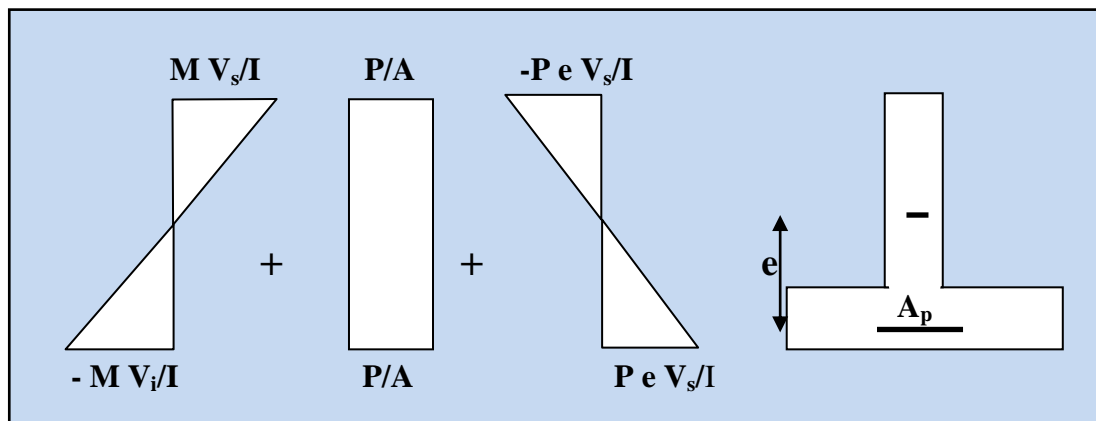


## *NOTES DE COURS*

### **Béton Précontraint, Cours et applications**

(Support pédagogique pour étudiants)  
(Master en Génie civil, Option : Structures)



-2017-

Dr. SILINE Mohammed

***Avant-propos***

*Ce document est un support pédagogique conçu sous forme de cours, avec des exercices, traitant le module du béton précontraint. Il est destiné, particulièrement, aux étudiants de Master en génie civil, Option de structures. Il regroupe certains chapitres de ce domaine très vaste, notamment en mode de post tension, d'une manière très objective sans entrer dans trop de détails et de calculs.*

*Pour une meilleure compréhension, un langage scientifique assez simple a été utilisé et de nombreuses applications ont été proposées afin d'aider l'étudiant à assimiler le cours et à dégager une idée claire sur les concepts abordés. Le document contient également des figures et des images prises des chantiers de quelques ouvrages réalisés récemment en Algérie (Auto route est-ouest), ce qui permettra à l'étudiant de prendre une idée plus réaliste sur les ouvrages en béton précontraint.*

*Je souhaite que cet effort puisse aider nos étudiants et contribuera à une plus large diffusion de ce concept en Algérie.*

*Dr. SILINE Mohammed*

**SOMMAIRE:**

<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	01
<b>CHAPITRE I : Le Béton Précontraint</b>	
INTRODUCTION.....	06
1. HISTORIQUE.....	06
2. MODES DE LA PRECONTRAINTE.....	08
2.1. Précontrainte par Post tension.....	08
2.1.1. <i>Etapes de mise en œuvre de la précontrainte par post tension interne</i> .....	09
2.1.2. <i>Avantages de la précontrainte par post tension</i> .....	10
2.1.3. <i>Matériel nécessaire pour la réalisation de précontrainte par post tension</i> .....	11
2.2. Précontrainte par Pré-tension .....	15
2.2.1. <i>Etapes de mise en œuvre de la précontrainte par Pré-tension interne.</i> .....	16
2.2.2. <i>Avantages et inconvénients de la précontrainte par Pré-tension</i> .....	16
3. PROCÉDES DE PRECONTRAINTE PAR POST TENSION.....	16
3.1. Procédés Freyssinet .....	16
3.2. Procédés PAC.....	17
3.3. Procédés BBR-B.....	17
3.4. Procédés CCL.....	17
4. DOMAINE D'APPLICATION.....	18
4.1. Bâtiments.....	18
4.2. Ponts.....	18
4.3. Récipients.....	18
4.4. Infrastructures.....	18
4.5. Autres applications.....	19
5. REGLEMENTATION.....	19
6. APPLICATIONS .....	20
<b>CHAPITRE II : CARACTERISTIQUES DES MATERIAUX</b>	
INTRODUCTION.....	25
1. LE BETON.....	25
1.1. Mise en œuvre du béton.....	26
1.2. Caractéristiques mécaniques du béton.....	26
1.2.1. <i>Résistance caractéristique à la compression</i> .....	26
1.2.2. <i>Résistance caractéristique à la traction</i> .....	27
1.2.3. <i>Module de déformation longitudinale</i> .....	27

1.2.4. Diagramme contraintes- déformations.....	28
1.2.5. Déformations différées.....	29
1.2.5.1. Retrait.....	29
1.2.5.2. Fluage.....	31
1.2.6. Coefficient de Poisson.....	32
1.2.7. Coefficient de dilatation thermique.....	32
1.3. Qualités requises pour le béton du béton précontraint.....	32
2. LES ARMATURES PASSIVES .....	33
2.1. Diagramme contraintes-déformations.....	33
2.2. Caractéristiques technologiques.....	34
2.3. Caractère d'adhérence.....	34
3. LES ARMATURES ACTIVES .....	34
3.1. Caractères géométriques.....	35
3.1.1. Les fils .....	35
3.1.2. Les barres.....	35
3.1.3. Les torons.....	35
3.2. Diagramme contraintes-déformations.....	36
3.3. Qualités requises pour les aciers de précontrainte .....	38
4. APPLICATIONS.....	38
<b>CHAPITRE III : SOLLICITATIONS ET SECTIONS DE CALCUL</b>	
INTRODUCTION.....	42
1. LES ETATS LIMITES.....	42
1.1 Etat limite ultime (ELU) .....	42
1.2 Etat limite de service (ELS) .....	42
2. LES ACTIONS.....	42
2.1. Types d'actions .....	43
2.1.1. Actions permanentes.....	43
2.1.2. Actions variables.....	43
2.1.3. Actions accidentelles.....	44
2.2. Valeurs représentatives des actions .....	44
3. SOLLICITATIONS.....	45
3.1. Sollicitations de calcul à l'ELU .....	45
3.2. Sollicitations de calcul à l'ELS .....	46
4. HYPOTHESES DE CALCUL.....	46

5. SECTIONS DE CALCUL .....	46
5.1. Caractéristiques géométriques des sections .....	46
5.2. Types de sections .....	48
6. APPLICATIONS .....	50

#### **CHAPITRE IV : PERTES DE PRECONTRAINTE**

INTRODUCTION.....	55
1. DEFINITION .....	55
2. TENSION A L'ORIGINE .....	55
3. PERTES DE TENSION EN PRECONTRAINTE PAR POST TENSION.....	56
3.1. Pertes de tension instantanées .....	57
3.1.1. <i>Pertes de tension par frottement</i> .....	57
3.1.2. <i>Perte de tension par recul d'ancrage</i> .....	58
3.1.3. <i>Perte de tension par déformations instantanées du béton</i> .....	60
3.2. Pertes de tension différées .....	61
3.2.1. <i>Perte de tension dues au retrait du béton</i> .....	61
3.2.2. <i>Perte de tension dues au fluage du béton</i> .....	62
3.2.3. <i>Perte de tension dues à la relaxation des aciers</i> .....	62
4. APPLICATIONS .....	64

#### **CHAPITRE V : VERIFICATION DES CONTRAINTES**

INTRODUCTION.....	73
1. CLASSES DE VERIFICATION.....	73
2. HYPOTHESES DE CALCUL.....	75
2.1. Calcul en section non fissurée.....	75
2.1. Calcul en section fissurée.....	75
3. CONTRAINTES ADMISSIBLES EN FLEXION A L'ELS.....	75
3.1. Contraintes admissibles pour l'acier.....	76
3.1. Contraintes admissibles pour le béton.....	76
4. CONTRAINTES ADMISSIBLES EN FLEXION A L'ELU.....	77
4.1. Béton.....	77
4.2. Aciers actifs.....	77
5. DISTRIBUTION DES DEFORMATION A L'ELU.....	78
6. LA FLEXION A L'ELS .....	80
6.1. Flexion en classe I.....	80
6.2. Flexion en classe II.....	82

6.3. Flexion en classe III.....	85
6.4. Ferrailage passif.....	88
7. LA FLEXION A L'ELU.....	89
8. APPLICATIONS.....	93

**CHAPITRE VI : DISPOSITIONS CONSTRUCTIVES**

INTRODUCTION.....	100
1. TRACES DES CABLES.....	100
1.1. Relevage des câbles.....	101
1.2. Bossage pour ancrage des câbles .....	101
1.3. Dispositions pratiques de tracés de câblage.....	101
2. CABLE MOYEN FICTIF .....	103
3. FUSEAU DE PASSAGE .....	103
4. APPLICATION ..	103
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....</b>	<b>105</b>

# Introduction générale

---

## Introduction générale

Le béton est un matériau qui résiste bien et d'une façon économique aux efforts de compression, par ailleurs et à cause de son hétérogénéité, il présente un comportement de plus en plus fragile face aux efforts de traction ou de cisaillement. Contrairement au béton, l'acier présente une solution devant ces efforts de traction, l'utilisation de l'acier avec le béton permet aux constructeurs d'avoir un matériau qui s'adapte à tout type de sollicitation, grâce à l'adhérence entre les deux composants du béton armé.

Au-delà d'une certaine limite, où les sollicitations et les dimensions des sections sont très importantes, la solution du béton armé s'avère insuffisante. Dans les fibres tendues de la pièce, le béton ne peut plus suivre les armatures dans leur allongement, d'où le béton tendu se déforme et les fissures apparaissent. A cela s'ajoute une déformation différée causée par le fluage, ces déformations vont influencer sur l'enrobage des aciers (risque de corrosion), l'étanchéité de l'ouvrage et sa durabilité.

Face à ces contraintes, le constructeur est souvent obligé de faire augmenter les sections de béton et d'acier de sa structure. Une telle solution engendre une augmentation importante dans le poids de l'ouvrage et une densification de ferrailage dont le bétonnage devient plus difficile, ceci impose d'utiliser un béton liquide, ce qui peut conduire à une diminution dans la résistance du béton.

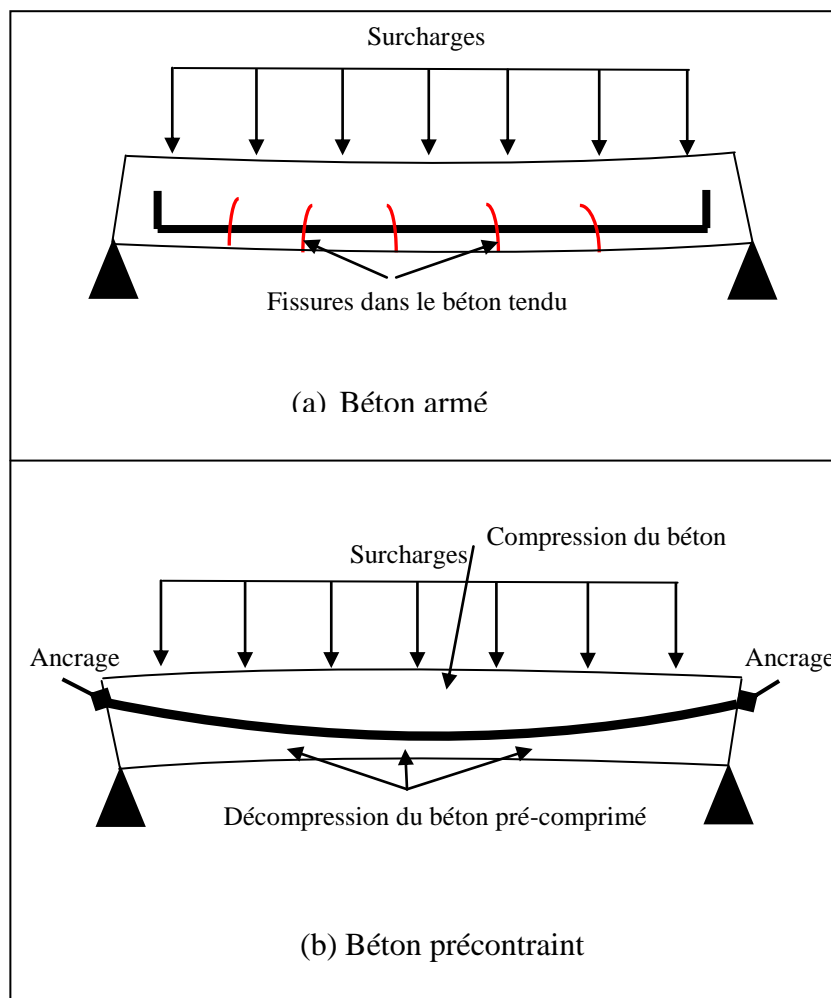
Dans les situations où le béton armé n'est plus convenable, il existe deux autres solutions, la charpente métallique et le béton précontraint. Comme le béton armé, le béton précontraint associe béton et armatures, mais il s'en différencie de façon fondamentale dans son principe. En 1928, Eugène Freyssinet eut l'idée géniale qui révolutionna le monde de la construction en permettant au béton de ne travailler qu'en compression. Il venait d'inventer le **béton précontraint**. Le principe du béton précontraint consiste à installer un effort permanent dans une structure de béton, de manière à y engendrer des contraintes permanentes de compression créées par la mise en tension des câbles de précontrainte. Ces contraintes se combinent aux efforts engendrés par la construction. Le béton doit être comprimé sans être tendu.

Soit par exemple une poutre en béton armé reposant sur deux appuis simples (**Fig. 1**). Si on la soumet à une charge, elle se déforme. La section transversale se trouve comprimée à la fibre supérieure et tendue à la fibre inférieure. Lorsque la charge est trop forte, des fissures apparaissent à la partie inférieure de la poutre.



Supprimons dans cette poutre l'armature de traction classique pour la remplacer par une gaine courbe suivant la déformée de la poutre et contenant des câbles de précontrainte. En tirant sur les câbles, on comprime la poutre. Dans la section transversale, la fibre supérieure se trouve faiblement comprimée et la fibre inférieure sera très comprimée. Si l'on applique une charge au dessus de la poutre, la fibre inférieure va se tendre et la fibre supérieure se comprime. Il est possible de déterminer l'effort de précontrainte nécessaire pour que la poutre soit toujours comprimée quelles que soient les charges appliquées.

En réalité, dans les grosses poutres, il y a de nombreuses gaines. La disposition exacte de ces câbles et leur nombre dépend de nombreux paramètres (dimensions et forme de la poutre, charges à supporter, etc.). Leur position relevée vers les extrémités est destinée à améliorer la résistance à l'effort tranchant.



**Figure 1 :** Fonctionnement d'une poutre : (a) en béton armé, (b) en béton précontraint.

La précontrainte est appliquée au béton grâce à des câbles de précontrainte en acier. Ces câbles sont tendus par des vérins de précontrainte. Lorsqu'on tend les câbles, ils vont, par réaction, appliquer un effort de compression au béton. L'intensité de la précontrainte à mettre en œuvre dépend évidemment des tractions auxquelles il faudra s'opposer et des raccourcissements instantanés et différés du béton.

En effet, la précontrainte a pour but de soumettre le béton, lors de sa fabrication, à des contraintes préalables permanentes de compression. Une fois l'ouvrage est mis en service, ce gain en compression va s'opposer aux contraintes de traction créées par les charges appliquées à l'ouvrage (poids propre, charge d'exploitation, charge climatique, etc.). Le béton, matériau qui présente une faible résistance à la traction, se trouve ainsi utilisé au mieux de ses possibilités en ne travaillant qu'en compression.

La précontrainte permet la réalisation d'ouvrages soumis à des contraintes importantes (ponts ou réservoirs de grande capacité) aussi bien que d'éléments qui, tout en étant de faible épaisseur, doivent assurer des portées relativement longues (dalles-planchers, poutres). Elle est à l'origine de progrès considérables pour l'utilisation du béton dans les ouvrages d'art et les structures coulées en place ou réalisées à partir d'éléments préfabriqués. La précontrainte peut être appliquée au béton:

- Soit par pré-tension (mise en tension des aciers avant coulage du béton).
- Soit par post-tension (mise en tension des câbles après durcissement du béton).

En Algérie, dont quelques cas sont exposés dans ce document, le recours au béton précontraint reste très limité. En l'absence de son utilisation dans d'autres domaines, la solution que présente le béton précontraint est adoptée principalement pour les ponts. Bien que la plus part de nos ouvrages soient conçus en béton armé, en charpente métallique ou en structure mixte, ce n'est qu'à l'occasion du projet du siècle que ce procédé a connu un essor scientifique et industriel important. Grâce au transfert technologique issu de l'échange scientifique avec les entreprises étrangères réalisatrices de l'autoroute est-ouest, COJAAL et CETIC, nos entreprises nationales (SERO-EST, ENGOA, SAPTA, COSIDER, etc.) sont aujourd'hui motivées de construire avec le béton précontraint. L'acquisition du matériel de la mise en tension, la formation des équipes et des cadres dans les procédés de la précontrainte et la fabrication des moules de coffrage pour les poutres de 33 et 36m sont des décisions déjà prises par ces entreprises.

# Chapitre 01 : Le béton précontraint

## INTRODUCTION :

En 1928, Eugène Freyssinet a inventé le béton précontraint en permettant au béton de ne travailler qu'en compression. Selon lui :« Précontraindre une construction, c'est la soumettre avant application des charges à des forces additionnelles déterminant des contraintes telles que leur composition avec celles qui proviennent des charges donne en tout point des résultantes inférieures aux contraintes limites que la matière peut supporter indéfiniment sans altération». D'autres définitions peuvent être citées telles que :

- (i) Le béton est considéré précontraint lorsqu'il subit un état de contraintes et de déformations avant d'être soumis aux actions de service. Dans son principe la précontrainte consiste à introduire artificiellement un système de contraintes (en général de compression) de sorte à annuler les contraintes de signe contraire (de traction) dues aux charges extérieures.
- (ii) La précontrainte est un traitement mécanique qui consiste à produire avant la mise en service, des contraintes contraires à celles produites par les charges éventuelles. Dans le cas du béton, la précontrainte est une compression de la zone qui va subir une traction sous charges extérieures .donc c'est une pré- compression de façon que l'effet différentiel de la précontrainte et des charges ne laissera plus subsister que des zones comprimées.

La précontrainte peut être intérieure (les câbles sont posés à l'intérieur du béton) ou extérieure. La précontrainte extérieure est réservée à des ouvrages de très grande taille, principalement les tabliers de pont. Cette méthode présente l'avantage d'une maintenance plus facile qu'une précontrainte interne au béton. Lors de leur mise en tension, l'effort de précontrainte transmis par les câbles au béton est mesuré soit par l'allongement des câbles, soit par la pression hydraulique exercée par le vérin.

Indépendamment de la méthode retenue (interne ou externe), la mise sous tension doit faire l'objet de mesures très précises. C'est une opération dangereuse qui doit être assurée par du personnel qualifié. Les ruptures des câbles font partie des risques potentiels. Le présent document traite uniquement la précontrainte du béton par la méthode intérieure.

## 1. HISTORIQUE:

La précontrainte sous toutes ses formes existe depuis longtemps. Elle est naturelle dans les arcs, voûtes, ou provoquée comme les cercles de tonneau, les roues de bicyclette, les roues de chariot, le pneu et la chambre à air,...etc.

La pratique de la précontrainte des pièces préfabriquées est très vieille. Qui sait quand et à qui appartient l'idée du cerclage des tonneaux et des roues des charrettes?. Ce sont deux exemples typiques d'éléments précontraints qui appartiennent à la période empirique de l'utilisation de la technique de la précontrainte (Fig.1).

Pour la réalisation d'un baril, l'assemblage des douves se fait par le battement des cercles métalliques (traction de l'armature). Entre les douves pour lesquels les bords ne se superposent pas parfaitement, on introduit un matériau d'étanchéité pour assurer l'utilisation dans de bonnes conditions. Si les douves sèchent, les cercles faiblissent et tombent alors que le baril ne sera plus opérationnel. Pour pouvoir réutiliser ce baril, les cercles doivent être battus de nouveau. Ce battement ultérieur des cercles n'est pas nécessaire si les douves se gonflent par l'introduction et la conservation du liquide à l'intérieur. La précontrainte du baril se fait donc soit par le battement de ses cercles soit par le gonflement de ses douves. La technologie très ancienne de fabrication des barils peut être facilement traduite dans la technologie moderne d'exécution des réservoirs précontraints.

Un deuxième exemple est celui de la roue de bicyclette: mise en tension des rayons pour éviter leur flambement (le poids du cycliste engendre une dé-tension du rayon, qui ne sera jamais comprimé).



**Figure I-1** : Eléments précontraints.

Les premières propositions de réalisation d'éléments à ce que nous appelons aujourd'hui béton précontraint sont les brevets d'invention de l'Américain P.H Jackson (1860) et l'Allemand Dohering (1888) et un peu plus tard l'Australien J Mandl (1896) qui proposèrent la réalisation des éléments en béton armé avec des efforts initiaux par la mise en tension des armatures. Leur préoccupation était d'éliminer la fissuration dans le béton, qui était considérée comme un défaut majeur, par la précontrainte de celui-ci. Leurs travaux n'ont pas mené à des

résultats satisfaisants à cause des phénomènes de retrait et du fluage, qui n'était pas encore connu, et de l'utilisation des aciers de qualité non correspondantes, ce qui a annulé en grande partie l'effet de la précontrainte.

C'est Eugène Freyssinet (1879-1962) qui, en se plaçant dans des conditions voisines des voûtes, introduisit un effort de compression pour compenser les tractions à venir. En 1926, il découvrit le phénomène de fluage et les lois du retrait suite d'expériences sur l'arc du pont de Plougastel. Après la guerre, on assista à un essor du béton précontraint dans les pays industrialisés avec P. Abeles en Grande Bretagne, G. Magnel en Belgique, F. Leonhardt en Allemagne, T.Y. Lin aux Etats-Unis, V. Mikhailov en USSR, J.J. Bouvy aux Pays-Bas, E. Freyssinet et Y. Guyon en France. Les premiers ponts en béton précontraint ont été réalisés par précontraintes extérieure au béton au moyen des câbles. Ce sont les ponts de la Saale à Alse en Allemagne (1928) de 68 m de portée, et d'Aue en Allemagne (1936) de 69 m de portée.

Du domaine des ponts à poutres, puis pont-dalles, pont à poutres préfabriquées, le principe de la précontrainte s'est étendu aux ponts poussés, aux ponts construits par encorbellement, aux ponts suspendus et aux ponts à haubans. D'autre part, le chams s'est élargi aux réservoirs, aux poteaux, tuyaux, dalles, tirants de voûtes, tirants d'ancrages, portiques, radiers, ...etc.

## 2. MODES DE LA PRECONTRAINTÉ :

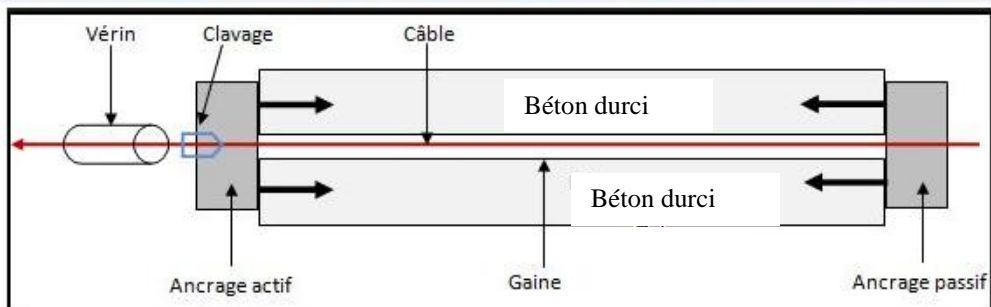
On distingue deux procédés de précontrainte :

- Précontrainte par post tension.
- Précontrainte par pré tension.

### 2.1. Précontrainte par post tension :

La précontrainte par post-tension est réalisée par des armatures actives (câbles ou torons) mises en tension après coulage et durcissement du béton. Ce dernier doit avoir une résistance mécanique à la compression suffisante, pour lui permettre de supporter les efforts de précontrainte auxquels il sera soumis.

Dans ce procédé de précontrainte, le câble logé dans sa gaine, et sous l'action du vérin auquel il est attaché, s'allonge et se tend à l'effort  $P$ . Le vérin qui prend appui le béton de la pièce à précontraindre, exerce sur elle un effort de compression égal à  $P$  (principe de l'action et la réaction).  $P$  est donc l'effort de précontrainte développé par le câble. Une fois tendu, ce dernier est ancré sur le béton, ce qui assure une permanence de la compression.



**Figure I-2 :** Procédé de précontrainte par post tension.

### 2.1.1. Etapes de mise en œuvre de la précontrainte par post tension interne :

- Mise en place des gaines dans le coffrage.



- Coulage du béton.



- Après durcissement du béton, introduction des câbles dans les gaines et leur mise en tension.



- Remplissage des gaines par le coulis d'injection.



#### Remarque :

La mise en tension des câbles dans ce procédé de précontrainte peut se faire dans deux sens en tendant les câbles à leurs deux extrémités (Procédé: actif – actif) ou dans un seul sens (Procédé: actif – passif).

#### 2.1.2. Avantages de la précontrainte par post tension :

- Ce procédé à l'avantage de pouvoir mettre en place les armatures de précontrainte selon des tracés courbes sans perte de leurs positions après coulage de béton.
- Comme c'est sur la pièce elle-même que s'appuient les vérins de précontrainte, ce procédé ne demande aucune installation fixe.
- La précontrainte par post tension permet le choix des différentes formes pour les pièces à précontraindre.
- Avant la mise en service de la pièce, ce procédé permet le réglage de l'effort de précontrainte suivant l'évolution des charges que va supporter l'élément.



### 2.1.3. Matériel nécessaire pour la réalisation de précontrainte par post tension :

**2.1.3.1. Les gaines :** Ce sont des conduites métalliques, (ou plastiques), constituées de feuillards de 0,4 à 0,6 mm enroulés en spirale, elles serviront à maintenir et protéger les câbles de précontrainte après le bétonnage. Elles doivent être étanches, souples et doivent assurer une bonne adhérence avec le béton et le coulis d'injection.



**Figure I-3 :** Gaine métallique.

**2.1.3.2. Les ancrages :** Les ancrages servent à bloquer les câbles de précontrainte contre le béton durci de la pièce. C'est un dispositif mécanique nécessaire pour assurer la permanence de l'effort de précontrainte sur le béton après la mise en tension des câbles. Pour cette fin, ce dispositif présente une immense importance puisque c'est de lui que dépendent la durée de l'ouvrage et sa pérennité. On distingue deux types d'ancrages :

**A- L'ancrage actif :** C'est sur lui que s'appuient les vérins lors de la mise en tension, il sert à bloquer le câble à l'extrémité par laquelle la mise en tension doit être effectuée, et assurer le transfert de l'effort de précontrainte au béton. Il est composé de:

- **Une plaque d'ancrage :** C'est une pièce généralement en fonte, en acier normalisé ou traité thermiquement, de résistance comprise entre 500 et 1 000 MPa. Appelée aussi la tête d'ancrage, cette pièce est le plus souvent cylindrique pourvue de trous assurant le passage des torons et réservent le logement des clavettes. Elle est équipée également d'un trou qui permet l'injection de coulis après la mise en tension des câbles.



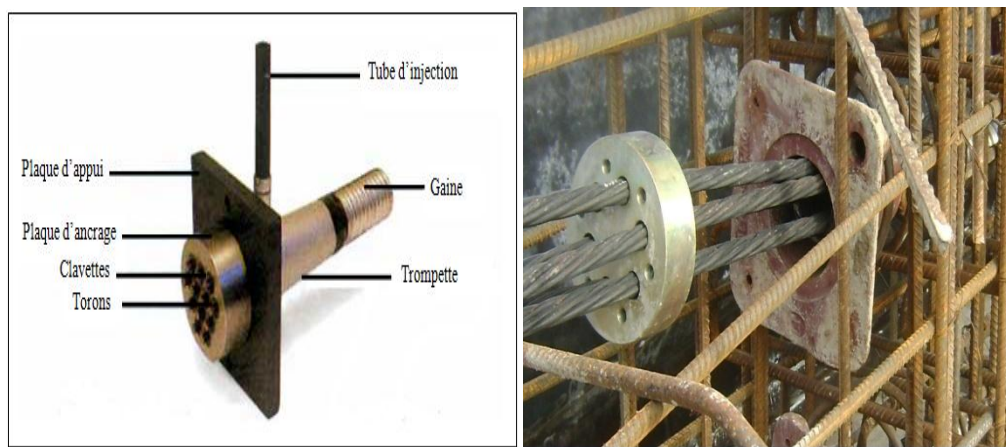
**Figure I-4:** Plaque d'ancrage (ancrage actif)

- **Le mors d'ancrage :** C'est la deuxième pièce capitale pour la sécurité de l'ancrage. Elle est en acier et fonctionne sur le principe du coin et bloque le toron à l'intérieur de la tête d'ancrage. Généralement, le mors d'ancrage prend la forme d'un cône ou d'une clavette tronconique de 2 ou 3 morceaux.



**Figure I-5 :** Les mors d'ancrage

- **La plaque d'appui :** C'est une plaque métallique en acier ou en fonte, destinée à faire diffuser l'effort de précontrainte de la tête d'ancrage à la structure. La plaque d'appui (ou de répartition) doit assurer à la fois la bonne répartition de l'effort de précontrainte des câbles au béton et la déviation du faisceau de torons entre la partie courante du câble et la zone de passage à travers la plaque d'ancrage, dans laquelle il s'épanouit.



**Figure I-6 :** Plaque d'appui

**B- L'ancrage passif (ou fixe) :** Constitué généralement des mêmes composants que l'ancrage actif, ce type d'ancrage, contrairement au précédent, ne permet pas la mise en tension de ses câbles. Il est utilisé dans le cas des câbles courts, où l'économie d'un ancrage actif peut compenser le supplément des dépenses en acier dues aux pertes par frottement, ou si une seule extrémité est accessible (Exemple: tirants d'ancrage aux rochers). On distingue l'ancrage passif extérieur qui reste accessible après le bétonnage, et l'ancrage passif ancré dans le béton qui se fonctionne soit par butée soit par adhérence.



**Figure I-7 :** Plaque d'ancrage (ancrage passif).

Selon leur mode de fonctionnement, il existe principalement trois ancrages différents : par coincement conique, par calage ou par vissage.

- **Ancrage par coincement conique :** Il s'effectue par coincement des armatures de précontrainte (fils ou torons) entre le mors et la plaque d'ancrage. Pour y arriver, le trou de la plaque d'ancrage, dit cône femelle, doit avoir une forme conique, dont les bords présentent des cannelures similaires à celles prévues sur la périphérie du cône mâle. Dans ce procédé, le vérin doit être muni de deux piston, le premier sera consacré à la mise en tension du câble, le second servira à son ancrage par enfoncement et blocage du cône mâle à l'intérieur du cône femelle de la plaque d'ancrage. La technique de coincement conique permet de réduire l'encombrement des câbles lors de leur mise en tension. Après leur blocage, on coupe les fils ou torons à quelques centimètres derrière l'ancrage pour laisser lieu au recul d'ancrage qui présente une perte de tension estimée entre 3 et 12 mm. Cette technique utilise deux modèles pour le cône mâle :
  - **Ancrage à cône :** dans ce cas, le mors est un cône.
  - **Ancrage à clavettes :** le blocage des câbles à l'intérieur du cône femelle de la plaque d'ancrage se fait à l'aide des clavettes. C'est le type d'ancrage le plus utilisé.
- **Ancrage par calage :** dans ce type d'ancrage, l'extrémité de chaque câble est équipée, en usine ou sur chantier, d'une tête d'ancrage. Actuellement, ce type d'ancrage est rarement utilisé.

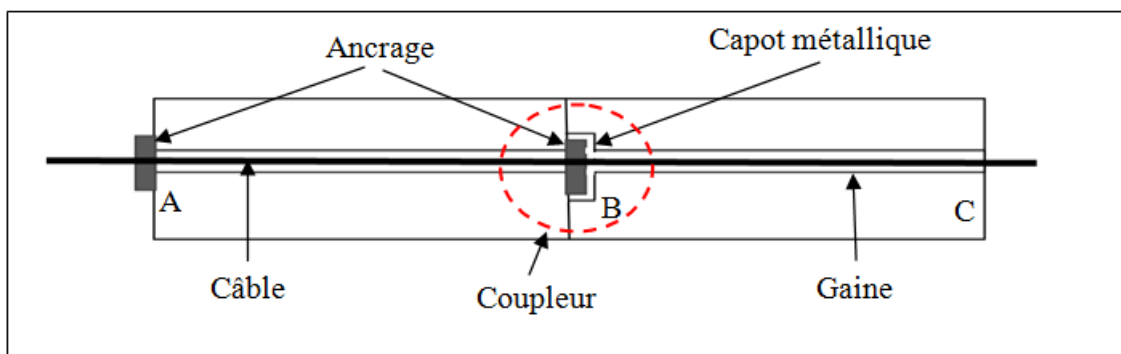
- **Ancrage par vissage** : idéal si les armatures de précontrainte sont des barres. Dans ce cas, chaque barre est dotée d'une vis et d'un écrou. L'opération de serrage permet le blocage des barres sur la plaque d'ancrage.

**2.1.3.3. Les vérins** : Nécessaires pour la mise en tension des câbles, elles sont liées à des pompes hydrauliques qui doivent être bien étalonnées (Fig. 8). Les vérins utilisés pour la mise en tension de l'acier de précontrainte sont des vérins coaxiaux conventionnels avec diverses variantes dépendant du type d'ancrages.



**Figure I-8** : Vérin hydraulique.

**2.1.3.4. Les coupleurs**: Le système de couplage assure la continuité de l'effort de précontrainte entre plusieurs tronçons d'une même poutre par rabotage des câbles, si l'ouvrage doit être exécuté en plusieurs phases. Le coupleur, placé dans le point de rabotage, doit être isolé du béton en se servant d'un capot métallique (Fig. 9). Le couplage des câbles AB et BC montré sur la figure 5, se fait en posant le coupleur sur le point B après la mise en tension du câble AB par le point B. Après isolation du coupleur par le capot métallique, la mise en tension du câble BC se fait par l'extrémité C.

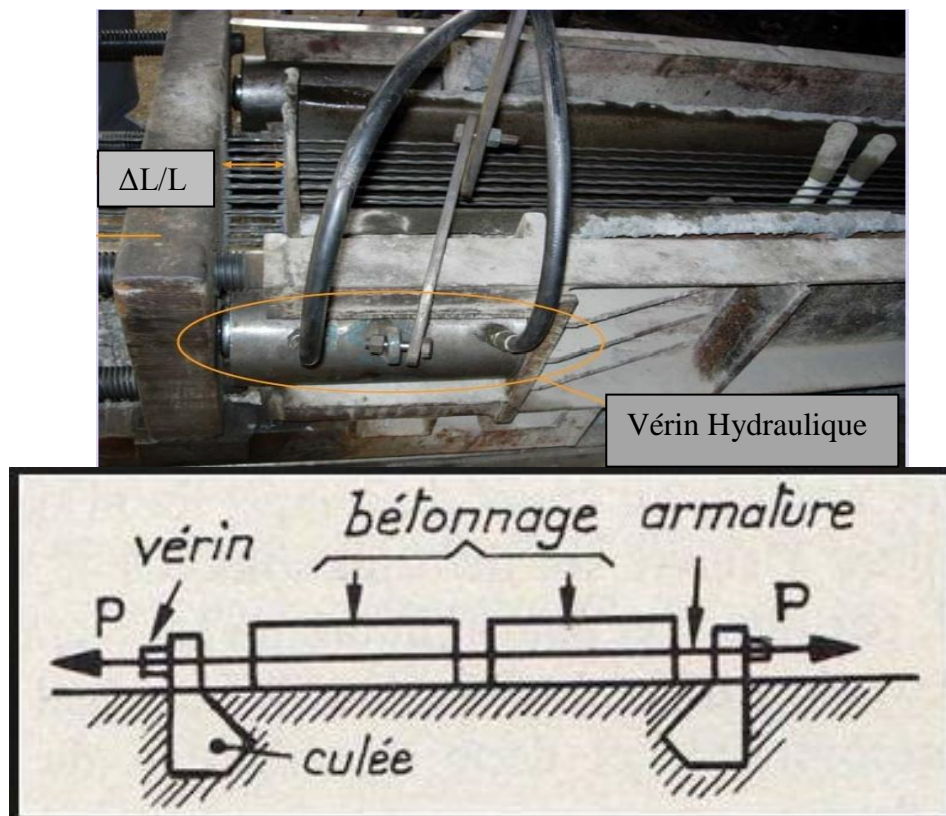


**Figure I-9** : Schéma démonstratif d'un coupleur de câble de précontrainte.

## 2.2. Précontrainte par Pré-tension :

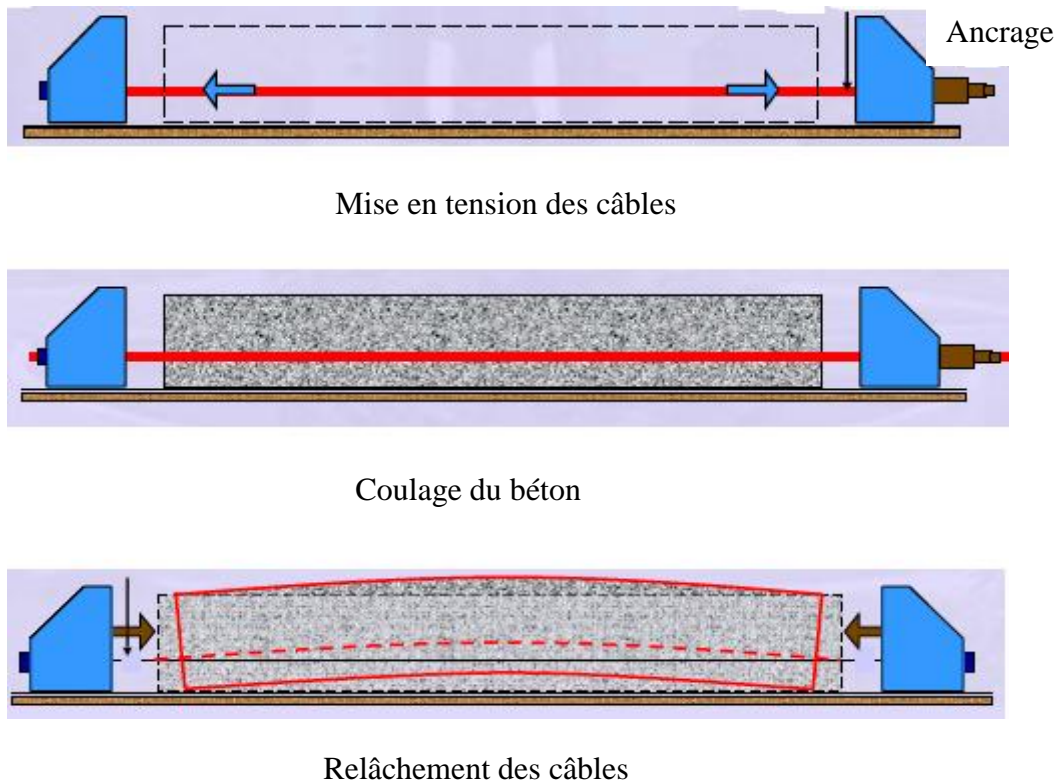
La précontrainte par pré-tension est réalisée par des armatures actives (câbles, barres ou torons) mises en tension, sur un banc de traction, avant le coulage du béton. Dans ce procédé, on commence par mettre en tension les aciers de précontrainte à l'aide de vérins prenant appui sur une culée. Quand l'allongement requis est atteint, l'acier de précontrainte est bloqué à l'aide des ancrages. Ensuite, le béton est coulé en contact direct avec les aciers de précontrainte dans les moules de coffrage qui les entourent. Lorsque le béton atteint une résistance suffisante (après durcissement), on procède au transfert de la précontrainte. Les armatures de précontrainte sont alors libérées de leurs ancrages et coupées à l'extérieur de la pièce coulée. Comme ces armatures ne sont pas libres pour revenir à leur longueur initiale, l'effort se reporte par adhérence au béton et la pièce se trouve précontrainte.

La précontrainte par pré-tension est surtout utilisée pour la préfabrication de série de pièces identiques. Cette préfabrication se fait principalement en usine mais parfois elle peut se faire sur le site même du chantier. Dépendant du type de la pièce qui est préfabriquée, le profil de l'acier de précontrainte, qui est rectiligne, est constitué d'une seule droite ou de plusieurs segments de droite. Comme acier de précontrainte on utilise fréquemment, pour la pré-tension, des torons à sept fils, chaque toron est mis en tension individuellement.



**Figure I-10 :** Principe de précontrainte par pré-tension.

### 2.2.1. Etapes de mise en œuvre de la précontrainte par pré-tension interne :



**Figure I-11** : Etapes de réalisation de la précontrainte par pré-tension.

### 2.2.2. Avantages et inconvénients de la précontrainte par pré-tension :

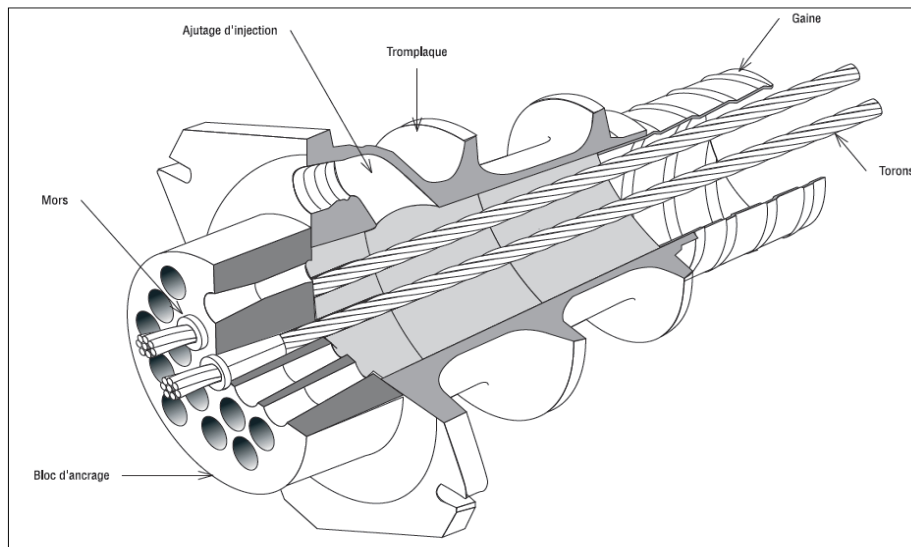
Par rapport à la précontrainte par post tension, la précontrainte par pré-tension assure une bonne adhérence entre l'acier de précontrainte et le béton. Elle présente également une économie en matière de gaines, de dispositifs d'ancrage et de l'opération d'injection de coulis. Par ailleurs, ce procédé nécessite des installations très lourdes, ce qui limite le choix des formes des pièces à précontraindre. L'inconvénient majeur de ce procédé réside dans la difficulté de réalisation des tracés courbes pour les armatures de précontrainte et le réglage de l'intensité de l'effort de précontrainte une fois le béton est durci.

## 3. PROCÉDÉS DE PRÉCONTRAINTE PAR POST TENSION

Les procédés de précontraintes font l'objet de brevet et sont fabriqués par leurs exploitants. Les principaux procédés sont:

### 3.1. Procédé Freyssinet:

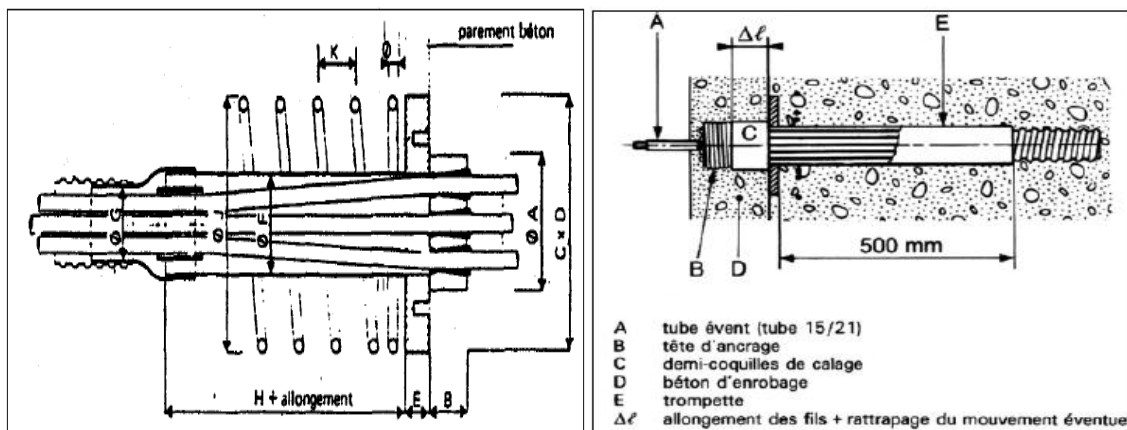
Ce système utilise des câbles composés de fils  $\varnothing 5$ ,  $\varnothing 7$  et  $\varnothing 8$  et de torons T13, T13S, T15 et T15S. La force de rupture pour ce procédé varie entre 18,7 t (pour un câble T13) et 1028 t (pour un câble 55T13). Son glissement à l'ancrage est de l'ordre de 6 à 8 mm.



**Figure I-12 :** Procédé Freyssinet.

### 3.2. Procédé PAC :

Le procédé PAC utilise des câbles composé de torons T13 ou T15. Son glissement à l'ancrage est de l'ordre de 5 mm (Fig. 13).



**Figure I-13 :** Procédé PAC.

**Figure I-14 :** Procédé BBR-B

### 3.3. Procédés BBR-B

Ce procédé crée à partir d'un procédé Boussiron de 1952 et d'un procédé suisse BBR-V est utilisé sous sa forme actuelle depuis 1954. Il utilise des câbles multi fils de 7 mm de diamètre, composés en câbles standards de 9, 14, 18, 22, 30, 54 et 84 Ø7. Son glissement à l'ancrage est inférieur à 1 mm (Fig. 14).

### 3.4. Procédés CCL

Ce procédé utilise des câbles à torons parallèles T13 ou T15 de 4T13 à 19 T15. Son glissement à l'ancrage est de l'ordre de 8 mm.

#### **4. DOMAINES D'APPLICATION:**

Les principales applications qui se sont imposées dans les débuts du béton précontraint sont les poutres et les tirants. L'extension ultérieure de l'utilisation du béton précontraint s'est caractérisée par l'application à grande échelle de la préfabrication, en parallèle avec l'utilisation dans de nombreux cas de solutions basées sur le procédé d'assemblage par précontrainte des éléments sur chantier.

##### **4.1. Bâtiments:**

Les solutions en béton précontraint renferment une large variété partant des éléments simplement appuyés de planchers, toits et murs, aux structures hyperstatiques, charpentes de grandes portées, ...etc. Les applications récentes indiquent l'extension du béton précontraint aux poteaux, murs et éléments spatiaux.

Dans le domaine des constructions industrielles et agro-zootechniques, le béton précontraint est utilisé spécialement pour les poutres de portée de plus de 6 m. Pour les bâtiments d'habitation, on l'utilise généralement pour les planchers.

##### **4.2. Ponts:**

Le béton précontraint a connu un développement important dans le domaine des ponts routiers et ferroviaires, domaine qu'il couvre de nos jours exclusivement, du moins pour les travées courantes. L'adoption de structures suspendues en béton précontraint pour de très grandes portées a conduit dans ce cas aussi à des solutions qui concurrencent les structures métalliques.

##### **4.3. Récipients**

Les réservoirs font partie des premières applications du béton précontraint se prêtant par excellence à la précontrainte, grâce aux sollicitations prépondérantes de traction. L'usage des réservoirs et les silos pour lesquels on applique la précontrainte est le stockage des différents fluides (eau, pétrole, gaz,...etc.) et l'emmagasinement des matières granulaires. On réalise aussi en béton précontraint des vases de pression pour les réacteurs nucléaires.

##### **4.4. Infrastructures:**

Les pieux en béton précontraint se sont utilisés beaucoup plus pour les constructions placées sur des terrains ayant des couches de surface faibles, par suite des avantages qui consistent en: durabilité, absence de fissures lors des manipulations et au battage, capacité portante élevée aussi bien à la force axiale qu'au moment fléchissant, économiques,...etc.



Parmi les performances atteintes, on note les diamètres de 25 cm pour des longueurs de 90 m. De même on a réalisé des palplanches en béton précontraint avec différentes formes pour les batardeaux.

#### **4.5. Autres applications**

Structures marines (quais et batardeaux), pistes d'avion, traverses de chemin de fer, poteaux pour hautes, moyenne et basse tension, fondations de machines, consolidation de terrains, châteaux d'eau, enveloppe de protection pour les réacteurs nucléaires, ...etc.

### **5. REGLEMENTATION:**

En Europe, la conception et le calcul des structures en béton précontraint se font selon les recommandations de l'Euro code 2 (Norme ENV 1992-1) et les règles de BPEL. En Algérie, et en l'absence d'une réglementation nationale, nous appliquons tout au long de ce document les règles françaises BPEL 91 (version 99). Ce sont des règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton précontraint suivant la méthode des états limites. Dans ce règlement on distingue:

- Les actions permanentes (courantes ou très peu variables) autres que la précontrainte.
- L'action de la précontrainte.
- Les actions variables.
- Les actions accidentelles.

Et les combinaisons suivantes:

- Fondamentales à l'ELU.
- Accidentelles à l'ELU.
- Rares à l'ELS.
- Fréquentes à l'ELS.
- Quasi permanentes à l'ELS.

**6. APPLICATIONS:**

**Exercice N°1:**

Soit une poutre de section rectangulaire ( $b \cdot h = 60 \cdot 130$ ) cm, soumise a un moment extérieur  $M = 0.9$  MN.m et un effort de précontrainte  $P_1$  centré. Si la contrainte finale de traction, dans les fibres inférieures, est supposée nulle :

- Schématiser le diagramme des contraintes.
- Déduire la valeur de  $P_1$ .

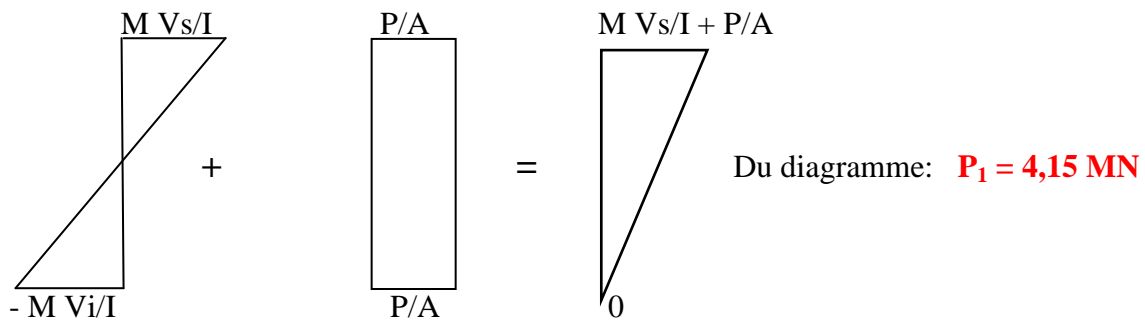


Soit la même poutre, soumise a un moment extérieur  $M = 0.9$  MN.m et un effort de précontrainte  $P_2$ , excentré au milieu de la poutre de «  $e = -45$  cm ».

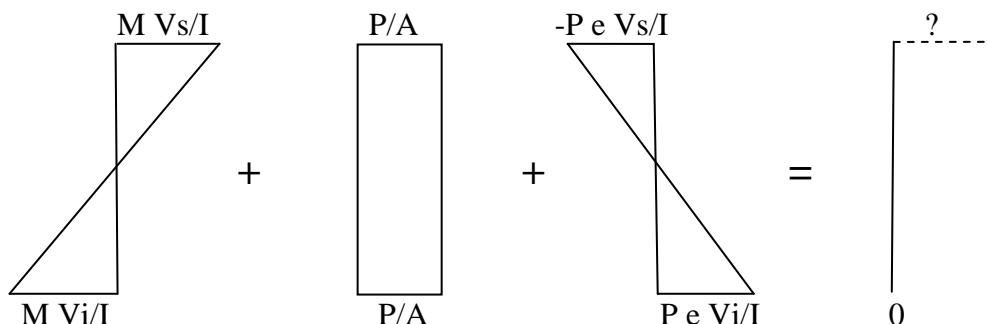
- Schématiser le diagramme des contraintes.
- Déduire la valeur de  $P_2$ .
- Donner une conclusion sur les deux cas.

**Solution:**

**Cas N°1:**



**Cas N°2:**



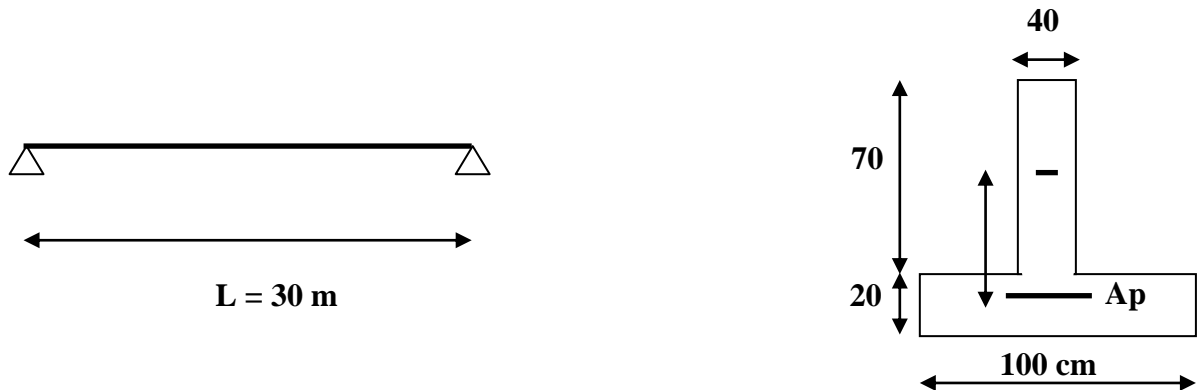
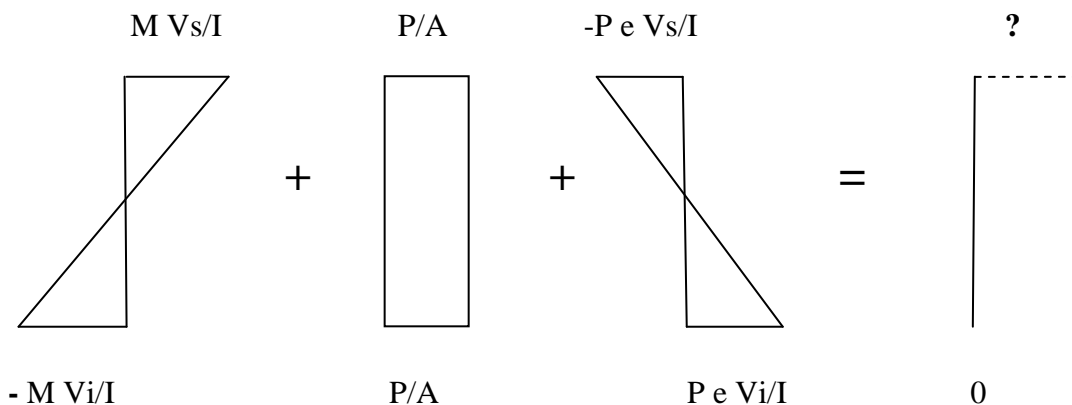
Du diagramme:  $-M V_i/I + P/A + P e V_i/I = 0 \Rightarrow P_2 = \frac{M V_i}{I \left( \frac{1}{A} + \frac{e V_i}{I} \right)}$  Donc:  $P_2 = 1,35$  MN.

**Conclusion :** L'excentricité a réduit l'effort de précontrainte.

**Exercice N°2 :**

La poutre en T, ci-dessous représentée, est soumise à son poids propre et un effort de précontrainte  $P$ , excentré de  $e = 30 \text{ cm}$ .

- Tracer le diagramme des contraintes.
- Déduire la valeur de  $P$ , si la contrainte finale de traction, dans les fibres inférieures, est supposée nulle. On donne : la masse volumique du béton est  $2,5 \text{ g/cm}^3$ .

**Solution:**

Du diagramme:

$$-M \frac{V_i}{I} + \frac{P}{A} + P e \frac{V_i}{I} = 0 \quad \longrightarrow \quad P = \frac{M V_i}{I \left( \frac{1}{A} + \frac{e V_i}{I} \right)}$$

$$A = (40 \times 70) + (20 \times 100) \quad \text{donc : } A = 4800 \text{ cm}^2.$$

$$M = Ql^2 / 8 \quad \text{avec } Q = \gamma A = 25 \times 4800 \times 10^{-4} \quad \text{donc : } Q = 12 \text{ KN/m.} \quad \text{D'où : } M = 1350 \text{ KN.m.}$$

$$Y_G = \frac{\sum A_i Y_i}{\sum A_i} = \frac{(2800 \times 55 + 2000 \times 10)}{2000 + 2800} \quad \text{donc : } Y_G = V_i = 36,25 \text{ cm.}$$

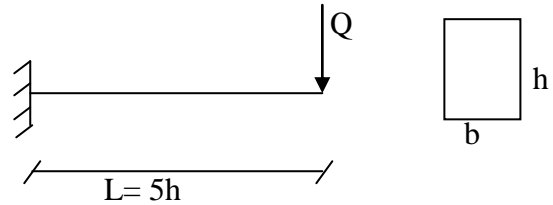
$$I = \frac{b_1 h_1^3}{12} + B_1 \Delta_1^2 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + B_2 \Delta_2^2. \quad (\Delta_1 = 18,75 \text{ cm}, \Delta_2 = 26,25 \text{ cm}). \quad \text{Donc : } I = 3572500 \text{ cm}^4.$$

$$\text{Alors : } \quad P = 2671,64 \text{ KN.}$$

**Exercice N°3 :**

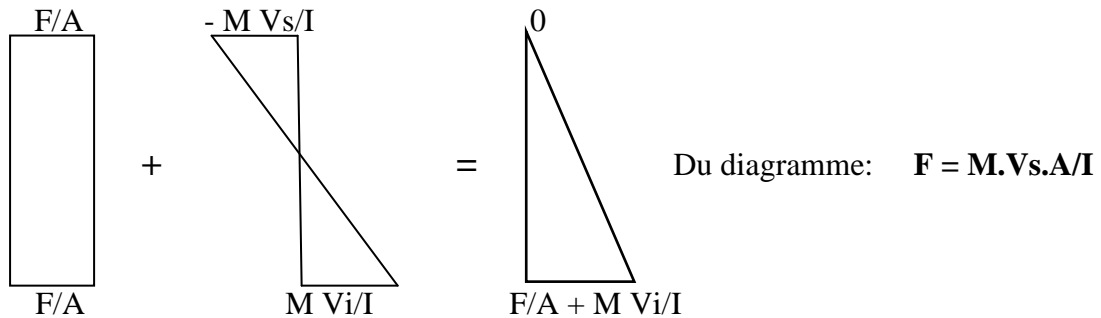
Afin d'éliminer les contraintes de traction dues au moment maximal développé par la force **Q**, la poutre console ci dessous, est soumise à un effort de précontrainte **F**. En négligeant le poids propre de la console. Déterminer:

- Le diagramme des contraintes résultant.
- La valeur de **F** en fonction de **Q** si:
  - F est centrée.
  - F est excentrée de **e = h/6**.



**Solution:**

**Cas 1, F est centrée :**

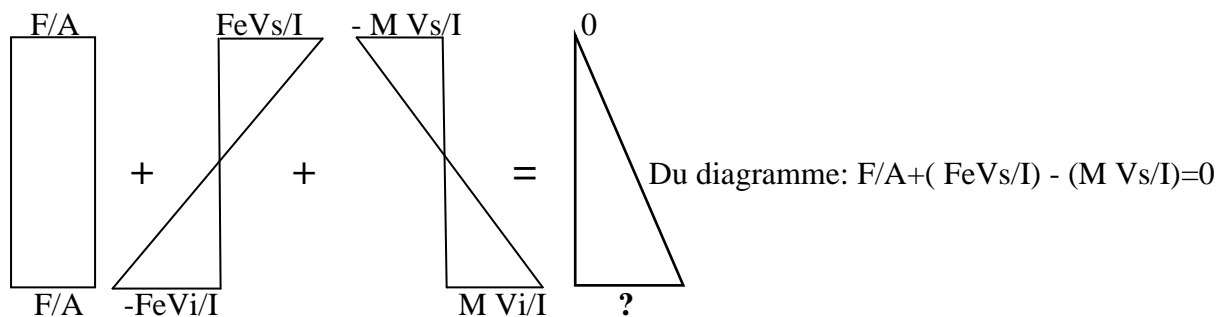


$M = M_{max} = QL = 5Qh$

$V_s = V_i = h/2$  et  $I = bh^3/12$ .

Donc:  $F = (30Qbh^3)/bh^3$ , D'où: **F = 30Q**.

**Cas 2, F est excentrée de e = h/6:**



Donc:

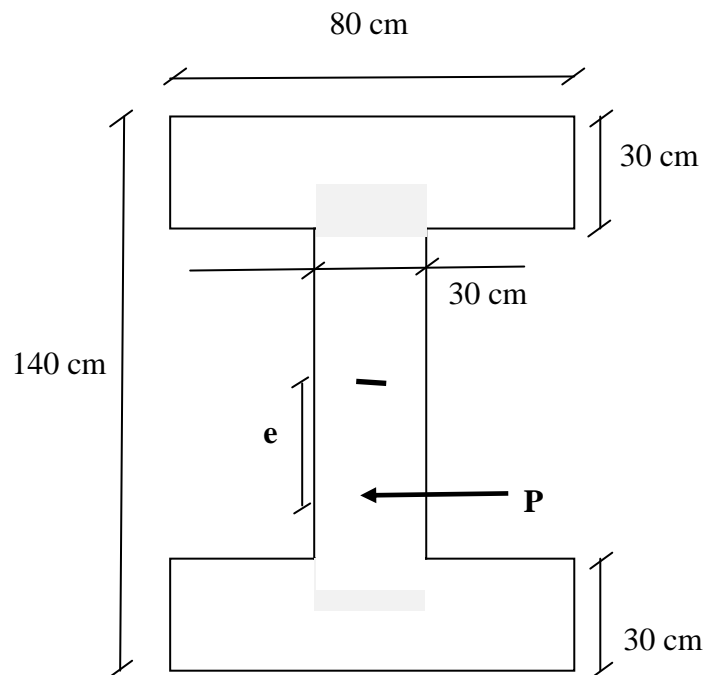
$(F/bh) + (F/bh) - (30Q/bh) = 0$

D'où: **F = 15Q**.

**Exercice N°4 :**

La poutre en I, ci-dessous représentée, est soumise à un effort de précontrainte  $\mathbf{P}$ , excentré de  $\mathbf{e} = 30 \text{ cm}$ , et à un moment extérieur  $\mathbf{M} = 1 \text{ MN.m}$ .

- Tracer le diagramme des contraintes.
- Déduire la valeur de  $\mathbf{P}$ , si la contrainte finale de traction, dans les fibres inférieures, est supposée nulle.



# **Chapitre 02 : Caractéristiques Des Matériaux**

## **INTRODUCTION :**

Le béton est un matériau hétérogène composé d'un mélange de liant (ciment), granulats, eau et éventuellement d'adjuvants. A l'état durci, le béton est caractérisé par sa forte résistance à la compression et sa faible résistance à la traction. Le béton armé fait l'association du béton avec des armatures en acier de haute adhérence, pour former des éléments de différentes formes, qui résistent aussi bien à la traction qu'à la compression. Dans les structures en béton précontraint, on utilise en plus de ces deux matériaux (béton et armatures) des aciers (câbles) de précontrainte.

Le béton précontraint exige l'emploi de matériaux de haute qualité, mis en œuvre avec soin. Il permet de les utiliser sous des contraintes élevées, notamment à la construction (c'est-à-dire au moment de la mise en tension des câbles). L'acier pour câbles de précontrainte doit être de haute résistance, pour pouvoir être tendu à un taux initial très élevé (couramment compris entre 1 200 et 1 500 MPa, sauf pour les barres). Cette tension initiale, pas très éloignée de la contrainte de rupture, n'est pas dangereuse car elle diminue progressivement par suite des pertes de précontrainte. Par ailleurs, la tension utile finale est d'autant plus élevée que le sont davantage la tension initiale et donc la résistance de l'acier. Le béton doit, lui aussi, être de qualité exceptionnelle car, tant qu'il n'est pas précontraint, il risque de se fissurer sous l'effet de la gêne qu'apportent les coffrages à son retrait. Pour éviter cela, il faut mettre ce béton en précontrainte très tôt alors que, jeune encore, il présente une résistance limitée.

### **1. LE BETON :**

Le béton précontraint exige une connaissance du matériau béton plus approfondie que celle requise en béton armé. En effet, étant donné que la précontrainte est une sollicitation permanente de grande intensité, il est essentiel de considérer non seulement les propriétés fondamentales du béton, comme la sa résistance caractéristique à la compression, mais aussi certaines propriétés dont les effets ne sont pas instantanés mais apparaissent avec le temps.

En béton précontraint on désire des bétons qui présentent une grande résistance, parfois à très court terme, et qui ont un retrait et un fluage aussi réduits que possible. Certaines exigences telles que maniabilité et grande résistance sont parfois en conflit. En effet, les grandes résistances sont obtenues avec des faibles rapports E/C mais ces mélanges sont moins de maniabilité. Toute fois, grâce à une technologie avancée, il est possible de fabriquer des bétons ayant un rapport E/C aussi faible que 0,25 tout en ayant une maniabilité suffisante surtout avec l'utilisation d'un superplastifiant.

Un béton ayant le comportement recherché n'est pas le fruit du hasard. Pour déterminer le dosage le plus efficace, il faut généralement fabriquer des mélanges d'essai surtout si on ne se dispose pas de résultats préalables. Les dosages en ciment utilisés pour les bétons de précontrainte se situent entre 350 et 450 kg/m<sup>3</sup> et les rapports E/C entre 0,30 et 0,45. Selon la résistance, les classes de l'Eurocode varient entre un béton C12-15 (non utilisé en béton précontraint) à C50-60. Au-delà de ces résistances, le béton est associé aux BHP (béton à haute performance). A titre d'exemple, un béton C40-50 possède une résistance caractéristique de 40 MPa. En béton précontraint, la résistance caractéristique du béton à la compression à 28 jours varie entre 30, 35, 40 MPa, et jusqu'à 45 MPa pour les pieux préfabriqués.

### 1.1. Mise en œuvre du béton:

La mise en œuvre du béton intervient de façon importante dans ses qualités attendues, telles la résistance mécanique, la compacité et inversement, la porosité et la perméabilité. Cette mise en place est favorisée par :

- ❖ Une bonne vibration.
- ❖ Une granulométrie continue.
- ❖ L'utilisation des adjuvants (fluidifiant, plastifiant, etc.).

Inversement la mise en œuvre est gênée par :

- ❖ Une densité importante de ferrailage, surtout si la distance entre les aciers est faible.
- ❖ Les basses températures.
- ❖ Les importantes épaisseurs de coulage.

Il est recommandé, lors du coulage du béton, de ne pas le laisser tomber d'une hauteur importante (plus d'un mètre) sans prendre des précautions spéciales, pour éviter la ségrégation ; c'est à dire l'accumulation des granulations lourds au fond du moule et la montée de l'eau et de laitance en partie supérieure, ce qui nuirait à sa compacité et à sa résistance.

### 1.2. Caractéristiques mécaniques du béton:

#### 1.2.1. Résistances caractéristiques à la compression :

Un béton est défini par la valeur de sa résistance à la compression à l'âge de 28 jours  $f_{c28}$  exprimée en MPa.



Pour un nombre de jours  $j < 28$ , la résistance  $f_{cj}$  des bétons suit les lois données par les règles de BAEL et BPEL :

$$\text{Bétons de résistance courante : } f_{cj} = \frac{j}{4.76 + 0.83j} f_{c28} \quad \text{Pour } f_{c28} \leq 40 \text{ MPa.} \quad (\text{II-1}).$$

$$\text{Bétons de haute résistance : } f_{cj} = \frac{j}{1.4 + 0.95j} f_{c28} \quad \text{Pour } f_{c28} > 40 \text{ MPa.} \quad (\text{II-2}).$$

$$\text{Pour } j \geq 28 : f_{cj} = 1,1 f_{c28} \quad (\text{II.3}).$$

### 1.2.2. Résistances caractéristiques à la traction :

La résistance caractéristique à la traction  $f_{tj}$  du béton à  $j$  jours est définie par :

$$f_{tj} = 0.6 + 0.06f_{cj} \quad (\text{II-4}).$$

Avec,  $f_{cj}$  est la résistance caractéristique à la compression à  $j$  jours exprimée en MPa.

Cette formule est valable jusqu'à des valeurs de  $f_{cj} < 60$  MPa. Cependant, cette loi linéaire pourrait conduire à surestimer la résistance à la traction des bétons dont la résistance en compression est supérieure à 80 MPa. La loi donnée par :  $f_{tj} = f_{cj}^{2/3}$  (II-5) serait plus adaptée.

### Remarque :

La résistance mécanique du béton est influencée par plusieurs facteurs, tels que :

- La qualité du ciment.
- Le dosage en ciment.
- La teneur en eau.
- L'âge du béton
- La température
- L'humidité
- La durée de chargement

### 1.2.3. Module de déformation longitudinale :

A défaut de résultats expérimentaux probants, on adopte pour le module de déformation longitudinale instantanée du béton  $E_{ij}$  une valeur conventionnelle égale à :

$$E_{ij} = 11\,000 f_{cj}^{1/3} \text{ (MPa)}. \quad (\text{II-6}).$$

Le module de déformation longitudinale différée  $E_{vj}$  est donné par :

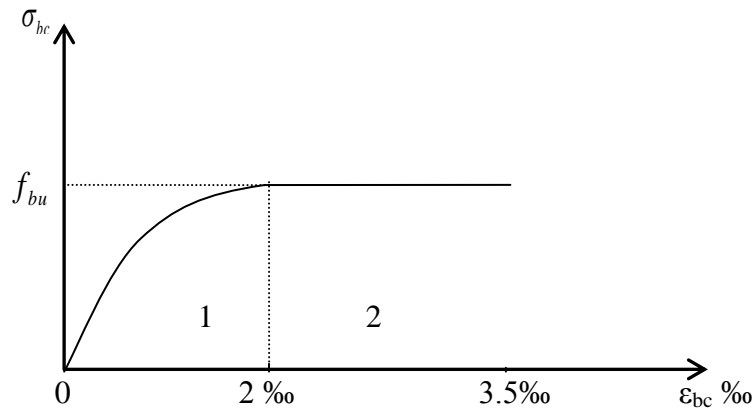
$$E_{vj} = 3\,700 f_{cj}^{1/3} \text{ (MPa)} \quad (\text{II-7}).$$

### 1.2.4. Diagramme Contraintes – Déformations :

Le diagramme conventionnel utilisé dans les calculs relatifs à l'état limite pour le béton est appelé (parabole- rectangle). C'est une représentation de la variation de la contrainte du béton en fonction de son raccourcissement. On distingue :

1 : zone élastique

2 : zone plastique



**Figure II-1 :** Diagramme contraintes déformations du béton

$f_{bc}$  : est la résistance de calcul du béton, qui vaut :  $f_{bc} = 0.85 \frac{F_{cj}}{\theta \cdot \gamma_b}$  (II-8).

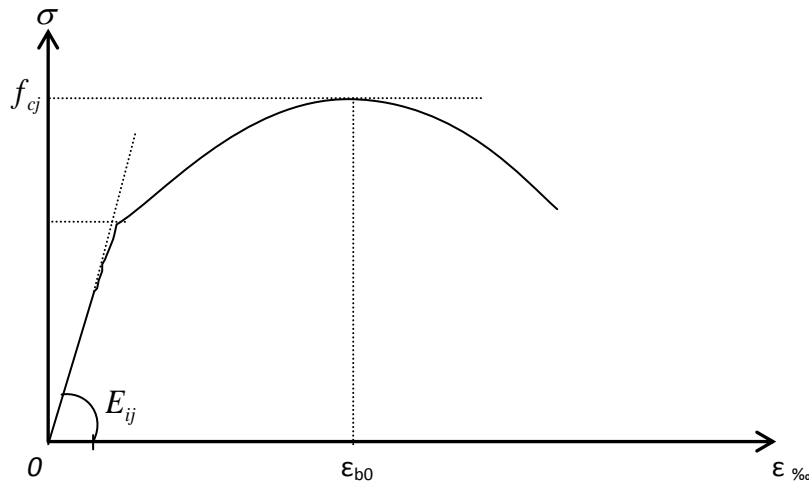
Avec :

$\gamma_b$  : le coefficient de sécurité égale à 1,5 (cas courant) et 1,15 (cas accidentel).

$\theta$  : Coefficient dépendant de la durée d'application de la charge avec :

- $\theta=1$  si la durée  $> 2h$ .
- $\theta=0.9$  si :  $24 h >$  la durée  $1h$ .
- $\theta=0.85$  si : la durée  $< 1h$ .

Lorsqu'il est nécessaire d'évaluer les déformations avec une plus grande précision, le modèle parabole- rectangle n'est généralement pas suffisant. On utilise donc le diagramme réel, défini par la formule de SARGIN:



**Figure II-2 :** Diagramme contraintes déformations du béton

$$\text{Dans ce diagramme : } \sigma_b = f_{cj} \frac{k \left( \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b0}} \right) + (k'-1) \left( \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b0}} \right)^2}{1 + (k-2) \left( \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b0}} \right) + k' \left( \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b0}} \right)^2} \quad (\text{II-9})$$

Avec :

$\varepsilon_{b0}$  : La déformation au pic de contrainte.

$k$  : Coefficient donné par:  $k = E_{ij} \varepsilon_{b0} / f_{cj}$

$k'$  : Coefficient permettant d'ajuster l'allure du début de la branche descendante au diagramme réel.

Avec :

$k' = k - 1$  pour  $f_{cj} \leq 30$  MPa,  $k' = 0$  pour  $f_{cj} \geq 55$  MPa et  $k' = (k-1)(55-f_{cj})/25$  pour  $30 < f_{cj} < 55$  MPa.

### 1.2.5. Déformations différées

**1.2.5.1. Retrait :** C'est le raccourcissement spontané du béton au cours de son durcissement en l'absence de toute contrainte. Ce raccourcissement peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon_r(t) = \varepsilon_r r(t) \quad (\text{II-10})$$

Avec :

$\varepsilon_r$  est le retrait final.

$r(t)$  : fonction variant de 0 à 1 quand le temps varie de 0 à  $\infty$  à partir du bétonnage.

Le retrait étant dû à l'évaporation progressive de l'eau non fixée dans la réaction d'hydratation du ciment. Ce phénomène ne débute qu'après la cure si l'humidité est maintenue à 100% pendant la cure. De plus, la diminution de volume due au retrait n'est pas totalement réversible. Autrement dit, si après un certain temps la pièce en béton est replacée dans une atmosphère 100% humide, il y a un certain gonflement mais la pièce ne reprend pas son volume initial. On conçoit facilement que le retrait final  $\epsilon_r$  dépend:

- De la composition du béton (fonction croissante du rapport E/C).
- De l'hygrométrie  $\rho_h$  du milieu ambiant (fonction décroissante de  $\rho_h$ ) : un béton conservé dans l'eau présente même un retrait négatif).
- Des dimensions transversales de la pièce, représentées par son rayon moyen :  $r_m = B/U$ , B étant l'aire de la section droite de la pièce et U son périmètre en contact avec le milieu ambiant (fonction décroissante de  $r_m$ ).
- Du temps (fonction croissante du temps).

Dans les conditions climatiques de l'Algérie, on admet souvent, pour  $\epsilon_r(t)$ , les valeurs forfaitaires suivantes : (Carte de zonage climatique de l'Algérie, CBA 93)

- $2 \times 10^{-4}$  en climat humide (Zone A)
- $3 \times 10^{-4}$  en climat tempéré sec (Zone B)
- $4 \times 10^{-4}$  en climat chaud et sec (Zones B, C et D1)
- $5 \times 10^{-4}$  en climat très sec ou désertique (Zones D2 et D3)

Par ailleurs, le BPEL propose, pour la loi d'évolution du retrait :

$$r(t) = \frac{t}{t + 9r_m} \quad (\text{II-11}).$$

Avec :

$t$  (j) est l'âge du béton.

$r_m$  (cm) : rayon moyen.

**Remarque :**

Si le béton est empêché d'effectuer son retrait, il se met en traction. Il faut donc éviter d'entraver ce retrait (notamment en libérant dès que possible le béton de ses coffrages, et donc en le précontrainant rapidement) ; il faut aussi empêcher que les diverses parties d'une même pièce aient des vitesses de retrait trop variables (ce qui se produit si leurs épaisseurs sont très différentes, ou si elles sont bétonnées à des époques différentes) ; il faut alors soigner la cure du béton en l'humidifiant en permanence durant une à deux semaines.

**1.2.5.2. Fluage :** Le fluage correspond à une déformation croissante dans le temps sous contrainte constante. Ce phénomène est, lui aussi, lié à la migration de l'eau à l'intérieur du béton. Il dépend d'un certains nombres de paramètres, tels que:

- L'épaisseur moyenne de la pièce.
- La contrainte appliquée.
- Le dosage en ciment.
- La teneur en eau.
- L'humidité.
- La température.
- L'âge de mise en tension.

La déformation de fluage à l'instant  $t$  d'un béton soumis à l'âge  $j = t_1 - t_0$  à une contrainte constante  $\sigma_1$ , est exprimée par la formule:

$$\varepsilon_{fl} = \varepsilon_{ic} k_{fl} (t_1 - t_0) f(t - t_1) \quad (\text{II-12})$$

Avec :  $t_0$  : date du bétonnage,  $t_1$  : date de mise en charge.

$\varepsilon_{ic} = \sigma_1 / E_{128}$  : est la déformation conventionnelle instantanée sous l'effet de la contrainte  $\sigma_1$ .

$k_{fl}$  : Est le coefficient de fluage, qui dépend notamment de l'âge ( $t_1 - t_0$ ) du béton au moment où il subit la contrainte  $\sigma_1$ , et  $f(t - t_1)$  une fonction de la durée du chargement ( $t - t_1$ ), exprimée en jours, qui varie de 0 à 1 quand cette durée varie de 0 à l'infini.

On peut également mettre  $\varepsilon_{fl}$  sous la forme :

$$\varepsilon_{fl} = \varepsilon_i \Phi (t_1 - t_0) f(t - t_1) \quad (\text{II-13}).$$

Où  $\varepsilon_i$  : Est la déformation réelle instantanée :  $\varepsilon_{ic} = \sigma_1 / E_{128}$

$\Phi = k_{fl} E_{ij} / E_{128}$  : est le rapport entre la déformation finale de fluage et la déformation réelle instantanée. Dans les cas courants, on peut prendre :

$$\varepsilon_{fl} = \Phi \frac{\sigma_1}{E_{ij}} f(t - t_1) \quad (\text{II-14}).$$

La loi d'évolution de fluage  $f(t - t_1)$  est donnée par la formule :

$$f(t-t_1) = \frac{\sqrt{t-t_1}}{\sqrt{t-t_1} + 5\sqrt{r_m}} \quad (\text{II-15}).$$

Avec :  $t$  (j) est l'âge du béton,  $t_1$ (j) : date de mise en charge.  $r_m$  (cm) : rayon moyen.

### 1.2.6. Coefficient de poisson :

Si  $\varepsilon_l$  est la déformation relative longitudinale et  $\varepsilon_t$  la déformation relative transversale, le

coefficient de poisson vaut : 
$$\nu = \frac{\Delta t / t}{\Delta l / l} = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l} \quad (\text{II-16}).$$

Il est pris égal à :

- $\nu = 0$  : Pour le calcul des sollicitations ultimes (béton fissuré).
- $\nu = 0.2$  : Pour le calcul des déformations (béton non fissuré).

### 1.2.7. Coefficient de dilatation thermique :

A défaut de résultats expérimentaux, le coefficient de dilatation thermique du béton est pris égal à  $10^{-5}$  par degré C.

### 1.3. Qualités requises pour le béton du béton précontraint :

- **Une résistance élevée en compression** : Elle conditionne la grandeur de la force de précontrainte et le comportement du béton sous l'action des charges qu'il supporte.
- **Un module d'élasticité élevé** : Le transfert des efforts des armatures tendues au béton provoque une déformation élastique de celui-ci et implicitement une réduction de la force de précontrainte due au raccourcissement des câbles. Pour réduire cette perte de tension dans l'armature tendue, le béton doit avoir des déformations très petites.
- **Une faible sensibilité aux effets des déformations différées** : La force de précontrainte est réduite dans le temps grâce aux déformations différées du béton. Une bonne formulation s'impose, surtout pour le rapport E/C.
- **Une bonne maniabilité** : Dans le but de permettre le remplissage correct de toutes les parties des moules et surtout les zones à ferrailage très dense.
- **Une grande compacité** : Ce qui permet de réduire sa porosité et sa perméabilité. En effet, le béton constitue, surtout dans le cas de pré-tension, le principal matériau de protection des câbles contre la corrosion.
- **Etanche.**
- **Ne présentant pas d'agressivité chimique vis-à-vis les câbles de précontrainte.**

## 2. LES ARMATURES PASSIVES:

Ces aciers sont utilisés généralement pour assurer le montage de la pièce, reprendre la traction et les efforts tranchants et limiter la fissuration. Les aciers passifs utilisés pour les éléments en béton précontraint sont classés en trois catégories :

- Barres rondes et lisses.
- Barres à haute adhérence.
- Treillis soudés.

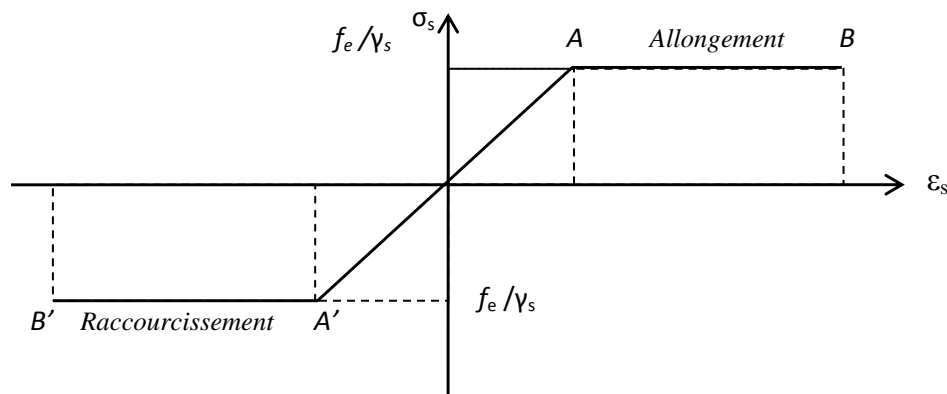
Pour ces aciers, les caractères mécaniques auxquels les normes font références sont :

- La limite d'élasticité garantie en traction  $f_e$ .
- La contrainte de rupture par traction.
- L'allongement sous charge maximale.
- L'allongement de rupture par traction.

Les caractères géométriques des aciers passifs sont désignés par les diamètres nominaux  $\varnothing_i$  des barres utilisées et leur section nominale  $A_s$ .

### 2.1. Diagramme contraintes-déformations :

Le diagramme contraintes - déformations ( $\sigma_s - \varepsilon_s$ ) des aciers passifs prend conventionnellement l'allure présentée ci-dessous :



**Figure II-3 :** Diagramme contraintes déformations des aciers passifs.

On appelle module d'élasticité (ou module de Young) le rapport déduit du diagramme de contraintes-déformations des aciers passifs et donné par la formule :

$$E_s = \frac{f_e / \gamma_s}{\varepsilon_{se}} \quad (\text{II-17})$$

On peut admettre, pour les aciers doux, que :  $E_s = 200\,000$  MPa.

## 2.2. Caractéristiques technologiques:

Les caractères technologiques des aciers passifs sont :

- L'aptitude au façonnage, définie par référence à des essais de pliage et de pliage suivi de dépliage.
- L'aptitude d'une barre à assurer les liaisons mécaniques entre elle et le béton qui l'entoure (caractères d'adhérence).
- L'aptitude au soudage.

## 2.3. Caractère d'adhérence :

L'adhérence est l'aptitude d'une barre à rester solidaire au béton qui l'enrobe en dépit des forces qui tendent à la faire glisser dans le sens de son axe. Elle est définie par deux coefficients sans dimensions : Coefficient de fissuration  $\eta$  et coefficient de scellement  $\psi_s$ .

<i>Ronds lisses</i>	$\eta = 1$
<i>Barres HA(quelque soit le <math>\Phi</math>)</i>	$\eta = 1.6$
<i>Fils HA <math>\Phi \geq 6mm</math></i>	$\eta = 1.6$
<i>Fils HA <math>\Phi &lt; 6mm</math></i>	$\eta = 1.3$

**Tableau II-1:** Coefficient de fissuration  $\eta$

<i>Ronds lisses</i>	$\psi_s = 1$
<i>Barres HA(quelque soit le <math>\Phi</math>)</i>	$\psi_s = 1.5$
<i>Fils HA(quelque soit le <math>\Phi</math>)</i>	$\psi_s = 1.5$

**Tableau II-2:** Coefficient de scellement  $\psi_s$

## 3. LES ARMATURES ACTIVES:

Les armatures actives sont les aciers de la précontrainte, leur rôle est de créer et maintenir la précontrainte. A l'inverse des armatures de béton armé qui se contentent d'un acier de qualité courante, les armatures de précontrainte exigent un acier satisfaisant un certain nombre de conditions. Elles sont classées par :

- **Catégorie :** fils, barres et torons.
- **Classe de résistance.**

Les caractères à prendre en compte pour les armatures actives de précontrainte sont :

- La section nominale de l'armature.
- Son module d'élasticité  $E_p$  ( $E_p = 200$  GPa pour les fils et les barres,  $E_p = 190$  GPa pour les torons).
- La valeur de la charge maximale garantie  $f_{prg}$
- La limite d'élasticité garantie  $f_{peg}$ .



- Le coefficient de relaxation  $\rho_{1000}$  ( $\rho_{1000} = 2,5\%$  pour les TBR (très basse relaxation) et  $\rho_{1000} = 8\%$  pour les RN (relaxation normale).
- Adhérence au béton.
- Coefficient de dilatation thermique ( $10^{-5}$  par  $^{\circ}\text{C}$ ).

### 3.1. Caractères géométriques :

#### 3.1.1. Les fils :

Les fils sont des armatures dont la plus grande dimension transversale est inférieure à 12,3mm. Ils sont livrés en couronnes. On distingue :

- Les fils d'acier ronds et lisse de symbole L,
- Les fils autres que ronds et lisses de symbole L.

Les fils sont définis par leur diamètre nominal auquel correspond une section nominale conventionnelle, suivant le tableau II.3.

$\emptyset$ (mm)	4	5	6	7	8	10	12,2
$A_p$ (mm <sup>2</sup> )	12,6	19,6	28,3	38,5	50,3	78,5	117

**Tableau II-3:** Caractéristiques géométriques des fils de précontrainte.

#### 3.1.2. Les barres :

Les barres sont définies comme des armatures rondes et lisses de diamètre qui varie entre 12,5 et 36 mm, et de longueur de 12 à 18 m. Les caractères géométriques des barres sont le diamètre et la section nominale, définis suivant le tableau II.4.

$\emptyset$ (mm)	12,5	16	20	22	26	32	36
$A_p$ (mm <sup>2</sup> )	122	200	314	380	531	804	1018

**Tableau II-4:** Caractéristiques géométriques des barres de précontrainte.

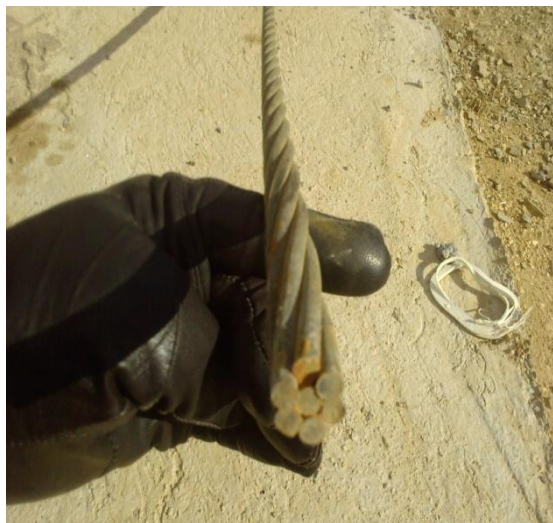
#### 3.1.3. Les torons :

Un toron est un assemblage de 3 ou 7 fils enroulés en hélice en usine et répartis en une couche, éventuellement autour d'un fil central (Fig. II.4). Ce façonnage, appelé toronnage, conduit à un à un câble relativement souple, mais les fils restent solidaires dans toutes les opérations de manutention et de mise en tension.

Les torons sont caractérisés par le nombre de leur fils, par leur diamètre, et par leur section. Le tableau II.5 fournit les valeurs correspondantes. Les torons à 3 fils, de faible section ( $13,6 \text{ mm}^2$ ) ne sont utilisés qu'en précontrainte par pré-tension. Les autres torons (à 7 fils) sont les plus utilisés en post tension. Le toron à 7 fils (de section  $12,5 \text{ mm}^2$ ) est constitué de 6 fils de diamètre de 4,2 mm enroulés sur un fil central de diamètre de 4,3 mm, ce toron est dénommé T13. Le toron à 7 fils (de section  $15,2 \text{ mm}^2$ ) est constitué de 6 fils de diamètre de 5 mm enroulés sur un fil central de diamètre de 5,2 mm, ce toron est dénommé T15.

Type	3 fils	7 fils	7 fils	7 fils standard	7 fils standard	7 fils super	7 fils super
Ø (mm)	5,2	6,85	9,3	12,5	15,2	12,9	15,7
$A_p \text{ (mm}^2\text{)}$	13,6	28,2	52	93	139	100	150

**Tableau II-5:** Caractéristiques géométriques des torons de précontrainte.



**Figure II.4:** Un toron à 7 fils (T15).

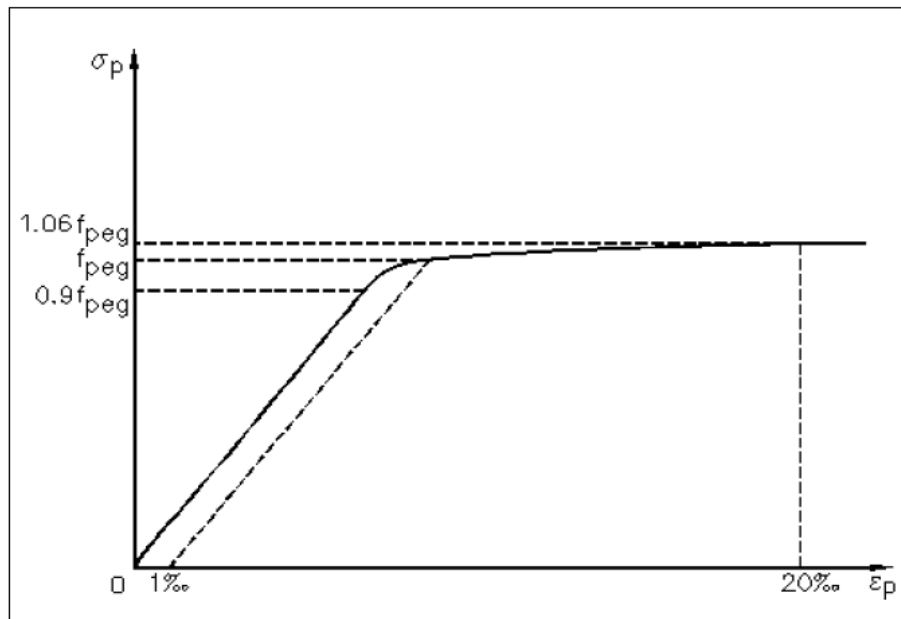
### 3.2. Diagramme contraintes-déformations :

Le BPEL propose pour les fils tréfilés et les torons le diagramme contraintes-déformations présentés sur la [figure II.5](#). Dans ce diagramme, et en l'absence d'un véritable palier plastique, il est très difficile de déterminer une limite d'élasticité pour ces aciers durs de précontrainte. Pour cela, cette limite a été définie conventionnellement comme étant le point

d'intersection de la courbe contraintes-déformations et d'une droite parallèle à la droite d'élasticité décalée de 1‰. A partir de ce diagramme, on admet que :

$$\text{Pour } \sigma_p > 0,9 f_{peg} : \quad \varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 100 \left( \frac{\sigma_p}{f_{peg}} - 0,9 \right)^5 \quad (\text{II-18}).$$

$$\text{Et, pour } 0 < \sigma_p < 0,9 f_{peg} \quad \varepsilon_p = \sigma_p / E_p \quad (\text{II-19}).$$

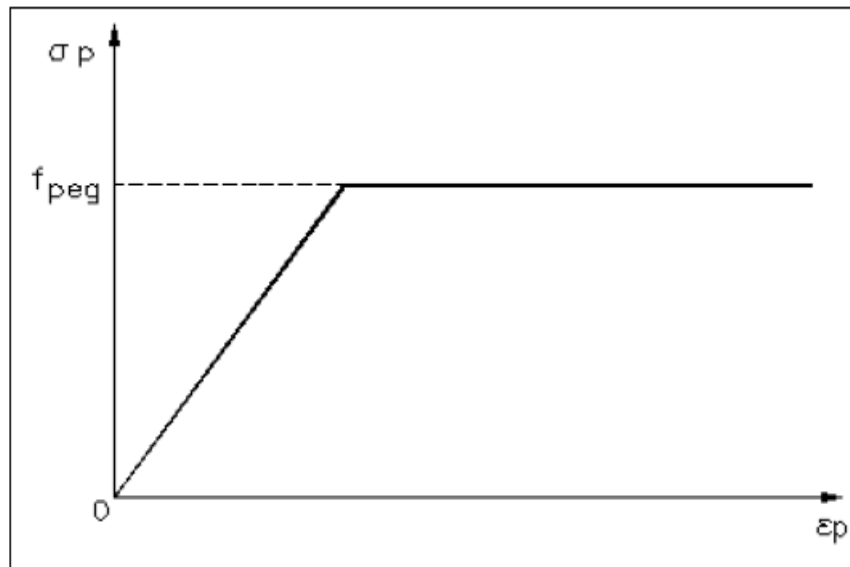


**Figure II.5:** Diagramme contraintes-déformations pour les fils tréfilés et les torons.

Pour les fils trempés et les barres (Fig. II-6), on admet que :

$$\text{Si } \varepsilon_p < f_{peg} / E_p \quad \text{donc :} \quad \sigma_p = E_p \cdot \varepsilon_p \quad (\text{II-20}).$$

$$\text{Si } \varepsilon_p \geq f_{peg} / E_p \quad \text{donc :} \quad \sigma_p = f_{peg} \quad (\text{II-21}).$$



**Figure II.6:** Diagramme contraintes-déformations pour les fils trempés et les barres.

### 3.3. Qualités requises pour les aciers de précontrainte :

- L'allongement de l'armature à la mise en tension doit être beaucoup plus grand que les raccourcissements que le béton subit à la précontrainte et dans le temps (retrait et fluage), pour pouvoir maintenir dans le temps, la force de précontrainte. Dans le cas contraire, les raccourcissements du béton présentent des pertes de tension qui peuvent annuler partiellement ou totalement l'effort de précontrainte.
- Les aciers actifs doivent présenter une rugosité suffisante afin d'assurer l'adhérence avec le béton car cette dernière constitue la condition essentielle de la transmission des efforts des aciers au béton notamment dans le cas de pré-tension.
- Ils doivent présenter une faible relaxation. Cet effet sur la force de précontrainte est similaire à celui du retrait et fluage sur le béton.
- Ils doivent avoir une résistance mécanique élevée.
- Ils doivent avoir une ductilité suffisante.
- Ils doivent avoir une bonne résistance à la corrosion.

## 4. APPLICATIONS :

### Exercice N°1 :

Une pièce rectangulaire ( $150 * 200 \text{ mm}^2$ ) de béton, est précontrainte par pré-tension des armatures dont le CDG coïncide avec celui de la section du béton (Précontrainte centrée). On suppose d'abord, que l'acier de précontrainte est un acier doux et que la contrainte de traction dans cet acier lors de la mise en tension est  $\sigma_{s0} = 250 \text{ MPa}$ . On suppose ensuite qu'il s'agit

d'un acier à haute résistance est que la contrainte de traction dans cet acier lors de sa mise en tension est  $\sigma_{p0} = 1300 \text{ MPa}$ .

Dans les deux cas, la force de précontrainte initiale  $P_0$  exigée est **175 KN**. Calculer la dilatation unitaire résiduelle et la force de précontrainte après raccourcissement du béton pour chaque type d'acier. On donne :

- $E_p = E_s = 200\,000 \text{ MPa}$ .
- $E_b = 27500 \text{ MPa}$ .

**Solution :**

**Cas 01 : Acier doux**

$$A_s = P_0 / \sigma_{s0} \implies A_s = 175 \cdot 10^3 / 250 \implies A_s = 700 \text{ mm}^2.$$

$$\text{On a: } \varepsilon_{s0} = \sigma_{s0} / E_s = 250 / 2 \cdot 10^5 \implies \varepsilon_{s0} = 12,5 \cdot 10^{-4}.$$

Lors du transfert de la précontrainte, le béton est soumis à une force de 175 KN et il subit un raccourcissement élastique instantané dû à cet effet de précontrainte. La déformation unitaire résultant de ce raccourcissement est donnée par :

$$\varepsilon_{bi} = \sigma_0 / E_b = P_0 / B \cdot E_b.$$

$$\text{Donc : } \varepsilon_{bi} = 175 \cdot 10^3 / [(150 \cdot 200) \cdot 27500] \implies \varepsilon_{bi} = 2,1 \cdot 10^{-4}.$$

Le béton subit aussi une déformation due à son raccourcissement différé (retrait et fluage). Cette déformation est de l'ordre de :  $\varepsilon_{bd} = 7 \cdot 10^{-4}$ .

L'acier subit les mêmes déformations du béton, alors la dilatation unitaire résiduelle dans l'acier est :

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{s0} - \varepsilon_{bi} - \varepsilon_{bd} = 12,5 \cdot 10^{-4} - 2,1 \cdot 10^{-4} - 7 \cdot 10^{-4} \implies \varepsilon_s = 3,4 \cdot 10^{-4}.$$

La force finale de précontrainte dans l'acier après ces pertes est :

$$P_f = \varepsilon_s \cdot E_s \cdot A_s = 3,4 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 700 \implies P_f = 47,6 \text{ KN}.$$

(La perte est:  $(175-47,6)/175 = 0,728$ , donc  $\Delta P \approx 73 \%$ ).

**Cas 02 : Acier de précontrainte**

$$A_p = P_0 / \sigma_{p0} \implies A_s = 175 \cdot 10^3 / 1300 \implies A_p = 135 \text{ mm}^2.$$

$$\text{On a: } \varepsilon_{p0} = \sigma_{p0} / E_p = 1300 / 2 \cdot 10^5 \implies \varepsilon_{p0} = 65 \cdot 10^{-4}.$$

La déformation (raccourcissement) instantanée du béton est de l'ordre de  $2,1 \cdot 10^{-4}$  et celle différée vaut  $7 \cdot 10^{-4}$ . L'acier subit les deux déformations, donc :

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} - \varepsilon_{bi} - \varepsilon_{bd} = 65 \cdot 10^{-4} - 2,1 \cdot 10^{-4} - 7 \cdot 10^{-4} \quad \Rightarrow \varepsilon_s = 55,9 \cdot 10^{-4}$$

La force finale de précontrainte dans l'acier après ces pertes est :

$$P_f = \varepsilon_p \cdot E_p \cdot A_p = 55,9 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 135 \quad \Rightarrow \quad P_f = 151 \text{ KN.}$$

(La perte est:  $(175-151)/175 = 0,14$ , donc  $\Delta P \approx 14 \%$ ).

### Exercice N°2 :

Déterminer, pour un béton de  $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$ , les caractéristiques suivantes :

- La résistance à la compression à 7 et 90 jours.
- La résistance à la traction à 7 et 90 jours.
- Le module de déformation longitudinal instantané à 7 et 90 jours.
- Le module de déformation longitudinal différé à 7 et 90 jours.

### Exercice N°3 :

Pour un acier actif  $f_{peg} = 1583 \text{ MPa}$  :

Tracer le digramme : contraintes – déformations.

### Exercice N°4 :

Déterminer la déformation due au retrait d'une poutre de section (30, 70)cm, mise en tension à  $j=7$  jours dans les conditions suivantes :

- Un climat humide Zone A.
- Un climat tempéré sec Zone B.
- Un climat chaud et sec zones B', C et D1.
- Un climat très sec ou désertique zones D2 et D3.

# **Chapitre 03 : Sollicitations et sections de calcul**

## **INTRODUCTION:**

Les calculs justificatifs sont établis suivant la théorie semi-probabiliste des états limites. Un état limite est un état pour lequel une condition requise d'une construction (ou d'un de ses éléments) est strictement satisfaite et cesserait de l'être en cas de variation défavorable d'une des actions appliquées.

### **1. LES ETATS LIMITES:**

#### **1.1. Etat limite ultime (ELU):**

C'est l'état qui correspond à la valeur maximale de la capacité portante de la construction. Le dépassement de cet état conduit à la ruine de la structure. Dans ce cas, la résistance des matériaux (béton et acier) est atteinte, la sécurité n'est plus garantie et la structure risque de s'effondrer, ce qui met en jeu la sécurité des biens et des personnes. On distingue:

- Etat limite de l'équilibre statique de l'ouvrage.
- Etat limite de résistance de l'un des matériaux de construction.
- Etat limite de stabilité de forme (flambement).

#### **1.2. Etat limite de service (ELS)**

L'état limite de service constitue des limites au-delà desquelles, les conditions normales d'exploitation ne sont plus satisfaites, sans qu'il y ait la ruine de la structure. L'ELS remet en cause l'aptitude au service de la structure (fissures, fuites, désordres divers). Cet état est défini en tenant compte des conditions d'exploitations et /ou de durabilité. On distingue :

- Etat limite de compression du béton.
- Etat limite d'ouverture des fissures.
- Etat limite de déformation (flèche maximale).

**NB :** Un ouvrage devra satisfaire à la fois à des conditions d'état limite ultime et d'état limite de service.

### **2. LES ACTIONS:**

Les actions sont l'ensemble des charges (forces, couples,...) appliquées à la structure, ainsi que les conséquences des déformations statiques ou d'état (retrait, tassement d'appuis, variation de température, etc.) qui entraînent des désordres dans la structure.



## 2.1. Types d'actions:

Les actions appliquées à une structure sont de 3 types :

### 2.1.1. Actions permanentes :

Les actions permanentes, autres que la précontrainte et notées  $G$ , sont des actions dont l'intensité est constante ou très peu variable dans le temps. Elles comprennent :

- ✓ Le poids propre des éléments de la structure.
- ✓ Le poids des équipements fixes de toute nature (revêtements de sols et de plafonds, cloisons etc.).
- ✓ Les efforts (poids, poussées, pressions) exercés par des terres, par des solides ou par des liquides dont les niveaux varient peu.
- ✓ Les déplacements différentiels des appuis.
- ✓ Les forces dues aux déformations (retrait, fluage,...) imposées en permanence à la construction.

Dans la plupart des cas, le poids propre est représenté par une valeur nominale unique,  $G_0$ , calculée à partir des dessins du projet et des masses volumiques moyennes des matériaux.

### 2.1.2. Actions variables :

Les actions variables, notées  $Q$ , représentent les actions dont l'intensité varie fréquemment et de façon importante dans le temps. Les valeurs des charges variables sont définies par des textes réglementaires en fonction des conditions d'exploitation de la construction. On distingue :

- ✓ Les charges d'exploitation (poids et effets annexes tels que force de freinage, forces centrifuges, effets dynamiques).
- ✓ Les efforts (poids, poussées, pressions) exercés par des solides ou par des liquides dont le niveau est variable.
- ✓ Les charges non permanentes appliquées en cours d'exécution (équipements de chantier, engins, dépôts de matériaux, etc.).
- ✓ Les actions climatiques : neige, vent, température, etc.

Les actions variables sont réparties en deux catégories :

- Une action dite de base notée  $Q_1$ .
- Les autres actions, dites d'accompagnement et notées  $Q_i$  ( $i > 1$ ).

L'action de base  $Q_i$  est:

- L'action unique si c'est le cas. Si non :
- La plus fréquente.
- La plus élevée.
- L'une ou l'autre action variable.

### 2.1.3. Actions accidentelles :

Les actions accidentelles, notées  $F_A$ , provenant de phénomènes rares, et ne sont à considérer que si les documents d'ordre public ou le marché le prévoient. **Exemple** : les séismes, les explosions, les chocs, ...etc.

## 2.2. Valeurs représentatives des actions:

La variabilité des actions agissant sur une structure est prise en compte en définissant pour chacune d'elles des valeurs d'intensité, dites valeurs représentatives, telles que :

- $Q_k$  : valeurs caractéristiques de l'action.
- $\psi_{0i} Q_{ik}$  : valeurs de combinaison.
- $\psi_{1i} Q_{ik}$  : valeurs fréquentes.
- $\psi_{2i} Q_{ik}$  : valeurs quasi-permanentes.

La précontrainte est représentée par une valeur de calcul  $P_d$  qui est :

- ✓ La valeur probable  $P_m$  de la force de précontrainte, pour les justifications vis-à-vis l'ELU, tel que:

$$P_m(x, t) = P_0 - \Delta P(x, t). \quad (\text{III-1})$$

Avec:

$P_0$ : est la valeur de la précontrainte à l'ancrage.

$\Delta P$  : sont les pertes de tension à l'instant  $t$ , au point d'abscisse  $x$ .

- ✓ La valeur la plus défavorable entre les deux valeurs caractéristiques  $P_1$  et  $P_2$  pour les justifications vis-à-vis l'ELS, tel que:

$$P_1(x, t) = 1,02 P_0 - 0,80 \Delta P(x, t) \text{ et } P_2(x, t) = 0,98 P_0 - 1,20 \Delta P(x, t). \quad (\text{III-2})$$

### 3. SOLLICITATIONS

Les sollicitations sont l'ensemble des forces et des moments (N, V, M et T) produits en chaque point de la structure, sous l'effet des actions. Elles s'exercent sur les sections droites des éléments qui sont généralement perpendiculaires à la fibre moyenne. Leur détermination se fait, pour les structures simples, à l'aide des formules de la RDM. Pour les structures complexes on fait appel souvent à des outils et des méthodes numériques.

#### 3.1. Sollicitations de calcul à l'ELU :

##### 3.1.1. *Combinaisons fondamentales :*

En règle générale, les sollicitations de calcul à considérer sont les suivantes :

$$\gamma_p P_m + 1,35 G_{\max} + G_{\min} + \gamma_{Q1} Q_{1k} + \sum 1,3 \psi_{0i} Q_{ik} \quad (\text{III-3})$$

Avec :

$\gamma_p = 1$  dans la plupart des cas.

$P_m$  : valeur probable de l'action de précontrainte.

$G_{\max}$  : ensemble des actions permanentes défavorables.

$G_{\min}$  : ensemble des actions permanentes favorables.

$\gamma_{Q1} = 1,5$  dans le cas général.

$Q_{1k}$  : la valeur caractéristique de l'action de base.

$\psi_{0i} Q_{ik}$  : la valeur de combinaison d'une action d'accompagnement.

##### 3.1.2. *Combinaisons accidentelles :*

$$P_m + F_A + G_{\max} + G_{\min} + \psi_{11} Q_{1k} + \sum \psi_{2i} Q_{ik} \quad (\text{III-4})$$

Avec :

$F_A$  : la valeur nominale de l'action accidentelle.

$\psi_{11} Q_{1k}$  : la valeur fréquente d'une action variable.

$\psi_{2i} Q_{ik}$  : la valeur quasi-permanente d'une autre action variable.

### 3.2. Sollicitations de calcul à l'E.L.S

#### 3.2.1. Combinaisons rares :

$$P_d + G_{\max} + G_{\min} + Q_{1k} + \sum \psi_{0i} Q_{ik}. \quad (\text{III-5})$$

Avec,  $P_d$  : la valeur la plus défavorable de l'action de précontrainte entre  $P_1$  et  $P_2$ .

#### 3.2.2. Combinaisons fréquentes :

$$P_d + G_{\max} + G_{\min} + \psi_{11} Q_{1k} + \sum \psi_{2i} Q_{ik}. \quad (\text{III-6})$$

#### 3.2.3. Combinaisons quasi-permanentes :

$$P_d + G_{\max} + G_{\min} + \sum \psi_{2i} Q_{ik}. \quad (\text{III-7})$$

**NB :** Les valeurs des coefficients  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  varient selon la nature de la structure et sont données par les règles BAEL 91.

## 4. HYPOTHESES DE CALCUL :

Pour le calcul des structures en béton précontraint et pour tous les états limites, on admet que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- ✓ Les sections planes restent planes après déformation (principe de Navier-Bernoulli).
- ✓ En vertu de loi de Hooke, les contraintes sont proportionnelles aux déformations relatives :  $\sigma = E \cdot \varepsilon = E \Delta L / L$
- ✓ La résistance du béton tendu est considérée comme nulle.
- ✓ Par adhérence, les déformations relatives de l'acier et du béton au contact sont les mêmes. On sera amené à définir un coefficient d'équivalence :  $n = E_s / E_b$ .

## 5. SECTIONS DE CALCUL :

Dans le calcul des caractéristiques géométriques d'une section (position du centre de gravité, aire, moments d'inertie...), on tient compte des dimensions que présente la section dans la phase considérée.

### 5.1. Caractéristiques géométriques des sections :

La résolution des problèmes d'RDM fait appel à des caractéristiques géométriques des sections droites des corps étudiés. Le principe fondamental consiste à déterminer les

contraintes qui agissent dans une section et de comparer la contrainte maximale avec la contrainte limite :  $\sigma \leq [\sigma]$

- Traction simple  $\sigma = F/A$
- Flexion simple  $\sigma = M V/I$
- Flexion composée  $\sigma = F/A + M V/ I$

Les caractéristiques géométriques à étudier sont :

### 5.1.1. Moments statiques $S_x$ et $S_y$ ( $cm^3$ ) :

Les moments statiques de l'aire d'une section par rapport aux axes X et Y sont donnés par les expressions :

$$S_x = \int_A Y dA \quad \text{et} \quad S_y = \int_A X dA \quad (\text{III-8})$$

Si l'axe X ou l'axe Y passe par le centre de gravité de la section, le moment statique correspondant est nul.

### 5.1.2. Moments d'inertie $I_x$ et $I_y$ ( $cm^4$ ) :

Les moments d'inertie de l'aire d'une section par rapport aux axes X et Y sont donnés par les formules :

$$I_x = \int_A Y^2 dA \quad ; \quad I_y = \int_A X^2 dA \quad \text{et} \quad I_{xy} = \int_A XY dA \quad (\text{III-9})$$

**NB :** Le moment d'inertie axial d'une section par rapport à n'importe quel axe est égal au moment d'inertie de cette section par rapport à l'axe central parallèle plus le produit de l'aire de cette section par la distance au centre de gravité de la section à l'axe considéré (Théorème de Huygens).

### 5.1.3. Modules de résistance $W_x$ et $W_y$ ( $cm^3$ ) :

Le module de résistance est égal au quotient du moment d'inertie axial par la distance de l'axe à la fibre la plus éloignée.

$$W_x = I_x/y \quad \text{et} \quad W_y = I_y/x \quad (\text{III-10})$$

### 5.1.4. Rayons de giration $i_x$ et $i_y$ (cm):

On appelle rayon de giration la quantité donnée par l'équation:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \text{et} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (\text{III-11})$$

### 5.1.5. Rendement d'une section :

Le rendement d'une section est donné par:  $\rho = I / BV_i V_s$ . (III-12)

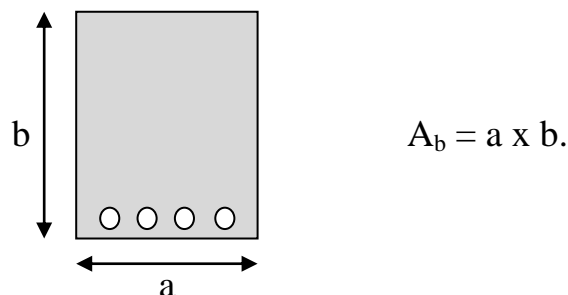
Il caractérise l'aspect économique d'une section vis-à-vis du comportement à la flexion.

## 5.2. Types de section :

### 5.2.1. Section brute :

Elle correspond au seul béton, calculé d'après les dimensions de coffrage figurant sur les plans sans tenir compte des armatures ou des vides correspondant aux conduits destinés à recevoir les armatures de précontrainte ou leur ancrages (Fig. III-1). La section brute est utilisée pour l'évaluation :

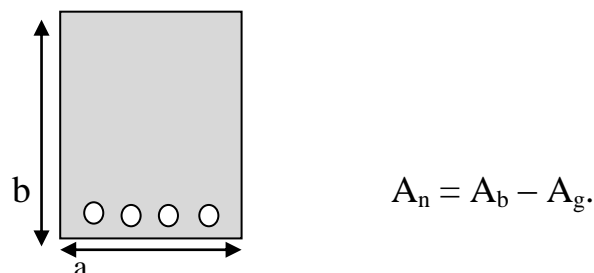
- Du poids propre d'une structure.
- Des rigidités des différentes pièces constituant la structure (en vue de calculer les sollicitations hyperstatiques).
- Des déformations pour les parties d'ouvrages respectant les conditions de la classe II.



**Figure III-1:** Section brute.

### 5.2.2. Section nette :

- C'est la section totale du béton avec déduction des conduits et ancrages (Fig. III-2). Elle sert à calculer les contraintes dues aux charges permanentes, qui existent déjà lors de l'injection, à l'ELS.



**Figure III-2:** Section nette.

### 5.2.3. Section homogène :

C'est la section obtenue en ajoutant à section nette la section des armatures longitudinales adhérente multipliée par un coefficient d'équivalence convenable «  $n$  », sous réserve de l'adhérence entre ces armatures avec le béton (ce qui est le cas en pré-tension, et en post tension après injection de coulis adéquat). La section homogène sert à calculer les contraintes dues aux charges appliquées après l'injection des conduits, ce qui correspond en général aux charges variables.

$$A_h = A_n + (\text{section d'armatures longitudinales adhérentes}) \times (\text{Coefficient d'équivalence } n).$$

$n = 5$  : cas des actions de courte durée.

$n = 15$  : cas des actions de longue durée.

### 5.2.4. Section homogène réduite (section fissurée):

Elle est obtenue en négligeant la partie de béton tendu. La section homogène réduite se calcule à partir de la seule section de béton comprimé, des aciers passifs avec un coefficient d'équivalence égal à 15 et des aciers actifs de précontrainte avec un coefficient d'équivalence égal à :

- 15 dans le cas de pré-tension.
- 0 pour les armatures non adhérentes en post tension.
- 15/2 pour les armatures adhérentes en post tension.

$$A_{hr} = (\text{Section du béton comprimé seul}) + (\text{section d'armatures passives}) \times (n) + (\text{section d'armatures de précontrainte}) \times (n').$$

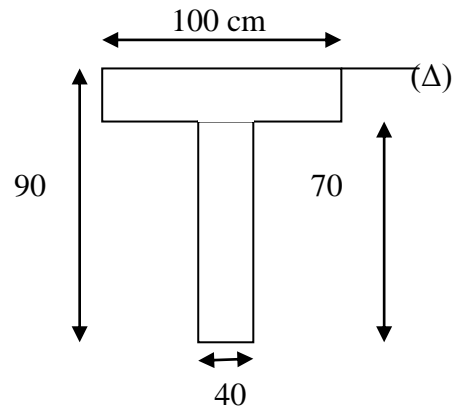
La section homogène réduite est utilisée pour le calcul des contraintes en classe III.

## 6. APPLICATIONS :

### Exercice N° 1:

Déterminer, pour une poutre en T, les caractéristiques géométriques suivantes :

- L'aire de la section ( $A$ ).
- Le moment statique ( $S_{/\Delta}$ ).
- La distance de la fibre supérieure ( $V_s$ ) et la distance de la fibre inférieure ( $V_i$ ).
- Le moment d'inertie ( $I_{/\Delta}$ ).
- Le module de résistance ( $W$ ).
- Le rayon de giration ( $i$ ).
- Le rendement de la section ( $\rho$ ).



### Solution:

- L'aire de la section:

$$A = \sum A_i = 0,48 \text{ m}^2.$$

- Le moment statique par rapport à ( $\Delta$ ):

$$S = \sum A_i d_i = 0,174 \text{ m}^3.$$

- La distance de la fibre supérieure :

$$V_s = S/B = 0,363 \text{ m}.$$

- La distance de la fibre inférieure :

$$V_i = h - V_s = 0,537 \text{ m}.$$

- Le moment d'inertie par rapport à ( $\Delta$ ):

$$I = \sum I_i + \sum B_i \Delta_i^2 = 0,03572 \text{ m}^4.$$

- Les modules de résistance :

$$W_s = I/V_s = 0,0984 \text{ m}^3.$$

$$W_i = I/V_i = 0,0665 \text{ m}^3.$$



- Le rayon de giration :

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = 0,273 \text{ m.}$$

- Le rendement de la section :

$$\rho = I / (AV_s V_i) = 0,382.$$

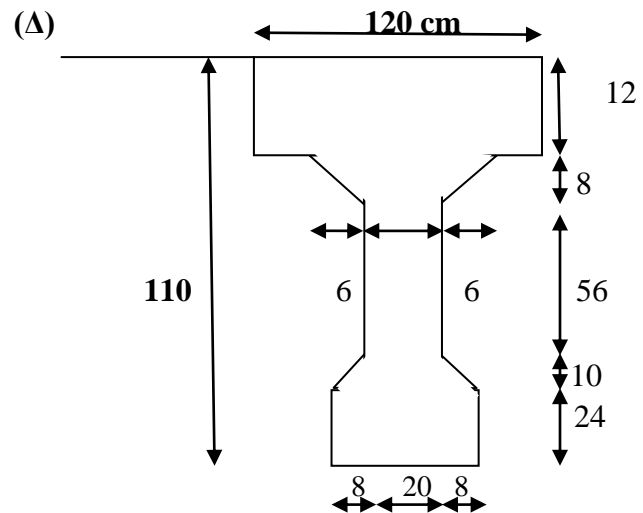
**Exercice N° 2:**

**I-** Soit la poutre en I suivante.

*Pour la section brute, déterminer:*

- L'aire de section.
- Le moment d'inertie  $I_G$ .
- Le rendement de la section.

On donne:  $I_{(\Delta)} = 0,131944 \text{ m}^4$ .



**Solution (I):**

- L'aire de la section:

$$A = \sum A_i = 3912 \text{ cm}^2.$$

- Le moment d'inertie par rapport à (G):

$$I_G = I_{(\Delta)} - A\delta^2. \text{ (avec } \delta \text{ est la distance entre G et } (\Delta)\text{).}$$

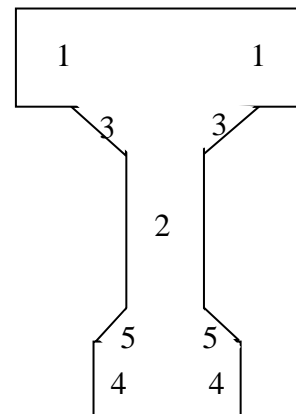
$$Y_G = \frac{\sum A_i Y_i}{\sum A_i}.$$

$$Y_G = 44,26 \text{ cm} \text{ ( d'où: } V_s = 44,26 \text{ cm et } V_i = 65,74 \text{ cm).}$$

$$I_G = 5530997 \text{ cm}^4.$$

- Le rendement de la section :

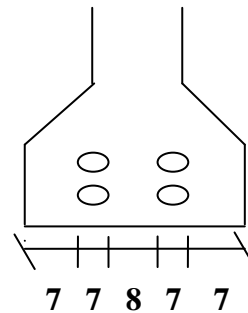
$$\rho = I_G / (AV_s V_i) = 0,486.$$



**II-** La poutre contient 4 gaines de 70 cm de diamètre. Le centre de gravité des gaines est à 0,925 m de la fibre supérieure.

*Pour la section nette, calculer:*

- L'aire de section.
- Le moment statique  $S_{n/(\Delta)}$ .
- Le moment d'inertie  $I_{n/(\Delta)}$ .
- Le moment d'inertie  $I_{n/G}$ .



**Solution (II):**

- L'aire de la section nette:

$$A_n = A - A_g = \mathbf{3758 \text{ cm}^2}.$$

- Le moment statique  $S_{n/(\Delta)}$ :

$S_{n/(\Delta)} = S_{/(\Delta)} - A_g d$  (avec  $d$ : est la distance entre le **CDG** des gaines **G'** et l'axe  $(\Delta)$ ).

$$S_{n/(\Delta)} = \mathbf{158900 \text{ cm}^3}.$$

- Le moment d'inertie  $I_{n/(\Delta)}$ :

$$I_{n/(\Delta)} = I_{/(\Delta)} - I_{g/(\Delta)}. \text{ Mais: } I_{g/(\Delta)} = (I_{g/(G')} + A_g d^2) \approx A_g d^2.$$

$$I_{n/(\Delta)} = I_{/(\Delta)} - A_g d^2 = \mathbf{11880000 \text{ cm}^4}.$$

- Le moment d'inertie  $I_{n/G}$ :

On a:  $Y_{Gn} = V_{sn} = S_n / A_n$ . Donc,  $V_{sn} = \mathbf{42,28 \text{ cm}}$  et  $V_{in} = \mathbf{67,72 \text{ cm}}$ .

$$I_{n/G} = I_{n/(\Delta)} - A_n V_{sn}^2 = \mathbf{5162206 \text{ cm}^4}.$$

**III-** Les gaines contiennent chacune un câble 9 T15 de section de 1251 mm<sup>2</sup>.

*Pour la section homogène (n = 5), calculer:*

- L'aire de section.
- Le moment statique  $S_{h/(\Delta)}$ .
- Le moment d'inertie  $I_{h/(\Delta)}$ .
- Le moment d'inertie  $I_{h/G}$ .

**Solution (III):**

- L'aire de la section homogène:

$$A_h = A_n + n A_p = \mathbf{4008 \text{ cm}^2}.$$

- Le moment statique  $S_{h/(\Delta)}$ :

$$S_{h/(\Delta)} = S_{n/(\Delta)} + n A_p d. \text{ (Avec } \mathbf{d}$$
: est la distance entre le **CDG** des gaines **G'** et l'axe  $(\Delta)$ ).

$$S_{h/(\Delta)} = \mathbf{182000 \text{ cm}^3}.$$

- Le moment d'inertie  $I_{h/(\Delta)}$ :

$$I_{h/(\Delta)} = I_{n/(\Delta)} + n I_{p/(\Delta)}. \text{ Mais: } I_{p/(\Delta)} = (I_{p/(G')} + A_p d^2) \approx A_p d^2.$$

$$I_{h/(\Delta)} = I_{n/(\Delta)} + n A_p d^2 = \mathbf{14020000 \text{ cm}^4}.$$

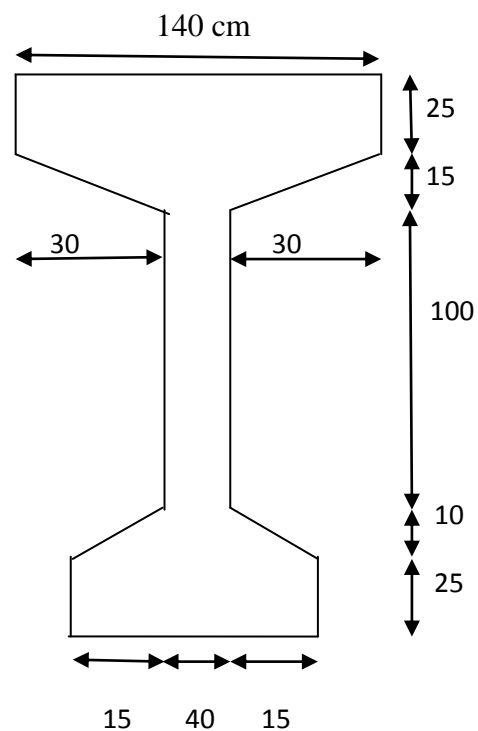
- Le moment d'inertie  $I_{h/G}$ :

$$\text{On a: } Y_{Gh} = V_{sh} = S_{h/(\Delta)} / A_h. \text{ Donc, } V_{sh} = \mathbf{45,42 \text{ cm}} \text{ et } V_{ih} = \mathbf{64,58 \text{ cm}}.$$

$$I_{h/G} = I_{h/(\Delta)} - A_h V_{sh}^2 = \mathbf{5750000 \text{ cm}^4}.$$

**Exercice N° 3:**

Calculer les caractéristiques géométriques  $A$ ,  $S$ ,  $V_s$ ,  $V_i$ ,  $I_G$ ,  $I_{(\Delta)}$ ,  $W_s$ ,  $W_i$ ,  $i$  et  $\rho$  pour la section suivante:



## **Chapitre 04 : Les Pertes de précontrainte**

## INTRODUCTION:

En béton précontraint, la contrainte de travail des aciers de précontrainte ne peut être déterminée de façon réglementaire comme dans le cas des aciers en béton armé, où la contrainte admissible des aciers est limitée à une fraction de leur limite élastique.

En effet, certains phénomènes qui n'avaient pas d'action sur la contrainte de l'acier en béton armé, interviennent de façon non négligeable lors du calcul des contraintes résiduelles dans les armatures de précontrainte. Des facteurs comme le frottement entre les câbles et leurs gaines lors de la mise en tension, le recul de l'ancrage, le raccourcissement instantané du béton, son retrait et son fluage ainsi que la relaxation des aciers de précontraintes peuvent modifier sensiblement la valeur initiale de précontrainte exercée par les vérins. Ces modifications vont diminuer la valeur de la force de précontrainte le long du câble et avec le temps; il s'agit des pertes de tension ou pertes de précontrainte. L'objectif de ce chapitre est de définir les pertes de précontrainte en post tension et de donner les mécanismes permettant les calculer.

### 1. DEFINITION:

On désigne sous le nom perte de tension, ou perte de précontrainte, toute différence entre l'effort exercé par les vérins lors de sa mise en tension des câbles de précontrainte «**tension à l'origine**» et l'effort qui s'exerce en un point donné de ces câbles à un instant donné. En post tension, l'effort de précontrainte varie à la fois:

- Dans l'espace, avec l'abscisse le long du câble, du fait de frottement;
- Dans le temps, à cause du retrait et du fluage du béton et de la relaxation des aciers.

En pré tension, l'effort de précontrainte varie principalement dans le temps du fait de l'application successive des actions.

### 2. TENSION A L'ORIGINE:

C'est la valeur de tension qu'on impose aux armatures de précontrainte devant un ancrage actif, au moment de la mise en tension et avant le transfert de l'effort à l'ancrage. Sa valeur est contrôlée soit à l'aide d'un manomètre branché directement sur les vérins, soit par mesure de l'allongement du câble.

Au point le plus sollicité de l'armature, généralement situé à l'ancrage, on évite d'atteindre une valeur trop proche de la rupture de l'acier  $f_{prg}$ . C'est pourquoi on a fixé

réglementairement une valeur de traction maximale pour la tension à l'origine, notée  $\sigma_{po}$ , donnée comme suit :

Pour les fils et les torons :

$$\checkmark \quad \sigma_{po} = \text{Min} (0,80 f_{prg} , 0,90 f_{peg}) \text{ en post-tension.} \quad (\text{IV-1}).$$

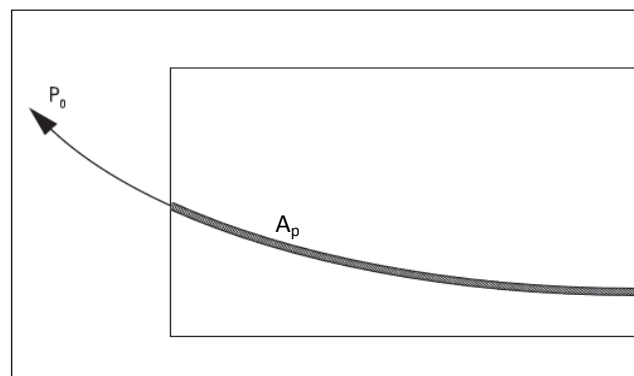
$$\checkmark \quad \sigma_{po} = \text{Min} (0,85 f_{prg} , 0,95 f_{peg}) \text{ en pré-tension.} \quad (\text{IV-2}).$$

Pour les barres :

$$\checkmark \quad \sigma_{po} = 0,7 f_{prg}. \quad (\text{IV-3}).$$

On dispose ainsi d'une marge de sécurité (de 15 à 20 %) sur la rupture d'un câble, d'un toron ou d'un fil pour couvrir les incertitudes de mesure de pression du vérin, de correspondance entre pression et effort de traction, de frottement parasite, ce qui peut entraîner des variations de contrainte dans les différents torons d'un même câble.

En tout point d'une armature de précontrainte, la tension vaut :  $\sigma_p = P/A_p$ . A l'origine sa valeur est :  $\sigma_{p0} = P_0/A_p$  (Fig. IV-1). Comme les efforts de précontrainte sont variables le long des armatures et dans le temps. Ils sont évalués à partir de la valeur de la tension à l'origine, après déduction des différentes pertes de tension. Suite à ces pertes, la contrainte de traction ne peut que diminuer, l'épreuve de la mise en tension est une garantie de résistance du câble en service.



**Figure IV-1:** Tension à l'origine.

### 3. PERTES DE TENSION EN PRECONTRAINTE PAR POST TENSION:

En précontrainte par post tension, les pertes de tension se divisent en deux groupes :

- ✓ Les pertes de tension instantanées: se produisant lors de la mise en tension des câbles de précontrainte.
- ✓ Les pertes de tension différées: se produisant dans un temps plus au moins long après la mise en tension.

### 3.1. Pertes de tension instantanées :

Dans le cas de la post-tension, les armatures de précontrainte subissent des pertes de tension instantanées qui sont :

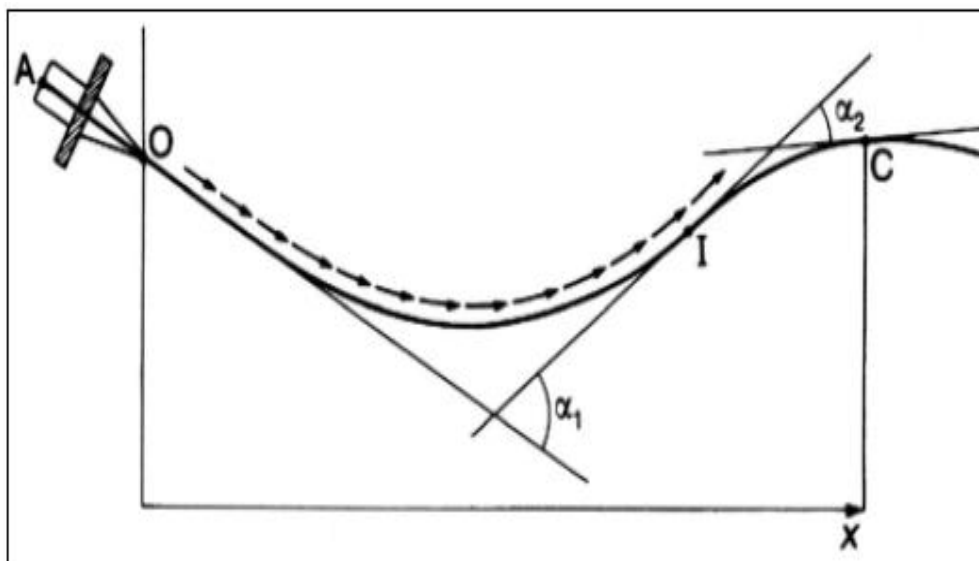
- Perte de tension due au frottement.
- Perte de tension due au recul de l'ancrage.
- Perte de tension due aux déformations instantanées du béton.

Dans une section d'abscisse «  $X$  » de l'armature, la valeur totale de ces pertes instantanées, est notée  $\Delta\sigma_{pi}(x)$ .

Après déduction des pertes instantanées, la tension résiduelle au point d'abscisse «  $X$  », appelée *tension initiale*  $\sigma_{pi}(x)$ , est donnée par:  $\sigma_{pi}(x) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{pi}(x)$ .

#### 3.1.1. Pertes de tension par frottement :

Ces pertes se produisent par frottement du câble dans la gaine lors de la mise en tension du câble, dans les zones où le câble rentre au contact de la gaine et plus particulièrement, dans les parties courbes et aux points où le tracé du câble présente des irrégularités. Dans ce cas, l'action tangentielle de contact du conduit sur les armatures s'oppose au sens de déplacement du câble suite à sa mise en tension (Fig. IV-2). La tension diminue donc entre le point **O** et le point courant **C** d'abscisse  $x$  du tracé. Dans cette figure, l'angle  $\alpha$ , fonction de  $x$ , présente la somme des déviations angulaires entre le point **O** et le point **C** d'abscisse  $x$  :  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ .



**Figure IV-2:** Frottements le long du câble lors de sa mise en tension.

La tension appliquée à l'origine,  $\sigma_{p0}$ , diminue entre le point **O** et le point **C** d'abscisse  $x$ , sa nouvelle valeur est donnée par la relation :

$$\sigma_p(x) = \sigma_{p0} e^{-(f\alpha + \varphi x)} \quad (\text{IV-4}).$$

Avec :  $f$  (en  $\text{rd}^{-1}$ ) et  $\varphi$  (en  $\text{m}^{-1}$ ) sont des coefficients de frottement, en courbe et en ligne respectivement, dont les valeurs sont par le **tableau IV-1**.

La perte de tension par frottement est estimée par la formule:

$$\Delta\sigma_{frott}(x) = \sigma_{p0} - \sigma_p(x) = \sigma_{p0}(1 - e^{-(f\alpha + \varphi x)}) \quad (\text{IV-5}).$$

**Remarque :**

Même si le câble est rectiligne, cela n'empêche pas l'existence des ondulations parasites. Dans ce cas, il existe une formule approchée pour le calcul des pertes dues au frottement, à savoir :

$$\Delta\sigma_{frott}(x) \approx \sigma_{p0}(f\alpha + \varphi x) \quad (\text{IV-6}).$$

Cas	Nature des armatures	$f$ ( $\text{rd}^{-1}$ ).		$\varphi$ ( $\text{m}^{-1}$ )
		$3 \leq R \leq 6$ (m)	$R \geq 6$ (m)	
Câbles ne traversant pas de joints ou surfaces de reprise	Fils tréfilés ronds et lisses	$(22 - R) / 100$	0,16	0,002
	Torons	$(24 - R) / 100$	0,18	
Câbles traversant de nombreux joints ou reprise de bétonnage	Fils tréfilés ronds et lisses	$(24 - R) / 100$	0,18	0,003
	Torons	$(26 - R) / 100$	0,20	

**Tableau IV-1:** Valeurs moyennes des coefficients de frottement  $f$  et  $\varphi$ .

**3.1.2. Perte de tension par recul de l'ancrage :**

Cette perte de tension résulte du recul (glissement) de l'ancrage, qui dépend des dispositifs d'ancrage utilisés. Juste après la mise en tension, les ancrages sont bloqués. Cependant, on observe une petite rentrée d'ancrage due à deux phénomènes :

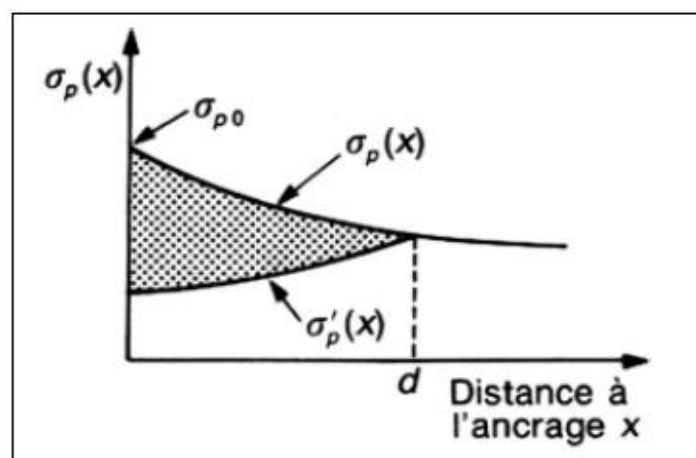
- Le jeu existant dans l'ancrage permet un léger glissement avant le blocage définitif.
- L'effort appliqué par le vérin crée une déformation des pièces d'ancrage.



Ces deux phénomènes entraînent un raccourcissement du câble, noté  $g$ , ce qui conduit à une perte de tension. Les notices techniques des procédés de précontrainte définissent, pour chaque type d'ancrage, la valeur probable de  $g$  qui peut être :

- ✓ Faible dans le cas des ancrages par calage ou vissage ( $g$  de l'ordre de 5 mm), est alors la conséquence de la déformation du corps d'ancrage et du tassement des cales ou des filets.
- ✓ Plus important dans le cas des ancrages par coincement ( $g$  de l'ordre de 12 mm). Les torons et les clavettes subissent un déplacement vers l'intérieur de la pièce et même davantage lorsque le vérin n'est pas muni d'un système de clavetage hydraulique (permettant d'enfoncer de force les mors dans leur logement conique avant relâchement de la pression dans la chambre du vérin).

Le mouvement de rentrée vers l'intérieur du béton est contrarié par le frottement du câble sur sa gaine, comme à la mise en tension, mais en sens inverse. Son influence diminue donc à partir de l'ancrage jusqu'à s'annuler à une distance  $d$  de celui-ci (Fig. IV-3) à partir duquel la tension demeure inchangée.



**Figure IV-3:** Perte de tension due au recul d'ancrage.

Avant rentrée d'ancrage l'allongement relatif de l'armature de précontrainte à l'abscisse  $x$  est:

$$\varepsilon_p(x) = \frac{\sigma_p(x)}{E_p} \quad (\text{IV-7}).$$

Après le rentrée d'ancrage, la tension à l'abscisse  $x$  ( $x < d$ ) n'est plus que  $\sigma'_p(x)$ , et l'allongement relatif de l'armature de précontrainte est :

$$\varepsilon'_p(x) = \frac{\sigma'_p(x)}{E_p} \quad (\text{IV-8}).$$

La longueur d'influence de la perte par recul d'ancrage «*point d*», est donnée par la formule :

$$d = \sqrt{\frac{gE_p x}{\Delta\sigma_{frott}(x)}} \quad (\text{IV-9}).$$

❖ Pour  $x \geq d$  :  $\Delta\sigma_{rec}(x) = 0$ .

❖ Pour  $x < d$  :  $\Delta\sigma_{rec}(x) = \frac{2gA_p E_p}{d}$  (IV-10).

### 3.1.3. Perte de tension par déformations instantanées du béton :

La perte de tension par déformations instantanées du béton, ou encore appelée perte par raccourcissement élastique du béton, est principalement due à la non simultanée de la mise en tension des câbles de précontrainte. Toute action permanente, appliquée postérieurement à la réalisation de l'ancrage d'un câble de précontrainte, provoque dans le béton adjacent une variation de contrainte  $\Delta\sigma_{bj}$ , donc de raccourcissement:  $\Delta\varepsilon_{bj} = \frac{\Delta\sigma_{bj}}{E_{ij}}$ .

Le câble considéré subit la même variation de déformation (raccourcissement), d'où une perte de tension:  $\Delta\sigma_{bj} = E_p \frac{\Delta\sigma_{bj}}{E_{ij}}$ .

La mise en tension du 2<sup>ème</sup> câble, provoque un raccourcissement dans le béton et dans le 1<sup>er</sup> câble. La mise en tension du 3<sup>ème</sup> câble, provoque un raccourcissement dans le béton et dans les deux premiers câbles. La mise en tension du n<sup>ème</sup> câble, provoque un raccourcissement dans le béton et dans les (n-1) premiers câbles. La perte totale après la mise en tension de tous les câbles est donnée par la formule :

$$\Delta\sigma_{racc}(x) = \frac{n-1}{2n} \sigma_b(x) \frac{E_p}{E_{ij}} \quad (\text{IV-11}).$$

Avec :

$\sigma_b(x)$  : est la contrainte moyenne du béton au niveau du CDG des câbles.

#### Remarque :

- Si la pièce à précontraindre contient un seul câble, ou si tous les câbles sont tendus simultanément, les pertes élastiques sont nulles ( $\Delta\sigma_{racc}(x) = 0$ ). En effet, le raccourcissement élastique a lieu en même temps que la mise en tension des câbles, car le vérin s'appuie sur la pièce.

- Pour le calcul de cette perte, le BPEL donne la formule :  $\Delta\sigma_{racc}(x) = E_p \sum K \frac{\Delta\sigma_{bj}}{E_{ij}}$ , dans laquelle il préconise de prendre un coefficient « $K = 2$ » pour les variations de contraintes

dues à la contrainte relative à la phase de mise en tension et aux actions permanentes appliquées simultanément à cette mise en tension, et la valeur de « $K = 1$ » pour les variations de contrainte dues aux actions permanentes postérieures à cette phase de précontrainte, y compris celles dues aux armatures de précontrainte mises en tension ultérieurement.

### 3.2. Pertes de tension différées :

Dans le cas de précontrainte par post tension, les armatures de précontrainte subissent des pertes de tension différées qui sont :

- ✓ Perte de tension due au retrait du béton.
- ✓ Perte de tension due au fluage du béton.
- ✓ Perte de tension due à la relaxation de l'acier de précontrainte.

A l'instant «  $t$  » et dans une section d'abscisse «  $X$  » de l'armature, la valeur totale de ces pertes de tension différées, est notée  $\Delta\sigma_{pd}(t, x)$ .

#### 3.2.1. Perte de tension due au retrait du béton :

Le retrait présente la déformation par raccourcissement spontané du béton, au cours de son durcissement, en l'absence de toute contrainte. Cette déformation est principalement due à l'évaporation progressive de l'eau non fixée dans la réaction d'hydratation du ciment. La valeur de ce raccourcissement est donnée par la formule (II-10):  $\varepsilon_r(t) = \varepsilon_r r(t)$ , où  $\varepsilon_r$  présente la valeur du retrait final, et  $r(t)$  est une fonction traduisant l'évolution du retrait en fonction du temps.

En post tension, la mise en tension s'effectue après durcissement du béton. Le retrait résultant après la mise en tension n'est que :  $\varepsilon_r(t) = \varepsilon_r [r(t) - r(t_1)]$ , (où  $t_1$  : est l'âge du béton au moment de sa mise en tension).

Le raccourcissement de retrait provoque une diminution progressive de la tension dans les armatures de précontrainte. C'est la perte de tension due au retrait  $\Delta\sigma_{ret}$ , dont la valeur finale est donnée par la formule :

$$\Delta\sigma_{ret} = E_p \varepsilon_r(t) = E_p \varepsilon_r [r(t) - r(t_1)] \quad (IV-12).$$

Très souvent, on peut négliger  $r(t_1)$  devant 1, ce qui conduit à la formule simplifiée suivante :

$$\Delta\sigma_{ret} = E_p \varepsilon_r \quad (IV-13).$$

### 3.2.2. Perte de tension due au fluage du béton :

Par définition, le fluage est le raccourcissement progressif du béton sous contrainte constante. Ce phénomène est, lui aussi, lié à la migration de l'eau à l'intérieur du béton. Dans une pièce en béton précontraint, les armatures de précontrainte subissent le même raccourcissement que le béton suite à son fluage, d'où une perte de tension. Le BPEL donne la perte finale de tension due au fluage du béton dans le temps,  $\Delta\sigma_{flu}(t)$ , par la formule :

$$\Delta\sigma_{flu}(t) = (\sigma_b^F + \sigma_b^M) \frac{E_p}{E_{ij}} \quad (IV-14).$$

Avec:

- $\sigma_b^F$  étant la contrainte finale et  $\sigma_b^M$  la contrainte maximale, supportées par le béton dans la section considérée, au niveau du centre de gravité des armatures de précontrainte sous les actions permanentes, y compris celles dues à la précontrainte.
- $j$  : l'âge du béton lors de sa mise en tension.

#### Remarque :

Selon le BPEL, Si :  $\sigma_b^M \leq 1,5 \sigma_b^F$ , il est loisible, à titre de simplification, d'évaluer la perte finale de tension due au fluage du béton à :

$$\Delta\sigma_{flu}(t) = 2,5 \sigma_b^F \frac{E_p}{E_{ij}} \quad (IV-15).$$

### 3.2.3. Perte de tension due à la relaxation de l'acier :

L'acier fortement tendu sous longueur constante voit sa tension décroître progressivement. Ce phénomène, appelé relaxation, est corrélatif du fluage (variation de longueur sous contrainte constante). Son importance dépend très sensiblement de la température.

La perte relative de tension :  $\rho(t) = \Delta\sigma(t)/\sigma_i$ , d'une armature tendue initialement à  $\sigma_i$  est fonction, à température constante, du temps  $t$  et de la tension initiale  $\sigma_i$ . Compte tenu des ces deux paramètres, la perte de tension finale d'une armature du fait de sa relaxation, est donnée par la formule:

$$\Delta\sigma_{rel}(x) = 6 \frac{\rho_{1000}}{100} \left( \frac{\sigma_{pi}}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \sigma_{pi} \quad (IV-16).$$

Dans laquelle :

$\sigma_{pi}(x)$  : contrainte initiale dans les armatures de précontrainte (après les pertes instantanées).

$\rho_{1000}$  : coefficient de relaxation des aciers de précontrainte à 1000 h (en %).

$f_{\text{prg}}$  : contrainte limite garantie à la rupture des aciers de précontrainte.

$\mu_0$  : un coefficient pris égal à :

- 0,43 pour les armatures à très basse relaxation (TBR).
- 0,30 pour les armatures à relaxation normale (RN).
- 0,35 pour les autres armatures.

### 3.2.4. Perte de tension différée totale :

La formule donnée pour la perte de tension due à la relaxation des aciers de précontrainte (IV-16), suppose que la longueur de ces armatures est constante. Cependant, la perte par relaxation est diminuée par l'effet du raccourcissement due au retrait et fluage du béton.

Pour tenir compte de cette interaction, le BPEL propose de minorer forfaitairement la relation (IV-16) par le coefficient **5/6**, lors du calcul de la perte différée totale.

Ainsi, La perte différée finale est prise égale à :

$$\Delta\sigma_{pd}(x) = \Delta\sigma_{\text{ret}} + \Delta\sigma_{\text{flu}} + \frac{5}{6} \Delta\sigma_{\text{rel}} \quad (\text{IV-17}).$$

Lorsqu'il est nécessaire de tenir compte de l'évolution des pertes de tension en fonction du temps, on peut admettre que la valeur totale des pertes différées  $\Delta\sigma_d(\mathbf{t})$ , évaluée à  $\mathbf{j}$  jours après la mise en tension du groupe d'armatures considéré, suit la loi suivante :

$$\Delta\sigma_{dj} = r(\mathbf{j})\Delta\sigma_d \quad (\text{IV-18}).$$

Où: la fonction  $\mathbf{r}(\mathbf{j})$  étant identique à la fonction  $\mathbf{r}(\mathbf{t})$  relative au retrait du béton.

#### 4. APPLICATIONS

##### Exercice N° 1:

Soit une poutre, de longueur de **40 m**, soumise à la précontrainte en post tension, par **4** câbles à **8 jours**. Pour la section à **mi travée**, déterminer :

- La tension à l'origine.
- Les pertes instantanées.
- Les pertes différées.

##### Données :

$$\begin{array}{lll} \alpha = 5,735^\circ & f_{peg} = 1660 \text{ MPa.} & \varepsilon_r = 0,0003. \\ \psi = 0,002 \text{ m}^{-1} & f_{prg} = 1860 \text{ MPa.} & f_{c8} = 30 \text{ MPa.} \\ f = 0,18 \text{ rd}^{-1}. & \sigma_b = 12,4 \text{ MPa.} & \rho_{1000} = 2,5 \%. \\ g = 6 \text{ mm.} & \sigma_b^M = 15,3 \text{ MPa.} & \mu_0 = 0,43. \\ E_p = 190000 \text{ MPa.} & \sigma_b^F = 11,1 \text{ MPa.} & \end{array}$$

##### Solution N° 1:

##### La tension à l'origine :

$$\sigma_{p0} = \min(0,9 f_{peg}, 0,8 f_{prg}) \rightarrow \sigma_{p0} = \mathbf{1488 \text{ MPa.}}$$

##### Les pertes instantanées :

- La perte due au frottement :

$$\Delta\sigma_{frott}(x) = \sigma_{p0} (1 - e^{-(\alpha f + \psi x)})$$

$$\text{Avec : } \alpha = 5.735^\circ \rightarrow \alpha = 0.1 \text{ (rd)}. \quad \text{Donc : } \Delta\sigma_{frott}(20) = \mathbf{83,83 \text{ MPa.}}$$

- La perte due au recul d'ancrage :

$$d = \sqrt{\frac{g E_p x}{\Delta\sigma_{frott}(x)}} \rightarrow d = 16,5 \text{ m}, \text{ comme } d < x = 20 \text{ m} \text{ donc : } \Delta\sigma_{rec}(20) = \mathbf{0 \text{ MPa.}}$$

- La perte due au raccourcissement du béton :

$$\Delta\sigma_{racc}(x) = \frac{n-1}{2n} \left( \sigma_b \frac{E_p}{E_{ij}} \right) \text{ avec : } E_{ij} = E_{i8} = 34179,56 \text{ MPa.}$$

$$\text{Donc : } \Delta\sigma_{rac}(20) = \mathbf{25,85 \text{ MPa.}}$$

- Les pertes instantanées :  $\Delta\sigma_{pi}(20) = 109,68 \text{ MPa}$ .

- La tension initiale :  $\sigma_{pi}(20) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{pi} = 1378,32 \text{ MPa}$ .

### Les pertes différées :

- La perte due au retrait du béton :

$$\Delta\sigma_{ret}(x) = E_p \varepsilon_r. \quad \text{Donc:} \quad \Delta\sigma_{ret}(20) = 57 \text{ MPa}.$$

- La perte due au fluage du béton :

$$\Delta\sigma_{flu}(x) = (\sigma_b^M + \sigma_b^F) \frac{E_p}{E_{ij}} \quad \text{avec : } E_{ij} = E_{i8} = 34179,56 \text{ MPa}.$$

$$\text{Donc: } \Delta\sigma_{flu}(20) = 146,75 \text{ MPa}.$$

- La perte due à la relaxation des armatures de précontrainte :

$$\Delta\sigma_{rel}(x) = 6 \frac{\rho_{1000}}{100} \left( \frac{\sigma_{pi}}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \sigma_{pi}. \quad \text{Donc : } \Delta\sigma_{rel}(20) = 64,09 \text{ MPa}.$$

- Les pertes différées :  $\Delta\sigma_{pd}(20) = \Delta\sigma_{ret} + \Delta\sigma_{flu} + \frac{5}{6} \Delta\sigma_{rel} = 257,2 \text{ MPa}$ .

### Exercice N° 2:

Soit une poutre, de longueur de **47 m**, soumise à la précontrainte en post tension, par **4** câbles de 7 T15 à **8 jours**. Pour la section à **mi travée**, déterminer :

- La tension à l'origine.
- Les pertes instantanées.
- Les pertes différées.
- Les contraintes finales à l'ELS et l'ELU.

### Données :

$$\alpha = 0,2984 \text{ rd.}$$

$$f_{peg} = 1660 \text{ MPa.}$$

$$\varepsilon_r = 0,0003.$$

$$\psi = 0,002 \text{ m}^{-1}$$

$$f_{prg} = 1860 \text{ MPa.}$$

$$f_{c28} = 35 \text{ MPa.}$$

$$f = 0,18 \text{ rd}^{-1}.$$

$$\sigma_b = 12,4 \text{ MPa.}$$

$$\rho_{1000} = 2,5 \text{ \%}.$$

$$g = 6 \text{ mm.}$$

$$\sigma_b^M = 15,3 \text{ MPa.}$$

$$\mu_0 = 0,43.$$

$$E_p = 190000 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_b^F = 11,1 \text{ MPa.}$$

**Solution N° 2:****La tension à l'origine :**

$$\sigma_{p0} = \min(0,9 f_{peg}, 0,8 f_{prg}) \rightarrow \sigma_{p0} = 1488 \text{ MPa.}$$

**Les pertes instantanées :**

- La perte due au frottement :

$$\Delta\sigma_{frott}(x) = \sigma_{p0} (1 - e^{-(\alpha f + \varphi x)}). \quad \Delta\sigma_{frott}(23,5) = 142,56 \text{ MPa.}$$

- La perte due au recul d'ancrage :

$$d = \sqrt{\frac{g E_p x}{\Delta\sigma_{frott}(x)}} \rightarrow d = 13,71 \text{ m}, \text{ comme } d < x = 23,5 \text{ m} \text{ donc : } \Delta\sigma_{rec}(23,5) = 0 \text{ MPa.}$$

- La perte due au raccourcissement du béton :

$$\Delta\sigma_{racc}(x) = \frac{n-1}{2n} (\sigma_b \frac{E_p}{E_{ij}}) \text{ avec : } E_{ij} = E_{i8} = 31974,38 \text{ MPa.}$$

$$\text{Donc : } \Delta\sigma_{rac}(23,5) = 27,63 \text{ MPa.}$$

- Les pertes instantanées :  $\Delta\sigma_{pi}(23,5) = 170,19 \text{ MPa.}$

- La tension initiale :  $\sigma_{pi}(23,5) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{pi} = 1317,81 \text{ MPa.}$

**Les pertes différées :**

- La perte due au retrait du béton :

$$\Delta\sigma_{ret}(x) = E_p \varepsilon_r. \quad \text{Donc : } \Delta\sigma_{ret}(23,5) = 57 \text{ MPa.}$$

- La perte due au fluage du béton :

$$\Delta\sigma_{flu}(x) = (\sigma_b^M + \sigma_b^F) \frac{E_p}{E_{ij}} \text{ avec : } E_{ij} = E_{i8} = 31974,38 \text{ MPa.}$$

$$\text{Donc : } \Delta\sigma_{flu}(23,5) = 156,88 \text{ MPa.}$$

- La perte due à la relaxation des armatures de précontrainte :

$$\Delta\sigma_{rel}(x) = 6 \frac{\rho_{1000}}{100} (\frac{\sigma_{pi}}{f_{prg}} - \mu_0) \sigma_{pi}. \quad \text{Donc : } \Delta\sigma_{rel}(23,5) = 55,05 \text{ MPa.}$$

- Les pertes différées :  $\Delta\sigma_{pd}(23,5) = \Delta\sigma_{ret} + \Delta\sigma_{flu} + \frac{5}{6} \Delta\sigma_{rel} = 259,76 \text{ MPa.}$



**Les contraintes finales :**

- La contrainte finale probable (ELU) :

$$\sigma_{pM}(x) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_p(x). \quad \sigma_{pM}(x) = 1058,05 \text{ MPa.}$$

- La contrainte finale maximale (ELS) :

$$\sigma_{p1}(x) = 1,02\sigma_{p0} - 0,8\Delta\sigma_p(x). \quad \sigma_{p1}(x) = 1173,8 \text{ MPa.}$$

- La contrainte finale minimale (ELS) :

$$\sigma_{p2}(x) = 0,98\sigma_{p0} - 1,2\Delta\sigma_p(x). \quad \sigma_{p2}(x) = 942,3 \text{ MPa.}$$

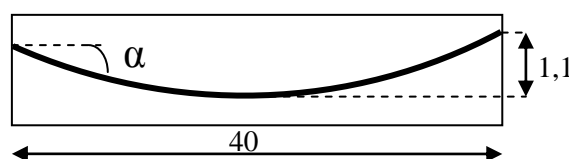
**Exercice N° 3:**

Soit une poutre, de **40 m** de longueur, soumise à la précontrainte en post tension à **12 jours**. Le câble a une allure parabolique avec une flèche de **1,1 m**. La contrainte au CDG des armatures due à l'action des charges permanentes existantes à la mise en tension et à l'action de la précontrainte  $\sigma_{b12}$  vaut **7,5 MPa**. La contrainte supplémentaire apportée par les actions permanentes appliquées à **50 jours**  $\sigma_{b50}$  valent **1 MPa** et la contrainte finale  $\sigma_b^F$  est de **7,2 MPa**. Pour la section à **mi travée**, déterminer :

- La tension à l'origine.
- Les pertes instantanées.
- Les pertes différées.
- Les contraintes finales à l'ELS et l'ELU.

**Données :**

$g = 5 \text{ mm.}$	$f_{peg} = 1583 \text{ MPa.}$	$\varepsilon_r = 0,0002.$
$\psi = 0,0016 \text{ m}^{-1}$	$f_{prg} = 1770 \text{ MPa.}$	$f_{c28} = 35 \text{ MPa}$
$f = 0,17 \text{ rd}^{-1}.$	$\rho_{1000} = 2,5 \text{ \%}.$	$f_{c12} = 30 \text{ MPa.}$
$\mu_0 = 0,43.$	$E_p = 190000 \text{ MPa.}$	.



**Solution N° 3:****La tension à l'origine :**

$$\sigma_{p0} = \min(0,9 f_{peg}, 0,8 f_{prg}) \rightarrow \sigma_{p0} = 1416 \text{ MPa.}$$

**Les pertes instantanées :**

- La perte due au frottement :

On a:  $\tan \alpha = (1,1 \times 2)/20 = 0,11$ . Donc:  $\alpha = 6^\circ, 28 = 0,11 \text{ rd.}$

$$\Delta\sigma_{frott}(x) = \sigma_{p0} (1 - e^{-(\alpha f + \varphi x)}). \quad \Delta\sigma_{frott}(20) = 70,5 \text{ MPa.}$$

- La perte due au recul d'ancrage :

$$d = \sqrt{\frac{g E_p x}{\Delta\sigma_{frott}(x)}} \rightarrow d = 16,42 \text{ m}, \text{ comme } d < x = 20 \text{ m} \text{ donc : } \Delta\sigma_{rec}(20) = 0 \text{ MPa.}$$

- La perte due au raccourcissement du béton :

$$\text{D'après le BPEL: } \Delta\sigma_{racc}(x) = E_p \sum \frac{k \Delta\sigma_{bj}}{E_{ij}}$$

Avec:  $k = 1/2$ , pour les variation des contraintes à la mise en tension (12 j).

Et:  $k = 1$ , pour les variation postérieures de contraintes (50 j).

$$\text{Donc: } \Delta\sigma_{racc}(x) = E_p \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_{b12}}{E_{i12}} + 1 \cdot \frac{\sigma_{b50}}{E_{i50}} \right)$$

On a :  $E_{i12} = 34180 \text{ MPa}$  et  $E_{i50} \approx E_{i28} = 36000 \text{ MPa}$

$$\text{Donc : } \Delta\sigma_{rac}(20) = 26,1 \text{ MPa.}$$

- Les pertes instantanées :  $\Delta\sigma_{pi}(20) = 96,6 \text{ MPa.}$

- La tension initiale :  $\sigma_{pi}(20) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{pi} = 1319,4 \text{ MPa.}$

**Les pertes différées :**

- La perte due au retrait du béton :

$$\Delta\sigma_{ret}(x) = E_p \varepsilon_r. \quad \text{Donc:} \quad \Delta\sigma_{ret}(23,5) = 38 \text{ MPa.}$$

- La perte due au fluage du béton :

On suppose, pour le cas étudié, que la contrainte maximale  $\sigma_b^M$  correspond à la contrainte finale du béton  $\sigma_b^F$ , au CDG des câbles.

Donc:  $\Delta\sigma_{flu}(x) = (\sigma_b^M + \sigma_b^F) \frac{E_p}{E_{ij}} = (\sigma_b^F + \sigma_b^F) \frac{E_p}{E_{i12}}$  avec :  $E_{ij} = E_{i12} = 34180 \text{ MPa}$ .

Donc:  $\Delta\sigma_{flu}(20) = 80,05 \text{ MPa}$ .

- La perte due à la relaxation des armatures de précontrainte :

$$\Delta\sigma_{rel}(x) = 6 \frac{\rho_{1000}}{100} \left( \frac{\sigma_{pi}}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \sigma_{pi}. \quad \text{Donc : } \Delta\sigma_{rel}(20) = 62,4 \text{ MPa}.$$

- Les pertes différées :  $\Delta\sigma_{pd}(23,5) = \Delta\sigma_{ret} + \Delta\sigma_{flu} + \frac{5}{6} \Delta\sigma_{rel} = 170,05 \text{ MPa}$ .

### Les contraintes finales :

- La contrainte finale probable (ELU) :

$$\sigma_{pM}(x) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_p(x). \quad \sigma_{pM}(x) = 1149,35 \text{ MPa}.$$

- La contrainte finale maximale (ELS) :

$$\sigma_{p1}(x) = 1,02\sigma_{p0} - 0,8\Delta\sigma_p(x). \quad \sigma_{p1}(x) = 1230,68 \text{ MPa}.$$

- La contrainte finale minimale (ELS) :

$$\sigma_{p2}(x) = 0,98\sigma_{p0} - 1,2\Delta\sigma_p(x). \quad \sigma_{p2}(x) = 1067,7 \text{ MPa}.$$

### Exercice N° 4:

Soit une poutre, de section rectangulaire ( $b \cdot h = 35 \cdot 72$ )  $\text{cm}^2$  et de longueur de **15 m**, soumise à la précontrainte en post tension, par **6 câbles à 10 jours**. Pour la section à **mi travée**, (avec  $e_p = -270 \text{ mm}$ ), déterminer :

- La tension à l'origine.
- Les pertes instantanées.
- Les pertes différées.

### Données :

$$\alpha = 0,072 \text{ rd.}$$

$$f_{peg} = 1460 \text{ MPa.}$$

$$\varepsilon_r = 0,0003.$$

$$\psi = 0,002 \text{ m}^{-1}$$

$$f_{prg} = 1720 \text{ MPa.}$$

$$f_{c28} = 35 \text{ MPa.}$$

$$f = 0,18 \text{ rd}^{-1}.$$

$$A_p = 1672,2 \text{ mm}^2.$$

$$\rho_{1000} = 8 \text{ \%}.$$

$$g = 1 \text{ mm.}$$

$$\sigma_b^M = 15,1 \text{ MPa.}$$

$$\mu_0 = 0,3.$$

$$I_n = 1,033 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4.$$

$$E_p = 190000 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_b^F = 10,8 \text{ MPa.}$$

$$B_n = 0,25 \cdot 10^6 \text{ mm}^2.$$

**Solution N° 4:****La tension à l'origine :**

$$\sigma_{p0} = \min(0,9 f_{peg}, 0,8 f_{prg}) \rightarrow \sigma_{p0} = 1314 \text{ MPa.}$$

**Les pertes instantanées :**

- La perte due au frottement :

$$\Delta\sigma_{frott}(x) = \sigma_{p0} (1 - e^{-(\alpha f + \varphi x)}) \text{ Donc : } \Delta\sigma_{frott}(7,5) = 36,23 \text{ MPa.}$$

- La perte due au recul d'ancrage :

$$d = \sqrt{\frac{g E_p x}{\Delta\sigma_{frott}(x)}} \rightarrow d = 6,23 \text{ m}, \text{ comme } d < x = 7,5 \text{ m} \text{ donc : } \Delta\sigma_{rec}(7,5) = 0 \text{ MPa.}$$

- La perte due au raccourcissement du béton :

$$\Delta\sigma_{racc}(x) = \frac{n-1}{2n} (\sigma_b \frac{E_p}{E_{ij}}) \text{ avec : } E_{ij} = E_{i10} = 32918,32 \text{ MPa.}$$

$$\text{On a : } \sigma_b = \frac{P}{B_n} + \frac{P \cdot e^2}{I_n} + \frac{M \cdot e}{I_n}$$

$$P = (\sigma_{p0} - \Delta\sigma_{frott} - \Delta\sigma_{rec}) A_p \cdot \text{D'où : } P = 2135834,17 \text{ N.}$$

$$M = Ql^2/8, \text{ avec: } Q = G = (0,35 \cdot 0,72) \cdot 25 = 6,3 \text{ KN/m. } M = 177,19 \text{ KN.m.}$$

$$\text{Donc: } \sigma_b = 18,98 \text{ MPa.}$$

$$\text{D'où: } \Delta\sigma_{rac}(7,5) = 45,65 \text{ MPa.}$$

$$\text{- Les pertes instantanées : } \Delta\sigma_{pi}(7,5) = 81,88 \text{ MPa.}$$

$$\text{- La tension initiale : } \sigma_{pi}(7,5) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{pi} = 1232,12 \text{ MPa.}$$

**Les pertes différées :**

- La perte due au retrait du béton :

$$\Delta\sigma_{ret}(x) = E_p \varepsilon_r \cdot \text{ Donc: } \Delta\sigma_{ret}(7,5) = 57 \text{ MPa.}$$

- La perte due au fluage du béton :

$$\Delta\sigma_{flu}(x) = (\sigma_b^M + \sigma_b^F) \frac{E_p}{E_{ij}} \text{ avec : } E_{ij} = E_{i10} = 32918,32 \text{ MPa.}$$

$$\text{Donc: } \Delta\sigma_{flu}(7,5) = 149,49 \text{ MPa.}$$

- La perte due à la relaxation des armatures de précontrainte :

$$\Delta\sigma_{rel}(x) = 6 \frac{\rho_{1000}}{100} \left( \frac{\sigma_{pi}}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \sigma_{pi}. \quad \text{Donc : } \Delta\sigma_{rel}(7,5) = 246,03 \text{ MPa.}$$

- Les pertes différées :  $\Delta\sigma_{pd}(7,5) = \Delta\sigma_{ret} + \Delta\sigma_{flu} + \frac{5}{6} \Delta\sigma_{rel} = 411,51 \text{ MPa.}$

### Exercice N° 5:

Calculer, à **mi-travée**, les pertes instantanées et différées pour la poutre en I ci-dessous (dont la longueur est de **34 m**) soumise à la précontrainte en post tension par **6 câbles** à **21 jours**.

**Données :**

$$\alpha = 0,072 \text{ rd.}$$

$$f_{peg} = 1460 \text{ MPa.}$$

$$\varepsilon_r = 0,0003.$$

$$\psi = 0,0016 \text{ m}^{-1}$$

$$f_{prg} = 1720 \text{ MPa.}$$

$$f_{c28} = 35 \text{ MPa.}$$

$$f = 0,18 \text{ rd}^{-1}.$$

$$A_p = 4200 \text{ mm}^2.$$

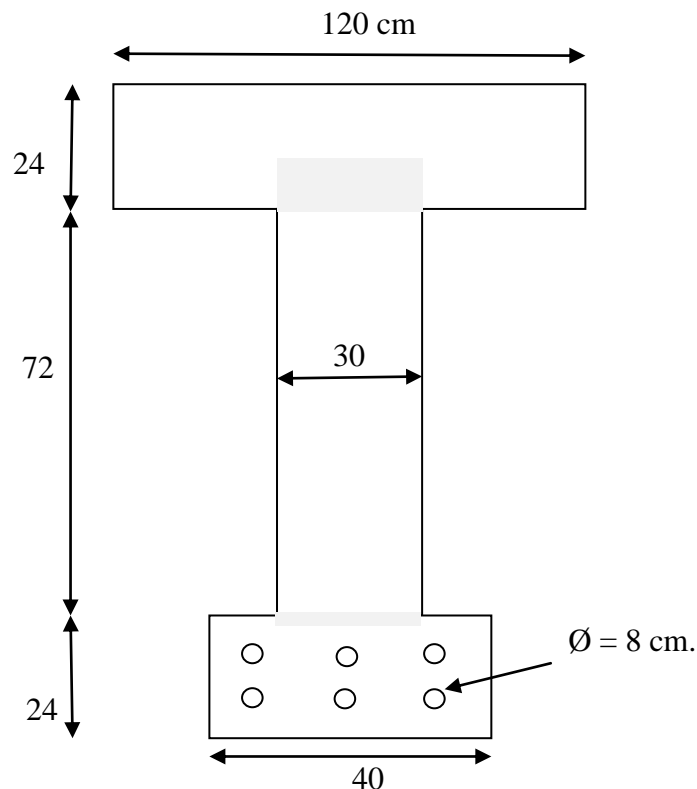
$$\rho_{1000} = 2,5 \%. \quad \mu_0 = 0,3$$

$$g = 2 \text{ mm.}$$

$$\sigma_b^M = 16,3 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_b^F = 12,5 \text{ MPa.}$$

$$E_p = 190000 \text{ MPa.}$$



## **Chapitre 05 : Vérification des contraintes**

## INTRODUCTION :

Dans son principe de base, la technologie du béton précontraint a été conçue de façon à éviter toute contrainte de traction, de sorte à éliminer tout risque de fissuration. Avec le développement de cette technologie, la fissuration autrefois interdite et désormais admise sous réserve d'être contrôlée d'une part et compatible avec la fonction de l'ouvrage d'autre part. Ainsi, les contraintes résultant de la mise en précontrainte d'un élément en béton, peuvent compenser partiellement ou totalement les contraintes de traction produites.

Si la compensation induite par la précontrainte compense la totalité de la charge maximale d'utilisation, on a alors une précontrainte intégrale. C'est le cas par exemple des réservoirs destinés à contenir des liquides où l'étanchéité est requise, et les ouvrages exposés à une atmosphère corrosive. De façon générale, la précontrainte intégrale est requise pour tous les ouvrages dont la fissuration est préjudiciable. Cependant, il n'est pas toujours économique voire même sécuritaire de contrebalancer les charges d'exploitation. Si la charge maximale ne sollicite que très rarement une pièce en béton précontraint, il n'est pas nécessaire d'exclure toute possibilité de traction. Dans ce cas, il vaut mieux d'imposer une contrainte résiduelle comme limite inférieure.

### 1. CLASSES DE VERIFICATION:

Compte tenu du fait que la précontrainte peut compenser partiellement ou totalement les charges d'exploitation, on peut parler de classes de précontrainte. Le classement prend en compte les probabilités de fissuration et d'ouverture des fissures. Pour les justifications des seules contraintes normales vis-à-vis des ELS, les sections sont rattachées à l'une de ces classes, telles que :

- **En classe I :** l'état limite de décompression ne doit pas être dépassé sous l'effet des combinaisons rares (traction nulle ou compression minimale). Le recours à cette classe est exceptionnel, elle concerne les pièces soumises à la traction simple (tirants, parois de réservoir contenant des fluides) et les pièces sollicitées à la fatigue.
- **En classe II :** dans la section d'enrobage, on ne doit pas dépasser ni l'état limite de formation des fissures sous l'effet des combinaisons rares, ni l'état limite de décompression sous l'effet des combinaisons fréquentes. Cette classe admet les contraintes de traction dans le béton, mais pas la formation des fissures. Elle est particulièrement destinée aux éléments exposés aux intempéries ou à une ambiance agressive (Ponts, Bâtiments industriels) et à ceux qui comportent de nombreux joints.

- **En classe III** : contrairement à la précédente, cette classe admet une ouverture limitée des fissures dans le béton, sous sollicitations extrêmes. Cependant, on ne doit pas dépasser ni un certain état limite d'ouverture des fissures définit pour l'ensemble de la section sous combinaisons rares, ni un autre état limite d'ouverture des fissures défini sur la section d'enrobage sous combinaisons fréquentes, ni enfin, l'état limite de décompression dans la section d'enrobage sous l'effet des combinaisons quasi permanentes. La vérification des contraintes en classe III intéresse essentiellement les pièces en atmosphère peu agressive (Bâtiments courants).

Il se peut, que différentes parties d'un même ouvrage peuvent être justifiées selon des classes distinctes. Le choix d'une classe de vérification pour un ouvrage, ou l'une de ses parties, est basé sur la considération de nombreux facteurs techniques et économiques, tels que :

- ✓ L'agressivité du milieu dans lequel la structure est implantée.
- ✓ Le type d'ouvrage, son mode de fabrication (préfabrication, pré-tension ou post tension).
- ✓ L'importance relative des sollicitations ainsi que leur distribution dans le temps.
- ✓ L'expérience acquise compte tenu des réalisations antérieures.

**Remarque :**

- Cette classification ne s'applique pas aux sections et zones d'abouts et d'ancrages des armatures de précontrainte.
- Cette classification ne signifie pas que seules les sections de la classe III contiennent des armatures passives. En réalité, on dispose des armatures passives  $A_s$  pour diverses raisons pour les justifications des pièces des trois classes, à savoir :
  - ✓ Pour renforcer certaines sections de la pièce, soumises à des contraintes de traction ou de compression trop forte lors du transfert de la précontrainte.
  - ✓ Pour augmenter la résistance ultime de la pièce en certaines sections de manière à satisfaire l'état limite de résistance à la flexion.
  - ✓ Pour résister aux forces d'éclatement et aux forces de surface dans les zones d'about.
  - ✓ Pour renforcer certaines sections de la pièce afin de résister aux contraintes induites par le transport et la manutention des pièces.
  - ✓ Pour limiter les fissurations dues au retrait aux gradients thermiques.



## 2. HYPOTHESES DE CALCUL

Les calculs en section courante (en dehors des zones d'about d'ancrage) sont conduits moyennant les deux hypothèses fondamentales suivantes :

- Les sections droites restent planes.
- Les contraintes des matériaux sont proportionnelles à leurs déformations.

Pour le cas d'une précontrainte adhérente (précontrainte en post tension avec injection ou en pré-tension) et selon le type de vérification envisagé, les hypothèses complémentaires sont:

### 2.1. Calcul en section non fissurée:

- Le béton tendu résiste à la traction.
- Les matériaux ne subissent aucun glissement relatif. Cette hypothèse entraîne que les contraintes normales dues à toutes les actions autres que les actions permanentes peuvent être calculées sur la section entière homogène.

### 2.2. Calcul en section fissurée:

- Le béton tendu est négligé.
- Les matériaux ne subissent aucun glissement relatif.
- Lorsque la déformation du béton s'annule au niveau d'une armature, la tension dans cette dernière vaut :
  - 0 s'il s'agit d'une armature passive.
  - $\sigma_{pd} + n_i \sigma_{bpd}$  (avec  $n_i = 5$ ) s'il s'agit d'une armature de précontrainte. ( $\sigma_{bpd}$  représente la contrainte du béton au niveau de l'armature considérée sous l'effet des actions permanentes et de la précontrainte prise avec la valeur  $P_d$ ).
- La contrainte dans les aciers passifs aussi bien que la variation de surtension dans les aciers de précontrainte qui se manifestent après décompression du béton sont évaluées à partir du coefficient d'équivalence  $n_v = 15$ .

## 3. CONTRAINTES ADMISSIBLES EN FLEXION A L'ETAT LIMITE DE SERVICE:

Le principe consiste à calculer les contraintes dans le béton et de les comparer aux contraintes limites autorisées. A l'ELS, la vérification s'établit en calculant la contrainte limite dans le béton selon la formule:  $\sigma(x) = \frac{M.V}{I} + \frac{P}{B} + \frac{P.e.V}{I}$ , puis en faisant la vérification comme suit:

$$\bar{\sigma}_{min} \leq \sigma(x) \leq \bar{\sigma}_{max} \quad (V-I).$$

### 3.1. Contraintes admissibles pour les aciers:

#### 3.1.1. Aciers actifs:

- **Classe I et II:** aucune exigence.

- **Classe III:** en situation d'exploitation sous l'effet des combinaisons rares et en situation de construction, les surtensions dans les aciers de précontraintes ne doivent pas dépasser  $0,1 f_{prg}$  en post tension et le maximum de  $150 \eta_p$  et  $0,1 f_{prg}$  en pré-tension.

#### 3.1.2. Aciers passifs:

- **Classe I :** aucune exigence.

- **Classe II:** aucune exigence particulière, car les aciers tendus nécessaires sont déterminés forfaitairement par une formule faisant intervenir la section de béton tendu et l'effort de traction correspondant.

- **Classe III:** en situation d'exploitation sous l'effet des combinaisons rares et en situation d'exécution, les armatures passives doivent vérifier les conditions de contraintes admissibles de fissuration préjudiciable ( $\sigma_s = \text{Min}(\frac{2}{3} f_e, 110 \sqrt{\eta f_{tj}})$ ). En situation d'exploitation sous l'effet des combinaisons fréquentes, la contrainte de traction des aciers passifs n'excède pas  $0,35 f_e$  et celle des aciers actifs est limitée à 100 MPa.

### 3.2. Contraintes admissibles pour le béton:

#### 3.2.1. Contraintes de compression:

Quelque soit la classe de vérification retenue, les contraintes de compression dans le béton ne peuvent dépasser:

- $0,5 f_{c28}$  sous l'effet de la combinaison quasi permanente.
- $0,6 f_{c28}$  sous l'effet des combinaisons rares et des combinaisons fréquentes.
- $0,6 f_{c28}$  en cours d'exécution, ramenée à  $0,55 f_{c_j}$  si  $j < 3$ . Sauf pour les pièces fabriquées en usine avec contrôle interne où la contrainte est comprise entre  $0,6 f_{c28}$  et  $2/3 f_{c_j}$ .

#### 3.2.2. Contraintes de traction:

- **Classe I :** en situation d'exploitation, aucune contrainte de traction n'est admise sur l'ensemble de la section. En situation d'exécution, la traction est partout limitée à  $0,7 f_{tj}$ .

- **Classe II** : le calcul des contraintes normales est toujours effectué sur la section non fissurée. Il doit être vérifié que les contraintes de traction du béton sont limitées aux valeurs suivantes:
  - En situation d'exploitation, sous l'effet des combinaisons rares aussi bien qu'en situation d'exécution:  $f_t$  dans la section d'enrobage et  $1,5f_t$  ailleurs.
  - En situation d'exploitation, sous l'effet des combinaisons fréquentes, 0 dans la section d'enrobage.
- **Classe III** : les contraintes normales sont calculées uniquement sur la section fissurée. En situation d'exploitation, sous l'effet des combinaisons quasi permanentes, la section d'enrobage demeure entièrement comprimée.

#### 4. CONTRAINTES ADMISSIBLES EN FLEXION A L'ETAT LIMITE ULTIME:

La vérification aux états limites ultimes est une vérification de sécurité vis-à-vis de la rupture soit par allongement critique des aciers, soit par rupture du béton (compression ou traction). Elle consiste à s'assurer que les sollicitations de calcul sont intérieures à un domaine résistant dont la frontière est constituée par l'ensemble des sollicitations résistantes ultimes. Les hypothèses de calcul sont les suivantes :

- Les sections droites restent planes.
- La résistance à la traction du béton est négligée.
- Les matériaux ne subissent aucun glissement relatif.
- Le diagramme des déformations de la section est un diagramme limite tel que défini par la règle de trois pivots.

##### 4.1. Béton:

La contrainte de calcul en état limite ultime pour le béton, est déduite du diagramme contraintes-déformations (Fig. II-1), dans une affinité parallèle à l'axe des ordonnées (contraintes) et de rapport de  $0,85/\gamma_b$ . La contrainte maximale de calcul vaut:

$$\sigma_{bcu} = \frac{0,85}{\gamma_b} f_{cj} \quad (V-2).$$

Avec:  $\gamma_b = 1,5$  en situations courantes, et  $\gamma_b = 1,15$  en situations accidentelles.

##### 4.2. Aciers actifs:

La contrainte de calcul des aciers actifs est déduite du diagramme contraintes-déformations de ces aciers (Figs. II-5 et II-6).

Pour les fils tréfilés et pour les torons, la contrainte de calcul vaut:

- $\sigma_p = \varepsilon_p E_p$  pour  $\varepsilon_p < (0,9 f_{peg}) / E_p \gamma_p$ . (Avec,  $\gamma_b = 1,15$ ). (V-3).
- Pour  $\varepsilon_p > (0,9 f_{peg}) / E_p \gamma_p$ ,  $\sigma_p$  est déterminée par l'équation du 5<sup>e</sup> degré:

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 100 \left( \frac{\sigma_p \gamma_p}{f_{peg}} - 0,9 \right)^5 \quad (V-4).$$

Equation que l'on peut résoudre par approximations successives en partant d'une valeur a priori de  $\sigma_p$ , par exemple  $(0,9 f_{peg} / \gamma_p)$ , dans:

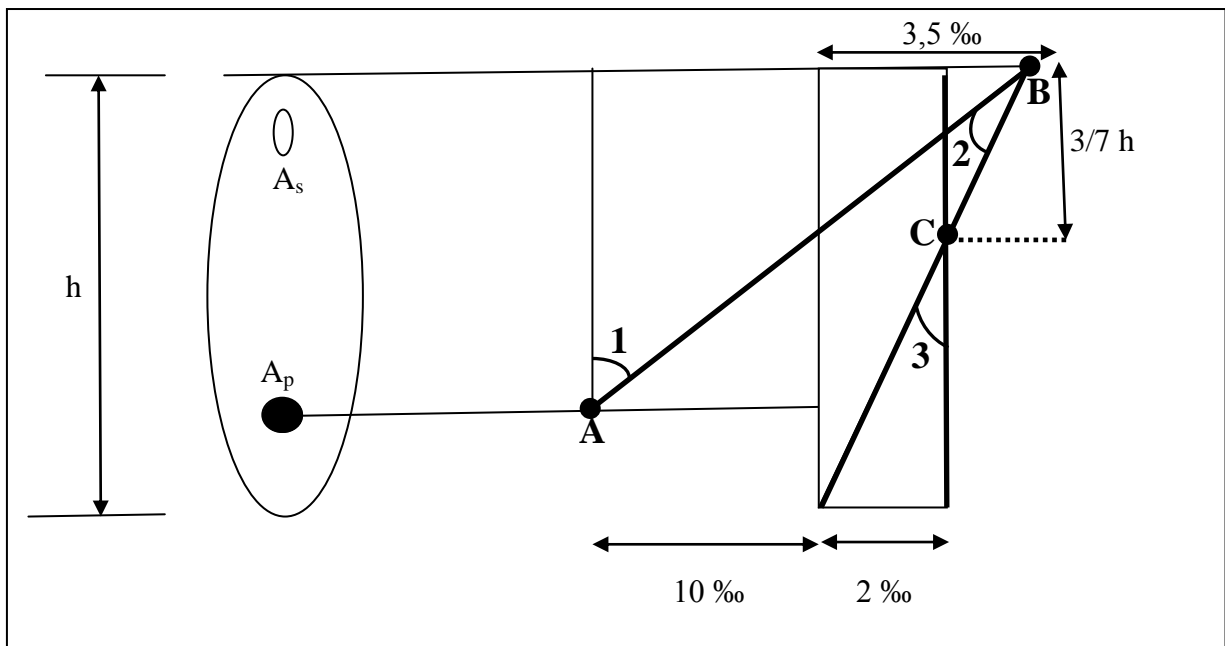
$$U = \left( \frac{\varepsilon_p - \frac{\sigma_p}{E_p}}{100} \right)^{0,2} \quad \text{et} \quad \sigma_p = (U + 0,9) \frac{f_{peg}}{\gamma_p} \quad (V-5).$$

Pour les fils trempés et revenus et pour les barres, la contrainte de calcul vaut:

$$\sigma_p = f_{peg} / \gamma_p \quad (V-6).$$

## 5. DISTRIBUTION DES DEFORMATIONS EN ETAT LIMITE ULTIME:

Un état limite ultime est caractérisé par le fait que le diagramme des déformations de la section appartient à l'un des domaines 1, 2 ou 3 (Fig. V-1). Les déformations relatives à prendre en compte selon la nature de la sollicitation agissante conduisent à distinguer entre ces domaines dont les frontières sont obtenues par des positions particulières de droites matérialisant les diagrammes de déformation:



**Figure V-1:** Diagramme des 3 pivots.

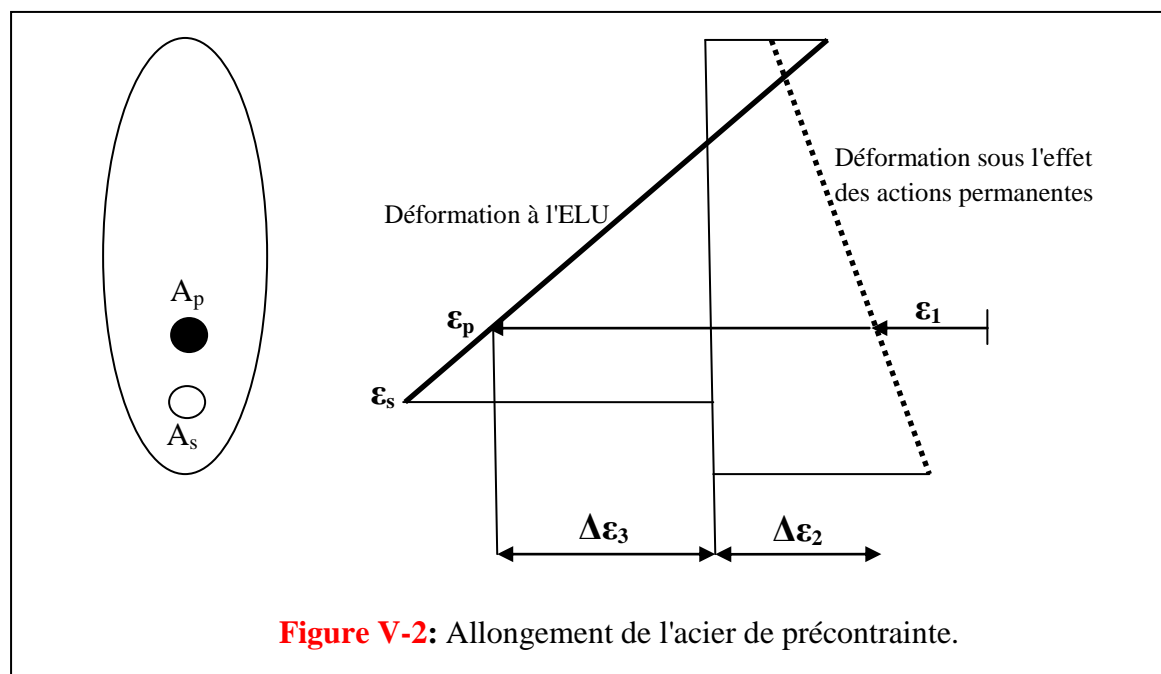
- Dans le domaine 1, le diagramme passe par le point A, qui correspond pour l'armature la plus excentrée, à un raccourcissement d'allongement de 1% au delà du retour à 0 de la frontière du béton adjacent.
- Dans le domaine 2, le diagramme passe par le point B, qui correspond à un raccourcissement de 3,5 ‰ de la fibre la plus comprimée.
- Dans le domaine 3, le diagramme passe par le point C, qui correspond à un raccourcissement égal à 3/7 de la hauteur totale de la section.

Dans le cas d'une précontrainte adhérente (pré-tension ou post tension avec injection) on admet que:

- Les sections droites restent planes.
- Les matériaux ne subissent aucun glissement relatif.

En appliquant ces hypothèses, on a donc à l'ELU sur un diagramme linéaire:

- ✓ Les déformations  $\epsilon_b$  du béton.
- ✓ Les déformations  $\epsilon_s$  des aciers passifs.
- ✓ Les variations de déformation  $\Delta\epsilon_3$  des aciers de précontrainte comptées à partir du retour à zéro de la déformation du béton adjacent (Fig. V-2).



La déformation d'une armature de précontrainte, à l'ELU, est la somme de :

- ✓ L'allongement préalable  $\epsilon_1$  (nécessaire pour l'obtention de la précontrainte).
- ✓ Un raccourcissement d'allongement accompagnant le retour à zéro de la déformation du béton adjacent, évaluée forfaitairement à  $5\sigma_{bc}/E_p$ . (Où  $\sigma_{bc}$  est la contrainte du béton au niveau de l'armature considérée sous l'effet des actions permanentes et de la précontrainte prise avec sa valeur probable  $P_m$ ).
- ✓ Une variation de déformation complémentaire  $\Delta\epsilon_3$ .

## 6. LA FLEXION EN ETAT LIMITE DE SERVICE:

### 6.1. Flexion en classe I:

#### 6.1.1. Vérification d'une section:

La vérification des contraintes se traduit par les quatre inéquations suivantes:

$$\frac{P}{B} + \frac{Pe_0v}{I} + \frac{M_{min}v}{I} \geq \bar{\sigma}_{ts} = 0 \quad (\text{Traction admissible en fibre supérieure}) \quad (V-7).$$

$$\frac{P}{B} - \frac{Pe_0v'}{I} - \frac{M_{min}v'}{I} \leq \bar{\sigma}_{ci} \quad (\text{Compression admissible en fibre inférieure}) \quad (V-8).$$

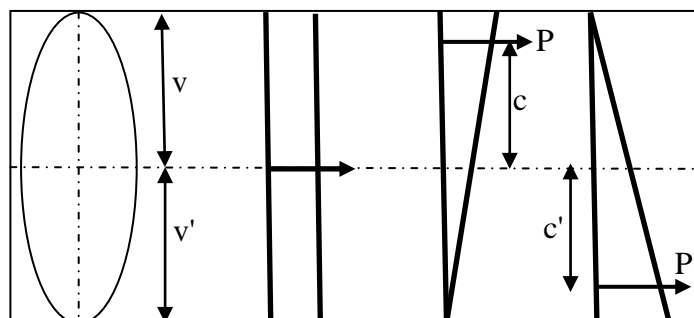
$$\frac{P}{B} + \frac{Pe_0v}{I} + \frac{M_{max}v}{I} \leq \bar{\sigma}_{cs} \quad (\text{Compression admissible en fibre supérieure}) \quad (V-9).$$

$$\frac{P}{B} - \frac{Pe_0v'}{I} - \frac{M_{max}v'}{I} \geq \bar{\sigma}_{ti} = 0 \quad (\text{Traction admissible en fibre inférieure}) \quad (V-10).$$

#### 6.1.2. Détermination de la précontrainte et son excentricité:

**6.1.2.1. Centre de pression :** L'effet d'un effort de précontrainte  $P$  excentré de  $e_0$  et d'un moment fléchissant  $M$  est équivalent à un effort de précontrainte  $P$ , appliqué en point appelé centre de pression d'ordonnée:  $e = e_0 + M/P$ .

Soit  $c$  la distance entre le centre de pression et le CDG de la section pour une contrainte nulle en fibre inférieure. Soit  $c'$  la distance entre le centre de pression et le CDG de la section pour une contrainte nulle en fibre supérieure.



On peut écrire :

$$P/B - (Pc v^2/I) = 0 \Leftrightarrow c = I/Bv^2 = \rho v \quad (\text{V-11}).$$

(Car:  $\rho = I/Bv^2$ ,  $\rho$  étant le rendement de la section).

$$\text{De même : } c' = \rho v'. \quad (\text{V-12}).$$

Sous l'action de la précontrainte seule, le centre de pression se trouve au milieu du câble moyen (CDG des armatures de précontrainte). L'application du moment minimum va déplacer le centre de pression d'une valeur algébrique égale à  $M_{\min}/p$ . Pour que la contrainte reste positive (pas de traction), on aura :

$$e_0 + (M_{\min}/P) \geq -c'. \quad (\text{V-13}).$$

$$\text{De même, sous } M_{\max}, \text{ on aura : } e_0 + (M_{\max}/P) \leq c. \quad (\text{V-14}).$$

### 6.1.2.2. Notion de sections critiques :

- **Section sous critique** : Si tout les segments de passage est à l'intérieure de la zone qui permet un enrobage suffisant, la section est dite sous critique.
- **Section critique** : Dans le cas où il serait possible que le segment de passage soit réduit à un point, la section est dite critique.
- **Section sur critique** : Si le segment de passage à une de ses frontières découpe la zone d'enrobage (segment ouvert), la section est dite sur critique.

#### Cas 1 : Section sous critique :

- **Détermination de la précontrainte minimale** : La précontrainte minimale sera atteinte lorsqu'on aura des contraintes de traction nulles, en fibre supérieures sous  $M_{\min}$  et en fibre inférieure sous  $M_{\max}$ . Cela veut dire que les points d'ordonnées  $c$  et  $c'$  sont atteints par le centre de pression. A partir des relations (V-13) et (V-14) on tire:

$$(M_{\max}/P) - (M_{\min}/P) \leq c + c'. \Leftrightarrow P \geq (M_{\max} - M_{\min}) / (c + c').$$

Comme:  $c = \rho v$  et  $c' = \rho v'$ , avec  $v + v' = h$ , on peut tirer donc la précontrainte minimale à partir de l'équation: 
$$P = (M_{\max} - M_{\min}) / \rho h. \quad (\text{V-15}).$$

- **Détermination de l'excentricité  $e_0$** : à partir des relations (V-13) et (V-14) on a:

$$e_0 \geq - (M_{\min}/P) - c' \quad \text{et} \quad e_0 \leq c - (M_{\max}/P). \quad \text{Donc: } -c' - (M_{\min}/P) \leq e_0 \leq c - (M_{\max}/P).$$

$P$  étant déterminé à partir de l'équation (V-15), donc, on peut calculer l'excentricité de l'effort de précontrainte minimale à partir de: 
$$e_0 = c - (M_{\max}/P) = -c' - (M_{\min}/P). \quad (\text{V-16}).$$

**Cas 2 : Section sur critique :**

Dans le cas d'une section sur critique, la précontrainte nécessaire est plus importante que la précédente, car on doit compenser le manque d'excentricité par un accroissement de la valeur de précontrainte. On a donc:

$e_0 + (M_{\max}/P) = c$ . Comme:  $e_0 = - (v' - d')$ ,  $d'$  présente l'enrobage, alors:  $P = M_{\max}/(c + v' - d')$ .

Mais:  $c = \rho v$ , on peut écrire alors:  $P = M_{\max} / (\rho v + v' - d')$ . (V-17).

Dans la pratique on calcule les deux précontraintes sous critique et sur critique et on retient la valeur maximale. A partir des équations (V-15 et V-17) on constate que pour des faibles valeurs de  $(M_{\max} - M_{\min})$ , par rapport à  $M_{\max}$ , on sera ramené à retenir la formule (V-17) pour l'évaluation de l'effort de précontrainte minimale et la section sera donc sur critique. Cette situation correspond bien au cas de charges variables faibles.

**6.2. Flexion en classe II:**

Le calcul de la section se fait en supposant celle-ci non fissurée.

**6.2.1. Vérification des sections:**

Pour cette classe on a:

$$\frac{P}{B} + \frac{Pe_0v}{I} + \frac{M_{\min}v}{I} \geq \bar{\sigma}_{ts} \quad (\text{Traction admissible en fibre supérieure}) \quad (\text{V-18}).$$

$$\frac{P}{B} - \frac{Pe_0v'}{I} - \frac{M_{\min}v'}{I} \leq \bar{\sigma}_{ci} \quad (\text{Compression admissible en fibre inférieure}) \quad (\text{V-19}).$$

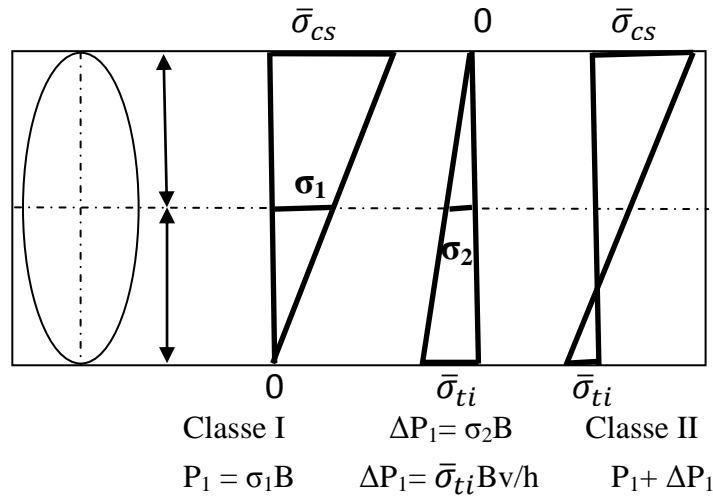
$$\frac{P}{B} + \frac{Pe_0v}{I} + \frac{M_{\max}v}{I} \leq \bar{\sigma}_{cs} \quad (\text{Compression admissible en fibre supérieure}) \quad (\text{V-20}).$$

$$\frac{P}{B} - \frac{Pe_0v'}{I} - \frac{M_{\max}v'}{I} \geq \bar{\sigma}_{ti} \quad (\text{Traction admissible en fibre inférieure}) \quad (\text{V-21}).$$

**6.2.2. Détermination de la précontrainte et son excentricité:****Cas 1 : Section sous critique :**

Pour éviter de déterminer des nouvelles valeurs pour  $c$  et  $c'$ , et partant des valeurs trouvées en classe I, nous ajoutons l'influence des contraintes admissibles de traction (non nulles en classe II) en fibres inférieures et supérieures pour trouver la classe II. Nous avons:





De même, sur la fibre supérieure et pour une contrainte admissible  $\bar{\sigma}_{tS}$  on a un effort:

$$\Delta P_2 = \bar{\sigma}_{tS} Bv'/h.$$

D'où, P en classe II vaut:  $P = P_1 + \Delta P_1 + \Delta P_2$ .

Or,  $P_1$  l'effort de précontrainte en classe I vaut:  $P_1 = (M_{max} - M_{min}) / \rho h$ .

Donc:

$$P = \frac{M_{max} - M_{min}}{\rho h} + \frac{B(v\bar{\sigma}_{ti} + v'\bar{\sigma}_{tS})}{h} \quad (V-22).$$

Comme les valeurs de  $\bar{\sigma}_{ti}$  et  $\bar{\sigma}_{tS}$  sont négatives, l'effort de précontrainte nécessaire est plus faible qu'en classe I (c'est tout à fait logique).

- **Détermination de l'excentricité  $e_0$ :** Au diagramme des contraintes en classe I sous  $M_{max}$  s'ajoute un moment  $\delta M$  induit par la contrainte admissible  $\bar{\sigma}_{ti}$  telle que:

$$\bar{\sigma}_{ti} = - \delta M v' / I, \quad \text{donc:} \quad \delta M = - \bar{\sigma}_{ti} I / v'.$$

Sous l'action de  $\delta M$ , le centre de pression remonte de:

$$\delta M / P = - \bar{\sigma}_{ti} \rho B v / P \implies c = \rho v - \rho B v \bar{\sigma}_{ti} / P.$$

De même:  $c' = \rho v' - \rho B v' \bar{\sigma}_{tS} / P.$

Donc:

$$\begin{cases} e_0 = \rho v - (M_{max} + \rho v B \bar{\sigma}_{ti}) / P \\ e_0 = - \rho v' - (M_{min} - \rho v' B \bar{\sigma}_{tS}) / P \end{cases} \quad (V-23).$$

La section la plus économique du béton est obtenue lorsque les contraintes limites sont atteintes. On peut déterminer donc la section du béton à partir de:

$$I/v = (M_{max} - M_{min}) / \Delta \sigma_s \quad \text{et} \quad I/v' = (M_{max} - M_{min}) / \Delta \sigma_i \quad (V-24).$$

Avec:  $\Delta \sigma_s = \bar{\sigma}_{cS} - \bar{\sigma}_{tS}$  en fibre supérieure.

et:  $\Delta \sigma_i = \bar{\sigma}_{ci} - \bar{\sigma}_{ti}$  en fibre inférieure.

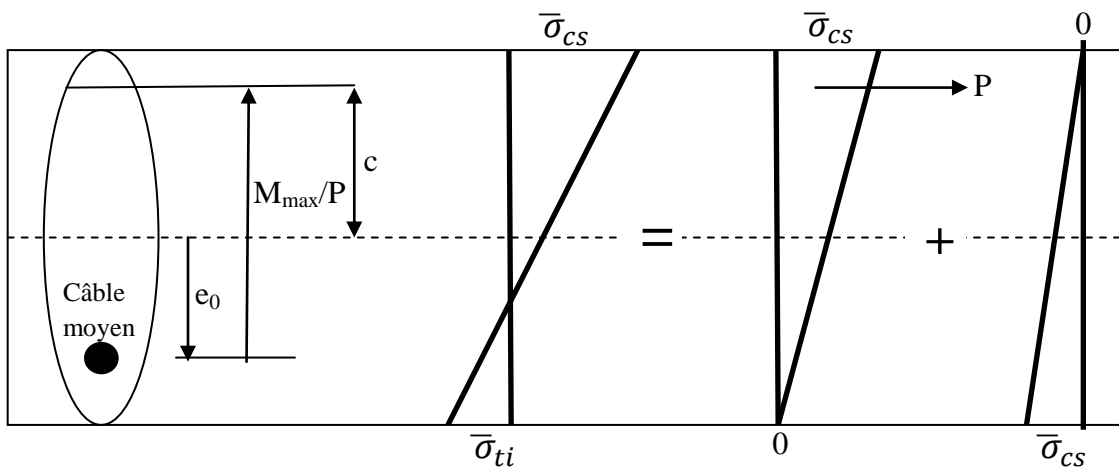
**Cas 2 : Section sur critique** :  $e_0 = -(v' - d')$  valeur imposée.

Nous passons du diagramme de la classe I à celui de la classe II en ajoutant un diagramme triangulaire, dû à la contrainte de traction admissible  $\bar{\sigma}_{ti}$  qui correspond un moment  $\delta M$  pour la section, qui vaut:  $\delta M = \bar{\sigma}_{ti} I / v' = \bar{\sigma}_{ti} \rho B v$ .

Dans l'équation (V-17), le moment résistant  $\delta M$  s'ajoute algébriquement à  $M_{\max}$  de sorte que cette équation devient:

$$P = \frac{M_{\max} + \rho B v \bar{\sigma}_{ti}}{\rho v + v' - d'} \quad (V-25).$$

Pour déterminer la section du béton, nous traçons les diagrammes de contraintes suivants :



A partir de ces diagrammes :

$$\delta M = \bar{\sigma}_{ti} I / v'. \quad \text{Donc :} \quad \delta M / P = (\bar{\sigma}_{ti} I / v' P).$$

$$e_0 + M_{\max} / P = c = \rho v - (\bar{\sigma}_{ti} I / v' P).$$

$$\text{D'autre part, la contrainte en fibre supérieure vaut: } \bar{\sigma}_{cs} = \frac{P}{B} + \frac{M_{\max} + P e_0}{I / v}$$

A partir de ces deux équations nous tirons :

$$\bar{\sigma}_{cs} = \frac{P}{B} + \frac{\rho P v - \bar{\sigma}_{ti} I / v}{I / v}$$

$$B = I / \rho v v', \text{ donc: } \bar{\sigma}_{cs} = \frac{P \rho v v'}{I} + \frac{P \rho v v}{I} - \frac{\bar{\sigma}_{ti} v}{v'}$$

$$\text{D'où : } \bar{\sigma}_{cs} + \bar{\sigma}_{ti} v = \frac{P \rho v}{I} (v + v') = \frac{P \rho h v}{I}.$$

$$\text{Donc :} \quad I / v = \frac{\rho P h}{\bar{\sigma}_{cs} + \frac{\bar{\sigma}_{ti} v}{v'}} \quad (V-26).$$

### 6.3. Flexion en classe III:

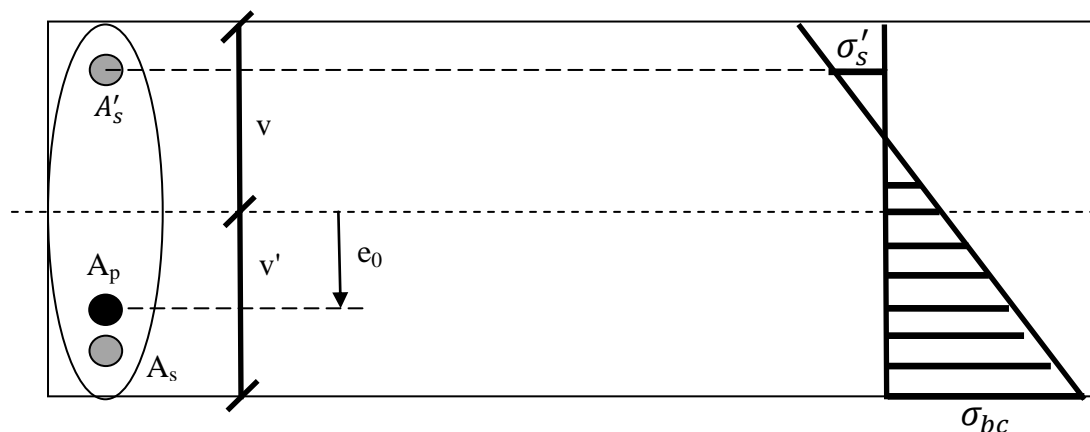
La vérification de la section du béton, pour la classe III, se fait en section fissurée, c'est-à-dire, la résistance du béton tendu est négligée. On est donc ramené à l'étude de béton armé d'une section soumise à la flexion composée, à la différence que l'effort normal de compression augmente avec l'allongement.

On peut considérer pour cette classe que l'effort normal de compression égal à l'effort de précontrainte + effort de surtension correspondant au cas où la contrainte dans le béton est nulle. On prendra donc, la surtension de l'acier comme un effort résistant au même titre qu'un acier de béton armé. Comme il n'existe pas de limitation de contrainte du béton en traction pour le béton tendu fissuré, deux cas sont à envisager :

#### Cas 1 : Sous moment minimum :

Soient:  $A_p$ : armature de précontrainte.

$A'_s$  et  $A_s$ : armature passive supérieure et inférieure respectivement.



On néglige la résistance des armatures comprimées. Le calcul est donc ramené à une vérification de béton armé en flexion composée avec un moment  $M_{\min}$ , une compression  $P'$  excentrée de  $e_0$  et une section d'acier tendu  $A'_s$ , avec:

$$P' = P + \Delta P'. \quad (P: \text{effort de précontrainte}).$$

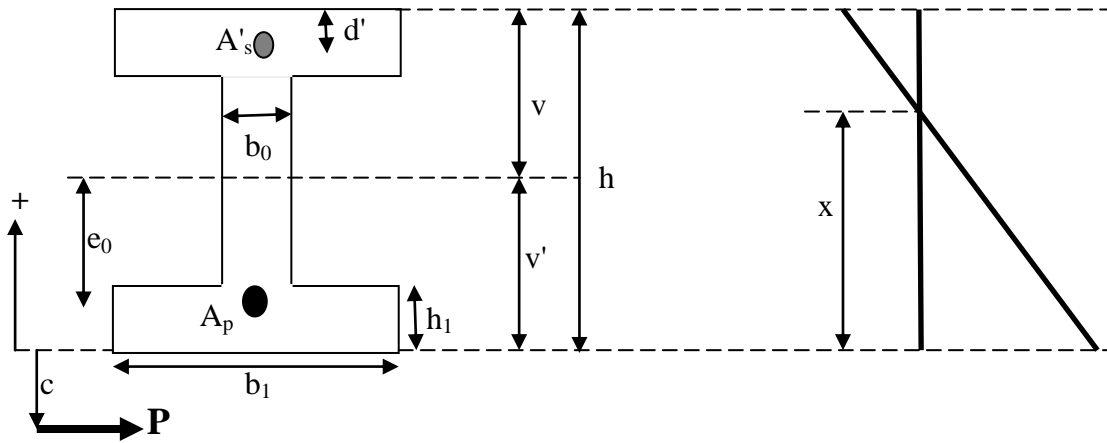
$$\Delta P' = A_p \Delta \sigma'_p.$$

$$\Delta \sigma'_p = n \sigma_c \quad (n: \text{coefficient d'équivalence} = E_p/E_b).$$

$\sigma_c$  est la contrainte du béton au niveau du câble sous l'action de la précontrainte et des charges permanentes existant à la mise en tension.

Pour une section rectangulaire ou en T, on peut par exemple utiliser les formules de l'équation:  $y^3 + py + q = 0$  (BAEL 91).

Soit  $c$ , la distance du centre de pression à la fibre la plus comprimée:  $c = v' + e_0 + M_{\min} / P'$ .



On a (d'après le BAEL 91):

$$p = (-3b_1 / b_0)c^2 + 3((b_1 / b_0) - 1)(c - h_1)^2 + (h - d' - c)(6nA'_s) / b_0.$$

$$q = (-2b_1 / b_0)c^3 + 2((b_1 / b_0) - 1)(c - h_1)^3 - (h - d' - c)^2(6nA'_s) / b_0.$$

La racine  $y$  (de l'équation  $y^3 + py + q = 0$ ) permet de déterminer la position de la fibre neutre:  $x = y + c$ . D'où la contrainte de compression du béton:

$$\sigma_{bc} = \frac{xP'}{\frac{b_0x^2}{2} + \frac{b_1 - b_0}{2}h_1(2x - h_1) - nA'_s(h - d' - x)} \quad (V-27).$$

Et la contrainte de traction de l'acier supérieur: 
$$\sigma'_s = n\sigma_{bc} \frac{h - d' - x}{x} \quad (V-28).$$

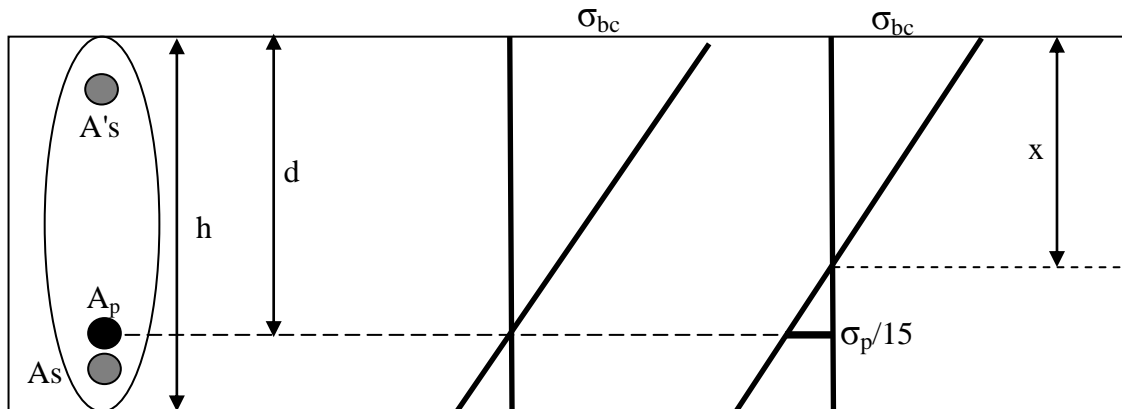
### Cas 2 : Sous moment maximum :

Soit  $M_1$  le moment résistant de la section correspondant au cas où la contrainte de flexion est nulle au niveau du câble:  $\sigma_c = P/B + e_0(Pe_0 + M_1) / I = 0$ .

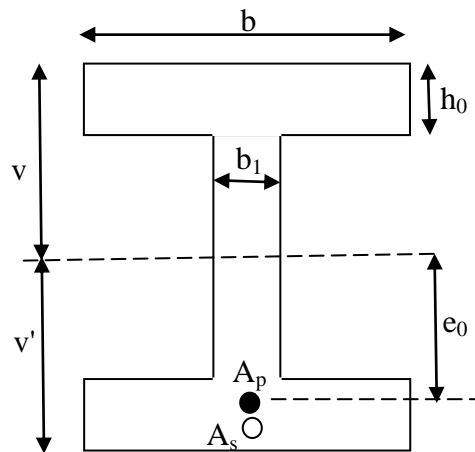
Donc:  $M_1 = - (I/B)(P/e_0) - Pe_0 = (\rho v v' P / e_0) - Pe_0$ .

Si le moment  $M_{\max}$  est inférieur à  $M_1$ , la section est non fissurée, elle sera donc calculée en classe I ou classe II suivant le cas.

Si le moment  $M_{\max}$  est supérieur à  $M_1$ , la section sera calculée comme en béton armé en flexion composée avec un acier passif  $A_s$ , situé à la distance  $d$  de la fibre supérieure et un acier actif  $A_p$  situé à  $(v - e_0)$  de la fibre supérieure.



Pour le cas particulier d'une section rectangulaire ou en T, on peut utiliser les formules suivantes:



$$P' = P + \Delta P'$$

$$c = v - e_0 - M_{max} / P'$$

$$p = (-3b / b_0)c^2 + 3((b / b_0) - 1)(c - h_0)^2 + (d - c)(6nA_s) / b_0 + (v - e_0 - c)(6nA_p) / b_0.$$

$$q = (-2b / b_0)c^3 + 2((b / b_0) - 1)(c - h_0)^3 - (d - c)^2(6nA_s) / b_0 + (v - e_0 - c)^2(6nA_p) / b_0.$$

y est racine de l'équation:  $y^3 + py + q = 0$ , et la position de la fibre neutre est donnée par  $x = y + c$ .

D'où la contrainte de compression du béton est:

$$\sigma_{bc} = \frac{xP'}{\frac{b_0x^2}{2} + \frac{b-b_0}{2}h_0(2x-h_0) - nA_s(d-x) - nA_p(v-e_0-x)} \tag{V-29}.$$

La contrainte de traction de l'acier passif: 
$$\sigma_s = n\sigma_{bc} \frac{d-x}{x} \tag{V-30}.$$

Et la surtension de l'acier de précontrainte est: 
$$\Delta\sigma_p = n\sigma_{bc} \frac{v-e_0-x}{x} \tag{V-31}.$$

**Remarque:**

En classe III, la détermination de la section, de la précontrainte et de l'excentricité est rendu difficile du fait du nombre élevé de paramètres. On procède donc, par approche successive.

## 6.4. Ferrailage passif

Les armatures passives doivent obligatoirement être présentes dans les zones tendues et comme armatures de peau.

### 6.4.1. Les armatures de peau :

Elles sont essentiellement destinées à limiter les fissurations prématurées susceptibles de se produire avant la mise en tension, sous les effets de retrait différentiel et de variation de température. Elles sont disposées en périphérie des pièces suivant deux directions perpendiculaires quelle que soit la classe de l'ELS. On choisira un espacement faible compatible avec le bétonnage. On distingue :

- **Armatures de peau longitudinales parallèles à la fibre moyenne d'une poutre :**  
On doit disposer  $3 \text{ cm}^2$  par mètre linéaire de parement. Dans les cas courants, cela correspond à une armature de diamètre 10 mm espacés tous les 25 cm. De plus, la section globale de ces armatures ne doit pas dépasser 0,1% de l'aire totale de la section de béton :  $A \leq B/1000$ .
- **Armatures de peau transversales perpendiculaires à la fibre moyenne d'une poutre :** On doit disposer  $2 \text{ cm}^2$  par mètre linéaire de parement. Dans les cas courants, cela correspond à trois armatures de diamètre 10 mm ou à deux armatures de diamètre 12 mm par mètre de parement. Les armatures de peau transversales servent également à éviter les poussées au vide.

### 6.4.2. Les armatures longitudinales dans les zones tendues :

Les zones tendues dans le béton sont fragiles puisque le béton résiste mal à la traction, ce qui conduit à une possibilité de fissuration. De même qu'en béton armé, la règle de non fragilité du BAEL s'applique dans les zones tendues du béton précontraint : toutes les zones

de béton tendues doivent être armées :  $A_s = \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{Bt}}{f_e} + \frac{f_{tj}}{\sigma_{Bt}}$  (V-32).

Avec :

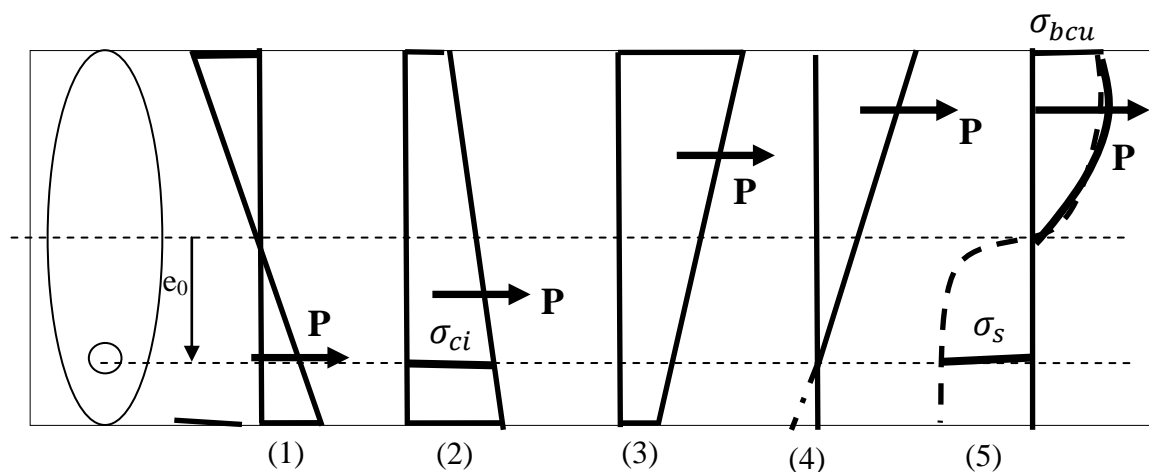
- $N_{Bt}$  : résultante des efforts de traction définie par le diagramme des contraintes à l'ELS.
- $B_t$  : aire de la partie de béton tendu.
- $f_e$  : limite élastique des armatures utilisées.
- $\sigma_{Bt}$  : valeur absolue de la contrainte maximale de traction dans la section

## 7. LA FLEXION EN ETAT LIMITE ULTIME :

Une des particularités des structures en béton précontraint réside dans le fait que l'effet de la force de précontrainte change suivant l'état considéré. En phase élastique, cette force peut être considérée comme une action sur la structure, celle-ci est donc soumise à la flexion composée. A l'ELU, la force de précontrainte n'intervient plus comme action, la structure est donc sollicitée en flexion simple, et les aciers de précontrainte contribuent seulement à titre d'armatures. Ceci provient du fait que l'état d'auto-contrainte, disparaît presque totalement une fois que les aciers de précontrainte ont dépassé leur limite d'élasticité. En effet, à la rupture de la section, ces aciers sont plastifiés et la force de traction correspondante ne dépend que de leur limite d'écoulement et plus du tout de leur déformation initiale.

Toute section de poutre en béton précontraint doit être vérifiée en ELU, les éléments résistants de la section sont :

- Le béton, pour lequel on applique un coefficient de minoration ( $0,85f_{c28}/\theta\gamma_b$ ).
- Les aciers actifs et passifs, dont leurs résistances sont minorées par des coefficients  $\gamma_p = \gamma_s = 1,15$  (1 pour les combinaisons accidentelles).



Ce diagramme présente l'évolution des contraintes dans le béton d'une section, telles que :

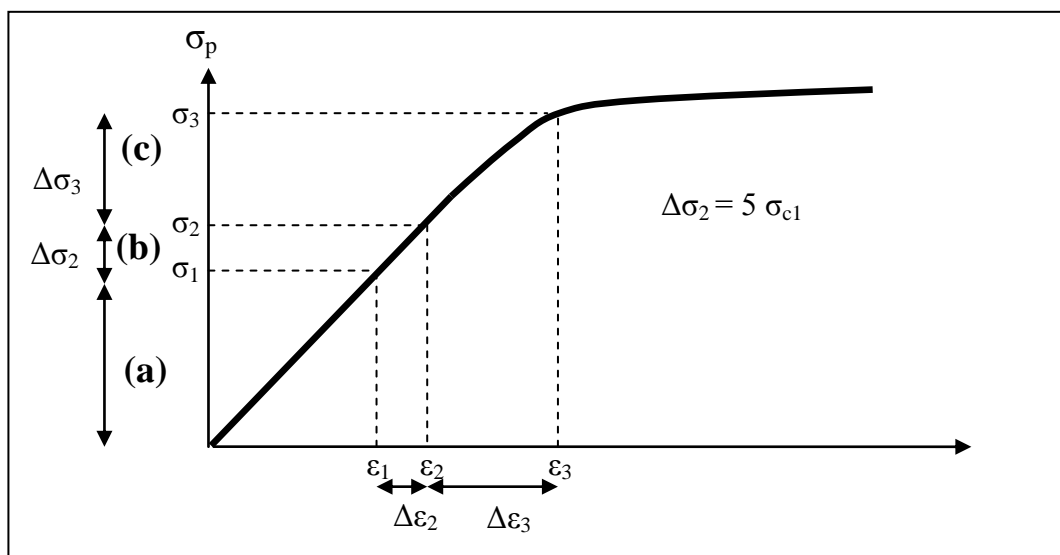
- ✓ (1) : Sous l'action de la précontrainte seule, la contrainte de traction dans l'acier actif est  $\sigma_1 = P/B$  et son allongement  $\epsilon_1 = \sigma_1 / E_p$  (dans le domaine élastique). Cet état n'existe pas car, après décoffrage de la poutre, les charges permanentes de poids propre entrent automatiquement en action.
- ✓ (2) : Sous l'action de la précontrainte et des charges permanentes.

- ✓ (3) : Sous l'action des surcharges. Les cas (2) et (3) sont des positions intermédiaires de l'état de contrainte dans le béton qui n'entraîne pas de contrainte de traction dans le béton au droit de l'acier actif.
- ✓ (4) : Représente le cas limite où le béton comprimé se trouve entièrement du même côté par rapport à l'acier actif. Entre le cas (2) et le cas (4) l'acier a subi un allongement égal à celui du béton qui a décomprimé de la contrainte  $\sigma_{ci}$  à la valeur zéro. Le béton restant dans le domaine élastique, on alors :  $\varepsilon_{c1} = \sigma_{c1} / E_b$  (avec  $(E_b = E_p / 5)$ ).

L'allongement de l'acier  $\Delta\varepsilon_2$  étant égal à l'allongement du béton  $\varepsilon_{c1}$ , l'augmentation de contrainte de l'acier correspond vaut alors :

$$\Delta\sigma_2 = E_p \Delta\varepsilon_2 = E_p \varepsilon_{c1} = E_p (\sigma_{c1} / E_b) = 5 \sigma_{c1}.$$

Si le moment extérieur continue à augmenter pour atteindre le moment ultime  $M_u$ , le béton comprimé aura un comportement appartenant au domaine plastique et non plus linéaire. L'acier de précontrainte continuera à s'allonger entre les cas (4) et (5) comme le ferait un acier d'une section en béton armé à l'ELU. C'est pourquoi, comme en BA, l'allongement correspond au passage de la phase (4) à la phase (5) ne devra pas dépasser la valeur  $\Delta\varepsilon_3 = 1\%$ . La résistance de l'acier devra être suffisante pour équilibrer le moment fléchissant ultime.



- (a) Tension de mise en précontrainte.
- (b) Surtension de décompression du béton.
- (c) Surtension jusqu'à l'ELU en béton détendu.



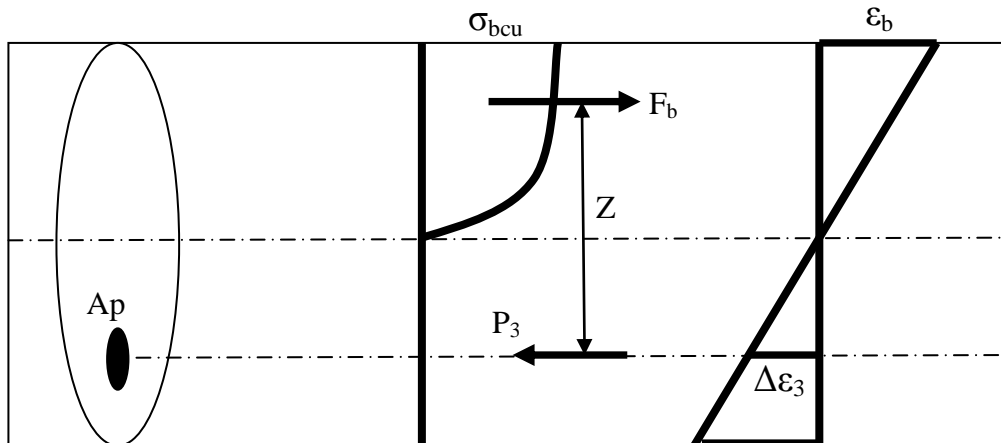
On a :  $\sigma_1 = P/A_p$  (Ce qui résulte  $\varepsilon_1$ ).

Puis :  $\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma_2 = \sigma_1 + 5 \sigma_{c1}$  (Ce qui résulte  $\varepsilon_2$ ).

Enfin, on calculera :  $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_3$  puis  $\sigma_3$  qui est la valeur de calcul.

### 7.1. Calcul de la section à l'ELU :

On est ramené au calcul d'une section en béton armé soumise à la flexion composée à l'ELU. La précontrainte de calcul prise en compte est la précontrainte probable  $P_m$ .



L'équilibre des forces donne :  $F_b = P_3$ . Avec :

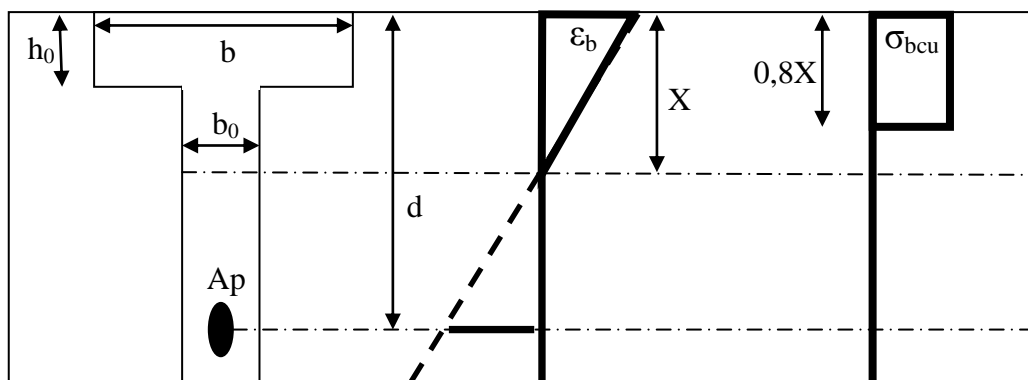
$F_b$  : résultante de compression du béton  $\sigma_{bcu} = 0,85 f_{c28} / \theta \gamma_b$ .

$P_3$  : résultante de la traction de l'acier, égale à  $(\sigma_3 A_p)$ .

De même, l'équilibre des moments par rapport aux armatures tendue de précontraintes donne :  $M_u = F_b * Z$ .

### - Cas d'une section en T :

On suppose que l'axe neutre est dans la nervure, sinon, on sera ramené à une section rectangulaire.



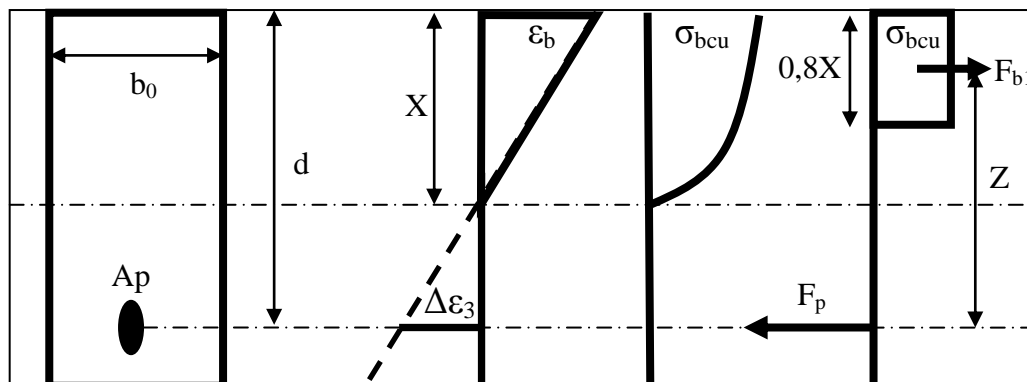
- La résultante de compression du béton situé dans la partie de la table extérieure à la nervure est :  $F_{te} = (b - b_0) h_0 \sigma_{bcu}$ .
- Le bras de levier de cette résultante est :  $Z_{te} = d - h_0/2$ .
- Le moment résistant de cette partie vaut :  $M_{te} = F_{te} Z_{te} = (b - b_0) h_0 \sigma_{bcu} (d - h_0/2)$ .

Le moment à prendre par la nervure  $M_n = M_u - M_{te}$ . On est ainsi ramené au cas d'une section rectangulaire de largeur  $b_0$  et de hauteur utile  $d$  soumise à  $M_n$ . Pour déterminer si l'axe neutre est dans la table ou dans la nervure, on calcule le moment résistant de la table complète de largeur  $b$  :

$$M_t = 0,8bh_0 \sigma_{bcu} (d - 0,8h_0 / 2) \quad (V-33).$$

- Si  $M_t > M_u$ , l'axe neutre est dans la table
- Si  $M_t < M_u$ , l'axe neutre est dans la nervure.

#### - Cas d'une section rectangulaire :



A partir de ce diagramme, on a :  $F_{b1} = \sigma_{bcu} (0,8b_0 X)$  et  $Z = d - 0,4X$ .

Donc :  $M_n = F_{b1} Z = \sigma_{bcu} (0,8b_0 X) (d - 0,4X)$ .

Posons  $\mu = M_n / (b_0 d^2 \sigma_{bcu})$ , et  $\xi = X/d$ .

On aura :  $\mu = 0,8 \xi (1 - 0,4 \xi)$  dont la racine est :  $\xi = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu})$ .

La connaissance de la position de l'axe neutre permet d'écrire :  $\Delta\epsilon_3 = \epsilon_b(1 - \xi) / \xi$ . On a deux cas possibles suivant que le béton a atteint 0,35% ou l'acier a atteint 1%.

Supposons que le béton est sollicité avec une déformation 0,35%, on aura donc pour l'acier un allongement :  $\Delta\epsilon_3 = 0,35[(1 - \xi) / \xi]$  %. Si  $\Delta\epsilon_3 < 1\%$ , on la retient comme allongement pour l'acier, si non on limite cette déformation à 1%.

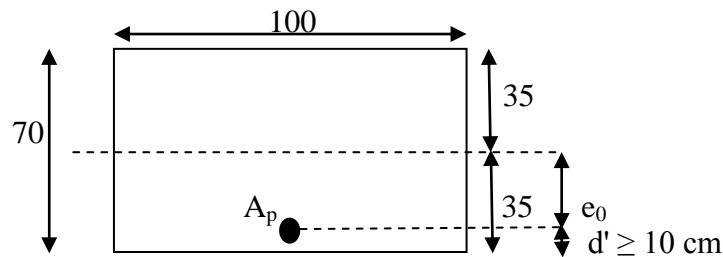
La connaissance de  $\Delta\epsilon_3$  entraîne celle de  $\Delta\sigma_3$  à partir du diagramme contrainte-déformation de l'acier.

## 8. APPLICATIONS:

### Exercice N° 1:

Soit une section rectangulaire (100 x 70) cm<sup>2</sup>, soumise à un moment maximum  $M_{\max}$  de 1,9 MN.m sous combinaisons rares et minimum  $M_{\min}$  de 1,1MN.m sous charges permanentes. Le béton à une résistance caractéristique de compression  $f_{c28} = 30$  MPa.

Faire l'étude en considérant respectivement les trois classes de précontrainte.



### Solution:

On a:

$$f_{c28} = 30 \text{ MPa, donc : } f_{t28} = 2,4 \text{ MPa}$$

La contrainte admissible en compression sur la fibre supérieure en combinaisons rares ( $M_{\max}$ ) est :  $\bar{\sigma}_{CS} = 0,6 f_{c28} = 18 \text{ MPa}$ .

La contrainte admissible en compression sur la fibre inférieure en combinaisons permanentes ( $M_{\min}$ ) est :  $\bar{\sigma}_{Ci} = 0,5 f_{c28} = 15 \text{ MPa}$ .

### Classe I:

Les contraintes admissibles en traction  $\bar{\sigma}_{tS}$  et  $\bar{\sigma}_{ti}$  sont nulles.

Compte tenu des deux précontraintes maximum  $P_1$  et minimum  $P_2$  à prendre en compte dans les calculs, nous ferons l'hypothèse que :

$$P_1 = (1 + \lambda)P, \text{ et } P_2 = (1 - \lambda)P.$$

Avec :  $\lambda = 0,1$  et  $P$  : contrainte moyenne égale à :  $(P_1 + P_2)/2$ .

Nous pouvons ramener l'étude de la section à une seule précontrainte  $P$  en utilisant des moments et contraintes admissibles transformées :

$$\text{Avec : } M'_{\max} = M_{\max} / (1 - \lambda) = 1,9 / 0,9 = 2,11 \text{ MNm.}$$

$$\text{Et : } M'_{\min} = M_{\min} / (1 + \lambda) = 1,1 / 1,1 = 1 \text{ MNm.}$$

La précontrainte sous critique vaut :  $P_{\text{sous}} = (M'_{\max} - M'_{\min}) / \rho h = 4,76 \text{ MN}$ .

Et l'excentricité est :  $e_0 = -\rho v^2 - M'_{\min} / P = -(1/3)(0,35) - 1 / 4,76 = -0,327 \text{ m}$ .

Cette valeur place le câble en dehors de la zone d'enrobage ( $d' \geq 0,1$  m). Donc, la section est sur critique :

$$P_{\text{sur}} = M'_{\text{max}} / (\rho v + v' - d') = 2,11 / (0,35/3 + 0,35 + 0,1). \text{ Donc : } P_{\text{sur}} = 5,75 \text{ MN.}$$

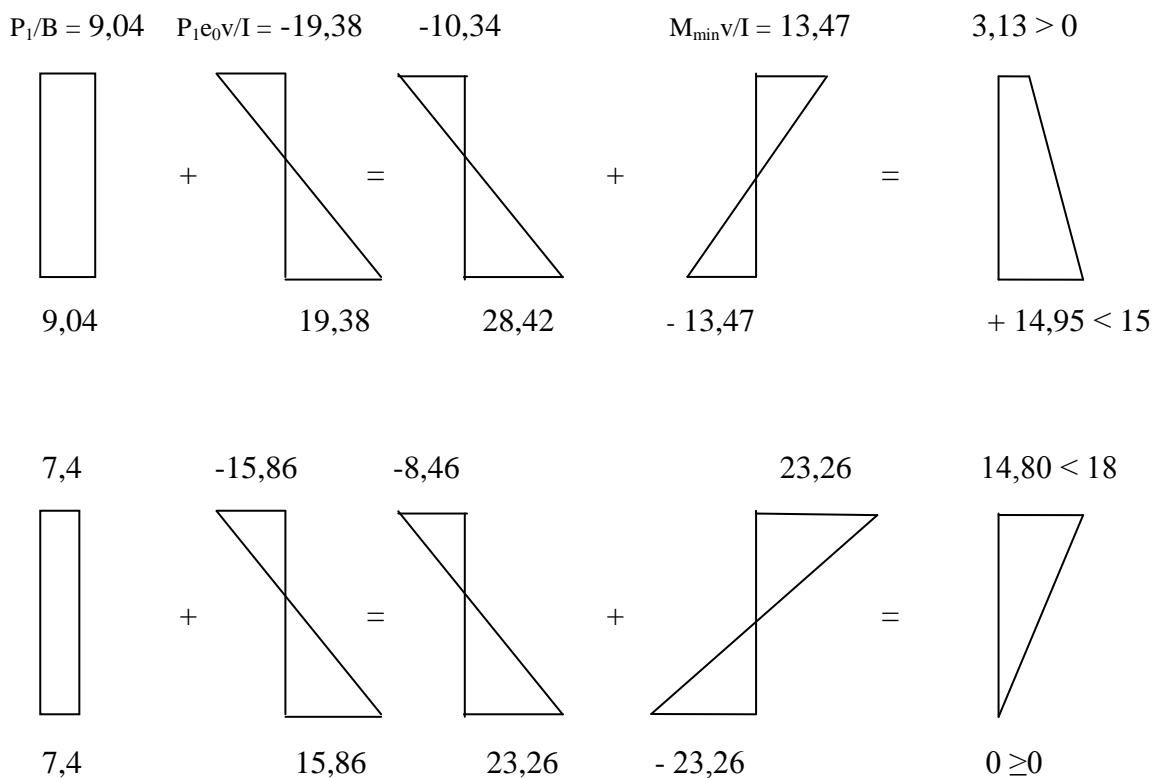
$$e_0 = - (v' - d') = - 0,25 \text{ m.}$$

$$I/v = bh^2/6 = 0,0817 \geq (P\rho h) / \bar{\sigma}_{CS} = 0,074. \text{ OK}$$

$$I/v' = bh^2/6 = 0,0817 \geq (M'_{\text{max}} - M'_{\text{min}}) / \Delta \bar{\sigma}_{CS} = 1,1 / 13,64 = 0,0814. \text{ OK}$$

Le diagramme des contraintes en classe I est ci-dessous, avec :

$$P_1 = 1,1 P = 6,33 \text{ MN et } P_2 = 0,9 P = 5,18 \text{ MN}$$



### Classe II:

Les contraintes admissibles de traction sont  $\bar{\sigma}_{tS} = -1,5 f_{tj} = - 3,6$  MPa.

Comme nous sommes en section sur critique, la fibre inférieure appartient à la section d'enrobage, donc :  $\bar{\sigma}_{ti} = - f_{tj} = - 2,4$  MPa

La précontrainte sous critique est :  $P_{\text{sous}} = [(M'_{\text{max}} - M'_{\text{min}}) / \rho h] + B (v \bar{\sigma}'_{ti} + \bar{\sigma}'_{tS} v') / h.$

Avec, les contraintes fictives  $\bar{\sigma}'_{ti}$  et  $\bar{\sigma}'_{tS}$  sont données par:

$$\bar{\sigma}'_{ti} = \bar{\sigma}_{ti} / (1-\lambda) = - 2,67 \text{ MPa.}$$

$$\bar{\sigma}'_{tS} = \bar{\sigma}_{tS} / (1+\lambda) = - 3,27 \text{ MPa.}$$

Donc :  $P = 2,68 \text{ MN}$ .

On voit l'influence des contraintes admissibles de traction de classe II, qui divise presque par deux la précontrainte sous critique ( $2,86 \approx 4,76 / 2$ ).

Pour l'excentricité  $e_0$  :

$$e_0 = -\rho v' - \frac{M'_{min} - \rho B v' \bar{\sigma}'_{ts}}{P} = -0,589 < -(0,35 - 0,1).$$

Le câble serait en dehors de la section de béton, la section est donc sur critique :

$$P_{sur} = \frac{M'_{max} + \rho B v' \bar{\sigma}'_{ti}}{\rho v + v' - d'} = 5,16 \text{ MN}.$$

Avec une excentricité  $e_0$  :  $e_0 = -(v' - d') = -0,25\text{m}$ .

L'économie de précontrainte réalisée en classe II par rapport à la classe I n'est que :

$$(5,75 - 5,15) / 5,75 \approx 10\%.$$

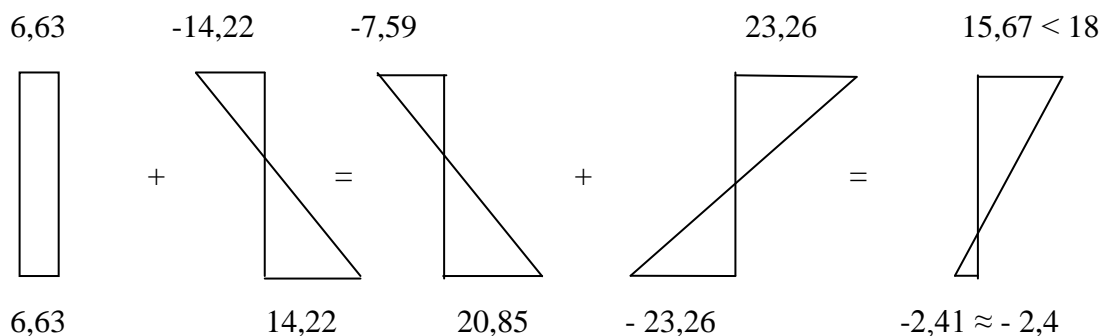
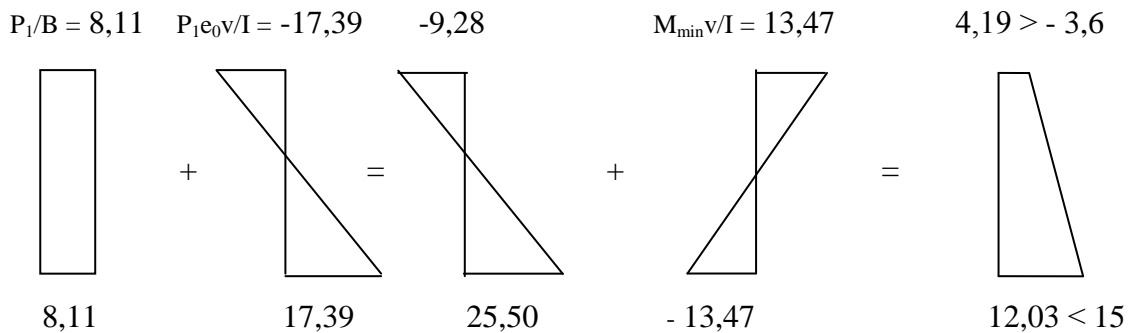
Pour la vérification de la section du béton, on a :

$$I/v = bh^2/6 = 0,0817 \geq \frac{P\rho h}{\bar{\sigma}'_{cs} + \frac{v}{v'} + \bar{\sigma}'_{ti}} = 0,0695. \quad \text{OK}$$

$$I/v' = bh^2/6 = 0,0817 \geq (M'_{max} - M'_{min}) / \Delta \bar{\sigma}_{cs} = 1,11 / (13,64 + 2,67) = 0,0681. \quad \text{OK}$$

Le diagramme des contraintes en classe II est :

Avec :  $P_1 = 1,1 P = 5,68 \text{ MN}$  et  $P_2 = 0,9 P = 4,64 \text{ MN}$



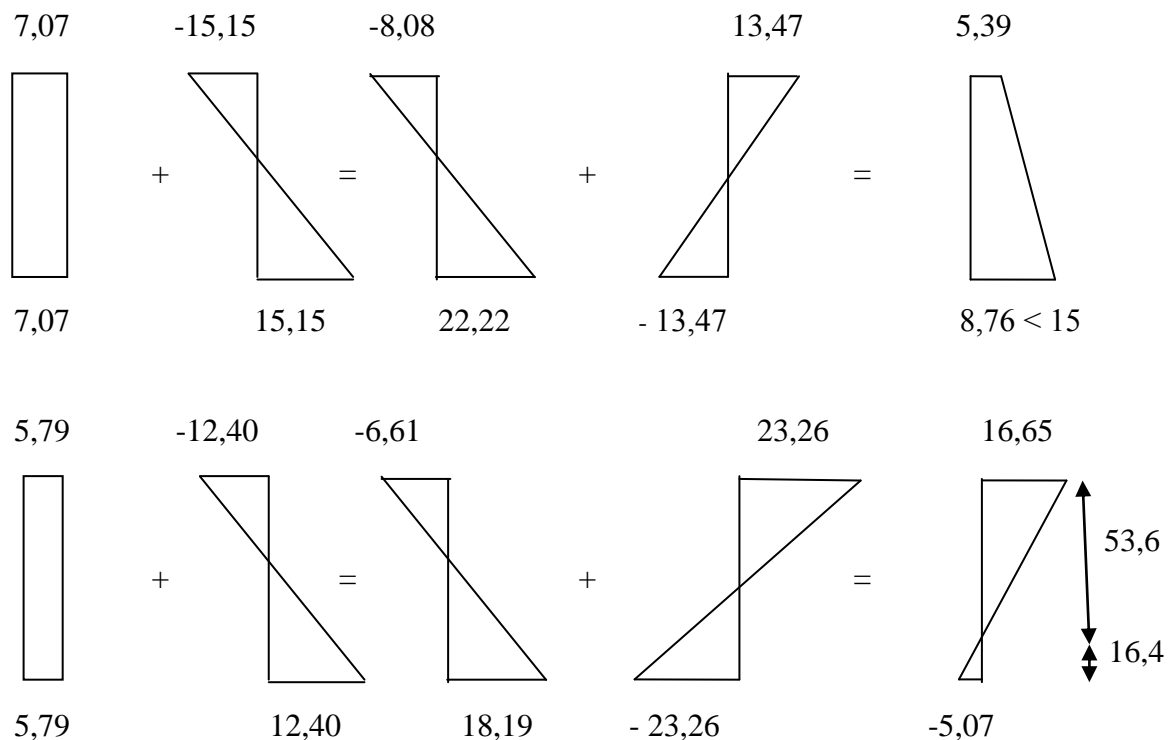
On remarque que:

- La contrainte limite en fibre supérieure sous  $M_{\min}$  n'est pas atteinte, car nous avons une section sur-critique.
- Les contraintes limites supérieures ne sont pas atteintes, car la section de béton ( $I/v$  et  $I/v'$ ) est surabondante.
- La contrainte limite minimum en fibre inférieure est atteinte, car nous avons pris la valeur de la précontrainte juste nécessaire. Donc on doit prévoir des armatures passives de traction conformément au BPEL, dans la zone tendue (partie inférieure).

### Classe III:

Prenons une précontrainte inférieure à celle de la classe II, par exemple  $P = 4,5$  MN, obtenue avec 5 câble de 6T15 ( $30 * 139 = 4170 \text{ mm}^2$ ) et une excentricité limite de  $e_0 = -0,25\text{m}$ .

Calculons les contraintes du béton sous l'action des précontraintes maximum  $P_1$  et minimum  $P_2$  que nous supposons égales à  $1,1 P = 4,95$  MN et  $0,9 P = 4,05$  MN respectivement.



Pour calculer les aciers passifs on utilise la formule du BPEL :

$$A_s = (B_t / 1000) + (N_{Bt} / f_e) \cdot (f_{tj} \cdot \sigma_{Bt}). \text{ Avec :}$$

$$B_t = 0,164 \text{ m}^2, \sigma_{Bt} = 5,07 \text{ MPa}, N_{Bt} = B_t \sigma_{Bt} / 2 = 0,417 \text{ MN}, f_e = 400 \text{ MPa} \text{ et } f_{tj} = 2,4 \text{ MPa}.$$

$$\text{Donc } A_s = 6,57 \text{ cm}^2 \text{ soit } 6 \text{ HA } 12 = 6,78 \text{ cm}^2.$$

Soit  $\sigma_c$ , le contrainte dans le béton au niveau du câble de précontrainte. A partir du diagramme des contraintes précédent,  $\sigma_c = 8,28$  MPa. On a une surtension, pour ramener la section à avoir une contrainte du béton nulle au niveau du câble, égale à :

$$\Delta P' = A_p \Delta \sigma_p' = A_p n \sigma_c = 0,17 \text{ MN.}$$

L'effort de compression de calcul en flexion composée vaut alors :

$$P'_2 = P_2 + \Delta P' = \mathbf{4,22 \text{ MN.}}$$

Vérification des contraintes de l'acier et du béton en section fissurée :

$$c = v - e_0 - M_{\max} / P'_2 = 0,15 \text{ m.}$$

$$p = -3c^2 + (d - c)(6nA_s) / b_0 + (v - e_0 - c)(6nA_p) / b_0.$$

$$q = -2c^3 - (d - c)^2(6nA_s) / b_0 + (v - e_0 - c)^2(6nA_p) / b_0.$$

Avec:

$A_s = 6,78 \text{ cm}^2$ ,  $A_p = 41,7 \text{ cm}^2$ ,  $n = 5$ ,  $b = b_0 = 1 \text{ m}$ ,  $d = 0,65 \text{ m}$ ,  $e_0 = 0,25 \text{ m}$  et  $v = v' = 35 \text{ cm}$ ,  
Donc :  $p = -0,001035$  et  $q = -0,003254$ .

La racine de  $y^3 + py + q = 0$  est :  $y = 0,3203 \text{ m}$  et  $x = y + c = 0,4703 \text{ m}$ .

D'où (équation V-29),  $\sigma_{bc} = 18,47 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_{cs} = 18 \text{ MPa}$ .

La surtension de l'acier de précontrainte vaut :  $\Delta \sigma_p = n \sigma_{bc} (v - e_0 - x) / x = 25,47 \text{ MPa}$ .

La tension dans l'armature passive est :  $\sigma_s = n \sigma_{bc} (d - x) / x = 35,29 \text{ MPa}$ .

On doit vérifier que :

- La surtension de l'acier de précontrainte ne dépasse pas  $0,1 f_{prg}$  (en post tension avec des torons T 15 en classe 1770 TBR) soit 177 MPa ce qui est bien le cas.
- La contrainte de l'acier passif dans la zone d'enrobage ne dépasse pas 240 MPa pour l'acier FeE400.

### Conclusion :

	Classe I	Classe II	Classe III
Précontrainte moyenne MPa	5,75 soit (38 T15)	5,16 soit (34 T15)	4,50 soit (30 T15)
$\sigma_{bc}$ maximale en MPa :			
En fibre sup : < 18	14,80	15,67	<b>18,47</b>
En fibre inf : < 15	14,95	12,03	8,67
Aciers passifs	0	5 HA10	6 HA12

**Exercice N° 2:**

Soit une poutre en T, définie sur la figure ci-dessous, soumise à :

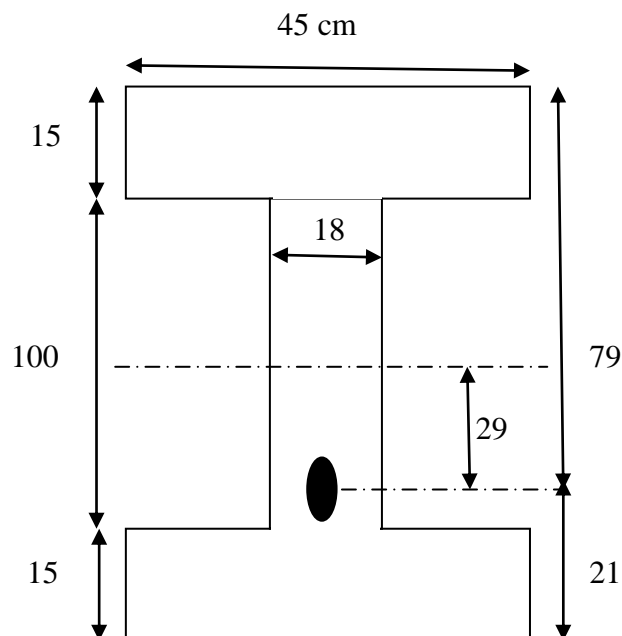
Un moment  $M_g$  dû aux actions permanentes :  $M_g = 0,102$  MNm.

Un moment  $M_q$  dû aux actions variables :  $M_q = 0,758$  MNm.

Et une précontrainte probable  $P_m = 1,66$  MN.

Les armatures actives utilisées sont deux câbles constitués de torons 5T15 dont la limite élastique  $f_{peg}$  vaut 1623 MPa et le béton est un béton de  $f_{c28} = 35$  MPa.

Vérifier les contraintes vis-à-vis l'ELU.





## **Chapitre 06 : Dispositions constructives**

**INTRODUCTION :**

Dans les cas courants, les dimensions de la structure sont préalablement définies. Si l'on considère les éléments précontraints de la structure, la section transversale de chaque élément est donc connue. Il s'agit alors de calculer la précontrainte et ses pertes et de définir, après vérification des contraintes, le tracé des câbles. Dans d'autres cas plus particuliers, la section est à définir lorsqu'un choix technique ou économique s'impose.

Concernant le béton, la forme et les dimensions de la section à précontraindre doivent être choisis de telle sorte que la poutre puisse résister aux sollicitations imposées. Par exemple, dans le cas d'une flexion, simple ou composée et par souci d'économie de poids et de béton, les rapports  $(I/v)$  et  $(I/v')$  et doivent être maximaux pour une aire  $B$  minimale. Le rendement  $\rho$  doit être le plus élevé possible. Dans une poutre en T, c'est la membrure supérieure (et inférieure pour une poutre en double T) qui reprend les efforts de flexion. Vis-à-vis de l'effort tranchant, il est nécessaire d'avoir une ou des âmes reliant les membrures supérieures ou inférieures pour résister à l'effort tranchant : c'est l'âme qui reprend les efforts tranchants.

**1. TRACÉS DE CÂBLES:**

Après avoir défini les sollicitations, les caractéristiques des sections et la précontrainte ( $P$  et  $e_0$ ), il faut déterminer le tracé à donner aux câbles dans les sections tout au long de la poutre. Deux cas se présentent :

- **La poutre est isostatique:** la précontrainte  $P$  et l'excentricité  $e_0$  s'appliquent dans la section centrale la plus sollicitée. Les câbles sont relevés près des appuis pour reprendre les efforts tranchants (car il n'y a plus d'efforts de flexion au droit des appuis). Il est à noter l'exception : les câbles sont droits lorsqu'on utilise des fils adhérents.

- **La poutre est hyperstatique:** il faut calculer la précontrainte  $P_i$  et l'excentricité  $e_{0i}$  dans toutes les sections. Si la précontrainte est constituée de câbles continus, l'inconnue est l'excentricité  $e_{0i}$ , définie par le fuseau de passage. Mais ceci engendre un surcroît de précontrainte, par souci d'économie, il faut arrêter les câbles en travée. Les câbles ainsi dimensionnés dans certaines sections et arrêtés dans d'autres doivent répondre aux impératifs de :

- Résistance en flexion longitudinale : en construction et en service (ELS et ELU).
- Résistance à l'effort tranchant (relevages près des appuis).
- Nombreux impératifs pratiques (enrobages, assemblages, poussée au vide, ancrage, etc.).

En pratique, on procède de la façon suivante :

- ✓ Détermination des efforts extérieurs et déduction du moment  $M$ .
- ✓ Détermination de la force précontrainte nécessaire ( $P = \Delta M / (c + c')$ ).
- ✓ Choix des unités de précontrainte les mieux adaptées.
- ✓ Déduction du nombre de câbles dans les sections principales ( $n = P / \text{force d'un câble}$ ).
- ✓ Détermination de l'excentricité des câbles dans les sections principales.
- ✓ Tracé de câblage en fonction de ces résultats et en respectant les impératifs pratiques.
- ✓ Vérification en flexion par calcul des contraintes résultantes extrêmes.
- ✓ Le même processus sera adopté pour les poutres à plusieurs travées en tenant compte des moments hyperstatiques.

### 1.1. Relevage des câbles

Le relevage des câbles aux niveau des abouts de la poutre présente les intérêts suivants :

- La réduction du moment isostatique de précontrainte.
- La réduction de l'effort tranchant dû à la précontrainte ( $P \sin \alpha$ ).
- La facilité du logement des câbles à l'about.

En pratique, les relevages se chevauchent et se rapprochent de plus en plus au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'about. Par ailleurs, il faut limiter les déviations angulaires pour réduire les pertes par frottement en courbe. Les câbles relevés qui sortent sur la table supérieure des poutres peuvent être tendus en deuxième phase, ceux qui sortent à l'about, en général, ne peuvent être tendus qu'avant la mise en place des poutres.

### 1.2. Bossage pour ancrage de câbles:

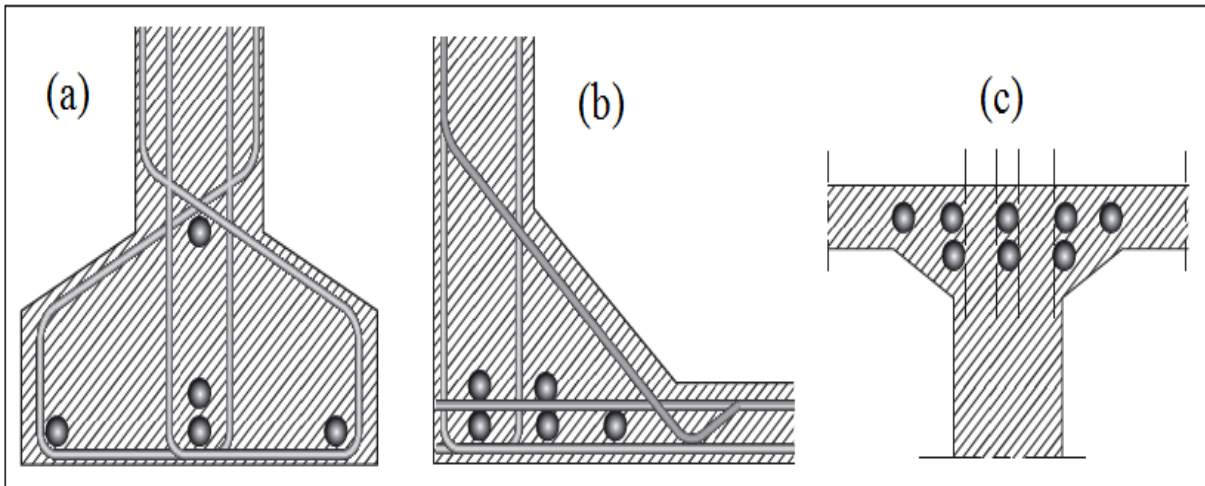
Dans un ancrage de câbles, on considère trois familles d'aciers :

- $A_1$ : aciers d'éclatement déterminés par :  $A_1 = P(0,5 - \sin \alpha) / \sigma_{adm}$ .
- $A_2$ : aciers de reprise de la poussée au vide, tel que:  $A_3 = P \alpha / \sigma_{adm}$ .
- $A_3$ : aciers de couture:  $A_3 = (P \cos \alpha / \sigma_{adm}) - (A_1 + A_2)$ .

### 1.3. Dispositions pratiques de tracés de câblage:

**1.3.1. Dispositions transversales:** Ce sont les suivantes :

- ✓ Groupement des câbles en paquets : maximum 2 pour les grosses unités.
- ✓ Disposition des câbles dans les talons des poutres (Fig.VI-1 a).
- ✓ Disposition des câbles dans les bas de caissons (Fig.VI-1 b).
- ✓ Cheminées de bétonnage et de vibration (Fig.VI-1 c).



**Figure VI-1:** Dispositions transversales.

**1.3.2. Dispositions longitudinales:** longitudinalement, il faut éviter les sifflets de gaines. Pour des contraintes élevées, il est judicieux de placer des goussets pour dévier et tourner les câbles.

**1.3.3. Enrobages:** L'enrobage d'une gaine par rapport à toute surface coffrée est au minimum 5 cm. Pour une demi-gaine par rapport à toute surface non coffrée, l'enrobage est de 3 cm minimum. Pour les câbles droits dans les dalles minces (hourdis supérieurs ou inférieurs de ponts) : des déviations parasites créent des poussées au vide qui peuvent « feuilletter » la dalle et provoquer sa rupture lors de l'injection. Un cas particulier se présente pour les câbles extérieurs au béton : des précautions particulières doivent être prises pour les injections.

**1.3.4. Enrobage des armatures passives:** L'enrobage de toute armature doit être au moins égal à :

- ✓ 1 cm pour les parois qui sont situées dans des locaux couverts et clos et qui ne sont pas exposées aux condensations.
- ✓ 3 cm pour les parois coffrées ou non qui sont soumises (ou sont susceptibles de l'être) à des actions agressives, ou des intempéries, ou des condensations, ou au contact d'un liquide.
- ✓ 5 cm pour les ouvrages à la mer ou exposés aux embruns ou aux brouillards salins, ainsi que pour les ouvrages exposés à une atmosphère agressive.

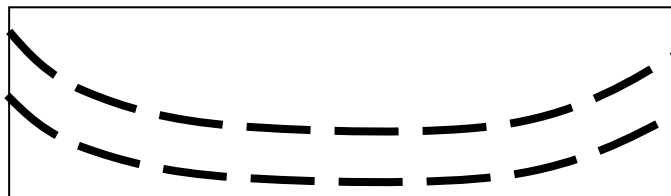
**1.3.5. Espacement des armatures de précontrainte:** En section courante, l'espacement horizontal  $e_h$  et verticale  $e_v$  des armatures actives doivent être d'au moins 5 cm.

## 2. CÂBLE MOYEN FICTIF :

Les câbles de précontrainte dans chaque section, forment un ensemble qui peut être assez complexe. C'est pour quoi, pour les calculs, on remplace souvent cet ensemble par un câble moyen fictif qui aurait, dans chaque section, le même effet des câbles réellement mis en place. L'excentricité du câble moyen effectif  $e_0$  est comprise entre  $(-c' - M_{\min}/P)$  et  $(c - M_{\max}/P)$ . Le segment dans lequel passe le câble est dite segment de passage.

## 3. FUSEAU DE PASSAGE

Il présente la zone délimitée par l'ensemble des segments de passage sur toute la longueur de l'élément (Fig. V-2).



**Figure VI-2:** Fuseau de passage.

Pour que la précontrainte d'un élément soit possible, il faut réunir deux conditions:

- ✓ L'existence du segment de passage.
- ✓ Avoir un enrobage suffisant.

## 4. APPLICATION GENERALE:

Déterminer les dimensions et le câblage d'une poutre de reprise de 16 niveaux de bâtiment, sur une portée de 30 m entraxe des poteaux. On donne:

Classe II,  $f_{c28} = 30$  MPa

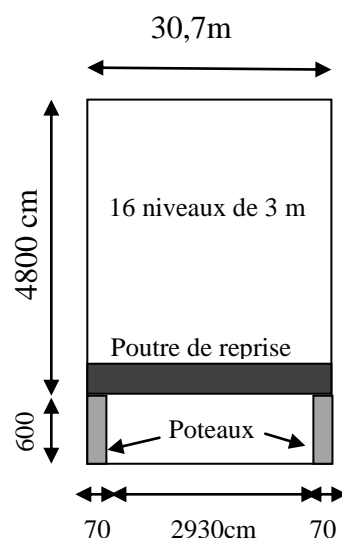
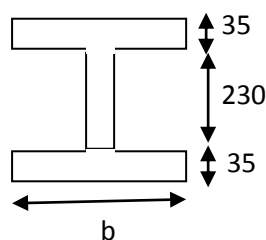
$G = 0,502$  MN/m,  $Q = 0,242$  MN/m.

Torons T15, TBR:  $\rho = 2,5\%$ ,  $\mu = 0,43$ , avec:

Aire:  $139$  cm<sup>2</sup>,  $f_{peg} = 1623$  MPa et  $f_{prg} = 1814$  MPa.

$\varphi = 0,0017$  m<sup>-1</sup>,  $f = 0,16$  rd<sup>-1</sup>,  $g = 5$  mm,  $\epsilon_r = 2 \cdot 10^{-4}$ .

Ø de la gaine: 105 mm pour un câble 19T15.



# Références bibliographiques

---

## Références bibliographiques

- [1] HENRY THONIER. «Le béton précontraint aux états limites». Presses de l'école nationale des ponts et chaussées (1992).
- [2] Règles BPEL 91. «Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton précontraint, suivant la méthode des états-limites». Eyrolles (1993). ISBN 2-212-10013-2.
- [3] ROBERT CHAUSSIN. «Béton précontraint ». Technique de l'ingénieur, C2-360, (1992).
- [4] P. JARTOUX, B. FARGEOT, C. TOURNEUR. «Béton précontraint: Techniques de mise en œuvre». Technique de l'ingénieur, C2 372 (2000).
- [5] ABDELAZIZ YAZID. «Béton précontraint: Cours et exercices». Université de Bechar. (2006).
- [6] CHERAIT YACINE. «Le béton précontraint aux états limites». Direction de la production universitaire de Guelma, DPUG (2004).
- [7] ANDRE PICARD. «Le béton précontraint: Tome I, Principes fondamentaux et dimensionnement». Edition Chicoutimi, Québec (1983). ISBN 2-89105-102-5
- [8] «Le Béton précontraint ». Technique de l'ingénieur, TBA 1034, (2005).
- [9] P. PAILLUSSEAU, A.L. MILLAN, V. Le KHAC, J.P. GILCART. «Ponts à poutres précontraintes par post tension». SERVICE D'ETUDES TECHNIQUES DES ROUTES ET AUTOROUTES, SETRA (1996).
- [10] «Ponts dalles à nervures en Béton précontraint». SERVICE D'ETUDES TECHNIQUES DES ROUTES ET AUTOROUTES, SETRA (1992).
- [11] A. K. SENGUPTA, D. MENON. «Prestressed concrete structures». Indian institute of technology Madras.
- [12] J. FUENTES. «La précontrainte dans le bâtiment». Eyrolles (1983).
- [13] A. E. NAAMAN. «Prestressed concrete analysis and design». Mac Graw Hill (1983).
- [14] AURELIO MUTTONI. «Conception et dimensionnement de la précontrainte». Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (2012).