

Cours de
- mécanique -

LIGNES D'INFLUENCES

DANS LES POUTRES ISOSTATIQUES ET CONTINUES :

**Application à la détermination des cas de chargement
en vue d'obtenir l'extremum de l'effet recherché
(réaction d'appui, moment de flexion, effort tranchant,
flèche)**



SOMMAIRE

1. -- DEFINITIONS --	3
1.1. DÉFINITION	3
1.2. OBJECTIF	3
2. -- APPLICATION À UNE POUTRE À TRAVÉE UNIQUE ISOSTATIQUE --	4
2.1. PRINCIPE DES PUISSANCE VIRTUELLES (PPV).	7
2.1.1. ÉNONCÉ	7
2.1.2. APPLICATION À L'ÉTUDE DES STRUCTURES ISOSTATIQUES	8
2.1.3. THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ DE MAXWELL-BETTI :	11
3. -- ÉTUDE DES POUTRES CONTINUES --	12
3.1. DÉTERMINONS LA FONCTION D'INFLUENCE DE LA RÉACTION D'APPUI A_i	12
3.2. DÉTERMINONS LA FONCTION D'INFLUENCE DU MOMENT DE FLEXION.....	13
3.3. DÉTERMINONS LA FONCTION D'INFLUENCE DE L'EFFORT TRANCHANT	16
3.4. DÉTERMINONS LA FONCTION D'INFLUENCE DE LA FLÈCHE	17

1. – DEFINITIONS –

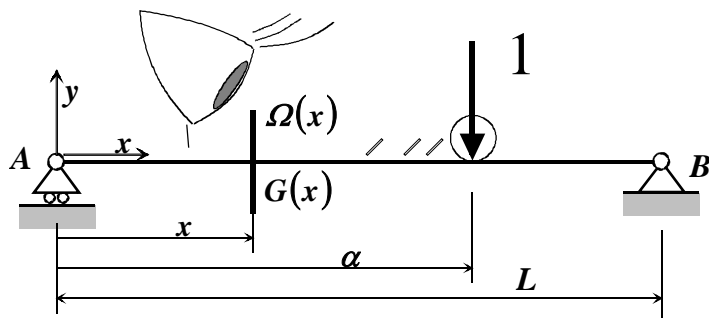


1.1. DEFINITION

Soit une poutre à plan moyen de symétrie, chargée dans ce plan par une force unité (intensité égale à 1), verticale, d'abscisse α variable. Cette force peut occuper une position quelconque sur cette poutre.

Considérons un effet, dont la variation nous intéresse, observé dans une section droite $\Omega(x)$ fixe d'abscisse x , que nous nommons ε , cet effet peut représenter :

- ♦ une sollicitation telle que le moment de flexion, un effort tranchant, un effort normal ;
- ♦ une réaction d'appui ;
- ♦ un déplacement (flèche ou rotation)



L'expression analytique de ε est fonction de la variable α .

Cette fonction $\varepsilon(\alpha)$ est la fonction d'influence de l'effet ε dans la section droite observée $\Omega(x)$ fixe d'abscisse x , sous l'action de la force unité parcourant la poutre d'une extrémité à l'autre.

Sa ligne représentative est la ligne d'influence de ε dans $\Omega(x)$.

1.2. OBJECTIF

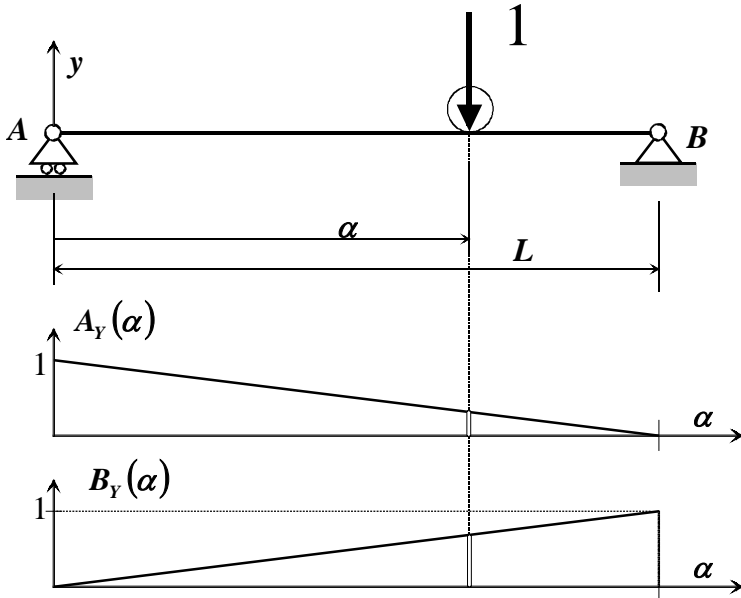
Certaines actions sont variables en position (par exemple les charges d'exploitation, l'action du chariot se déplaçant sur le pont roulant, l'action du pont roulant sur la poutre de chemin de roulement (la poutre support), les surcharges routières sur une travée d'un pont.)

Pour dimensionner une poutre et plus généralement une structure, le problème qui se pose au constructeur, est la **détermination des cas de chargement les plus défavorables**. Où disposer les charges variables qui vont induire par exemple la flèche max. ou les sollicitations max. (effort tranchant et moment de flexion max.) dans la poutre étudiée.

2. -- APPLICATION A UNE POUTRE A TRAVÉE UNIQUE ISOSTATIQUE --

La poutre (A, B) n'est soumise qu'à une charge unité $-\bar{y}$, notons : (\bar{S}_α) , les forces $[\bar{A}, \bar{B}, -\bar{y}]$ appliquées à la poutre.

On s'intéresse aux réactions d'appui. Déterminons les fonctions d'influence $\varepsilon_1(\alpha) = A_Y(\alpha)$ et $\varepsilon_2(\alpha) = B_Y(\alpha)$ lorsque la charge unité $-\bar{y}$ se déplace.



Appliquons le PFS :

$$A_Y(\alpha) + B_Y(\alpha) - 1 = 0, \quad M_A(\bar{S}_\alpha) = 0 = LB_Y(\alpha) - \alpha$$

Nous en déduisons l'expression des actions de contact

$$\text{en A et B. } A_Y(\alpha) = \left(1 - \frac{\alpha}{L}\right); \quad B_Y(\alpha) = \frac{\alpha}{L}$$

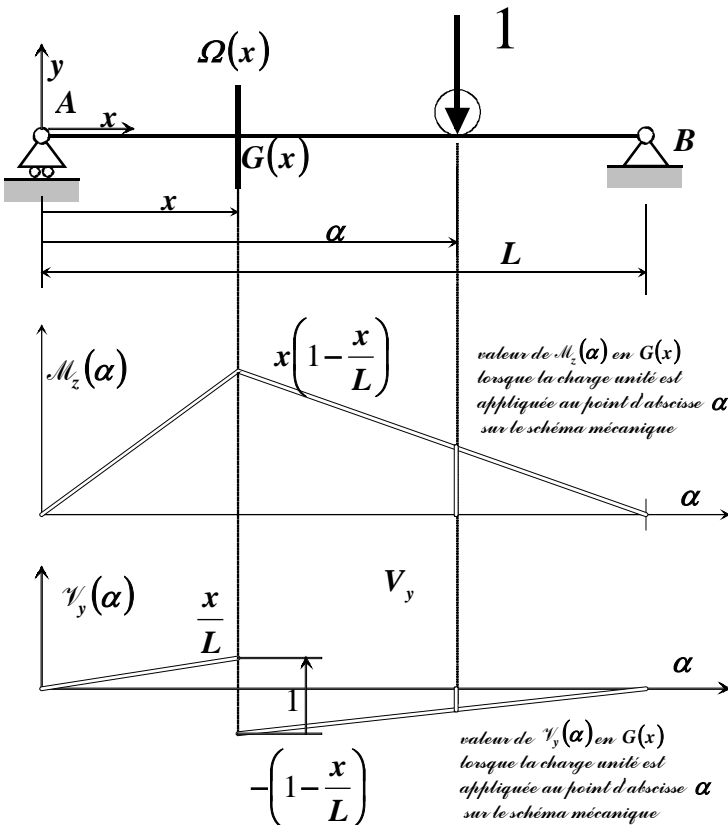
$$A_Y(0) = 1, \quad A_Y(L) = 0; \quad B_Y(0) = 0, \quad B_Y(L) = 1$$

La ligne d'influence de $\varepsilon_1(\alpha)$ est la courbe représentative de $A_Y(\alpha)$, de même la ligne d'influence de $\varepsilon_2(\alpha)$ est la courbe représentative de $B_Y(\alpha)$. Ces lignes d'influence sont des droites.

A l'aplomb de la force unité, correspond l'action à l'appui; prenons le cas de $A_Y(\alpha)$: lorsque la force unité est appliquée en A, $A_Y(0) = 1$, lorsque la force unité se déplace vers B, l'intensité de $A_Y(\alpha)$ diminue jusqu'à devenir nulle en B: $A_Y(L) = 0$.

Nous remarquons immédiatement que :

$$A_{Y,max} = 1 \Leftrightarrow (\alpha = 0)$$



Déterminons la fonction d'influence de $\varepsilon_3(\alpha) = M_z(\alpha)$ dans une section droite $\Omega(x)$ d'abscisse x

$$\alpha \leq x \leq L \quad M_z(\alpha) = \alpha \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$0 \leq x \leq \alpha \quad M_z(\alpha) = \left(1 - \frac{\alpha}{L}\right)x$$

$$M_z(x, \alpha = 0) = 0; \quad M_z(x, \alpha = L) = 0$$

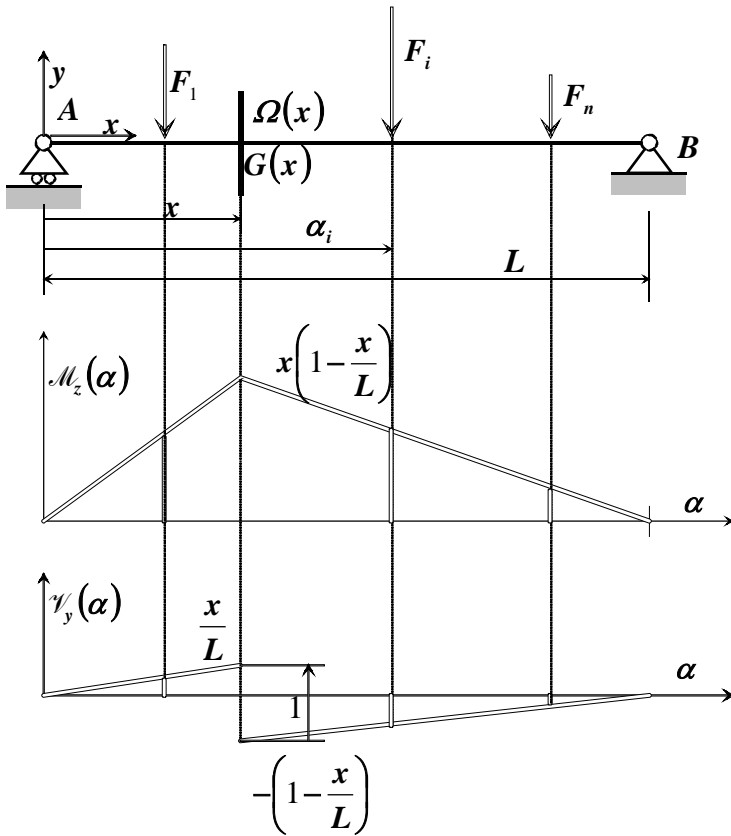
Le moment est maximum lorsque la force unité est appliquée en $G(x)$: $M_z(x, \alpha = x) = x \left(1 - \frac{x}{L}\right)$

Déterminons la fonction d'influence de $\varepsilon_4(\alpha) = \gamma_y(\alpha)$ dans une section droite $\Omega(x)$ d'abscisse x :

$$0 < \alpha < x < L \quad \gamma_y(\alpha) = \frac{\alpha}{L} \quad \gamma_y(0^+) = 0, \quad \gamma_y(x^-) = \frac{x}{L}$$

$$0 < x < \alpha < L \quad \gamma_y(\alpha) = -\left(1 - \frac{\alpha}{L}\right)$$

$\gamma_y(x^+) = -\left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad \gamma_y(L) = 0$ L'effort tranchant est maximum lorsque la force unité est appliquée en $G(x)$.



Soit la même poutre soumise aux forces ponctuelles \bar{F}_i . On veut déterminer le moment de flexion $M_z(x)$

dans la section droite $\Omega(x)$,

On applique le principe de superposition :

$$M_z(x) = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \mathcal{M}_z(\alpha_i)$$

Pour le moment de flexion, compte tenu que $\mathcal{M}_z(\alpha)$ est toujours positif, le moment dans la section droite $\Omega(x)$ est d'autant plus grand que les forces sont plus nombreuses et voisines de $\Omega(x)$.

Si on s'intéresse à l'effort tranchant $V_y(x)$ dans la section droite $\Omega(x)$,

$$V_y(x) = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \gamma_y(\alpha_i)$$

pour $\alpha < x$ $\gamma_y(\alpha) > 0$

pour $\alpha > x$ $\gamma_y(\alpha) < 0$

L'effort tranchant sera positif si les forces ponctuelles sont situées à gauche de $\Omega(x)$, d'autant plus grand que les forces sont proches de $\Omega(x)$. Même raisonnement pour obtenir l'effort tranchant négatif (le plus grand en valeur absolue)

On veut déterminer le moment de flexion $M_z(x)$

dans la section droite $\Omega(x)$, la poutre est soumise à une surcharge d'exploitation représentée par la charge uniformément répartie q . Celle-ci est répartie sur un tronçon de poutre d'abscisses respectives : α_1, α_2 .

$$M_z(x) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathcal{M}_z(\alpha) q d\alpha = q \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathcal{M}_z(\alpha) d\alpha \quad (q \text{ constante})$$

Le moment est proportionnel à l'aire de la surface pochée. $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathcal{M}_z(\alpha) d\alpha$. Cette aire est toujours positive.

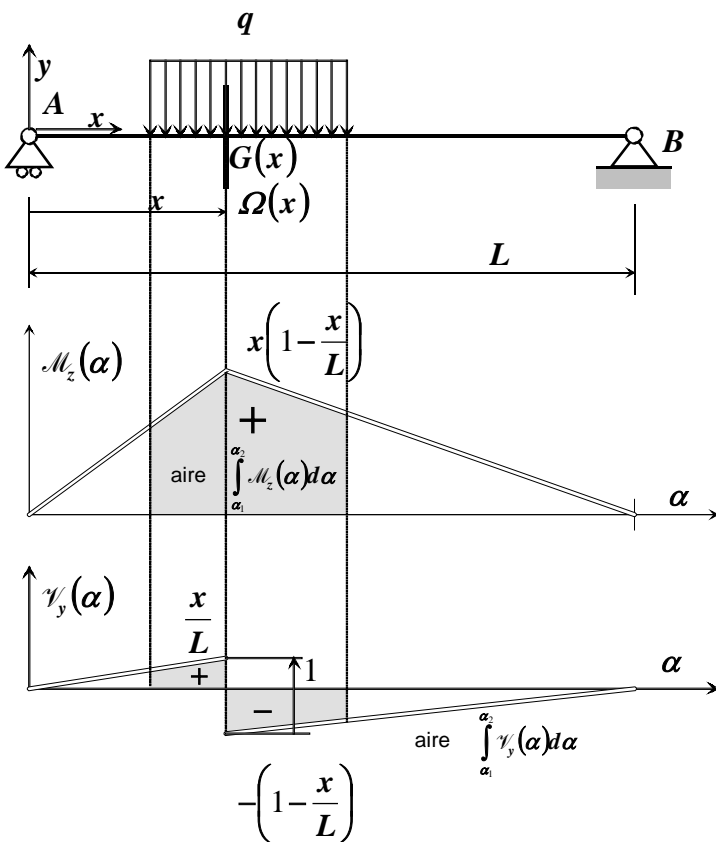
Si on veut déterminer l'effort tranchant $V_y(x)$

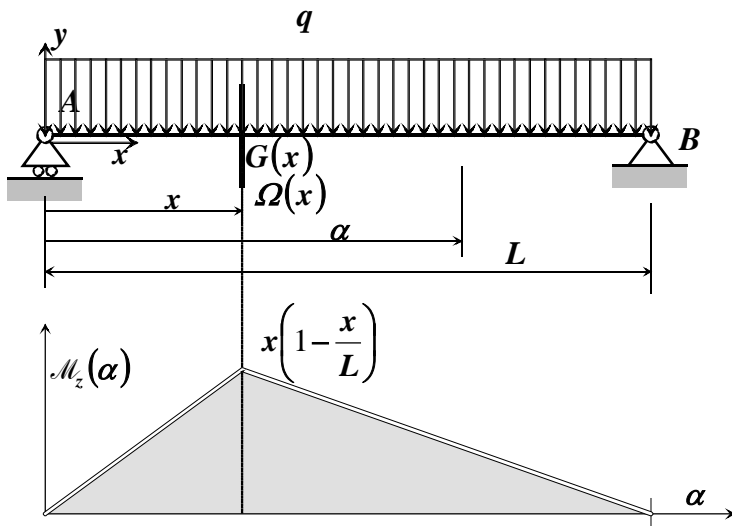
$$V_y(x) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \gamma_y(\alpha) q d\alpha = q \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \gamma_y(\alpha) d\alpha$$

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \gamma_y(\alpha) d\alpha$ représente l'aire de la zone pochée,

attention ici la zone située sous l'axe des abscisses est négative.

Pour obtenir l'effort tranchant max. il faut donc surcharger la poutre soit uniquement à droite de la section $\Omega(x)$ soit uniquement à gauche.





Calcul des effets extrêmes du chargement représenté par la charge uniformément répartie q , charge qui peut affecter ou non la totalité de la longueur de la poutre..

- ♦ Le moment est max. dans la section droite $\Omega(x)$ lorsque la poutre est surchargée sur toute la longueur.

$$M_{z,max}(x) = \int_0^L \mathcal{M}_z(\alpha) q d\alpha = q \int_0^L \mathcal{M}_z(\alpha) d\alpha$$

On peut se dispenser de déterminer l'intégrale, il suffit de connaître l'aire d'un triangle.

$$M_{z,max}(x) = qx \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{L}{2} = \frac{1}{2} qx(L-x)$$

Voir le schéma ci-contre pour le diagramme de $M_{z,max}(x)$.

Pour le moment de flexion : Dans la section d'abscisse x , le moment de flexion est max. lorsque toute la travée est surchargée.

$$M_{z,max}(x) = qx \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{L}{2} = \frac{1}{2} qx(L-x)$$

De plus en faisant varier x on montre que le moment est max. dans la section médiane de la poutre ; sa valeur est alors : $\frac{qL^2}{8}$.

- ♦ L'effort tranchant est max. dans la section droite $\Omega(x)$ lorsque la poutre est surchargée uniquement sur le tronçon situé soit à droite, soit à gauche de la section droite $\Omega(x)$ observée.

Lorsque la poutre est surchargée à droite de la section droite $\Omega(x)$, l'effort tranchant observé dans la section droite $\Omega(x)$ est positif et a pour expression

$$V_{y,max}(x^-) = \int_0^{x^-} q \gamma_y(\alpha) d\alpha, V_{y,max}(x^-) = q \frac{x}{L} x \frac{1}{2} = \frac{qx^2}{2L}$$

Lorsque la poutre est surchargée à gauche de la section droite $\Omega(x)$, l'effort tranchant observé dans la section droite $\Omega(x)$ est négatif et a pour expression

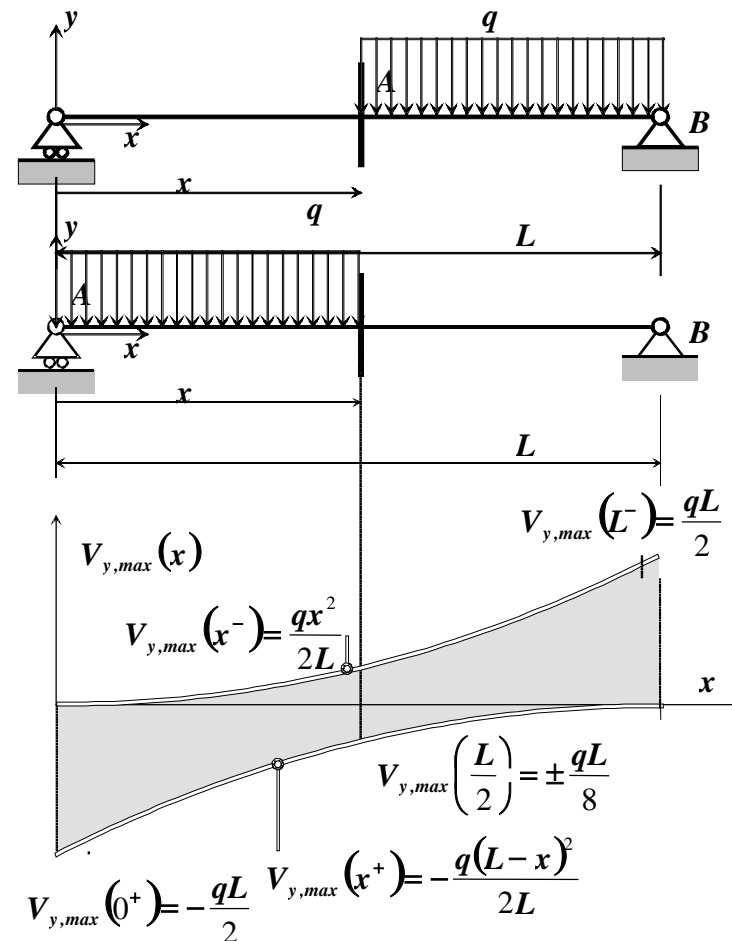
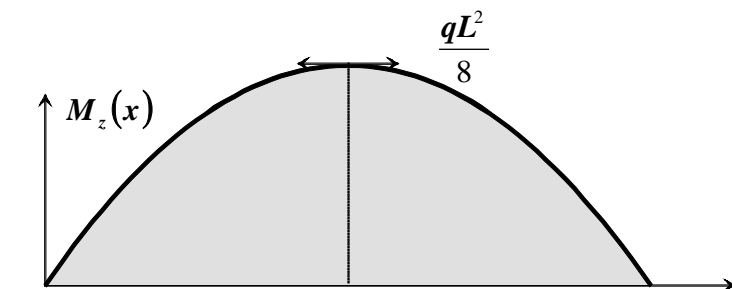
$$V_{y,max}(x^+) = \int_{x^+}^L q \gamma_y(\alpha) d\alpha$$

$$V_{y,max}(x^+) = -q \left(1 - \frac{x}{L}\right) (L-x) \frac{1}{2} = -\frac{q(L-x)^2}{2L}$$

$$V_{y,max}(0^+) = -\frac{qL}{2}; V_{y,max}(L^-) = \frac{qL}{2}$$

Dans la section médiane l'effort tranchant n'est pas nul, il existe 2 cas de chargement (chargement sur la demi travée) qui conduisent à une valeur max.

$V_{y,max}\left(\frac{L}{2}\right) = \pm \frac{qL}{8}$ (soit le 1/4 de l'effort tranchant max. aux appuis).



La notion de ligne d'influence, définie dans le cas d'une poutre à travée unique reposant sur appuis simples s'étend aux structures plus complexes. Dans de nombreux cas, on s'intéresse souvent à l'allure de la ligne d'influence d'un effet observé, car l'objectif est de déterminer la position la plus défavorable du système de charges.

La détermination de l'équation de la fonction d'influence n'est pas nécessaire. On procède alors à une détermination graphique qui repose sur le **principe des Puissances virtuelles (PPV)**

2.1. PRINCIPE DES PUISSANCE VIRTUELLES (PPV).

2.1.1. Énoncé

Comme nous faisons intervenir des déplacements au lieu des vitesses, il faut parler de travail au lieu de puissance.

Considérons un champ de déplacement virtuel quelconque \vec{U}^* et la déformation représentée par la courbure

(en flexion simple $\chi^* = \frac{M^*}{EI}$)

Le travail de déformation de l'état réel des sollicitations M dans le champ virtuel des déformations $\chi^* = \frac{M^*}{EI}$

est égal au travail des forces extérieures réelles dans le champ de déplacements virtuel \vec{U}^* , quel que soit ce champ virtuel.

Le travail fourni par les forces extérieures se retrouve sous forme de travail absorbé par les sollicitations internes.

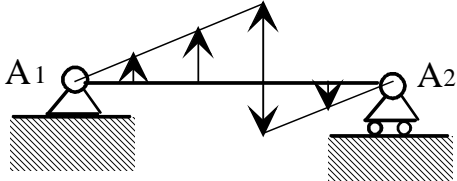
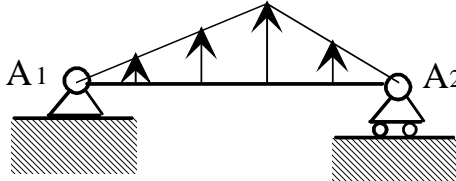
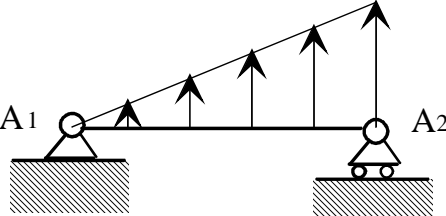
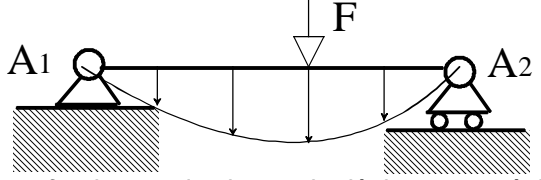
$T_e^* + T_i^* = 0$ Ce principe traduit la conservation de l'énergie. $T_e^* = \int_{structure} \vec{F} \cdot \vec{U}^* dx$; $T_i^* = - \int_{structure} M \cdot \chi^* dx$

Forme condensée utilisée dans le calcul des structures :

$$\int_{structure} \vec{F} \cdot \vec{U}^* ds - \int_{structure} M \cdot \chi^* ds = 0$$

M représente le moment de flexion et plus généralement les sollicitations, χ^* la courbure de la ligne moyenne virtuelle et plus généralement les déformations généralisées de l'état virtuel.

Exemples de champs

 <p>Rigidifiant par morceaux et cinématiquement admissible</p>	 <p>Rigidifiant par morceaux et cinématiquement admissible</p>
 <p>Rigidifiant mais non cinématiquement admissible Rigidifiant : la barre ne se déforme pas, elle se déplace. Non cinématiquement admissible, en effet au point A2 nous avons un soulèvement de l'appui simple.</p>	 <p>confondu avec le champ de déplacement réel</p>

2.1.2. Application à l'étude des structures isostatiques

❖ Nous choisirons un champ de déplacement rigidifiant par morceaux : $\chi^* = 0$

$$\Leftrightarrow \mathcal{J}_{ic} = - \int_{structure} M_z \chi^* dx = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}_e^* = 0$$

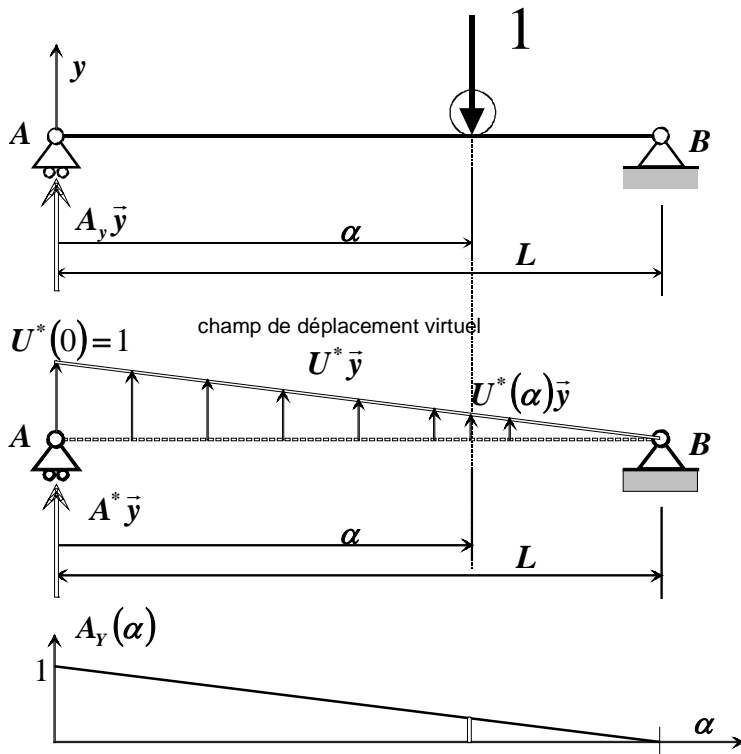
S'il est cinématiquement admissible alors le travail des actions aux appuis est nul. C'est d'autant plus intéressant car ces actions nous sont inconnues.

◆ On cherche à déterminer une action au niveau d'une liaison i.

Sur le système réel, on supprime la liaison, on la remplace par l'action qu'elle exerçait et qui constitue l'inconnue cherchée, de ce fait, elle est à présent une force extérieure.

Pour définir l'état virtuel, il faut supprimer, sur la structure réelle, la liaison i correspondant à l'action cherchée, la structure devient alors un mécanisme à un degré de liberté et en adoptant une loi de comportement « rigide parfait », on obtient ainsi le champ de vitesse rigidifiant par morceaux. On prend donc pour \vec{U}^* , le champ de déplacement de ce mécanisme. Il n'est pas cinématiquement admissible, car il ne respecte pas la liaison i.

Le champ de déplacement virtuel est donc choisi de manière à déplacer le point d'application de l'action cherchée, sans déformer les différents éléments de la structure, comme si ces différents solides qui la constituent étaient indéformables (infiniment rigide, c'est d'ailleurs l'hypothèse adoptée en statique).



On cherche la fonction d'influence de la réaction d'appui A_y .

On supprime l'appui A pour visualiser la réaction d'appui $A_y \vec{y}$ dont on cherche la fonction d'influence.

Soit U^* le champ de déplacement virtuel rigidifiant obtenu par rotation de la poutre autour de l'appui B et tel que le déplacement au point A soit égal à l'unité de mesure des déplacements.

Appliquons le PPV : seules les forces extérieures travaillent

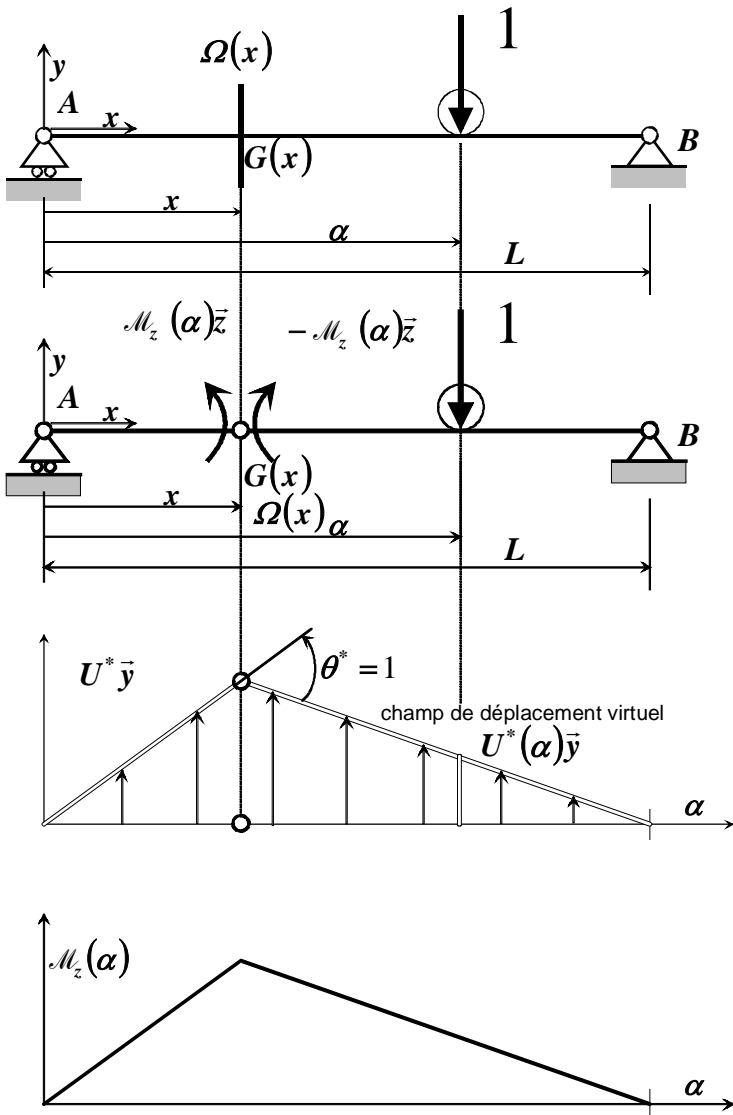
$$A_y \cdot U^*(0) - 1 \cdot U^*(\alpha) = 0 ; \text{ or } U^*(0) = 1$$

$$A_y = U^*(\alpha)$$

❖ Dans le cas d'une structure isostatique, pour calculer une sollicitation.

Dans l'état réel, pour déterminer une action de liaison, on extériorise cette action en supprimant la liaison correspondante. De même, pour déterminer une sollicitation dans la section droite $\Omega(x)$ on pratique en ce point une coupure pour extérioriser cette sollicitation. Par exemple, soit à déterminer le moment de flexion à l'abscisse x . On introduit une articulation dans la section droite $\Omega(x)$, on applique sur les lèvres de la coupure $+M_z(x)\bar{z}$ sur la section droite x^- et $-M_z(x)\bar{z}$ sur la section droite x^+ . Ces moments sont des couples, ils agissent comme des actions extérieures.

Pour définir l'état virtuel, il faut introduire, sur la structure réelle, une coupure. Par cette opération, on transforme la structure réelle en un mécanisme à un degré de liberté. Cela permet de définir le champ de déplacement virtuel, rigidifiant par morceaux $\mathcal{F}_i^* = 0$, compatible avec les appuis et ne dépendant que d'un seul paramètre. Comme il est cinématiquement admissible, le travail des actions aux appuis est nulle. l'équation se résume à écrire $\mathcal{F}_e^* = 0$



On cherche la fonction d'influence du moment de flexion dans la section droite $\Omega(x)$.

On introduit une articulation dans la section droite $\Omega(x)$ sur les lèvres de la coupure, on applique $+M_z(x,\alpha)\bar{z}$ sur la section droite gauche x^- et $-M_z(x,\alpha)\bar{z}$ sur la section droite x^+ . Ces moments agissent comme des actions extérieures.

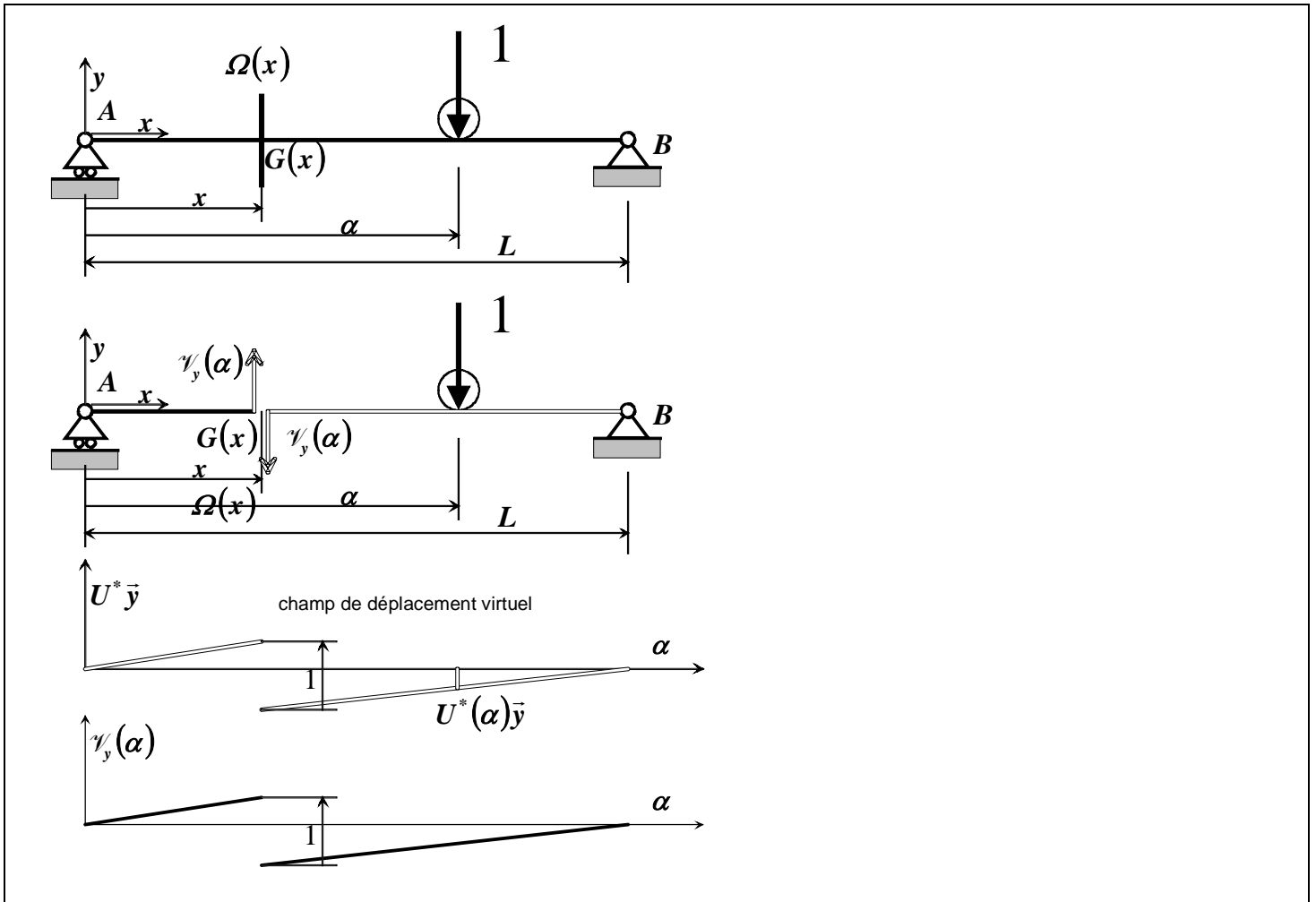
Pour la notation : $M_z(x,\alpha)\bar{z} = \mathcal{M}_z(\alpha)\bar{z}$ moment dans la section droite d'abscisse x pour une force unité appliquée en α .

Soit U^* le champ de déplacement virtuel rigidifiant obtenu en introduisant une articulation dans la section droite $\Omega(x)$ et tel que la variation de rotation entre la section droite $\Omega(x^+)$ et $\Omega(x^-)$ soit égale à 1.

Appliquons le PPV : seules les actions extérieures travaillent

$$\mathcal{M}_z(\alpha).\theta^* - 1.U^*(\alpha) = 0 ; \text{ or } \theta^* = 1 ; \mathcal{M}_z(\alpha) = U^*(\alpha)$$

On adopte la même démarche pour l'effort tranchant



En utilisant le Principe des Puissances Virtuelles, nous obtenons le :

2.1.3. Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti :

Le travail des forces $\vec{\phi}_j$ dans le champ de déplacement \vec{U}_j dû aux forces \vec{F}_i est égal au travail des forces \vec{F}_i dans le champ de déplacement \vec{U}'_i dû aux forces $\vec{\phi}_j$. On adopte la loi de comportement élastique.

Soit une structure S soumise à un ensemble de forces \vec{F}_i appliquées en A_i . On applique le PTV des forces \vec{F}_i dans le champ de déplacements engendrés par $\vec{\phi}_j$; $\mathcal{T}_e^* + \mathcal{T}_i^* = 0$; $\vec{F}_i \cdot \vec{U}'_i(\phi_j) - \int_{structure} M(F_i) \cdot \frac{M(\phi_j)}{EI} dx = 0$

Soit la même structure S soumise à un ensemble de forces $\vec{\phi}_j$ appliquées en A_j . on applique le PTV des forces $\vec{\phi}_j$ dans le champ de déplacements engendrés par \vec{F}_i ; $\mathcal{T}_e^* + \mathcal{T}_i^* = 0$;

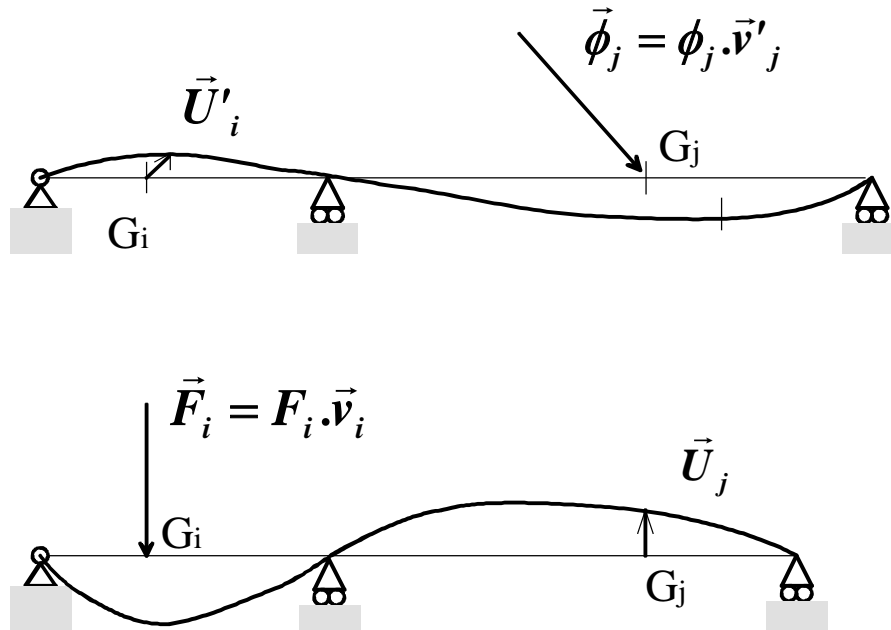
$$\vec{\phi}_j \cdot \vec{U}_j(F_i) - \int_{structure} M(\phi_j) \cdot \frac{M(F_i)}{EI} dx = 0$$

en comparant les 2 équations on obtient

$$\vec{F}_i \cdot \vec{U}'_i(\phi_j) = \vec{\phi}_j \cdot \vec{U}_j(F_i)$$

$$\sum_i F_i \cdot \Delta'_i = \sum_j \phi_j \cdot \Delta_j$$

- Δ'_i la projection sur le vecteur unitaire \vec{v}'_i du déplacement du point i induit par $(\vec{\phi}_j)$
- Δ_j la projection sur le vecteur unitaire \vec{v}'_j du déplacement du point j induit par (\vec{F}_i)



3. -- ETUDE DES POUTRES CONTINUES --

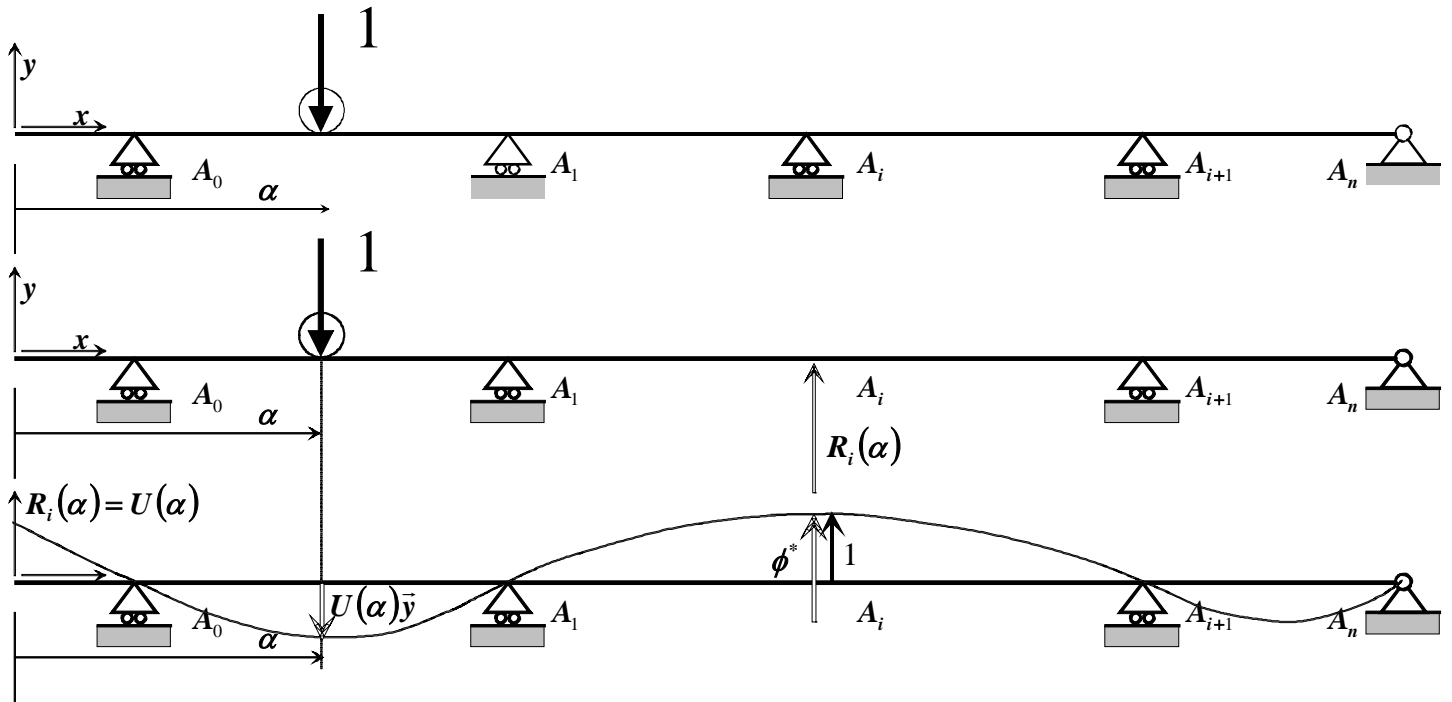
La méthode cinématique (utilisant la Principe de Puissances Virtuelles) permet de tracer l'allure de la ligne d'influence en faisant intervenir la déformabilité de la poutre. Ceci étant, lorsque l'on souhaite connaître les zones de chargement en vue d'obtenir l'extremum de l'effet recherché, il suffit souvent de ne connaître que l'allure de la ligne d'influence, afin de disposer les charges soit dans les parties positives, soit dans les parties négatives.

3.1. DETERMINONS LA FONCTION D'INFLUENCE DE LA REACTION D'APPUI A_i

Sur le système réel, on supprime la liaison, on la remplace par l'action qu'elle exerçait et qui constitue l'inconnue cherchée, de ce fait, elle est à présent une force extérieure. Le chargement est constitué de la force unité qui se déplace et l'action de contact en A_i : $R_i(\alpha)$; notons (S_α) le système des actions de l'état réel.

Pour définir l'état virtuel, on prend le système réel, on supprime la liaison i , mais on applique en A_i une force ϕ^* qui crée les déplacements virtuels, le **champ de déplacement virtuel est choisi de manière à déplacer le point d'application de l'action cherchée d'une valeur unité**. Ici la poutre se déforme. Le chargement est constitué de l'unique force ϕ^* : notons (S^*) le système des actions de l'état virtuel.

Aux appuis, les déplacements dans les 2 états (réel et virtuel) étant nul, le travail des actions aux appuis est nul.



Si on compare les 2 schémas ci-dessus, ils sont identiques, seul le chargement diffère. On applique le théorème de Maxwell-Betti.

Dans l'état réel le déplacement de A_i est nul, la force inconnue ϕ^* ne travaille pas. Dans (S^*) , $U_i = 1$ est imposé.

$$\phi^* \cdot 0 = R_i(\alpha) \cdot 1 + (-\bar{y}) \cdot (U(\alpha)\bar{y}) = 0 ; \quad R_i(\alpha) - U(\alpha) = 0 ; \quad R_i(\alpha) = U(\alpha) ;$$

La ligne d'influence de la réaction d'appui est la courbe obtenue en imposant un déplacement unité vertical en A_i .

Cette réaction d'appui est max. et positive lorsque les charges sont appliquées sur les tronçons où la fonction d'influence est positive (au dessus de l'axe horizontal), c'est-à-dire lorsque les 2 travées qui encadrent cet appui A_i sont surchargées ainsi que les travées alternées qui s'en déduisent (ici uniquement la console).

On obtient une réaction d'appui négative (soulèvement) lorsque les charges sont appliquées sur les travées où la fonction d'influence est négative.

3.2. DETERMINONS LA FONCTION D'INFLUENCE DU MOMENT DE FLEXION

Sur le système réel, on pratique dans la section droite $\Omega(x)$ une coupure (articulation) pour extérioriser le moment de flexion. On applique sur les lèvres de la coupure $+M_z(x)\vec{z}$ sur la section droite x^- et $-M_z(x)\vec{z}$ sur la section droite x^+ . Ces moments agissent comme des actions extérieures. notons (S_α) le système des actions de l'état réel.

Pour définir l'état virtuel, on prend le système réel, on pratique dans la section droite $\Omega(x)$ une coupure (articulation). On applique sur les lèvres de la coupure $+C^*\vec{z}$ sur la section gauche x^- et $-C^*\vec{z}$ sur la section droite x^+ . Ces couples sont choisis pour que le **champ de déplacement virtuel qui en résulte soit tel que la variation de rotation $[\theta^- - \theta^+]\vec{z} = 1.\vec{z} = \vec{z}$ de manière à déplacer le point d'application de l'action cherchée $+M_z(x)\vec{z}$ d'une rotation unité.** Le chargement est constitué des 2 couples : notons (S^*) le système des actions de l'état virtuel.

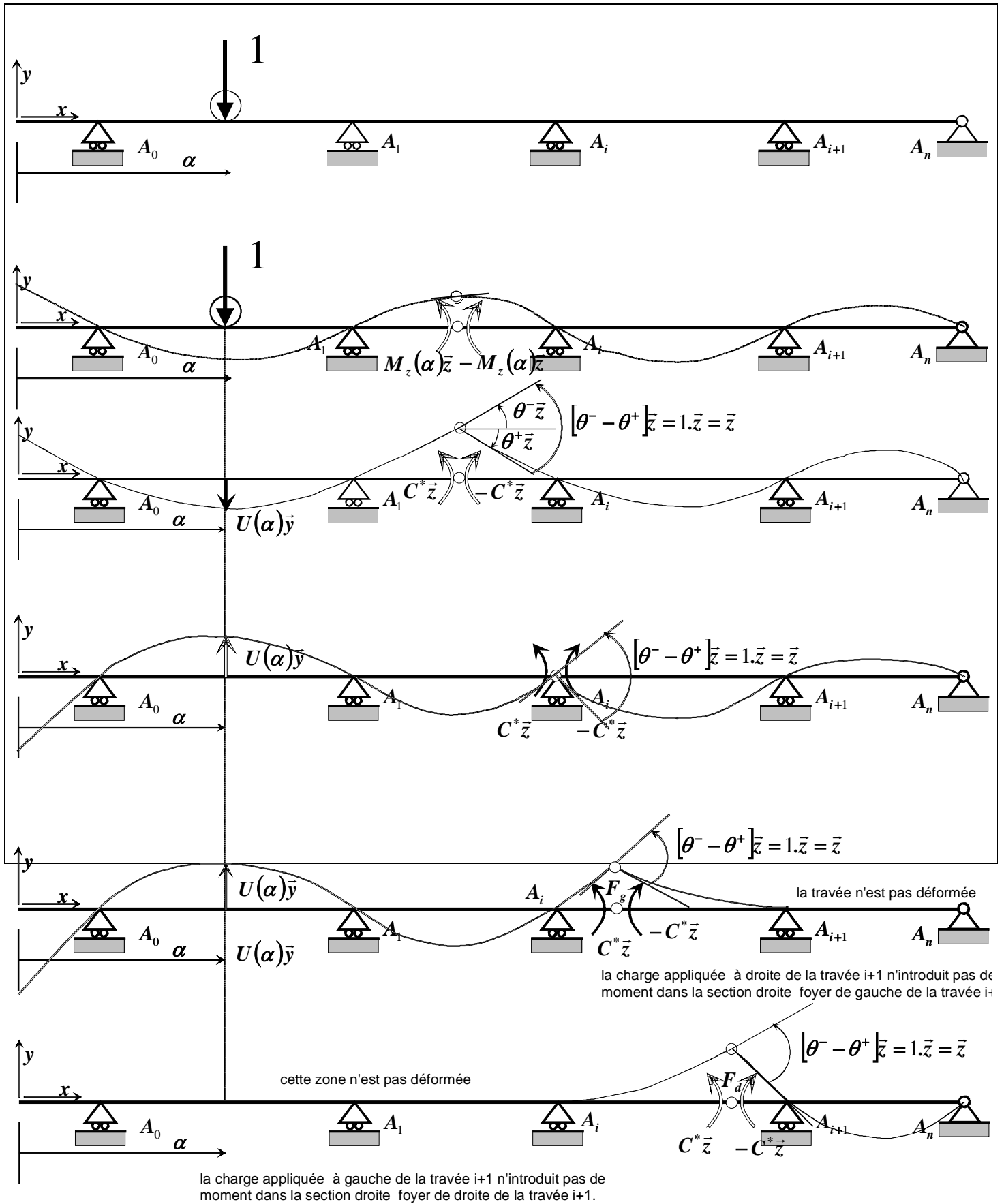
Si on compare les 2 schémas mécaniques, ils sont identiques, seul le chargement diffère. On applique le théorème de Maxwell-Betti.

Dans l'état réel la rotation de $\Omega(x^+)$ est identique à la rotation de $\Omega(x^-)$, la variation de rotation est nulle ; les couples $C^*\vec{z}$ et $-C^*\vec{z}$ ne travaillent pas.

$$M_z(\alpha)\theta^- - M_z(\alpha)\theta^+ - U(\alpha) = 0 ; \quad M_z(\alpha)[\theta^- - \theta^+] - U(\alpha) = 0 ; \text{ or } [\theta^- - \theta^+]\vec{z} = 1.\vec{z} = \vec{z}$$

$$M_z(\alpha).1 - U(\alpha) = 0 ; \quad M_z(\alpha) = U(\alpha)$$

La ligne d'influence du moment de flexion est la courbe obtenue en positionnant une articulation dans la section droite $\Omega(x)$ dans laquelle le moment de flexion est observé et en imposant une variation de rotation unitaire $[\theta^- - \theta^+]\vec{z} = 1.\vec{z} = \vec{z}$ dans cette même section droite.



Moment de flexion en travée

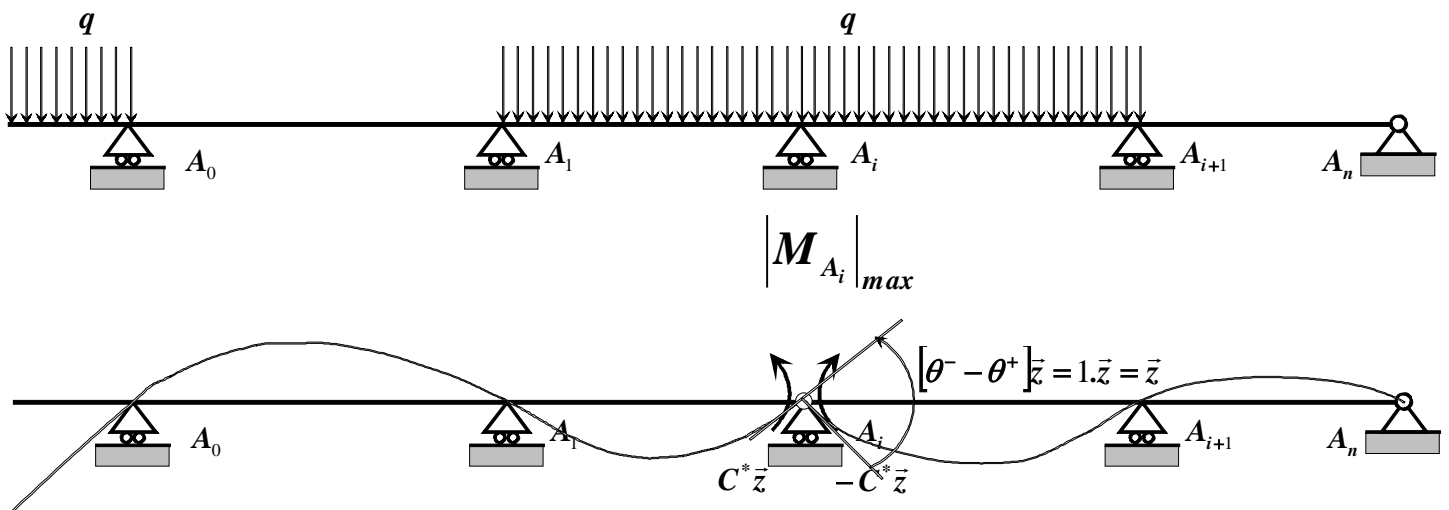
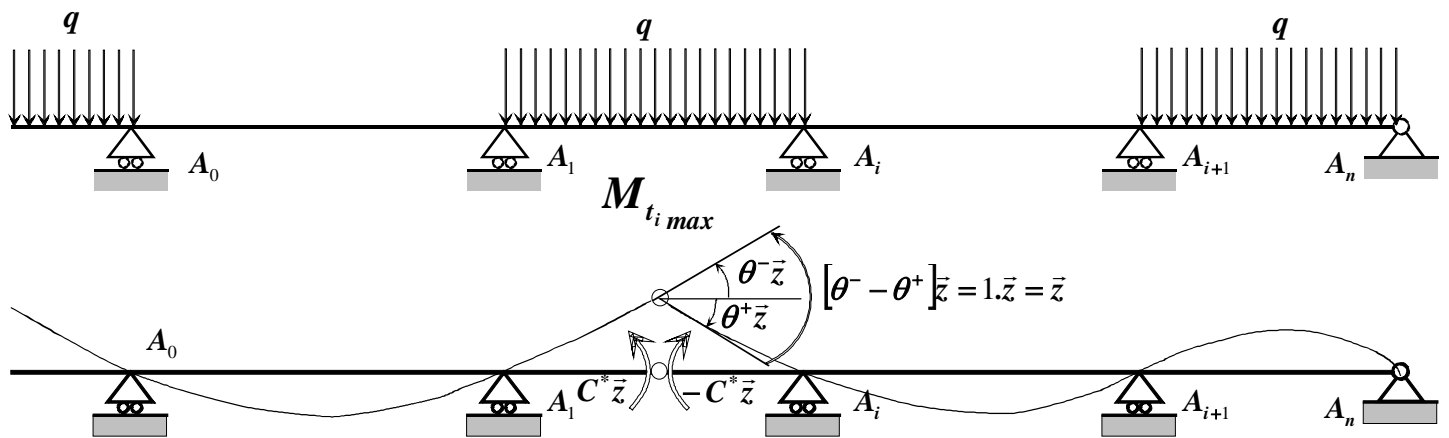
Le moment de flexion positif est max. lorsque les charges sont appliquées sur les tronçons ou la fonction d'influence est positive (au dessus de l'axe horizontal) , c'est-à-dire lorsque la travée étudiée est surchargée ainsi que les travées alternées qui s'en déduisent (ici uniquement la console).

Le moment de flexion négatif sera max. en valeur absolue lorsque les charges sont appliquées sur les tronçons ou la fonction d'influence est négative (au dessous de l'axe horizontal) , c'est-à-dire lorsque les travées qui encadrent la travée étudiée sont surchargées ainsi que les travées alternées qui s'en déduisent.

Dans une travée, il existe deux sections droites particulières nommées les foyers : F_g et F_d . (voir les lignes d'influences ci-dessus)

Moment de flexion sur appui

Le moment de flexion négatif sera max. en valeur absolue lorsque les charges sont appliquées sur les tronçons ou la fonction d'influence est négative (au dessous de l'axe horizontal) , c'est-à-dire lorsque les travées qui encadrent la travée étudiée sont surchargées ainsi que les travées alternées qui s'en déduisent. (ici uniquement la console).



3.3. DETERMINONS LA FONCTION D'INFLUENCE DE L'EFFORT TRANCHANT

Sur le système réel, on pratique dans la section droite $\Omega(x)$ une coupure pour extérioriser l'effort tranchant. On applique sur les lèvres de la coupure $+V_y(x)\bar{y}$ sur la section gauche x^- et $-V_y(x)\bar{y}$ sur la section droite x^+ . Ces forces agissent comme des actions extérieures. Notons (S_α) le système des actions de l'état réel.

Pour définir l'état virtuel, on prend le système réel, on pratique dans la section droite $\Omega(x)$ une coupure. On applique sur les lèvres de la coupure $+\phi^*\bar{y}$ sur la section gauche x^- et $-\phi^*\bar{y}$ sur la section droite x^+ . Ces forces sont choisies pour que le **champ de déplacement virtuel qui en résulte soit tel que la variation de déplacement $[U(x^-) - U(x^+)]\bar{y} = 1 \cdot \bar{y} = \bar{y}$ de manière à déplacer le point d'application de l'action cherchée $+V_y(x)\bar{y}$ d'une valeur unité**. Le chargement est constitué d'un couple de forces : notons (S^*) le système des actions de l'état virtuel.

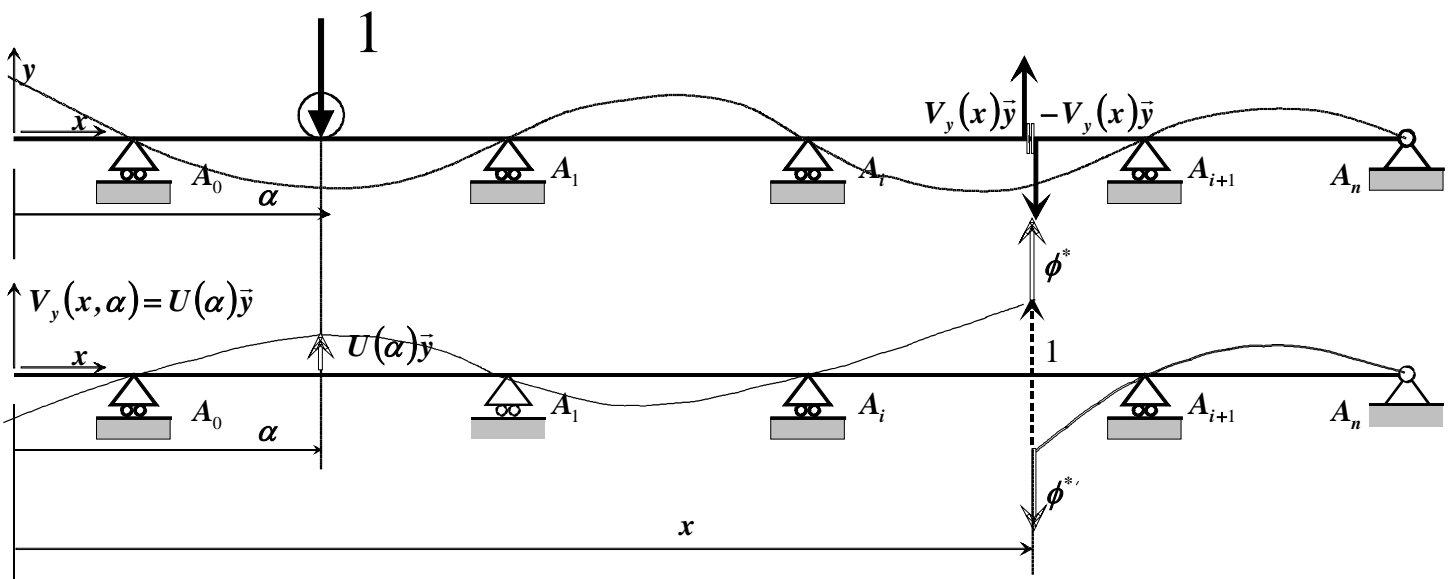
Si on compare les 2 schémas mécaniques, ils sont identiques, seul le chargement diffère. On applique le théorème de Maxwell-Betti.

Dans l'état réel le déplacement vertical de la section droite $\Omega(x^+)$ est identique au déplacement vertical de la section gauche $\Omega(x^-)$, la variation de déplacement des lèvres de la coupure est nulle ; les forces $+\phi^*\bar{y}$ et $-\phi^*\bar{y}$ ne travaillent pas.

$$[V_y(x)\bar{y}]U(x^-)\bar{y} + [-V_y(x)\bar{y}]U(x^+)\bar{y} + (-\bar{y}) \cdot (U(\alpha)\bar{y}) = \phi^* \cdot 0 = 0 ;$$

$$V_y(x) \cdot [U(x^-) - U(x^+)] - U(\alpha) = 0 ; \quad V_y(x) \cdot [1] - U(\alpha) = 0 \quad V_y(x) = U(\alpha)$$

La ligne d'influence de l'effort tranchant est la courbe obtenue en positionnant une coupure dans la section droite $\Omega(x)$ dans laquelle l'effort tranchant est observé et en imposant un déplacement unitaire dans cette même section droite.



L'effort tranchant positif est max. lorsque les charges sont appliquées sur les tronçons où la fonction d'influence est positive (au dessus de l'axe horizontal).

L'effort tranchant négatif sera max. en valeur absolue lorsque les charges sont appliquées sur les tronçons où la fonction d'influence est négative (au dessous de l'axe horizontal).

3.4. DETERMINONS LA FONCTION D'INFLUENCE DE LA FLECHE

On veut déterminer la flèche dans la section droite $\Omega(x)$
 C'est l'application directe du Théorème de Maxwell-Betti.

Sur le système réel, seule est appliquée la force unitaire mobile dans la section droite d'abscisse α . notons (\bar{S}_α) le système des actions de l'état réel. Le déplacement cherché est noté : $U(x, \alpha)$, dans la méthode des coupures, il est noté $\delta_{x\alpha}$

Pour définir l'état virtuel, on prend le système réel, on applique dans la section droite $\Omega(x)$ une force unitaire: notons (\bar{S}^*) le système des actions de l'état virtuel. Dans la section droite $\Omega(\alpha)$ le déplacement $U(\alpha, x)$ dans la méthode des coupures il est noté $\delta_{\alpha x}$.

. On applique le théorème de Maxwell-Betti. $U(\alpha, x) = U(x, \alpha)$ $\delta_{\alpha x} = \delta_{x\alpha}$

La ligne d'influence de la flèche est la courbe obtenue en appliquant une force unité dans la section droite $\Omega(x)$, section dans laquelle la flèche est observé .

La flèche étant la valeur absolue du déplacement.

Cette flèche (déplacement vertical descendant) sera max. lorsque les tronçons de poutre pour lesquels la fonction d'influence est négative (ligne d'influence sous l'axe) seront surchargés.

De même pour la flèche correspondant au soulèvement (déplacement vertical ascendant) sera max. lorsque les tronçons de poutre pour lesquels la fonction d'influence est positive (ligne d'influence au dessus de l'axe) seront surchargés.

