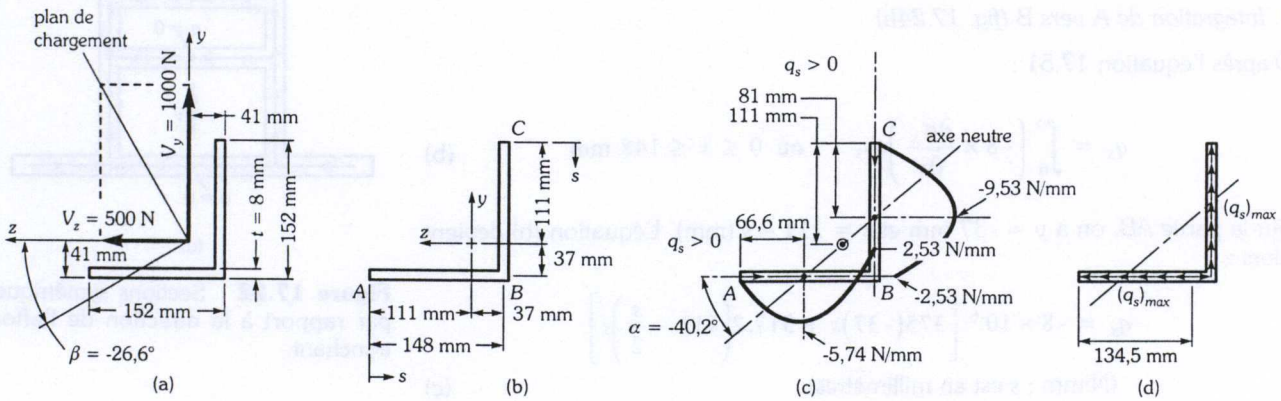
Pour le cas particulier d'une poutre encastree avec charge concentrée, M_y est linéairement associé à $-V_z$ et M_z à V_y , donc :

$$\text{tg } \beta = \frac{-V_z}{V_y} = -\frac{500}{1000} = -0,5$$

d'où

$$\beta = -26,6^\circ \tag{e}$$

Figure 17.24 Exemple 17.5. Section ouverte.



On a alors (équat. 17.39) :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I_{yz} + I_z \operatorname{tg} \beta}{I_{yz} \operatorname{tg} \beta + I_y} = -0,8458$$

d'où

$$\alpha = -40,2^\circ$$

Ce résultat, représenté graphiquement aux figures 17.24c et 17.24d, confirme que le flux de cisaillement maximal se produit au niveau de l'axe neutre.

EXEMPLE 17.6

Étudier la répartition du flux de cisaillement dans la section illustrée à la figure 17.25a.

Solution

1. Calcul des propriétés de la section (app. A)

Ici, puisque la section est symétrique, le centroïde se trouve en son centre, et le moment produit I_{yz} est nul. Les seconds moments de la section sont (fig. 17.25b) :

$$I_z = 2 \left[\frac{76 \times 8^3}{12} + 76 \times 8 \times 71^2 + \frac{4 \times 142^3}{12} \right]$$

$$= 8,0452 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 2 \left[\frac{8 \times 76^3}{12} + \frac{142 \times 4^3}{12} + 142 \times 4 \times 38^2 \right]$$

$$= 2,2272 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = 0$$

2. Lorsque $I_{yz} = 0$, l'équation 17.50a se simplifie et devient :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{V_y y}{I_z} + \frac{V_z z}{I_y}$$

$$= 1,242 \ 98 \times 10^{-4} y + 2,244 \ 97 \times 10^{-4} z$$

(N/mm³; y et z sont en millimètres)

$$= K_1 y + K_2 z$$

3. On commence l'intégration à partir du point A (fig. 17.25c). Pour déterminer le flux de cisaillement q_0 en A, on utilise l'équation 17.56, soit

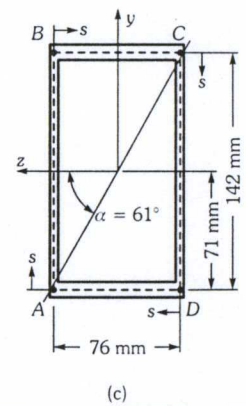
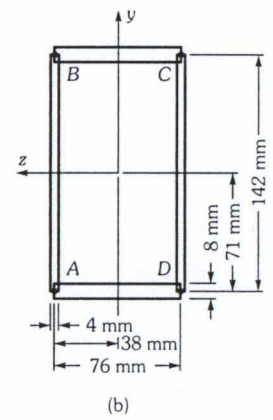
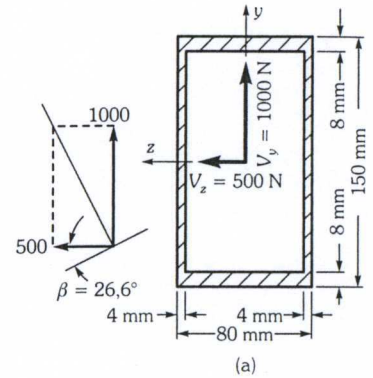


Figure 17.25 Exemple 17.6. Section fermée.

$$q_0 = \frac{-\oint \Delta q \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} \tag{c}$$

On détermine Δq à l'aide de l'équation 17.57 pour chacune des sections droites AB, BC, CD et DA (fig. 17.25b) ; on a ainsi :

$$q = \int_0^s \left(-t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) ds + q_{\text{intersection}} \tag{d}$$

en posant arbitrairement $q_{\text{intersection}} = 0$ au point A.

Enfin, le flux de cisaillement en tout point est donné par l'équation (d), mais on pose alors $q_{\text{intersection}} = q_0$ au point A.

Le tableau 17.2 donne le détail des calculs, et la figure 17.25d illustre la répartition du flux de cisaillement.

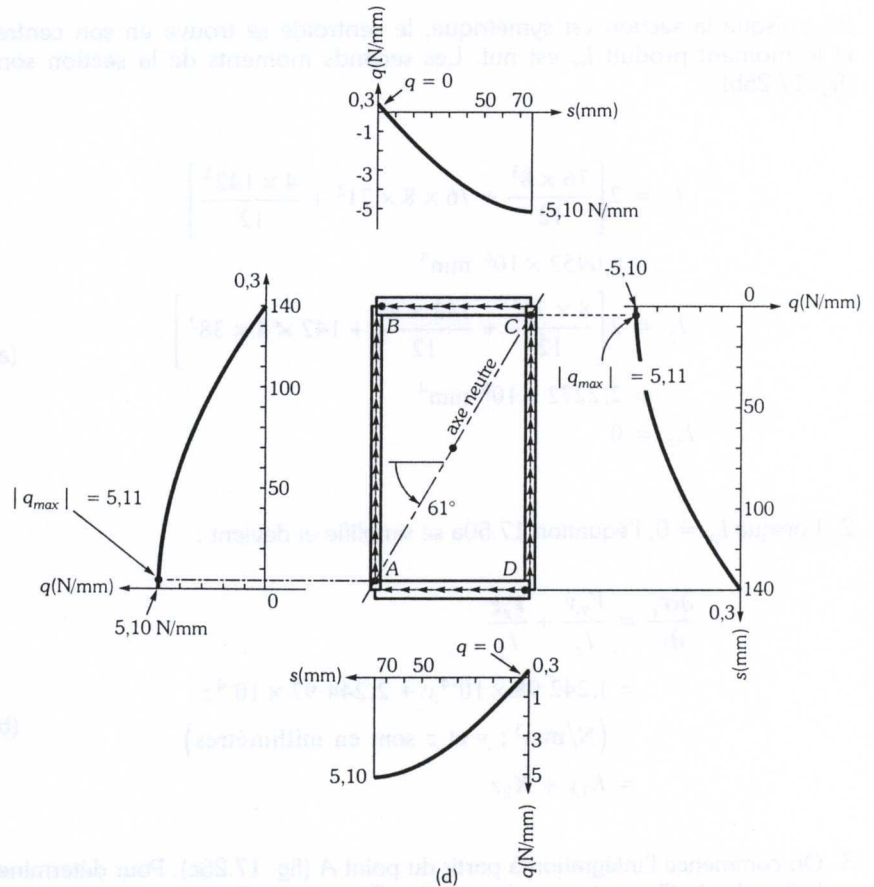


Figure 17.25 (suite) Exemple 17.6. Section fermée.

Tableau 17.2 Exemple 17.6. Détails des calculs relatifs à la répartition du flux

Section	y (mm)	z (mm)	t (mm)	s (mm)	[équat. (b) et (d)] Δq (N/mm)	q_0 [équat. (c)]	
						numérateur $-\oint_0^s \Delta q \frac{ds}{t}$ (N/mm)	dénominateur $\oint_0^s \frac{ds}{t}$ (mm/mm)
AB	-71 + s	38	4	0 à 142	$\left[K_1 \left(-71s + \frac{s^2}{2} \right) + K_2 (38s) \right] (-4)$	$K_1 \left(-71 \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} \right) + K_2 \left(38 \frac{s^2}{2} \right)$	$\frac{s}{4}$
Valeur des intégrales de A à B						56,35	35,5
BC	71	38 - s	8	0 à 76	$\left[K_1 (71s) + K_2 \left(38s - \frac{s^2}{2} \right) \right] (-8) - 4,8455$	$K_1 \left(71 \frac{s^2}{2} \right) + K_2 \left(38 \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{6} \right) + 4,8455 \frac{s}{8}$	$\frac{s}{8}$
Valeur des intégrales de A à C						79,732	9,5
CD	71 - s	-38	4	0 à 142	$\left[K_1 \left(71s - \frac{s^2}{2} \right) + K_2 (-38s) \right] (-4) - 10,2112$	$K_1 \left(71 \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{6} \right) + K_2 \left(-38 \frac{s^2}{2} \right) + 10,2112 \frac{s}{4}$	$\frac{s}{4}$
Valeur des intégrales de A à D						306,149	35,5
DA	-71	-38 + s	8	0 à 76	$\left[K_1 (-71s) + K_2 \left(-38s + \frac{s^2}{2} \right) \right] (-8) - 5,3657$	$K_1 \left(-71 \frac{s^2}{2} \right) + K_2 \left(-38 \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} \right) + 5,3657 \frac{s}{8}$	$\frac{s}{8}$
Valeur des intégrales de A à A						17,2747	9,5
Sommes des intégrales						459,506	90,0
Rappel : $K_1 = 1,24298 \times 10^{-4}$ $K_2 = 2,24497 \times 10^{-4}$						Équation (c) ... $q_0 = \frac{459,506}{90,0} = 5,1056$ N/mm	

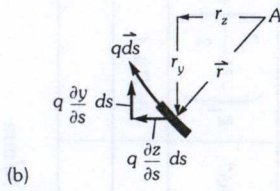
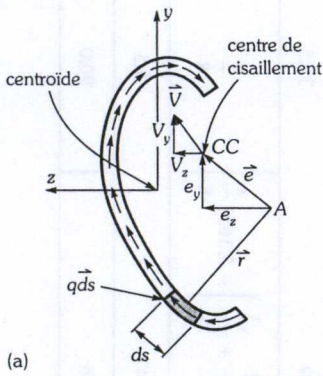


Figure 17.26 Centre de cisaillement.

NOTES : a) Le flux de cisaillement atteint sa valeur absolue maximale (5,11 N/mm) au niveau de l'axe neutre.

b) À cause de la symétrie de la section, la répartition du flux de cisaillement est symétrique.

c) La résolution de ce genre de problème exige beaucoup de minutie, car la moindre erreur se répercute sur tous les calculs (tabl. 17.2).

17.9 CENTRE DE CISAILLEMENT¹

La répartition particulière du flux de cisaillement dans les sections non symétriques engendre un moment qui peut provoquer la torsion de la poutre, sauf si le plan de chargement passe par un axe longitudinal qui, dans la section, correspond au point appelé *centre de cisaillement*.

On détermine la position du centre de cisaillement de telle manière que le moment des flux de cisaillement soit équilibré par le moment des efforts tranchants. On peut effectuer la somme des moments par rapport à n'importe quel point situé dans le plan de la section.

On choisit arbitrairement un point A (fig. 17.26a). À partir de là, il s'agit de trouver la position du centre de cisaillement (CC) par lequel doit passer la ligne d'action de l'effort tranchant \vec{V} , de telle sorte que le moment de celui-ci par rapport à A équilibre la somme des moments dus au flux de cisaillement agissant sur la section. Il faut donc que :

$$\vec{e} \times \vec{V} = \int_{s_0}^s \vec{r} \times q \vec{ds} \quad (17.59)$$

Dans l'équation 17.59, les produits sont vectoriels. Si on réécrit cette équation en fonction des composantes en y et en z des vecteurs, on obtient :

$$e_z V_y - e_y V_z = \int_{s_0}^s \left[r_z \frac{\partial y}{\partial s} - r_y \frac{\partial z}{\partial s} \right] q ds \quad (17.60)$$

La figure 17.26b représente graphiquement et en détail les termes de droite de l'équation 17.60.

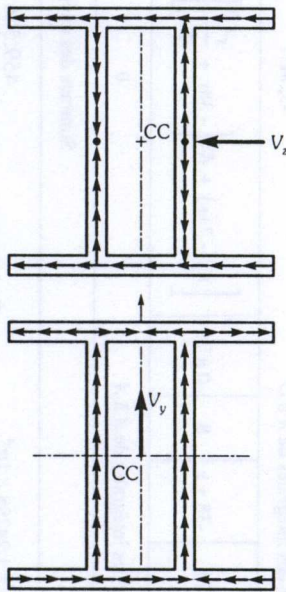


Figure 17.27 Pour une section ayant deux axes de symétrie, le centre de cisaillement est situé au centroïde de cette section.

17.9.1 Méthode de résolution

Pour déterminer les valeurs e_y et e_z , il faut procéder en deux temps, puisqu'on ne dispose que d'une seule équation pour deux inconnues. Compte tenu du fait que la localisation du centre de cisaillement est indépendante de l'intensité ou de la direction de l'effort tranchant, on doit procéder comme suit :

1. Pour déterminer e_z , on pose $V_y = 1$ et $V_z = 0$. Le flux de cisaillement est alors $(q)_y$, et l'équation 17.60 devient :

$$e_z = \int_{s_0}^s \left(r_z \frac{\partial y}{\partial s} - r_y \frac{\partial z}{\partial s} \right) (q)_y ds \quad (17.61)$$

1. Nous préférons cette expression à «centre de torsion», qui prête à confusion.

2. Pour déterminer e_y , on pose $V_y = 0$ et $V_z = 1$. Le flux de cisaillement est alors $(q)_z$, et l'équation 17.60 devient :

$$e_y = - \int_{s_0}^s \left(r_z \frac{\partial y}{\partial s} - r_y \frac{\partial z}{\partial s} \right) (q)_z ds \quad (17.62)$$

Cette méthode de résolution fait l'objet de l'exemple 17.7.

17.9.2 Centre de cisaillement relatif à certaines sections particulières

La méthode ci-dessus (art. 17.9.1) se trouve simplifiée dans les cas suivants.

- a) Lorsque la section possède deux axes de symétrie, le centre de cisaillement coïncide avec le centroïde de la section (fig. 17.27).
- b) Lorsque la section possède un seul axe de symétrie, le centre de cisaillement est situé sur cet axe et une seule des deux équations 17.61 ou 17.62 est requise (à la figure 17.28 par exemple, seule l'équation 17.61 est nécessaire).
- c) Lorsque la section est composée d'éléments droits qui convergent tous en un seul point, ce point est le centre de cisaillement. On peut déduire de l'observation de la figure 17.29 que, dans les deux cas, le flux de cisaillement engendrant un moment nul par rapport au point d'intersection, ce point est le centre de cisaillement.

EXEMPLE 17.7

Déterminer la position du centre de cisaillement de la section illustrée à la figure 17.30a, cette section étant symétrique par rapport à l'axe des z . On connaît la position du centroïde et le second moment de la section par rapport à l'axe des z .

Solution

La section étant symétrique par rapport à l'axe des z , le centre de cisaillement est situé sur cet axe. Par ailleurs, on sait que $I_{yz} = 0$.

On pose $V_z = 0$ et $V_y = 1$, et l'équation 17.50a devient :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{y}{I_z} \quad (a)$$

Or, $y = r \sin \theta$ et $I_z = (\pi r^3 t)/2$. L'équation (a) devient donc :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{2 \sin \theta}{\pi r^2 t} \quad (b)$$

L'équation 17.51 donne :

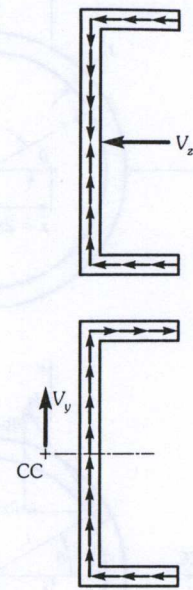


Figure 17.28 Pour une section ayant un axe de symétrie, le centre de cisaillement est situé sur cet axe.

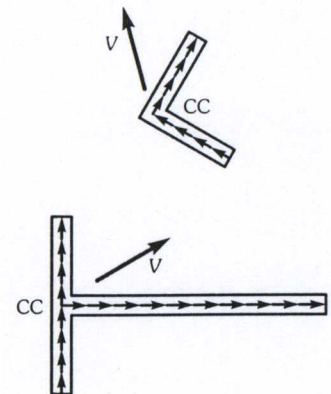


Figure 17.29 Le centre de cisaillement est situé à l'intersection des éléments droits.

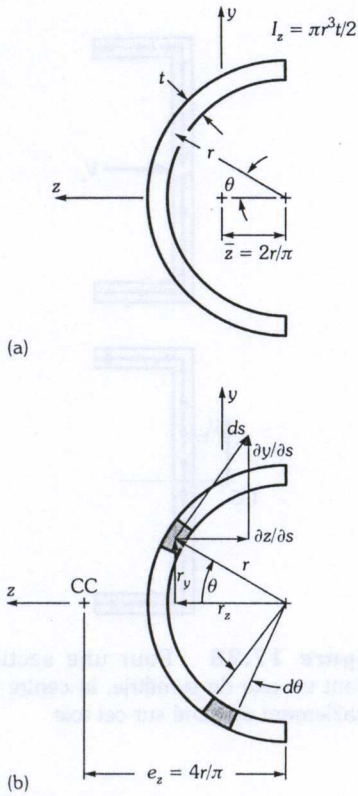


Figure 17.30 Exemple 17.7.

$$\begin{aligned}
 q_s &= \int_{s_0}^s \left(-t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) ds \\
 &= -\frac{2}{\pi r^2} \int_{-\pi/2}^{\theta} \sin \theta (r d\theta) = \frac{2}{\pi r} \cos \theta
 \end{aligned} \tag{c}$$

Pour déterminer e_z , on utilise l'équation 17.61, soit

$$e_z = \int_{s_0}^s \left(r_z \frac{\partial y}{\partial s} - r_y \frac{\partial z}{\partial s} \right) (q)_y ds$$

où :

$$r_y = r \sin \theta$$

$$r_z = r \cos \theta$$

$$ds = r d\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = -\sin \theta$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 e_z &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta) \left(\frac{2}{\pi r} \cos \theta \right) r d\theta \\
 &= \frac{2r}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{2r}{\pi} \left[\sin \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}
 \end{aligned} \tag{d}$$

$$e_z = \frac{4r}{\pi} \tag{e}$$

17.10 FLÈCHE DES POUTRES SOUMISES À UNE FLEXION GAUCHE

Si on reprend les équations 17.33b et 17.33c ainsi que 17.35a, on a :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} (M_y I_{yz} + M_z I_y) = \frac{1}{E} \left(\frac{M_y}{I_{yz}^*} + \frac{M_z}{I_z^*} \right) \tag{17.63a}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{-1}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} (M_z I_{yz} + M_y I_z) = -\frac{1}{E} \left(\frac{M_z}{I_{yz}^*} + \frac{M_y}{I_y^*} \right) \tag{17.63b}$$

Pour calculer la flèche d'une poutre soumise à une flexion gauche, il faut résoudre les équations précédentes qui, intégrées chacune deux fois, donnent les expressions des composantes de déplacement (flèches) v et w , respectivement, dans les directions y et z . La flèche totale de la poutre est donnée par l'équation :

$$\delta = \sqrt{v^2 + w^2} \quad (17.63c)$$

Le vecteur δ est toujours normal à l'axe neutre de la poutre.

Nous proposons ci-dessous deux méthodes possibles de résolution pour ce problème : la méthode de double intégration et la méthode de Castigliano.

17.10.1 Méthode de double intégration

Pour effectuer la double intégration des équations 17.63a et 17.63b, on emploie les méthodes applicables aux poutres symétriques étudiées au chapitre 5 (fonctions de singularités, moments d'aires, etc.). On procède en deux étapes.

1. On pose $M_y = 0$ et on calcule les déplacements v_z et w_z dus au seul moment M_z . Les relations 17.63a et 17.63b deviennent alors :

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = \frac{M_z}{EI_z^*} \quad \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} = -\frac{M_z}{EI_{yz}^*} \quad (17.64)$$

2. On pose ensuite $M_z = 0$ et on calcule les déplacements v_y et w_y dus au seul moment M_y ; de là, on obtient (équat. 17.63a et 17.63b) :

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = \frac{M_y}{EI_{yz}^*} \quad \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{EI_y^*} \quad (17.65)$$

Pour trouver les expressions des déplacements totaux v et w de la poutre, on superpose les résultats de ces deux étapes, soit

$$v = v_z + v_y \quad w = w_z + w_y \quad (17.66)$$

NOTE : Lorsque les axes principaux de la section coïncident avec les axes y et z , on a $I_{yz} = 0$, donc $I_{yz}^* = \infty$, $I_y^* = I_y$ et $I_z^* = I_z$ (17.67)

Les déplacements v_y et w_z sont donc nuls et, pour trouver la solution, il suffit de résoudre le système suivant :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M_z}{EI_z} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{EI_y} \quad (17.68)$$

Les équations 17.68 sont, pour chacun des plans de chargement, identiques à celles relatives à la flexion symétrique (chap. 5).

17.10.2 Méthode de Castigliano

Si on néglige l'effet du cisaillement transversal, la seule composante de contrainte active en flexion gauche est σ_x , la contrainte normale à la section. Selon les équations 9.42 et 9.43, l'énergie de déformation est alors obtenue par l'équation suivante :

$$U = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_x^2 dV \quad (17.69)$$

En remplaçant dans cette dernière équation la valeur de σ_x obtenue d'après l'équation 17.35b, on trouve :

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^L \left[\left(\frac{M_y}{I_{yz}^*} + \frac{M_z}{I_z^*} \right)^2 \int_A y^2 dA + \left(\frac{M_z}{I_{yz}^*} + \frac{M_y}{I_y^*} \right)^2 \int_A z^2 dA - 2 \left(\frac{M_y}{I_{yz}^*} + \frac{M_z}{I_z^*} \right) \left(\frac{M_z}{I_{yz}^*} + \frac{M_y}{I_y^*} \right) \int_A yz dA \right] dx$$

Avec :

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad I_{yz} = \int_A yz dA$$

après simplification, on obtient :

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^L \left(\frac{M_y^2}{I_y^*} + \frac{M_z^2}{I_z^*} + \frac{2M_y M_z}{I_{yz}^*} \right) dx \quad (17.70)$$

Selon le théorème de Castigliano, le déplacement du point d'application d'une force P est donné par :

$$\delta_P = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \left[\frac{M_y (\partial M_y / \partial P)}{EI_y^*} \right] dx + \int_0^L \left[\frac{M_z (\partial M_z / \partial P)}{EI_z^*} \right] dx + \int_0^L \left[\frac{M_y (\partial M_z / \partial P) + M_z (\partial M_y / \partial P)}{EI_{yz}^*} \right] dx \quad (17.71)$$

L'exemple 17.8 récapitule les notions présentées dans ce chapitre.

EXEMPLE 17.8

Une poutre d'acier ($E = 210 \text{ GPa}$) [fig. 17.31a] est soumise à un chargement en porte-à-faux (fig. 17.31b). On demande de déterminer :

- la localisation de la ligne d'action de la charge P pour que la poutre ne subisse aucune torsion ;
- la contrainte normale maximale qui agira dans la poutre ;
- la contrainte maximale de cisaillement longitudinal ;
- le déplacement de l'extrémité libre B de la poutre par deux méthodes, soit l'utilisation du tableau 5.2 et la méthode énergétique (dite de Castigliano).

Solution

1. Calcul des propriétés de la section (app. A)

a) Pour le centroïde (fig. 17.31c), on trouve :

$$\bar{y} = \frac{(60 \times 5 \times 2,5) + \left[105 \times 5 \times \left(5 + \frac{105}{2} \right) \right] + (60 \times 10 \times 115)}{(60 \times 5) + (105 \times 5) + (60 \times 10)}$$

$$= 70,13 \text{ mm} \quad (\text{a})$$

$$\bar{z} = \frac{(60 \times 5 \times 30) + (105 \times 5 \times 2,5) + (60 \times 10 \times 30)}{(60 \times 5) + (105 \times 5) + (60 \times 10)}$$

$$= 19,87 \text{ mm} \quad (\text{b})$$

b) Les moments de la section sont les suivants :

$$I_z = \frac{60 \times 5^3}{12} + \frac{105^3 \times 5}{12} + \frac{60 \times 10^3}{12}$$

$$+ (60 \times 5)(2,5 - 70,13)^2 + (105 \times 5)(57,5 - 70,13)^2$$

$$+ (60 \times 10)(115 - 70,13)^2$$

$$= 3,152 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad (\text{c})$$

$$I_y = \frac{5 \times 60^3}{12} + \frac{105 \times 5^3}{12} + \frac{10 \times 60^3}{12}$$

$$+ (60 \times 5)(30 - 19,87)^2 + (105 \times 5)(2,5 - 19,87)^2$$

$$+ (60 \times 10)(30 - 19,87)^2$$

$$= 0,522 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad (\text{d})$$

$$I_{yz} = (60 \times 5)(2,5 - 70,13)(30 - 19,87)$$

$$+ (105 \times 5)(57,5 - 70,13)(2,5 - 19,87)$$

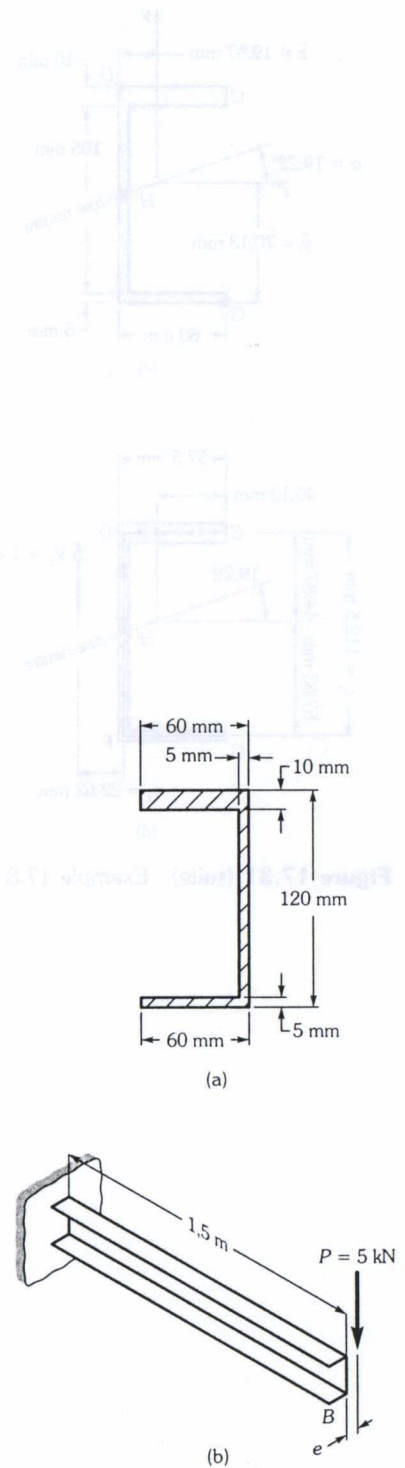
$$+ (60 \times 10)(115 - 70,13)(30 - 19,87)$$

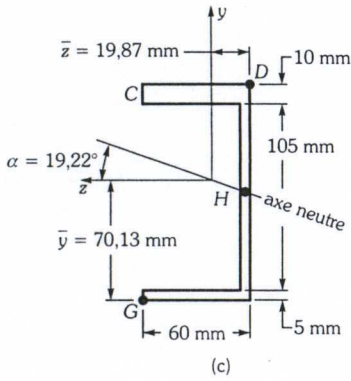
$$= 0,182 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

d'où

$$I_y^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_z} = 0,511 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad (\text{f})$$

$$I_z^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_y} = 3,088 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad (\text{g})$$


Figure 17.31 Exemple 17.8.



$$I_{yz}^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_{yz}} = 8,858 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad (h)$$

2. Centre de cisaillement

Pour simplifier la détermination de la position du centre de cisaillement, on effectue la somme des moments par rapport à l'intersection F (fig. 17.31d). Ainsi, seul le flux de cisaillement qui agit dans la partie CD de la section contribue à engendrer une torsion. Avec $V_y = 1$ et $V_z = 0$, l'équation 17.50a donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= \frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2} (I_y y - I_{yz} z) V_y \\ &= (3,238y - 1,129z) \times 10^{-7} \end{aligned} \quad (i)$$

Le long de la partie CD, on a $y = 44,87 \text{ mm}$ et $z = 40,13 - s \text{ (mm)}$. Donc

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = (10 + 0,1129s) \times 10^{-6} \quad (\text{N/mm}^3) \quad (j)$$

L'équation 17.51 donne :

$$\begin{aligned} q_s &= \int_0^s \left(-t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) ds \\ &= -10 \left(10s + 0,1129 \frac{s^2}{2} \right) \times 10^{-6} \quad (\text{N/mm}) \end{aligned} \quad (k)$$

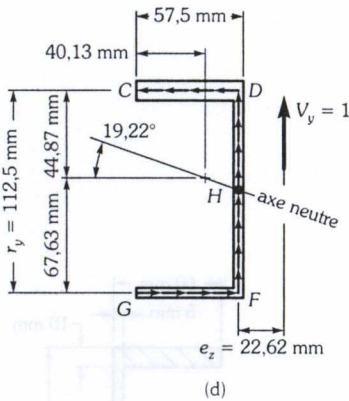


Figure 17.31 (suite) Exemple 17.8.

À partir de l'équation 17.60, on trouve les moments par rapport au point F (fig. 17.31d), soit :

$$V_y e_z = \int_0^{57,5} r_y q_s ds \quad (l)$$

où :

$$r_y = 112,5 \text{ mm}$$

$$V_y = 1$$

On a enfin :

$$e_z = 10^{-5} \left[\left(10 \frac{s^2}{2} + 0,1129 \frac{s^3}{6} \right) \times 112,5 \right]_0^{57,5} = 22,62 \text{ mm} \quad (m)$$

Dans les équations (l) et (m), nous avons ajusté les signes par souci de conformité avec la figure 17.31d.

3. Contrainte normale maximale

Ici, puisque le plan de chargement est vertical, $M_y = 0$, et l'équation 17.38 permet d'établir :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{0}{M_z} = 0 \quad (\text{n})$$

Alors (équat. 17.39), on obtient :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I_{yz} + I_z \operatorname{tg} \beta}{I_{yz} \operatorname{tg} \beta + I_y} = \frac{I_{yz}}{I_y} = \frac{0,182}{0,522} = 0,3487 \quad (\text{o})$$

d'où

$$\alpha = 19,22^\circ$$

La figure 17.31c montre l'orientation de l'axe neutre. Les points les plus sollicités sont le point D (traction) et le point G (compression). On utilise l'équation 17.34 pour calculer $(\sigma_x)_{\max}$; puisque, ici, $M_y = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2} (M_z I_y y - M_z I_{yz} z) \\ &= -\frac{10^{-6}}{0,522 \times 3,152 - (0,182)^2} (0,522y - 0,182z) M_z \\ &= -(3,238y - 1,129z) \times 10^{-7} M_z \end{aligned}$$

$$(\text{N/mm}^2 ; y \text{ et } z \text{ sont en millimètres ; } M_z \text{ est en newtons-millimètres}) \quad (\text{p})$$

Près de l'encastrement, on a (fig. 17.31b) :

$$(M_z)_{\max} = -5 \times 1,5 \text{ kN}\cdot\text{m} = -7,5 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

Pour le point D , on trouve (fig. 17.31c) :

$$y = 120 - 70,13 = 49,87 \text{ mm}$$

$$z = -19,87 \text{ mm}$$

Alors (équat. [p]), on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -[(3,238 \times 49,87) - 1,129 \times (-19,87)] \times 10^{-7} \times (-7,5 \times 10^6) \\ &= 137,9 \text{ N/mm}^2 = 137,9 \text{ MPa} \quad (\text{tension}) \end{aligned}$$

Pour le point G , on a (fig. 17.31c) :

$$y = -70,13 \text{ mm}$$

$$z = 60 - 19,87 = 40,13 \text{ mm}$$

d'où (équat. [p])

$$\sigma_x = -204,3 \text{ MPa} \quad (\text{compression})$$

4. Contrainte de cisaillement maximale

Le flux de cisaillement maximal se produit au niveau de l'axe neutre (point H , fig. 17.31d). La distance FH est égale à :

$$FH = 67,63 - (57,5 - 40,13) \operatorname{tg} 19,22^\circ = 61,57 \text{ mm}$$

On a alors (équat. [i]), avec $V_y = 5000 \text{ N}$:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = (1,619y - 0,564z) \times 10^{-3} \quad (\text{q})$$

Dans la partie GF , on détermine le flux de cisaillement à partir de :

$$q_s = \int_0^s \left(-t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) ds \quad (\text{r})$$

où :

$$\begin{aligned} y &= -67,63 \text{ mm} \\ z &= 40,13 - s \quad (\text{mm}) \\ t &= 5 \text{ mm} \end{aligned}$$

et s varie de 0 à 57,5 mm.

On obtient q_s à l'intersection F à partir des relations (q) et (r), soit :

$$\begin{aligned} q_s &= -5 \left[1,619(-67,63)s - 0,564(40,13)s + 0,564 \left(\frac{s^2}{2} \right) \right]_0^{57,5} \times 10^{-3} \\ &= 33,3 \text{ N/mm} \end{aligned}$$

Dans la partie FH , on a :

$$\begin{aligned} y &= -67,63 + s \quad (\text{mm}) \\ z &= -(57,5 - 40,13) = -17,37 \text{ mm} \end{aligned}$$

et s varie de 0 à 61,57 mm.

Les relations (q) et (r) donnent :

$$\begin{aligned} q_s &= \int_0^s \left(-t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) ds + q_{\text{intersection}} \\ &= -5 \left[1,619(-67,63)s - 1,619 \left(\frac{s^2}{2} \right) - 0,564(-17,37)s \right]_0^{61,57} \\ &\quad \times 10^{-3} + 33,3 \\ &= 15,35 + 33,3 = 48,65 \text{ N/mm} \quad (\text{s}) \end{aligned}$$

d'où

$$\tau_{xs} = \frac{q_s}{t} = \frac{48,65}{5} = 9,73 \text{ MPa}$$

5. Déplacement de l'extrémité B (tabl. 5.2)

Le déplacement de l'extrémité d'une poutre en porte-à-faux est donné par (tabl. 5.2) :

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} \quad (t)$$

En ce qui concerne cet exemple, on peut adapter la relation (t) aux équations 17.64 ; on obtient ainsi :

$$v = -\frac{PL^3}{3EI_z^*} \quad (u)$$

$$w = \frac{PL^3}{3EI_{yz}^*} \quad (v)$$

Les signes de v et de w tiennent compte du fait que le déplacement résultant est normal à l'axe neutre (fig. 17.31d).

D'après les relations (u) et (v), et sachant que $E = 210 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$:

$$v = -\frac{(5 \times 10^3) \times (1500)^3}{3 \times (210 \times 10^3) \times (3,088 \times 10^6)} = 8,67 \text{ mm}$$

$$w = \frac{(5 \times 10^3) \times (1500)^3}{3 \times (210 \times 10^3) \times (8,858 \times 10^6)} = 3,024 \text{ mm}$$

La figure 17.31e montre le déplacement de la poutre.

Le déplacement résultant est :

$$\delta = \sqrt{v^2 + w^2} = 9,18 \text{ mm}$$

6. Vérification de la valeur de l'angle (fig. 17.31f)

$$\text{tg } \alpha = \frac{w}{v} = \frac{3,024}{8,67} = 0,3487$$

$$\alpha = 19,22^\circ$$

Cet angle a la même valeur que l'angle que fait l'axe neutre avec l'axe des z (fig. 17.31d), ce qui démontre bien que le déplacement de la poutre est normal au plan neutre de celle-ci.

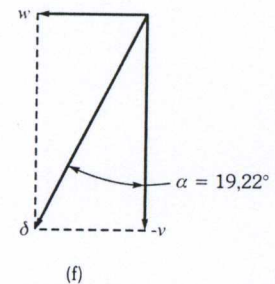
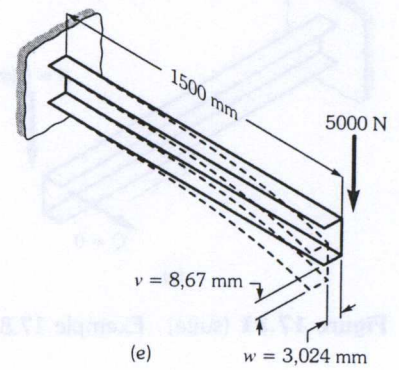


Figure 17.31 (suite) Exemple 17.8.

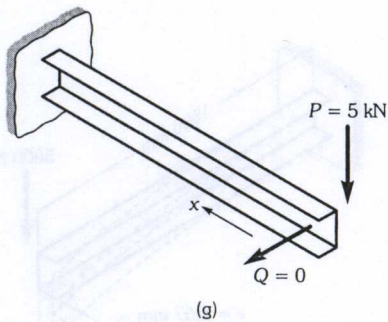


Figure 17.31 (suite) Exemple 17.8.

7. Méthode de Castigliano

Avec la force verticale $P = 5000 \text{ N}$, on peut déterminer le déplacement vertical de la poutre. Introduisons aussi une force horizontale fictive $Q = 0$ à son extrémité, afin d'en déterminer le déplacement horizontal.

Les deux moments de flexion sont alors donnés par (fig. 17.31g) :

$$M_z = Px \quad \text{et} \quad M_y = Qx \quad 0 \leq x \leq L$$

En utilisant l'équation 17.71, on établit :

$$\begin{aligned} \delta_P &= \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \left[\frac{M_y (\partial M_y / \partial P)}{EI_y^*} \right] dx + \int_0^L \left[\frac{M_z (\partial M_z / \partial P)}{EI_z^*} \right] dx \\ &\quad + \int_0^L \left[\frac{M_y (\partial M_z / \partial P) + M_z (\partial M_y / \partial P)}{EI_{yz}^*} \right] dx \\ &= \int_0^L \left[\frac{(Qx)(0)}{EI_y^*} \right] dx + \int_0^L \left[\frac{(Px)(x)}{EI_z^*} \right] dx + \int_0^L \left[\frac{(Qx)(x) + (Px)(0)}{EI_{yz}^*} \right] dx \\ &= \frac{PL^3}{3EI_z^*} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_Q &= \frac{\partial U}{\partial Q} = \int_0^L \left[\frac{M_y (\partial M_y / \partial Q)}{EI_y^*} \right] dx + \int_0^L \left[\frac{M_z (\partial M_z / \partial Q)}{EI_z^*} \right] dx \\ &\quad + \int_0^L \left[\frac{M_y (\partial M_z / \partial Q) + M_z (\partial M_y / \partial Q)}{EI_{yz}^*} \right] dx \\ &= \int_0^L \left[\frac{(Qx)(x)}{EI_y^*} \right] dx + \int_0^L \left[\frac{(Px)(0)}{EI_z^*} \right] dx + \int_0^L \left[\frac{(Qx)(0) + (Px)(x)}{EI_{yz}^*} \right] dx \\ &= \frac{PL^3}{3EI_{yz}^*} \end{aligned}$$

Ces résultats sont évidemment identiques à ceux que nous avons obtenus précédemment.

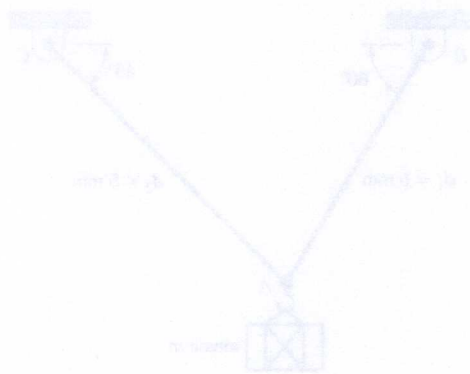
17.11 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons étudié un certain nombre de problèmes intéressants posés par la flexion. Dans le cas des poutres composées de plus d'un matériau, nous n'avons fait qu'effleurer la question, nous limitant aux cas les plus simples (flexion symétrique), puisque l'analyse du comportement des structures hétérogènes est une spécialité dont traitent déjà de nombreux ouvrages scientifiques.

Nous avons par contre étudié de façon détaillée la flexion gauche à laquelle sont soumises les poutres à comportement élastique. Comme nous l'avons fait pour la torsion (chap. 16), nous avons montré ici la nécessité d'une telle étude. En effet, il arrive souvent, en pratique, que la théorie simplifiée (chap. 4 et 5) ne soit plus suffisante, même dans le cas de poutres qui, à première vue, sont soumises à une flexion symétrique (ex. 17.3).

Nous avons également étudié la répartition du flux de cisaillement dans les poutres à parois minces avant de discuter du centre de cisaillement.

Problèmes



CHAPITRE 1

Problème 1.1

Pour l'assiette illustrée, calculer la constante normale (moment) qui s'exerce dans chaque tronçon lorsque la force F est de 100 N et la charge P de 100 N.

Réponse :

$$\sigma_1 = 20 \text{ MPa}; \sigma_2 = 40 \text{ MPa}; \sigma_3 = 50 \text{ MPa}$$

Problème 1.2

Deux câbles AB et AC, respectivement de diamètre d , et de longueur l sont fixés à un point fixe. Dans les deux cas le type de traitement est le même.

a) Pour une force $F = 500 \text{ kg}$, calculer la constante normale (moment) qui s'exerce dans chacun des câbles.

b) Pour une limite de la constante normale de traction des câbles de 200 MPa, calculer la valeur minimale possible de l .

Réponse :

$$a) \sigma_{AB} = 111,7 \text{ MPa}; \sigma_{AC} = 133,3 \text{ MPa}$$

$$b) l \geq 100,5 \text{ m}$$