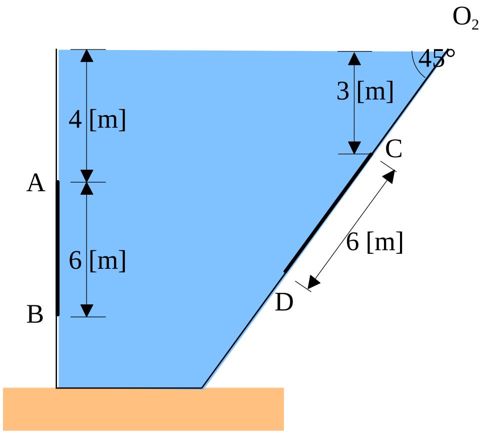
Hydraulique

EXERCICES - CORRIGES

Fluide immobile

I – Cas d'école

I – 1 – Présentation



Considérons un réservoir rempli d'eau dont les caractéristiques géométriques sont données sur le schéma ci-contre.
Déterminez les caractéristiques des forces résultantes dues à l'action de l'eau sur les surfaces rectangulaires de 3 [m] x 6 [m] du schéma ci-contre.

I – 2 – Questions

a) Déterminez les caractéristiques de la force résultante due à l'action de l'eau sur la surface rectangulaire AB de 3 [m] x 6 [m].
b) Déterminez les caractéristiques de la force résultante due à l'action de l'eau sur la surface triangulaire CD, de sommet C de 4 [m] x 6 [m].

I – 3 – Correction

a) Déterminez les caractéristiques de la force résultante due à l'action de l'eau sur la surface rectangulaire AB de 3 [m] x 6 [m].

Utilisons la loi de la statique des fluides : $P_{(z)} = P_0 + \rho \cdot g \cdot z$

Pour un élément de surface dS : $dF = P_{(z)} \cdot dS$.

Pour la surface AB :

$$F_{AB} = \int_A^B dF = \int_4^{10} P_{(z)} \cdot b \cdot dz = b \cdot \int_4^{10} (P_0 + \rho \cdot g \cdot z - P_0) \cdot dz = b \cdot \left[\rho \cdot g \cdot \frac{z^2}{2} \right]_4^{10}$$

$$F_{AB} = 3 \cdot \left[\rho \cdot g \cdot \frac{10^2 - 4^2}{2} \right] = 1236060\,[N]$$

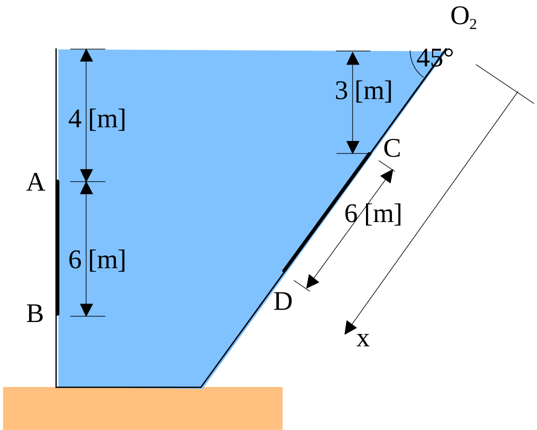
Le point d'application de la force :

$$z_p \cdot F_{AB} = \int_A^B z \cdot dF = \int_4^{10} z \cdot P_{(z)} \cdot b \cdot dz = b \cdot \int_4^{10} (P_0 + \rho \cdot g \cdot z - P_0) \cdot z \cdot dz = b \cdot \left[\rho \cdot g \cdot \frac{z^3}{3} \right]_4^{10}$$

$$z_p = \frac{3 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 \cdot (10^3 - 4^3)}{3 \cdot 1236060} = 7{,}42[m]$$

b) Déterminez les caractéristiques de la force résultante due à l'action de l'eau sur la surface triangulaire CD, de sommet C de 4 [m] x 6 [m].

Pour la surface CD, en raisonnant le long de l'axe (O_2D):



La force F_{CD} est normale à la surface CD.

$$F_{CD} = \int_C^D dF = \int_{4,24}^{10,24} P_{(z)} \cdot b_{(x)} \cdot dx = \int_{4,24}^{10,24} b_{(x)} \cdot (P_0 + \rho \cdot g \cdot z - P_0) \cdot dx$$

$$or \quad b_{(x)} = 0,66 \cdot x - 2,83 \quad pour \quad 4,24 \le x \le 10,24$$

$$F_{CD} = \int_{4,24}^{10,24} (0,66 \cdot x - 2,83) \cdot \rho \cdot g \cdot x \cdot \sin(45) \cdot dx$$

$$F_{CD} = \rho \cdot g \cdot \sin(45) \cdot \left[0,66 \cdot \frac{x^3}{3} - 2,83 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{4,24}^{10,24} = 687911 [N]$$

Le point d'application de la force.

$$x_p \cdot F_{CD} = \int_C^D x \cdot dF = \int_{4,24}^{10,24} x \cdot P_{(z)} \cdot b_{(x)} \cdot dx = \int_{4,24}^{10,24} x \cdot b_{(x)} \cdot (P_0 + \rho \cdot g \cdot z - P_0) \cdot dx$$

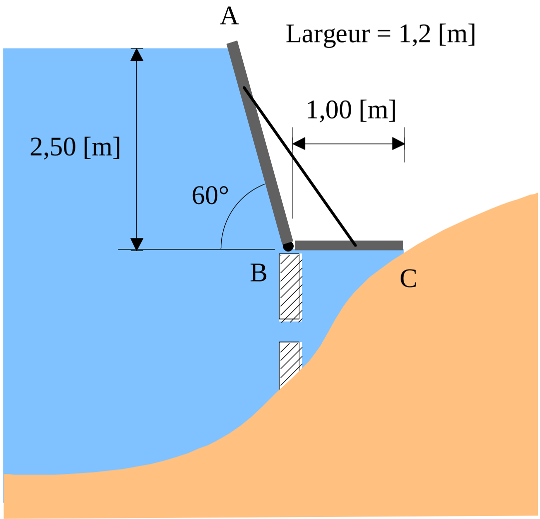
$$or \quad b_{(x)} = 0,66 \cdot x - 2,83 \quad pour \quad 4,24 \le x \le 10,24$$

$$F_{CD} = \int_{4,24}^{10,24} (0,66 \cdot x - 2,83) \cdot \rho \cdot g \cdot x^2 \cdot \sin(45) \cdot dx$$

$$x_p = \frac{\rho \cdot g \cdot \sin(45)}{F_{CD}} \cdot \left[0,66 \cdot \frac{x^4}{4} - 2,83 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_{4,24}^{10,24} = 8,48 [m]$$

II – Porte

II – 1 – Présentation



Une porte ABC pivote autour de B et a une largeur de 1,2 [m].

II – 2 – Questions

En supposant le poids propre de la porte négligeable, déterminez le moment non compensé dû à l'action de l'eau sur la porte.

II – 3 – Correction

En supposant le poids propre de la porte négligeable, déterminez le moment non compensé dû à l'action de l'eau sur la porte.

Déterminons l'action de l'eau sur la partie BC.

La force qui s'exerce sur la partie BC vaut : $F_{BC} = P_{BC} \cdot S_{BC} = \rho \cdot g \cdot 2{,}5 \cdot 1 \cdot 1{,}2 = 29430[N]$.

Cette force sera modélise par une force ponctuelle appliquée au milieu de la partie BC.

Déterminons l'action de l'eau sur la partie AB.

La force qui s'exerce sur la partie AB vaut :

$$F_{AB} = \int_0^{2,88} dF = \int_0^{2,88} P_{(z)} \cdot dS = \int_0^{2,88} \rho \cdot g \cdot z \cdot b \cdot dx = \int_0^{2,88} \rho \cdot g \cdot x \cdot \sin(60) \cdot b \cdot dx = \rho \cdot g \cdot b \cdot \sin(60) \cdot \int_0^{2,88} x \cdot dx$$

$$F_{AB} = \rho \cdot g \cdot b \cdot \sin(60) \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2,88} = 42280[N]$$

Cette force sera modélise par une force ponctuelle appliquée à la côte :

$$x_p \cdot F_{AB} = \int_0^{2,88} x \cdot dF = \int_0^{2,88} x \cdot P_{(z)} \cdot dS = \int_0^{2,88} x \cdot \rho \cdot g \cdot z \cdot b \cdot dx = \int_0^{2,88} \rho \cdot g \cdot x^2 \cdot \sin(60) \cdot b \cdot dx = \rho \cdot g \cdot b \cdot \sin(60) \cdot \int_0^{2,88} x^2 \cdot dx$$

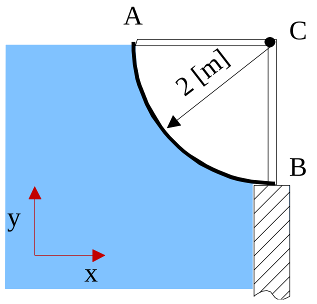
$$x_p = \frac{\rho \cdot g \cdot b \cdot \sin(60)}{F_{AB}} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2,88} = 1{,}92[m]$$

Un calcul du moment par rapport au point B nous permet de déterminer le moment non compensé :

$$M_{/B} = M_{BC/B} + M_{AB/B} = 0{,}5 \cdot 29430 - 0{,}96 \cdot 42280 = -25873[m \cdot N]$$

III – Surface courbe

III – 1 – Présentation



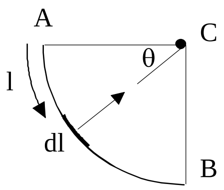
Considérons la surface courbe ci-contre.

III – 2 – Questions

Déterminez et placez les composantes de la force due à l'action de l'eau par mètre de longueur sur l'axe de rotation C.

III – 3 – Correction

Déterminez et placez les composantes de la force due à l'action de l'eau par mètre de longueur sur l'axe de rotation C.



Nous avons les relations suivantes :

$$l = R \cdot \theta$$

$$dl = R \cdot d\theta$$

$$z = R \cdot \sin\theta$$

$$d\vec{F} = dF \cdot \cos\theta \cdot \vec{i} + dF \cdot \sin\theta \cdot \vec{j}$$

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_0^L \rho \cdot g \cdot z \cdot b \cdot dl \cdot \left(\cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j}\right)$$

$$\vec{F} = \rho \cdot g \cdot b \cdot \int_0^L R \cdot \sin\theta \cdot R \cdot d\theta \cdot \left(\cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j}\right)$$

$$\vec{F} = \left| \begin{array}{l} \rho \cdot g \cdot b \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot \sin\theta \cdot R \cdot d\theta \cdot \cos\theta = \rho \cdot g \cdot b \cdot R^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta \\ \rho \cdot g \cdot b \cdot \int_0^L R \cdot \sin\theta \cdot R \cdot d\theta \cdot \sin\theta = \rho \cdot g \cdot b \cdot R^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cdot d\theta \end{array} \right.$$

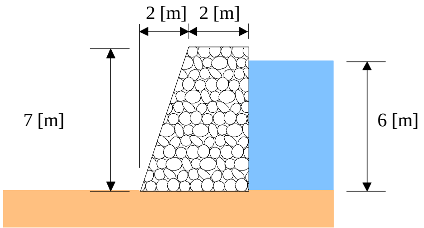
$$\vec{F} = \left| \begin{array}{l} \rho \cdot g \cdot b \cdot R^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta = \rho \cdot g \cdot b \cdot R^2 \cdot \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 19620[N] \\ \rho \cdot g \cdot b \cdot R^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cdot d\theta = \rho \cdot g \cdot b \cdot R^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) \cdot d\theta = \rho \cdot g \cdot b \cdot R^2 \cdot \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 30819[N] \end{array} \right.$$

$$\left\|\vec{F}\right\| = \sqrt{19620^2 + 30819^2} = 36534[N]$$

Comme tous les éléments dF sont normaux à la surface (un cylindre), la résultante passe donc par l'axe de rotation C.

IV – Barrage

IV – 1 – Présentation



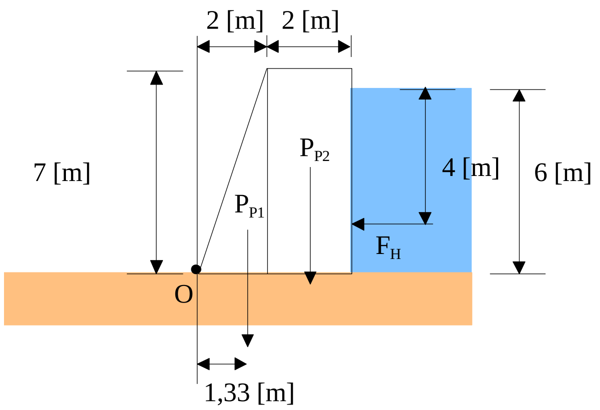
En barrage en béton retient de l'eau sur une hauteur de 6 [m].
Le poids volumique du béton est de 23,5 [kN/m^3].
Le sol des fondations est imperméable.

IV – 2 – Questions

Déterminez le coefficient de sécurité d'anti-glissement, le coefficient d'anti-basculement et la pression à la base du barrage.
Le coefficient de frottement entre la base du barrage et le sol des fondations vaut 0,48.

IV – 3 – Réponses

Déterminez le coefficient de sécurité d'anti-glissement, le coefficient d'anti-basculement et la pression à la base du barrage.
Le coefficient de frottement entre la base du barrage et le sol des fondations vaut 0,48.



Poids propre du barrage :

$$P_{P1} = \gamma_b \cdot V_1 = 23{,}5 \cdot \frac{2 \cdot 7 \cdot 1}{2} = 164{,}5[kN]$$

$$\textit{appliquée à } 1{,}33[m] \textit{ de } O$$

$$P_{P2} = \gamma_b \cdot V_2 = 23{,}5 \cdot 2 \cdot 7 = 329[kN]$$

$$\textit{appliquée à } 3[m] \textit{ de } O$$

Force hydraulique :

$$F = \int dF = \int \rho \cdot g \cdot z \cdot dz = \rho \cdot g \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^6 = 176580[N]$$

Appliquée à

$$z_p = \frac{\int z \cdot dF}{F} = \frac{\int z \cdot \rho \cdot g \cdot z \cdot dz}{F} = \frac{\rho \cdot g}{F} \cdot \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^6 = 4[m]$$

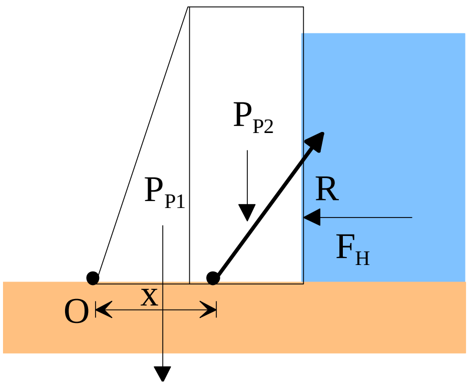
Condition de non glissement :

$$C_{ng} = \frac{\alpha \cdot P_p}{F_H} = \frac{0{,}48 \cdot (164{,}5 + 329)}{176{,}58} = 1{,}34$$

Condition de non basculement :

$$C_{nb} = \frac{1{,}33 \cdot P_{P1} + 3 \cdot P_{P2}}{2 \cdot F_H} = 3{,}42$$

Calcul de la résultante à la base du barrage :



Un bilan des forces nous donne :

$$\vec{R}\left|\begin{matrix} F_H \\ P_{P1}+P_{P2}\end{matrix}\right. \quad et \quad \left\|\vec{R}\right\| = \sqrt{493{,}5^2+176{,}6^2} = 524{,}14[kN]$$

Afin de déterminer le point d'application de cette résultante, nous pouvons utiliser le moment par rapport au point 0.

$$M_{P_P/O}+M_{R_V/O}=0$$

$$-P_{P1}\cdot 1{,}33-P_{P2}\cdot 3+R_V\cdot x+R_H\cdot 2=0$$

$$x=\frac{P_{P1}\cdot 1{,}33+P_{P2}\cdot 3-R_H\cdot 2}{R_V}=\frac{164{,}5\cdot 1{,}33+329\cdot 3-176{,}6\cdot 2}{493{,}5}$$

$$x=1{,}73[m]$$

Nous pouvons calculer l'excentricité :

$$e=\frac{4}{2}-1{,}73=0{,}27[m]$$

$$P=\frac{F}{A}\pm\frac{My\cdot x}{Iy}\pm\frac{Mz\cdot y}{Ix}$$

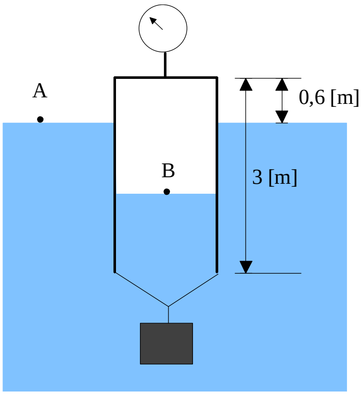
$$P=\frac{493}{4}\pm\frac{493\cdot 0{,}27\cdot 2}{\frac{1\cdot 4^3}{12}}$$

$$En\ A: P=173{,}5[kPa]$$

$$En\ B: P=73{,}5[kPa]$$

V – Ludion

V – 1 – Présentation



Un réservoir de 1 [m] de diamètre et de masse 90 [kg] est clos à son extrémité supérieure. L'autre extrémité est ouverte et descendue dans l'eau à l'aide d'un bloc d'acier de masse volumique 7840 [kg.m^{-3}] (voir figure ci-contre).
Nous supposerons que l'air emprisonné dans le réservoir est comprimé à température constante.

V – 2 – Questions

Déterminez :

a) la lecture d'un manomètre donnant la pression dans le réservoir ;
b) le volume du bloc d'acier.

V – 3 – Correction

Déterminez :

a) la lecture d'un manomètre donnant la pression dans le réservoir ;
b) le volume du bloc d'acier.

Appliquons la relation de l'hydrostatique entre le point A et le point B.

$$\frac{P_A}{\rho \cdot g} + z_A = \frac{P_B}{\rho \cdot g} + z_B$$

$$P_B - P_A = \rho \cdot g \cdot (z_A - z_B)$$

Le gaz a été comprimé de manière isotherme.

$$P_0 \cdot V_0 = P_B \cdot V_B = P_B \cdot (h + 0{,}6) \cdot S$$

$$P_B = \frac{P_0 \cdot V_0}{(h+0{,}6) \cdot S} = \frac{P_A \cdot 3 \cdot S}{(h+0{,}6) \cdot S} = \frac{P_A \cdot 3}{(h+0{,}6)}$$

Nous obtenons :

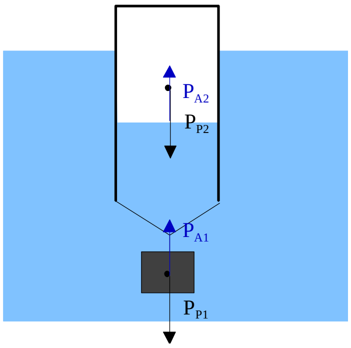
$$P_B - P_A = \rho \cdot g \cdot (z_A - z_B) \quad et \quad P_B = \frac{P_A \cdot 3}{h+0{,}6}$$

$$P_A \cdot \left(\frac{3}{h+0{,}6} - 1 \right) = \rho \cdot g \cdot (z_A - z_B) = \rho \cdot g \cdot h \quad avec \quad \left| \begin{array}{l} P_A = 100000[Pa] \\ \rho = 1000\left[\dfrac{kg}{m^3}\right] \end{array} \right.$$

$$Il\ vient\ h = 1{,}923[m]$$

$$La\ pression\ lue\ au\ manomètre\ vaut : P_B - P_A = \rho \cdot g \cdot h = 0{,}18[bar]$$

Afin de trouver le volume du poids accrocher à notre ludion, faisons un bilan des forces appliquées au système.



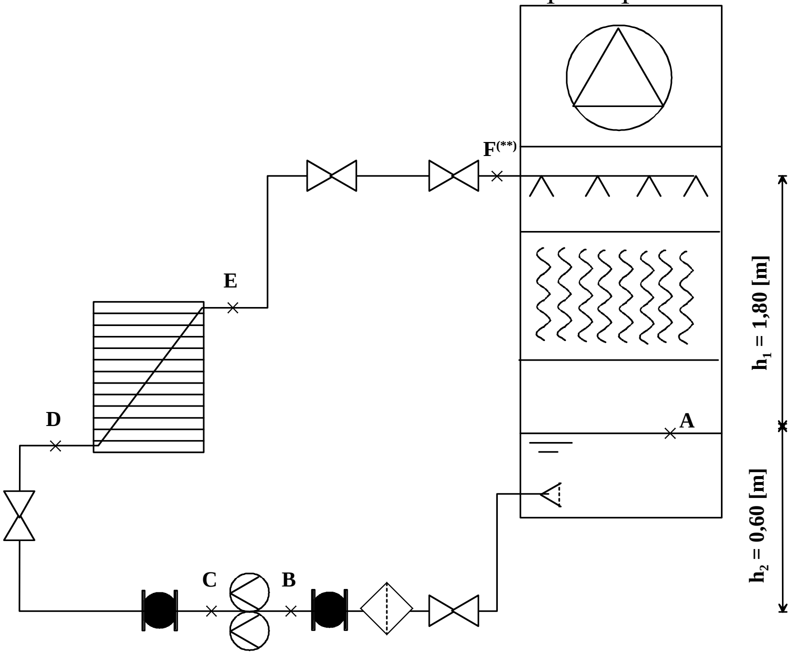
$$P_{P1} = \rho_S \cdot V \cdot g \quad P_{A1} = \rho_e \cdot V \cdot g$$
$$P_{P2} = m \cdot g \vdots \quad P_{A2} = \rho_e \cdot S \cdot h \cdot g$$
$$P_{A1} + P_{A2} = P_{P1} + P_{P2}$$
$$\rho_e \cdot V \cdot g + \rho_e \cdot S \cdot h \cdot g = \rho_S \cdot V \cdot g + m \cdot g$$
$$V \cdot (\rho_e - \rho_S) = m - \rho_e \cdot S \cdot h$$
$$V = \frac{m - \rho_e \cdot S \cdot h}{\rho_e - \rho_S} = \frac{90 - 1000 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{4} \cdot 1{,}923}{1000 - 7840} = 0{,}207 [m^3]$$
$$\textit{Ce qui représente une masse de} : m = \rho \cdot V = 1622 [kg]$$

Machines hydrauliques

I – Tour de refroidissement

I – 1 – Présentation

Nous vous proposons d'étudier le circuit hydraulique entre un échangeur de chaleur et une tour de refroidissement.
Le circuit dissipatif de la boucle d'eau est constitué par un échangeur dont le secondaire est raccordé à une tour de refroidissement ouverte.
Une pompe, ainsi que des équipements complémentaires (filtres vannes, etc.) sont installés sur le circuit d'eau conformément au schéma de principe ci-dessous.



Tronçon	Pertes de charge [mCE]
AB	0,12 (tuyauterie) + 1,89 (*) (filtre)
CD	0,20
Echangeur	3,89
EF	0,32

(*)Valeur pour un filtre propre
(**)Pression nécessaire au point F : 30 [kPa]

Des calculs préliminaires et les données du constructeur ont permis de déterminer les pertes de charge des différents tronçons. On souhaite vérifier la pertinence du choix de la pompe, de préciser le modèle choisi et de s'assurer de son bon fonctionnement vis à vis du phénomène de cavitation.

Hypothèses à considérer

Les pertes thermiques dans les tuyauteries sont négligées.
La surface du plan d'eau de la tour est suffisamment grande pour considérer la vitesse de l'eau à la surface comme nulle.

Données de calcul

Puissance à évacuer :	560 [kW]
Régime d'eau Entrée / Sortie de tour :	32/27 [°C]
Tuyauterie :	139,7 – 4 [mm]
Pertes de charge :	Voir schéma ci-dessus
Données géométriques :	Voir schéma ci-dessus
Accélération terrestre :	g = 10 [m.s^{-2}]
Pression de vapeur saturante à 27 [°C]	Pvs = 3564 [Pa] (en pression absolue)

I – 2 – Questions

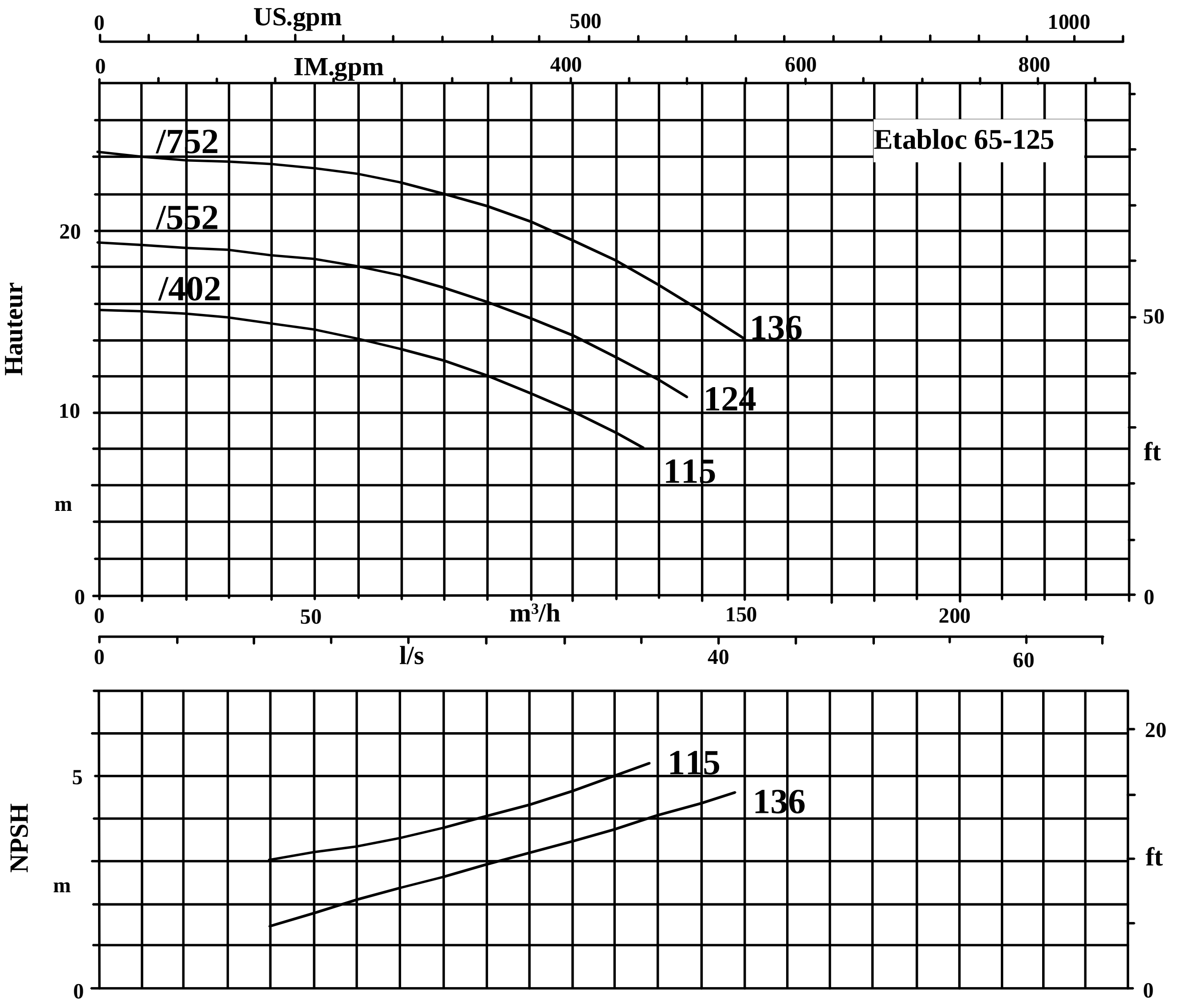
a) Dimensionnement la pompe :

- calculez le débit volumique ainsi que la vitesse de l'eau dans le circuit ;
- en appliquant le théorème de Bernoulli, calculez la hauteur manométrique de la pompe sachant que la pression nécessaire en entrée de tour est de 30 [kPa] (condition de bonne pulvérisation) ;
- déterminez à l'aide du courbier de pompe joint ci-dessous, le modèle qu'il faut choisir pour répondre aux caractéristiques du réseau. Repérer le point de fonctionnement.

b) Comportement du circulateur vis à vis du phénomène de cavitation :

- déterminez la pression à l'aspiration de la pompe ;
- déterminez le NPSH disponible et conclure sur le risque de cavitation ;
- quels facteurs peuvent contribuer à provoquer ce phénomène ?

Extrait de la documentation KSB **Etabloc 65-125 2900 tr/min**



I – 3 – Correction

a) Dimensionnement la pompe :

- calculez le débit volumique ainsi que la vitesse de l'eau dans le circuit ;

La puissance à évacuer est de 560 [kW] pour un régime d'eau de 32/27 [°C].

$P = q_m \cdot c_p \cdot (\theta_e - \theta_s)$ soit $q_m = \dfrac{P}{c_p \cdot (\theta_e - \theta_s)} = \dfrac{560000}{4180 \cdot (32-27)} = 26{,}79 [kg/s]$

Nous prendrons pour masse volumique de l'eau la valeur donnée dans le formulaire :

$\rho = 996 \left[\dfrac{kg}{m^3}\right]$.

$$q_v = \frac{q_m}{\rho} = \frac{26{,}76}{996} 0{,}0269 \left[\frac{m^3}{s}\right] = 96{,}8 \left[\frac{m^3}{h}\right]$$

$$v = \frac{qv}{S} = \frac{qv}{\pi \cdot \frac{d^2}{4}} = \frac{0{,}0269}{\pi \cdot \frac{0{,}1317^2}{4}} = 1{,}975 \left[\frac{m}{s}\right]$$

- en appliquant le théorème de Bernoulli, calculez la hauteur manométrique de la pompe sachant que la pression nécessaire en entrée de tour est de 30 [kPa] (condition de bonne pulvérisation) ;

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les points A et F. La côte d'altitude est prise au niveau de la pompe.

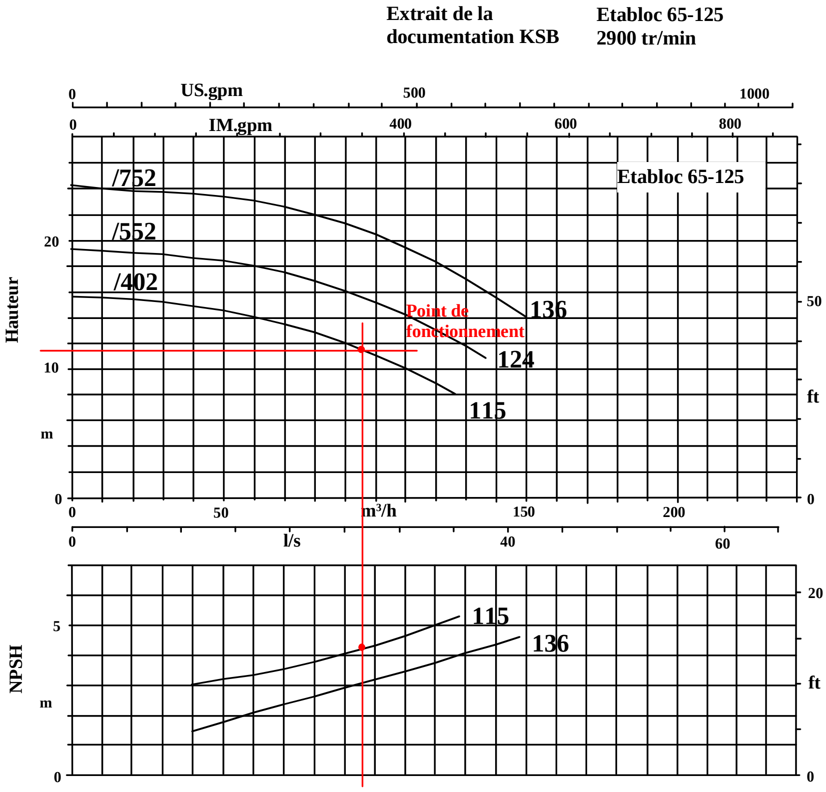
$$\left(\frac{P}{\varpi} + z + \frac{v^2}{2g}\right)_A - \Delta Pdc + Hmp = \left(\frac{P}{\varpi} + z + \frac{v^2}{2g}\right)_F$$

$$Hmp = \left(\frac{P}{\varpi} + z + \frac{v^2}{2g}\right)_F + \Delta Pdc - \left(\frac{P}{\varpi} + z + \frac{v^2}{2g}\right)_A$$

$$Hmp = \left(\frac{0}{\varpi} + 0{,}6 + \frac{0^2}{2g}\right) + (0{,}12 + 1{,}89 + 0{,}2 + 3{,}89 + 0{,}32) - \left(\frac{30000}{\varpi} + 2{,}4 + \frac{1{,}975^2}{2g}\right)$$

$$Hmp = 1{,}36 [mCE]$$

- déterminez à l'aide du courbier de pompe joint ci-dessous, le modèle qu'il faut choisir pour répondre aux caractéristiques du réseau. Repérer le point de fonctionnement.



Modèle 402 avec un diamètre de roue de 115 [mm].

b) Comportement du circulateur vis à vis du phénomène de cavitation :

- déterminez la pression à l'aspiration de la pompe ;

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les points A et B. La côte d'altitude est prise au niveau de la pompe.

$$\left(\frac{P}{\varpi}+z+\frac{v^2}{2g}\right)_A-\Delta PdAB=\left(\frac{P}{\varpi}+z+\frac{v^2}{2g}\right)_B$$

$$\left(\frac{0}{996\cdot10}+0{,}6+\frac{0^2}{2\cdot10}\right)-(0{,}12+1{,}89)=\left(\frac{P}{996\cdot10}+0+\frac{1{,}975^2}{2\cdot10}\right)$$

$$\frac{P_B}{\varpi}=-1{,}6066[mCE]$$

Nous sommes en légère dépression.
Si nous raisonnons en Pression absolue, nous obtenons une pression de :

$$P_B=\frac{101325}{10\cdot998}-1{,}606=8{,}57[mCE]$$

La NPSH disponible vaut, d'après la formule donnée dans le sujet :

$$NPSH_{disponible}=P_{aspiration}-P_{vapeursaturante}=8{,}57-\frac{3567}{996\cdot10}=8{,}21[mCE]$$

- déterminez le NPSH disponible et conclure sur le risque de cavitation ;

La lecture du diagramme nous donne une NPSH de 4,3 [mCE].
Le risque pour qu'il y ait cavitation dans notre cas est négligeable.

- quels facteurs peuvent contribuer à provoquer ce phénomène ?

Les facteurs qui peuvent augmenter ce risque sont :

- un encrassement du filtre (augmentation de la perte de charge et donc diminution de la pression à l'aspiration) – risque probable ;
- une augmentation de la température de l'eau (augmentation de la pression de vaporisation de l'eau)- risque limité compte tenue de la régulation ;
- une baisse du niveau d'eau (et donc de la pression statique) – risque limité par la présence d'une sécurité manque d'eau sur la tour de refroidissement.

II – Etude d'une chaufferie

II – 1 – Présentation

La chaufferie étudiée est constituée d'une seule chaudière et d'un seul réseau régulé.
Le régime de fonctionnement est 80/60[°C] et permet d'assurer des besoins en chaleur de 116.25 [kW].

Les caractéristiques hydrauliques sont les suivantes :

- la perte de charge dans le tronçon de recyclage AD est supposée nulle ;
- $\Delta H_{D - \text{chaudière} - A}$ = 3,9 [mCE] sous 5 [m^3/h] ;
- $\Delta H_{B - P - \text{réseau} - D}$ = 2 [mCE] sous 5 [m^3/h] ;
- $\Delta H_{\text{vanne\_3\_voies}}$ = 1 [mCE] sous 5 [m^3/h] ;
- ΔH_{AB} = 0,3 [mCE] sous 5 [m^3/h] ;
- ΔH_{CD} = 0,3 [mCE] sous 5 [m^3/h].

La densité du fluide caloporteur est de 1 et sa chaleur massique vaut 4185 [J/(kg K)].

II – 2 – Questions

La chaufferie étudiée est constituée d'une seule chaudière et d'un seul réseau régulé.

a) – Etude du schéma de principe

Représentez sur le schéma le sens de circulation des fluides. Vous utiliserez des couleurs normalisées.

b) Détermination de la pompe de recyclage

Le rôle de cette pompe est d'assurer le débit minimum d'irrigation dans la chaudière. Cette pompe n'est nécessaire que lorsque la vanne trois voies du réseau part en fermeture et que le débit de retour du réseau dans la chaudière est nul.

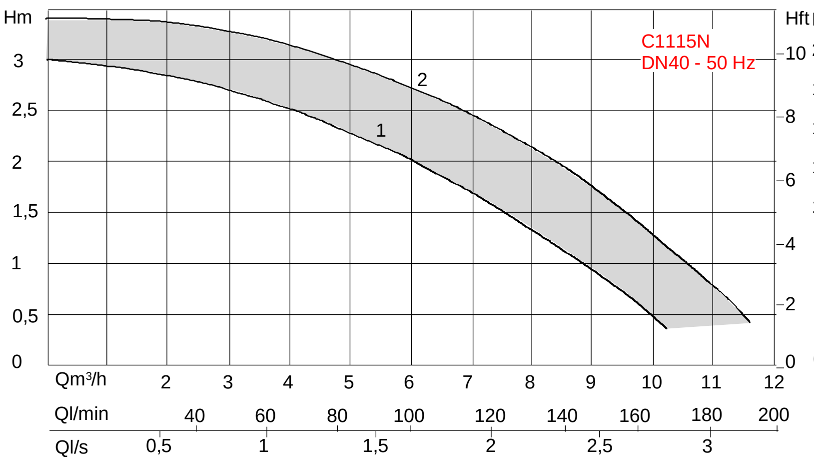
Réalisez un schéma afin de montrer quels éléments de l'installation doivent être 'irrigués' par cette pompe.
Sélectionnez un modèle de pompe de recyclage sachant que celle-ci doit permettre la circulation d'un débit minimum de 4 [m^3/h]. Vous utiliserez le document réponse n°1 en y représentant la courbe de réseau ainsi que le point de fonctionnement.

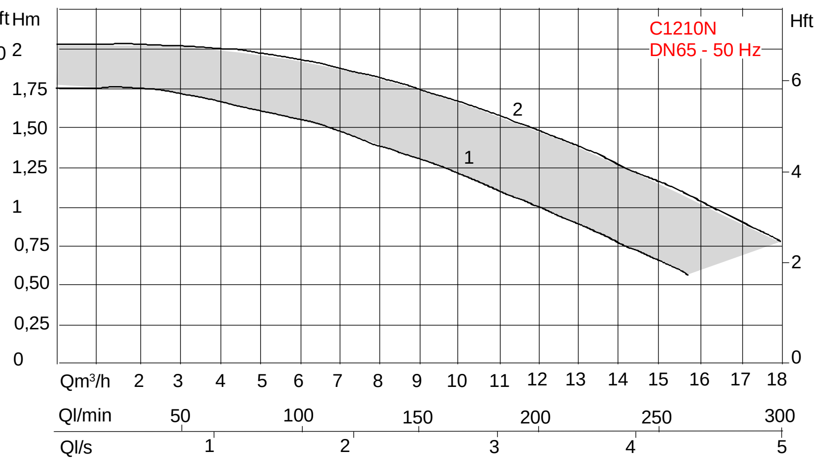
c)Détermination de la pompe du circuit

Le rôle de cette pompe est d'assurer le débit dans le réseau et la chaudière. Cette pompe est dimensionnée dans le cas où la vanne trois voies du réseau est ouverte et que le débit y est maximal (c'est à dire dans les conditions nominales).
Réalisez un schéma afin de montrer quels éléments de l'installation doivent être 'irrigués' par cette pompe.
Sélectionnez un modèle de pompe permettant au réseau d'être correctement 'irrigué'. Vous utiliserez le document réponse n°2 en y représentant la courbe de réseau ainsi que le point de fonctionnement.

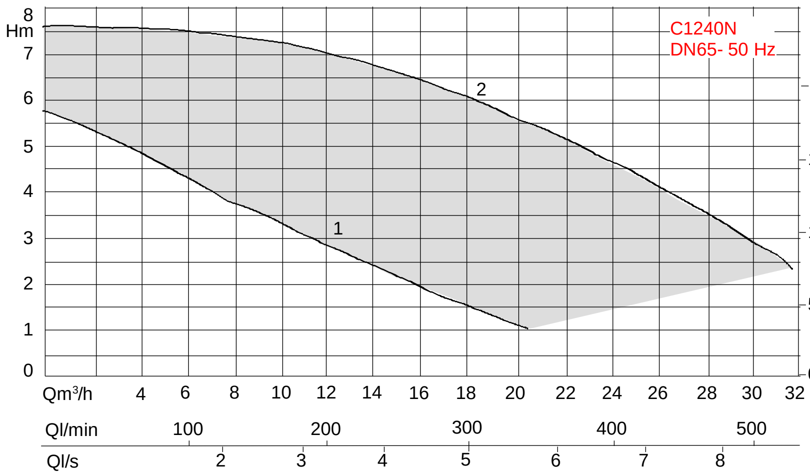
d) Détermination de la pompe du circuit

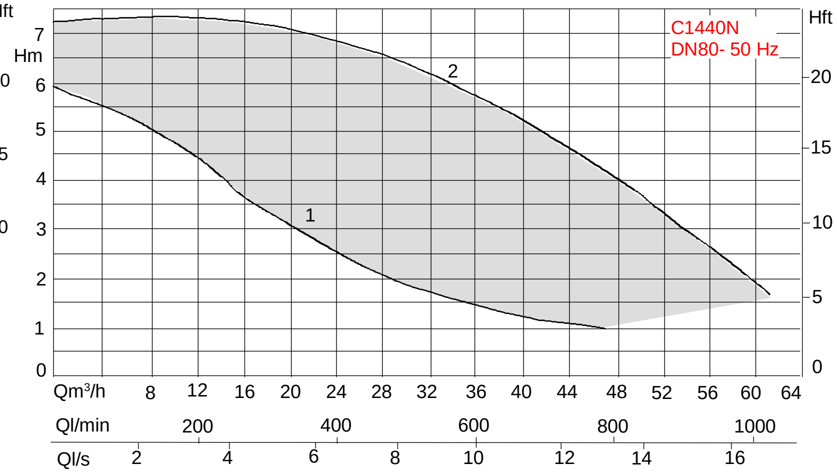
Lors de la mise en fonctionnement de l'installation, il existe une configuration qui fait que les deux pompes précédentes sont en fonctionnement en même temps alors que la vanne trois voies est grande ouverte.
Que se passe t'il dans ce cas là ?





Document réponse n°2



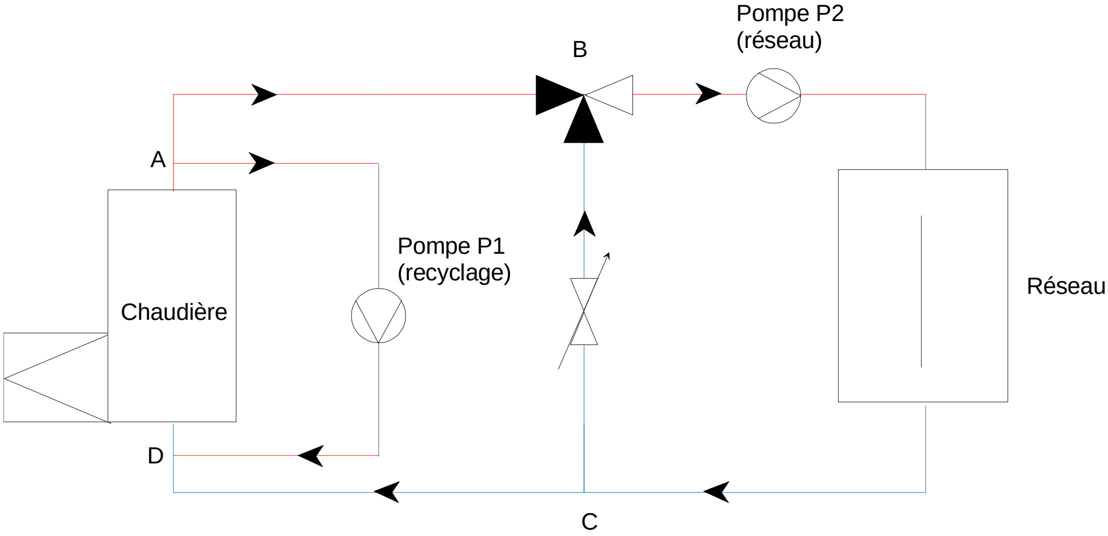


II – 3 – Réponses

La chaufferie étudiée est constituée d'une seule chaudière et d'un seul réseau régulé.

a) – Etude du schéma de principe

Représentez sur le schéma le sens de circulation des fluides. Vous utiliserez des couleurs normalisées.

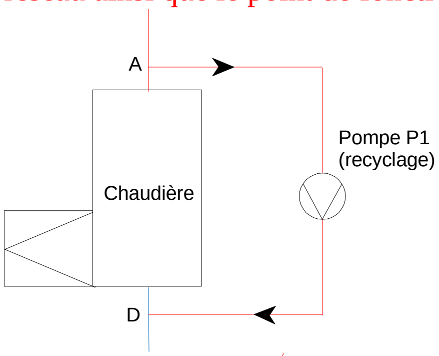


b) Détermination de la pompe de recyclage

Le rôle de cette pompe est d'assurer le débit minimum d'irrigation dans la chaudière. Cette pompe n'est nécessaire que lorsque la vanne trois voies du réseau part en fermeture et que le débit de retour du réseau dans la chaudière est nul.

Réalisez un schéma afin de montrer quels éléments de l'installation doivent être 'irrigués' par cette pompe.

Sélectionnez un modèle de pompe de recyclage sachant que celle-ci doit permettre la circulation d'un débit minimum de 4 [m^3/h]. Vous utiliserez le document réponse n°1 en y représentant la courbe de réseau ainsi que le point de fonctionnement.

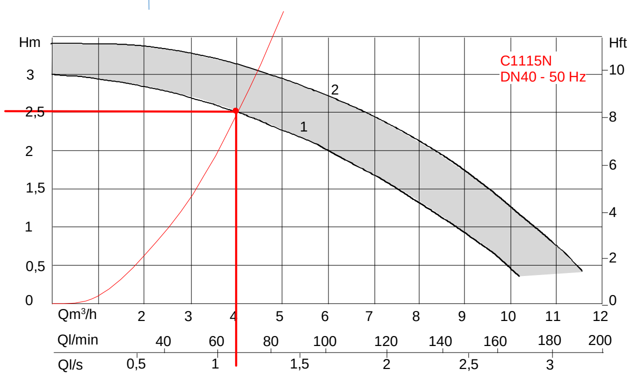


La pompe de recyclage n'est supposée assurer qu'un débit de 4 [m^3/h] dans la chaudière.
Sachant que les caractéristiques hydrauliques de la chaudière sont ΔX D – chaudière - A = 3,9 [mCE] sous 5 [m^3/h], nous pouvons en déduire une courbe de réseau.
Par le calcul, nous avons :

$\Delta X = k \cdot Qv^2$

$3{,}9 = k \cdot 5^2 \quad \rightarrow k = 0{,}156$

Pour un débit de 4 [m^3/h], cela nous donnerait une perte de charge $\Delta X = 0{,}156 \cdot 4^2 = 2{,}49$ [mCE].



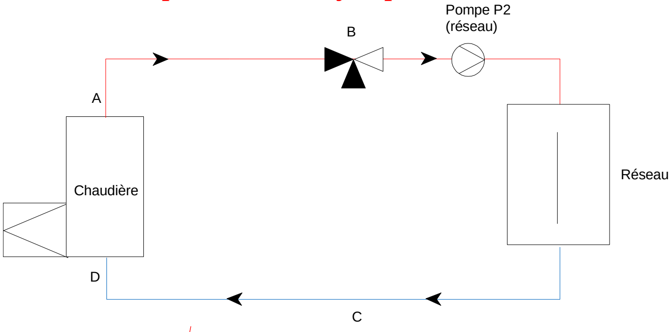
Des deux courbes proposées, il s'agit de celle qui convient le mieux.

c)Détermination de la pompe du circuit

Le rôle de cette pompe est d'assurer le débit dans le réseau et la chaudière. Cette pompe est dimensionnée dans le cas où la vanne trois voies du réseau est ouverte et que le débit y est maximal (c'est à dire dans les conditions nominales).

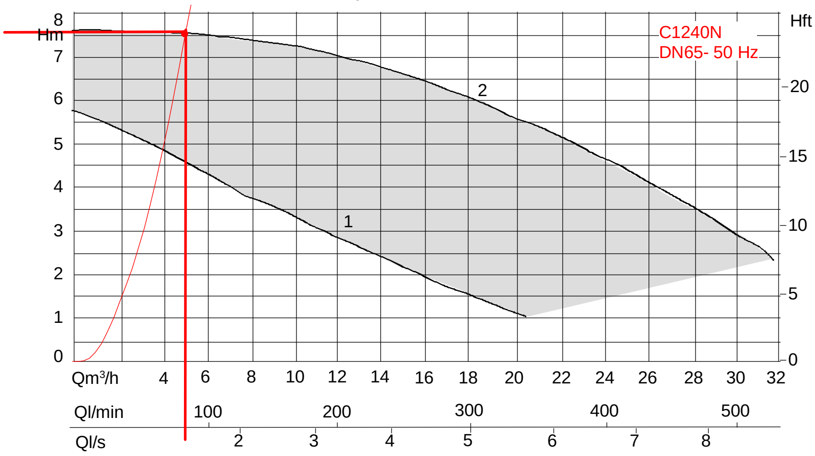
Réalisez un schéma afin de montrer quels éléments de l'installation doivent être 'irrigués' par cette pompe.

Sélectionnez un modèle de pompe permettant au réseau d'être correctement 'irrigué'. Vous utiliserez le document réponse n°2 en y représentant la courbe de réseau ainsi que le point de fonctionnement.



La puissance de l'installation est de 116,25 [kW] ce qui nous donne un débit :
qm = P /(4185 * 20) = 1,388 [kg/s] soit 5000 [kg / h] soit 5 [m^3/h].

Les pertes de charge sont les suivantes :
$\Delta X = 3{,}9 + 2 + 1 + 0{,}3 + 0{,}3 = 7{,}5$ [mCE] pour un débit de 5 [m^3/h].



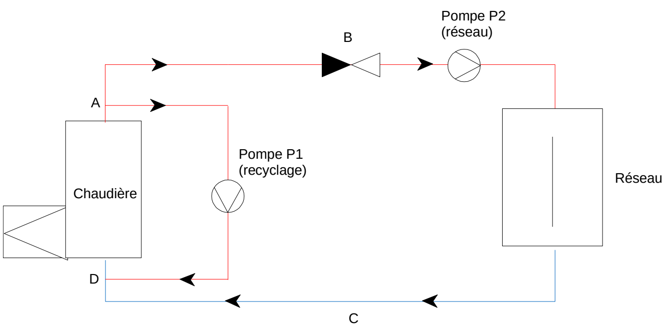
Des deux courbes proposées, une seule convient.

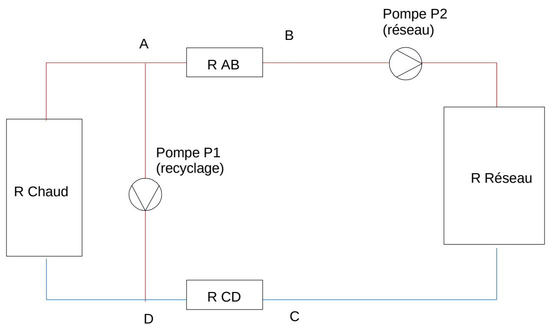
d) Détermination de la pompe du circuit

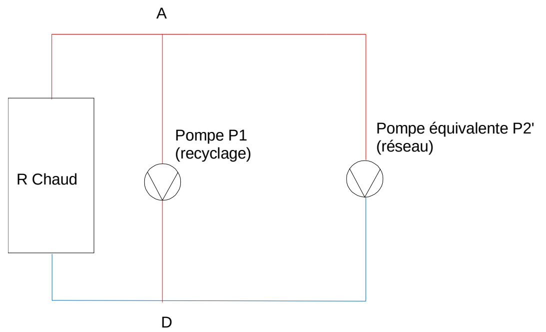
Lors de la mise en fonctionnement de l'installation, il existe une configuration qui fait que les deux pompes précédentes sont en fonctionnement en même temps alors que la vanne trois voies est grande ouverte.

Que se passe t'il dans ce cas là ?

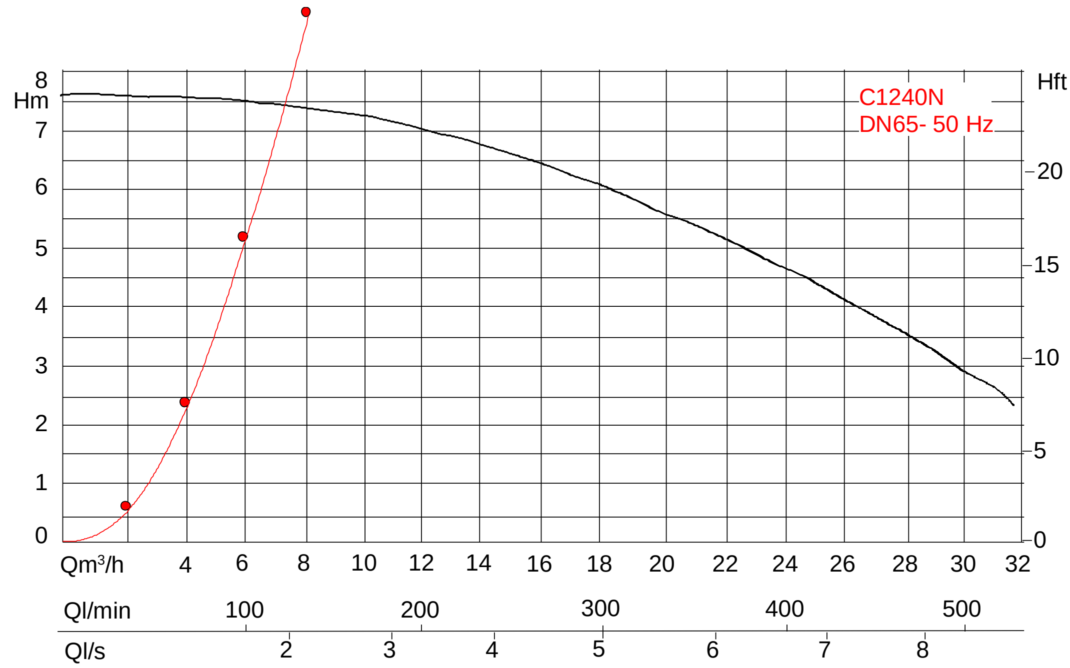
Nous devons établir la courbe de pompe équivalente pour la pompe servant à alimenter le réseau.

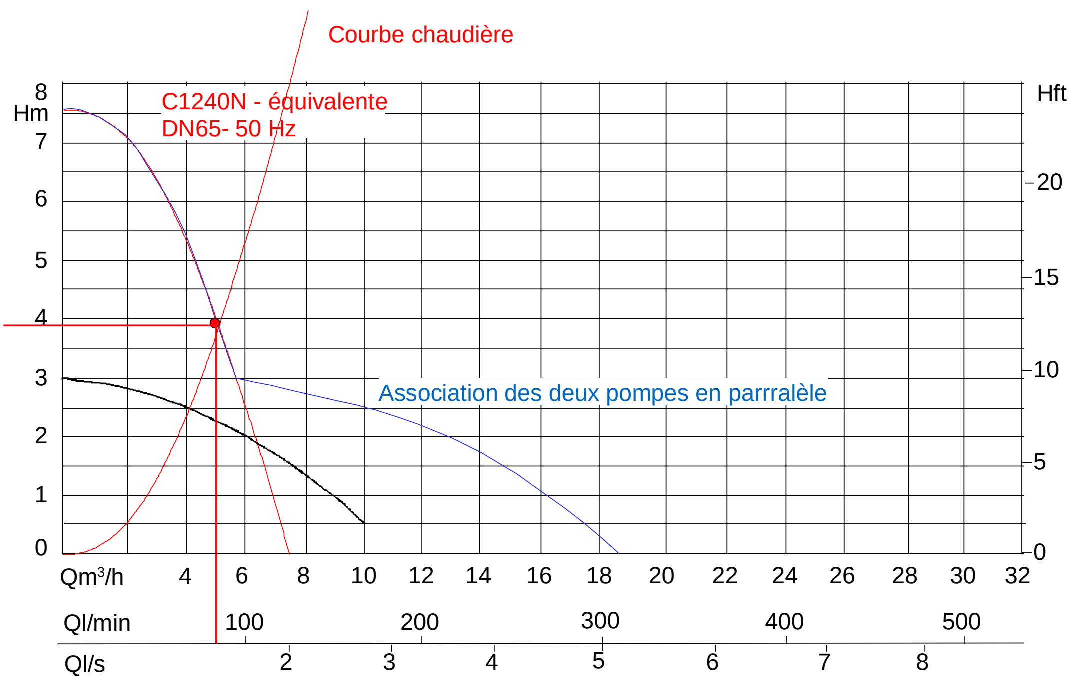






Tout se passe alors comme si nous avions deux pompes en parallèle.
Le schéma suivant nous montre comment s'effectue alors le fonctionnement entre les deux pompes.





L'étude des graphes nous montre qu'une pompe ne peut pas suivre – un clapet anti-retour est donc nécessaire.

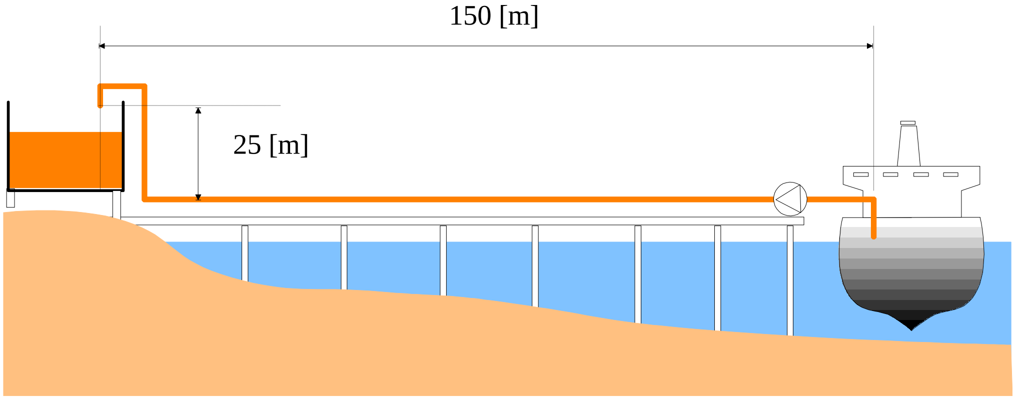
III – Alimentation d'un pétrolier

III – 1 – Présentation

Un pétrolier contient un hydrocarbure de masse volumique ρ = 860 [kg/m^3] et de viscosité cinématique υ = 0,05.10^{-4} [m²/s].
Nous désirons transférer cet hydrocarbure dans un réservoir de stockage à l'aide d'une pompe engendrant une pression de refoulement de caractéristiques suivantes :

Qv [l/s]	0	10	20	30	40	50
Pression de refoulement [mCe]	4,0	3,9	3,7	3,5	3,1	2,7

La conduite de refoulement a une longueur de 150 [m] et présente une dénivellation de 25 [m] entre ses deux extrémités.



III – 2 – Questions

a) Sachant que le débit souhaité est d'au moins 100 tonnes à l'heure, choisissez le diamètre de conduite le plus convenable parmi les valeurs suivantes : 100, 150, 200, 400 [mm]. Quel est alors le débit pompé ?
Pour ce type de conduite en fonte, vous prendrez ε = 0,20 [mm].
Vous négligerez toutes les pertes de charges autres que les pertes de charge singulières dans la conduite.
b) Calculez alors le coefficient de Chézy et de Strickler caractérisant l'écoulement dans la conduite définie à la première question.
c) Le rendement de la pompe étant de 0,85, quelle est la puissance fournie par le moteur entraînant la pompe ?

III – 3 – Correction

a) Sachant que le débit souhaité est d'au moins 100 tonnes à l'heure, choisissez le diamètre de conduite le plus convenable parmi les valeurs suivantes : 100, 150, 200, 400 [mm]. Quel est alors le débit volumique pompé ?
Pour ce type de conduite en fonte, vous prendrez ε = 0,20 [mm].
Vous négligerez toutes les pertes de charges autres que les pertes de charge singulières dans la conduite.

Nous avons le choix entre plusieurs diamètres.
Le débit volumique est :

$$Q_v = \frac{Q_m}{\rho} = \frac{100 \cdot 1000}{3600 \cdot 850} = 0{,}0327 \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

Compte tenu des différents diamètres, nous avons :

Diamètre [mm]	100	150	200	400
$v = \frac{4 \cdot Q_v}{\pi \cdot D^2} \left[\frac{m}{s}\right]$	4,16	1,85	1,04	0,260

$$or \quad \Delta H = j \cdot L \quad j = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot L \quad j = f\left(\mathrm{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Diamètre [mm]	100	150	200	400
$v = \frac{4 \cdot Q_v}{\pi \cdot D^2} \left[\frac{m}{s}\right]$	4,16	1,85	1,04	0,260
$\mathrm{Re} = \frac{v \cdot D}{\nu}$	83200	55500	41600	20800
$\frac{\varepsilon}{D}$	0,002	0,0013	0,001	0,0005
λ	0,026	0,026	0,025	0,028
$j = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$	0,23	0,03	0,0068	0,00024
$\Delta H = j \cdot L \quad [mCP]$	40,13	5,3	1,2	0,042

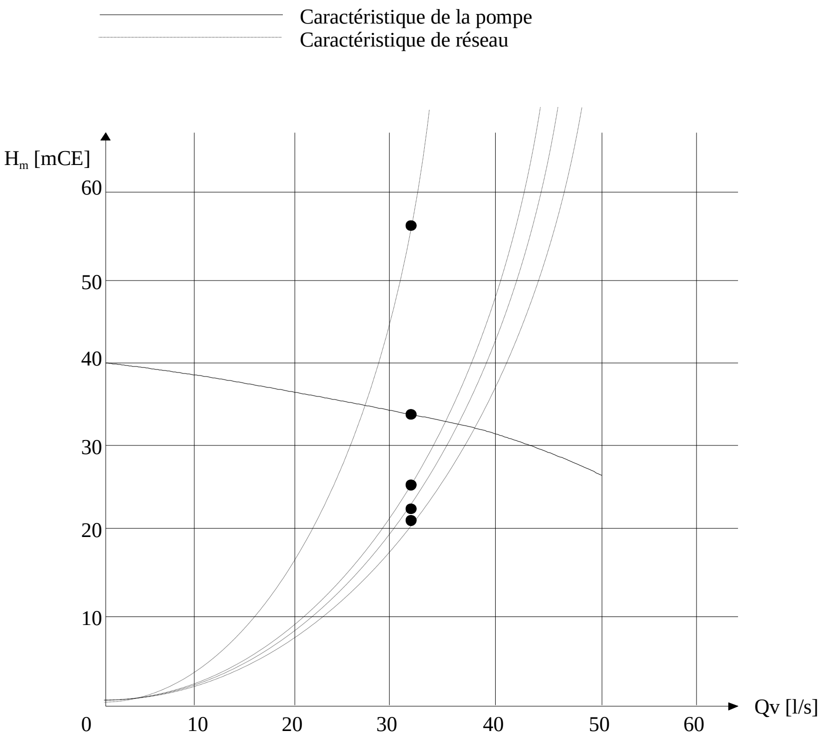
En appliquant Bernoulli entre le pétrolier et le réservoir, nous obtenons :

$$\frac{P_p}{\rho \cdot g} + z_p + \frac{v_p^2}{2 \cdot g} - \Delta H + H_m = \frac{P_r}{\rho \cdot g} + z_r + \frac{v_r^2}{2 \cdot g} \quad avec \quad P_p = P_r \ et \ v_p = 0[m/s]$$

$$H_m = \Delta H + z_r - z_p + \frac{v_r^2}{2 \cdot g}$$

Diamètre [mm]	100	150	200	400
H_m [mCP]	66	30,5	26,25	25
H_m [mCE]	56	26	22,5	21,5

Etudions maintenant la caractéristique de la pompe.



A priori, le diamètre 150 [mm] devrait convenir.

b) Calculez alors le coefficient de Chézy et de Strickler caractérisant l'écoulement dans la conduite définie à la première question.

Le coefficient de Chézy est défini par la formule : $V = C \cdot \sqrt{R_h \cdot I}$ et le coefficient de Strickler par la formule $V = K_s \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}}$

$$R_h = \frac{D}{4} = \frac{0{,}15}{4} = 0{,}0375[m]$$

$$I = \frac{\text{perte de charge}}{longueur} = \frac{5{,}3}{175} = 0{,}0302\left[\frac{m}{m}\right]$$

c) Le rendement de la pompe étant de 0,85, quelle est la puissance fournie par le moteur entraînant la pompe ?

Le point de fonctionnement a pour caractéristique $Q_v = 0{,}036$ [m^3/s] et $H_m = 33$ [mCE].

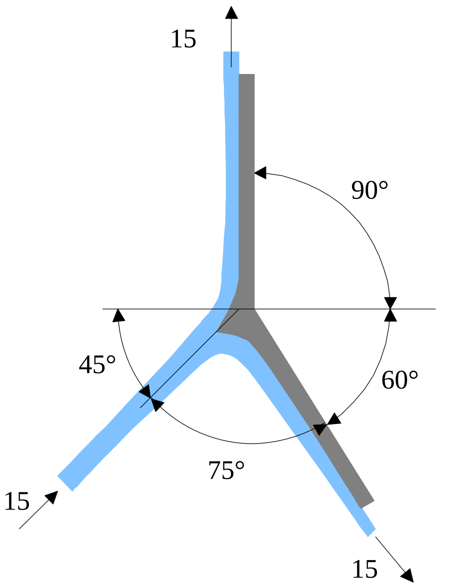
La puissance de la pompe vaut :

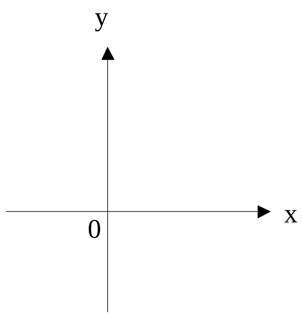
$$P_{abs} = \frac{\rho \cdot g \cdot Q_v \cdot Hm}{\eta} = \frac{860 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}036 \cdot 33}{0{,}85} = 11{,}7[kW]$$

Fluide en mouvement

I – Surface plane

I – 1 – Présentation





La surface plane représentée ci-contre divise le jet de sorte que 30 [l/s] s'écoulent dans chaque direction. La vitesse initiale est de 15,0 [m/s].

I – 2 – Questions

Calculez les valeurs des composantes selon X et Y nécessaires pour maintenir la surface en équilibre (en négligeant les frottements).

I – 3 – Correction

Calculez les valeurs des composantes selon X et Y nécessaires pour maintenir la surface en équilibre (en négligeant les frottements).

Utilisons le principe d'Euler appliquée à la surface de contrôle représentée ci-dessus :

$$\rho \cdot Q_v \cdot \overrightarrow{v_2} - \rho \cdot Q_v \cdot \overrightarrow{v_1} = \sum \overrightarrow{F}_{ext}$$

Nous avons, par projection selon OX et selon OY :

$$\begin{cases} \rho \cdot Q_{v'} \cdot (15 \cdot \cos(90) + 15 \cdot \cos(60)) - \rho \cdot Q_v \cdot 15 \cdot \cos(45) = F_x \\ \rho \cdot Q_{v'} \cdot (15 \cdot \sin(90) + 15 \cdot \sin(60)) - \rho \cdot Q_v \cdot 15 \cdot \sin(45) = F_y \end{cases}$$

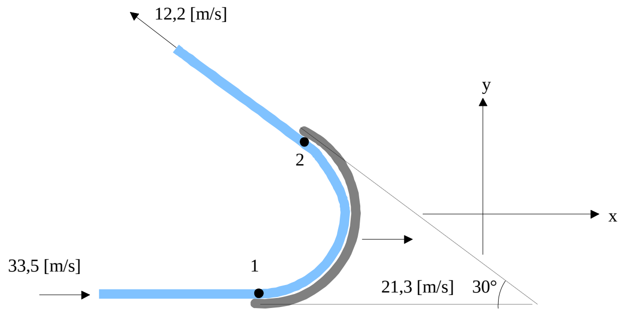
$$\begin{cases} 1000 \cdot 0{,}03 \cdot (15 \cdot \cos(90) + 15 \cdot \cos(60)) - 1000 \cdot 0{,}06 \cdot 15 \cdot \cos(45) = F_x \\ 1000 \cdot 0{,}03 \cdot (15 \cdot \sin(90) - 15 \cdot \sin(60)) - 1000 \cdot 0{,}06 \cdot 15 \cdot \sin(45) = F_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = -411 [N] \\ F_y = -576 [N] \end{cases}$$

Il s'agit de la force exercée par la plaque sur le jet.

II – Surface courbe en mouvement

II – 1 – Présentation



Un jet de 75 [mm] de diamètre a une vitesse de 33,5 [m/s]. Il frappe une lame se déplaçant dans la même direction à 21,3 [m/s]. L'angle de déflexion de la lame est de 150°.

II – 2 – Questions

En admettant qu'il n'y a pas de frottement, calculez les composantes selon ox et oy de la force exercée par l'eau sur la lame.

II – 3 – Correction

En admettant qu'il n'y a pas de frottement, calculez les composantes selon ox et oy de la force exercée par l'eau sur la lame.

Appliquons le théorème d'Euler à la surface de contrôle décrite ci-dessus.

$$\rho \cdot Q_v \cdot \left(\vec{v_2} - \vec{v_p}\right) - \rho \cdot Q_v \cdot \left(\vec{v_1} - \vec{v_p}\right) = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\rho \cdot Q_v \cdot \begin{pmatrix} 12{,}2 \cdot \cos(150) + 21{,}3 \\ 12{,}2 \cdot \sin(150) \end{pmatrix} - \rho \cdot Q_v \cdot \begin{pmatrix} 33{,}5 - 21{,}3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

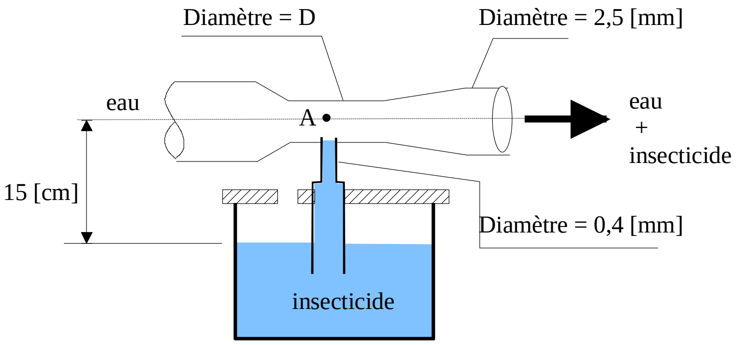
$$\rho \cdot Q_v \cdot \begin{pmatrix} 10{,}7 + 12{,}2 \\ 6{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = 1000 \cdot \left(\pi \cdot \frac{0{,}075^2}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} 22{,}9 \\ 6{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1230 \\ 329 \end{pmatrix}$$

Il s'agit de la force exercée par la plaque sur le jet.

III – Pulvérisateur

III – 1 – Présentation



L'appareil qui vous est demandé d’étudier est présenté sur le schéma ci-contre. Il est utilisé pour disperser un mélange approprié d'eau et d'insecticide. Le débit d'insecticide doit être de Q_i = 75 [ml.min^{-1}] quand le débit d'eau vaut Q_e = 4 [l.min^{-1}].

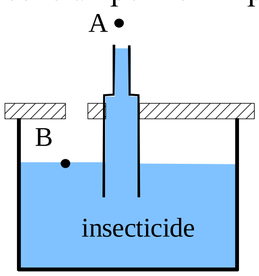
III – 2 – Questions

Déterminer, dans ces conditions, la valeur de la pression au point A, ainsi que le diamètre *D* requis pour ce dispositif.

III – 3 – Correction

Déterminer, dans ces conditions, la valeur de la pression au point A, ainsi que le diamètre *D* requis pour ce dispositif.

Faisons un petit bilan pour l’insecticide :



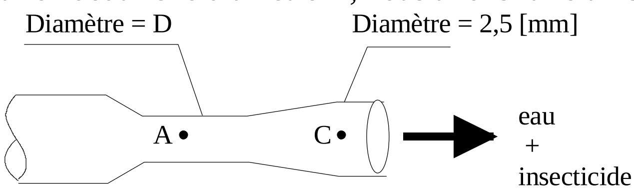
$$\frac{P_B}{\rho \cdot g} + z_B + \frac{V_B^{\ 2}}{2 \cdot g} = \frac{P_A}{\rho \cdot g} + z_A + \frac{V_A^{\ 2}}{2 \cdot g} \quad avec \quad V_B \approx 0$$

$$P_B - P_A = (z_A - z_B) \cdot \rho \cdot g + \frac{\rho \cdot V_A^{\ 2}}{2}$$

$$P_B - P_A = 0{,}15 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 + \frac{1000 \cdot V_A^{\ 2}}{2} \quad avec\, V_A = \frac{Q_v}{S} = \frac{0{,}075 \cdot 10^{-3} \cdot 4}{60 \cdot \pi \cdot 0{,}0004^2} = 9{,}94 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$P_B - P_A = 50873 [Pa]$$

Pour en déduire le diamètre D, nous allons faire un bilan entre le venturi et son extrémité.



$$\frac{P_A}{\rho \cdot g} + z_A + \frac{V_A^{\ 2}}{2 \cdot g} = \frac{P_C}{\rho \cdot g} + z_C + \frac{V_C^{\ 2}}{2 \cdot g}$$

$$V_A^{\ 2} = V_C^{\ 2} + 2 \cdot \frac{P_C - P_A}{\rho}$$

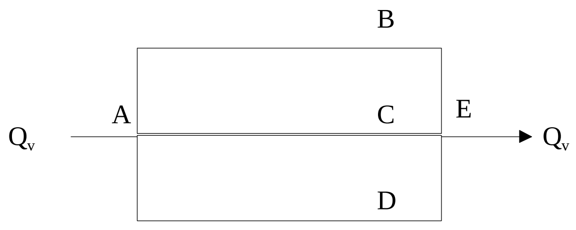
$$V_A = \sqrt{\left(V_C^{\ 2} + 2 \cdot \frac{P_C - P_A}{\rho} \right)}$$

$$\frac{4\cdot Q_v}{\pi\cdot D^2}=\sqrt{\left(\left(\frac{4\cdot Q_v}{\pi\cdot {D_C}^2}\right)^2+2\cdot\frac{P_C-P_A}{\rho}\right)}\quad soit\quad D=\sqrt{\left(\frac{4\cdot Q_v}{\pi\cdot\sqrt{\left(\left(\frac{4\cdot Q_v}{\pi\cdot {D_C}^2}\right)^2+2\cdot\frac{P_C-P_A}{\rho}\right)}}\right)}$$

$D=0{,}00225[m]$

IV – Tuyauterie en parallèle

IV – 1 – Présentation



Pour le système de tuyaux en parallèle de la figure ci-contre, la hauteur de pression en A est de 36 [mCE] et la hauteur de pression en E est de 22 [mCE].

B : l = 3600[m], D=30[cm], C_1=100
C : l = 1200[m], D=20[cm], C_1=100
D : l = 2400[m], D=25[cm], C_1=100

IV – 2 – Questions

En admettant, que les tuyaux sont dans un plan horizontal, quels sont les débits dans chaque branche parallèle ?

IV – 3 – Correction

En admettant, que les tuyaux sont dans un plan horizontal, quels sont les débits dans chaque branche parallèle ?

La perte de charge est la même pour tous les tuyaux.

Nous avons donc :

$$Q_v = v \cdot S = v \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} = 0{,}8492 \cdot C \cdot R^{0,63} \cdot S^{0,54} \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} = 0{,}8492 \cdot C \cdot \frac{D}{4}^{0,63} \cdot \frac{\Delta H}{L}^{0,54} \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4}$$

après application numérique:

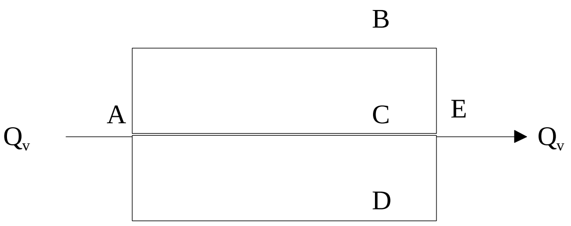
$$Q_{v30} = 0{,}8492 \cdot 100 \cdot \frac{0{,}3}{4}^{0,63} \cdot \frac{14}{3600}^{0,54} \cdot \pi \cdot \frac{0{,}3^2}{4} = 0{,}058 \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

$$Q_{v20} = 0{,}8492 \cdot 100 \cdot \frac{0{,}2}{4}^{0,63} \cdot \frac{14}{1200}^{0,54} \cdot \pi \cdot \frac{0{,}2^2}{4} = 0{,}0365 \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

$$Q_{v25} = 0{,}8492 \cdot 100 \cdot \frac{0{,}25}{4}^{0,63} \cdot \frac{14}{2400}^{0,54} \cdot \pi \cdot \frac{0{,}25^2}{4} = 0{,}045 \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

V – Tuyauterie en parallèle

V – 1 – Présentation



Pour le système de tuyaux en parallèle de la figure ci-contre, le débit total est de 280 [l/s].

B : l = 3600[m], D=30[cm], C_1=100
C : l = 1200[m], D=20[cm], C_1=100
D : l = 2400[m], D=25[cm], C_1=100

V – 2 – Questions

En admettant, que les tuyaux sont dans un plan horizontal, quels sont les débits dans chaque branche parallèle et quelle est la variation de pression entre A et E ?

V – 3 – Correction

En admettant, que les tuyaux sont dans un plan horizontal, quels sont les débits dans chaque branche parallèle et quelle est la variation de pression entre A et E ?

Nous avons :

$$Q_v = Q_{v1} + Q_{v2} + Q_{v3}$$

$$Q_v = v_1 \cdot s_1 + v_2 \cdot s_2 + v_3 \cdot s_3$$

$$Q_v = 0{,}8492 \cdot C_1 \cdot \left(\frac{D_1}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{L_1}\right)^{0,54} \cdot \pi \cdot \frac{D_1^{\,2}}{4} + 0{,}8492 \cdot C_2 \cdot \left(\frac{D_2}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{L_2}\right)^{0,54} \cdot \pi \cdot \frac{D_2^{\,2}}{4} + 0{,}8492 \cdot C_3 \cdot \left(\frac{D_3}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{L_3}\right)^{0,54} \cdot \pi \cdot \frac{D_3^{\,2}}{4}$$

$$\frac{4 \cdot Q_v}{0{,}8492 \cdot \pi} \cdot \left(C_1 \cdot \left(\frac{D_1}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{1}{L_1}\right)^{0,54} D_1^{\,2} + C_2 \cdot \left(\frac{D_2}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{1}{L_2}\right)^{0,54} \cdot D_2^{\,2} + C_3 \cdot \left(\frac{D_3}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{1}{L_3}\right)^{0,54} \cdot D_3^{\,2} \right)^{-1} = \Delta H^{0,54}$$

$$\Delta H = 50{,}3[m]$$

Nous en déduisons :

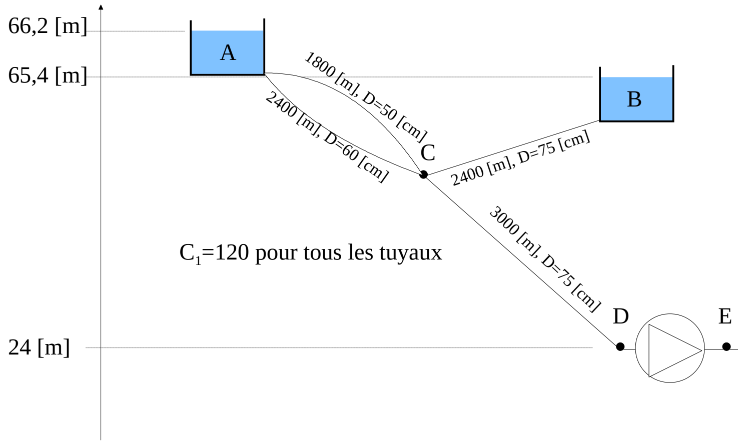
$$Q_{v1} = 0{,}8492 \cdot C_1 \cdot \left(\frac{D_1}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{L_1}\right)^{0,54} \cdot \pi \cdot \frac{D_1^{\,2}}{4} = 0{,}8492 \cdot 100 \cdot \left(\frac{0{,}3}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{50{,}3}{3600}\right)^{0,54} \cdot \pi \cdot \frac{0{,}3^2}{4} = 0{,}117 \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

$$Q_{v2} = 0{,}8492 \cdot C_2 \cdot \left(\frac{D_2}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{L_2}\right)^{0,54} \cdot \pi \cdot \frac{D_2^{\,2}}{4} = 0{,}8492 \cdot 100 \cdot \left(\frac{0{,}2}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{50{,}3}{1200}\right)^{0,54} \cdot \pi \cdot \frac{0{,}2^2}{4} = 0{,}073 \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

$$Q_{v3} = 0{,}8492 \cdot C_3 \cdot \left(\frac{D_3}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{L_3}\right)^{0,54} \cdot \pi \cdot \frac{D_3^{\,2}}{4} = 0{,}8492 \cdot 100 \cdot \left(\frac{0{,}25}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{50{,}3}{2400}\right)^{0,54} \cdot \pi \cdot \frac{0{,}25^2}{4} = 0{,}090 \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

VI – Turbine

VI – 1 – Présentation



Dans la figure ci-contre, le débit du réservoir a est de 430 [l/s].

VI – 2 – Questions

Calculez la puissance consommée par la turbine DE si la hauteur de pression en E est de 1,0 [mCE].

VI – 3 – Correction

Calculez la puissance consommée par la turbine DE si la hauteur de pression en E est de 1,0 [mCE].

Débit du réservoir A : 430 [l/s]

Nous avons :

$$Q_v = v_1 \cdot s_1 + v_2 \cdot s_2 = 0{,}8492 \cdot \left(C_1 \cdot \left(\frac{D_1}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{L_1}\right)^{0,54} \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} + C_2 \cdot \left(\frac{D_2}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{L_2}\right)^{0,54} \cdot \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \right)$$

$$0{,}43 = 0{,}8492 \cdot \left(120 \cdot \left(\frac{0{,}5}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{1800}\right)^{0,54} \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}5^2}{4} + 120 \cdot \left(\frac{0{,}6}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{2400}\right)^{0,54} \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}6^2}{4} \right)$$

$$\Delta H = 3{,}32[m]$$

ce qui nous donne :

$$Q_{v1} = v_1 \cdot s_1 = 0{,}8492 \cdot C_1 \cdot \left(\frac{D_1}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{L_1}\right)^{0,54} \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} = 0{,}8492 \cdot 120 \cdot \left(\frac{0{,}5}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{1800}\right)^{0,54} \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}5^2}{4} = 0{,}180 \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

$$Q_{v2} = v_2 \cdot s_2 = 0{,}8492 \cdot C_2 \cdot \left(\frac{D_2}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{L_2}\right)^{0,54} \cdot \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} = 0{,}8492 \cdot 120 \cdot \left(\frac{0{,}6}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{2400}\right)^{0,54} \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}6^2}{4} = 0{,}249 \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

La pression au point C est de $66{,}2 - \Delta H = 62{,}88[m]$

Débit du réservoir B :

Nous avons donc :

$$\Delta H = 65{,}4 - 62{,}88 = 2{,}52[m]$$

$$Q_v = v_3 \cdot s_3 = 0{,}8492 \cdot C_3 \cdot \left(\frac{D_3}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{L_3}\right)^{0,54} \cdot \frac{\pi \cdot D_3^2}{4} = 0{,}8492 \cdot 120 \cdot \left(\frac{0{,}75}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{2{,}52}{2400}\right)^{0,54} \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}75^2}{4}$$

$$Q_v = 0{,}386 \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

Au niveau de la pompe, au point D:

Nous avons donc :

$$Qv = 0{,}43 + 0{,}386 = 0{,}816\left[\frac{m^3}{s}\right]$$

$$Q_v = v \cdot s = 0{,}8492 \cdot C \cdot \left(\frac{D}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{L}\right)^{0,54} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 0{,}8492 \cdot 120 \cdot \left(\frac{0{,}75}{4}\right)^{0,63} \cdot \left(\frac{\Delta H}{3000}\right)^{0,54} \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}75^2}{4}$$

$$\Delta H = 12{,}6[m]$$

Au point D, la charge vaut :

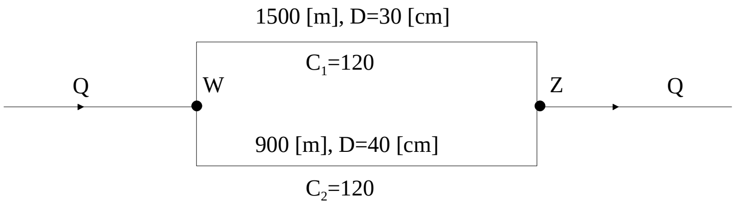
$$62{,}88 - 12{,}6 = 50{,}3[m]$$

Au niveau de la pompe :

$$P = \rho \cdot g \cdot Qv \cdot \Delta H = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}816 \cdot (50{,}3 - 25) = 202{,}5[kW]$$

VII – Réseau maillé simple

VII – 1 – Présentation



Dans le système présenté ci-contre, le débit Q vaut 456 [l/s].

VII – 2 – Questions

Calculez le débit dans chaque boucle en utilisant le procédé de Hardy Cross.

VII – 3 – Correction

Calculez le débit dans chaque boucle en utilisant le procédé de Hardy Cross.

Les débits de départ sont choisis de manière tout à fait arbitraire !

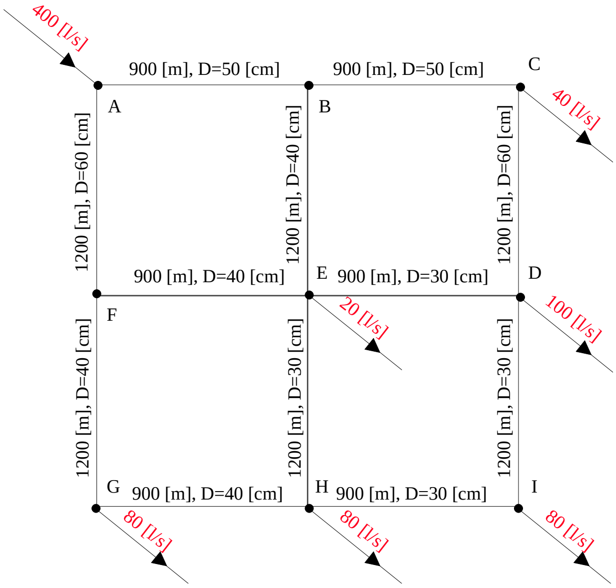
	Tronçon	D [m]	L [m]	C	$Q_{(supposé)}$ [l/s]	v [m/s]	S	6H	Hl/Q0	6	$Q_{(recalculé)}$ [l/s]
Itération n°1	WZ-1	0.3	1500.00	120	150	2.12206591	0.01586596	23.7989329	158.659553	-0.0284802	121.5
	ZW-2	0.4	900.00	120	-306	-2.43507063	-0.014635	-13.1714965	43.0441063		-334.5

	Tronçon	D [m]	L [m]	C	$Q_{(supposé)}$ [l/s]	v [m/s]	S	6H	Hl/Q0	6	$Q_{(recalculé)}$ [l/s]
Itération n°2	WZ-1	0.3	1500.00	120	121.5	1.71915352	0.01074718	16.120767	132.65959	-0.00178698	119.7
	ZW-2	0.4	900.00	120	-334.5	-2.66170885	-0.01725414	-15.5287231	46.4264346		-336.3

	Tronçon	D [m]	L [m]	C	$Q_{(supposé)}$ [l/s]	v [m/s]	S	6H	Hl/Q0	6	$Q_{(recalculé)}$ [l/s]
Itération n°3	WZ-1	0.3	1500.00	120	119.7	1.69387288	0.01045663	15.684948	130.999573	-7.2864E-06	119.7
	ZW-2	0.4	900.00	120	-336.3	-2.67592921	-0.01742506	-15.6825535	46.6371813		-336.3

VIII – Réseau maillé un peu moins simple

VIII – 1 – Présentation



Dans le système présenté ci-contre, le débit Q vaut 400 [l/s].

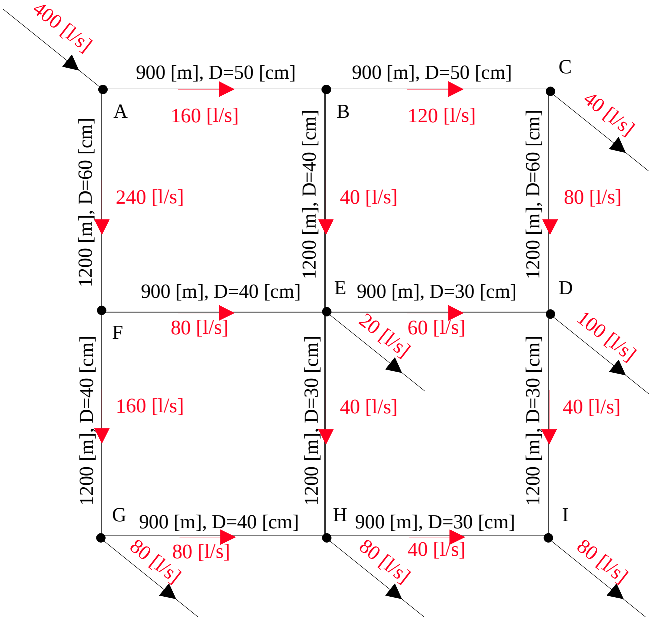
VIII – 2 – Questions

Calculez le débit dans chaque boucle en utilisant le procédé de Hardy Cross.

VIII – 3 – Correction

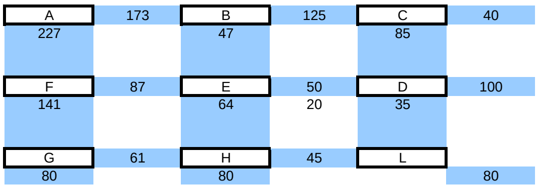
Calculez le débit dans chaque boucle en utilisant le procédé de Hardy Cross.

Les débits de départ sont choisis de manière tout à fait arbitraire !



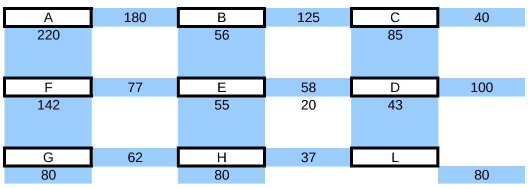
Itération n°1

Tronçon	D[m]	L [m]	C	$Q_{(supposé)}$ [l/s]	v [m/s]	S	δH	Hl/Q0	δ	δ	δ	$Q_{(recalculé)}$ [l/s]
AB	0.5	900	100	160.00	0.81487331	0.00208641	1.87776866	11.7360542	0.01269862		0.01269862	172.7
BE	0.4	1200	100	40.00	0.31830989	0.00047545	0.57053923	14.2634806		-0.0053075	0.00739112	47.4
EF	0.4	900	100	-80.00	-0.63661977	-0.001714	-1.54259622	19.2824528		-0.01932086	-0.00662224	-86.6
FA	0.6	1200	100	-240.00	-0.84882636	-0.00181933	-2.18319888	9.09666201			0.01269862	-227.3
BC	0.5	900	100	120.00	0.61115498	0.00122536	1.10282201	9.19018341	0.0053075		0.0053075	125.3
CD	0.4	1200	100	80.00	0.63661977	0.001714	2.05679496	25.709937			0.0053075	85.3
DE	0.3	900	100	-60.00	-0.84882636	-0.00408096	-3.67286549	61.2144249		0.00475693	0.01006442	-49.9
EB	0.4	1200	100	-40.00	-0.31830989	-0.00047545	-0.57053923	14.2634806		-0.01269862	-0.00739112	-47.4
FE	0.4	900	100	80.00	0.63661977	0.001714	1.54259622	19.2824528	0.01932086	-0.01269862	0.00662224	86.6
EH	0.3	1200	100	40.00	0.56588424	0.0019275	2.31299626	57.8249066		0.00475693	0.02407778	64.1
HG	0.4	900	100	-80.00	-0.63661977	-0.001714	-1.54259622	19.2824528			0.01932086	-60.7
GF	0.4	1200	100	-160.00	-1.27323954	-0.00617896	-7.41474965	46.3421853			0.01932086	-140.7
ED	0.3	900	100	60.00	0.84882636	0.00408096	3.67286549	61.2144249	-0.00475693	-0.0053075	-0.01006442	49.9
DI	0.3	1200	100	40.00	0.56588424	0.0019275	2.31299626	57.8249066			-0.00475693	35.2
IH	0.3	900	100	-40.00	-0.56588424	-0.0019275	-1.7347472	43.3686799			-0.00475693	-44.8
HE	0.3	1200	100	-40.00	-0.56588424	-0.0019275	-2.31299626	57.8249066		-0.01932086	-0.02407778	-64.1



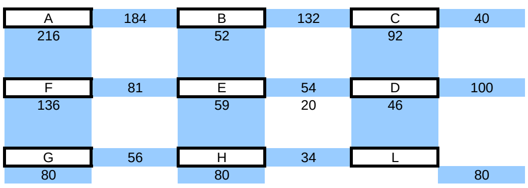
Itération n°2

Tronçon	D[m]	L [m]	C	$Q_{(supposé)}$ [l/s]	v [m/s]	S	δH	Hl/Q0	δ	δ	δ	$Q_{(recalculé)}$ [l/s]
AB	0.5	900	100	172.70	0.87954683	0.00240305	2.16274098	12.5232096	0.00758164		0.00758164	180.3
BE	0.4	1200	100	47.39	0.37712654	0.00065063	0.78075342	16.4746781		0.00059036	0.008172	55.6
EF	0.4	900	100	-86.62	-0.68931789	-0.00198567	-1.78710554	20.6310242		0.00181192	0.00939356	-77.2
FA	0.6	1200	100	-227.30	-0.80391419	-0.00164526	-1.97431456	8.6858889			0.00758164	-219.7
BC	0.5	900	100	125.31	0.63818585	0.0013275	1.19475177	9.53455923	-0.00059036		-0.00059036	124.7
CD	0.4	1200	100	85.31	0.6788555	0.00193028	2.31633227	27.1527394			-0.00059036	84.7
DE	0.3	900	100	-49.94	-0.70644389	-0.00290564	-2.6150731	52.368938		-0.00730592	-0.00789628	-57.8
EB	0.4	1200	100	-47.39	-0.37712654	-0.00065063	-0.78075342	16.4746781		-0.00758164	-0.008172	-55.6
FE	0.4	900	100	86.62	0.68931789	0.00198567	1.78710554	20.6310242	-0.00181192	-0.00758164	-0.00939356	77.2
EH	0.3	1200	100	64.08	0.90651518	0.00460884	5.53060665	86.3108312		-0.00730592	-0.00911784	55.0
HG	0.4	900	100	-60.68	-0.48286928	-0.00102782	-0.92503624	15.244715			-0.00181192	-62.5
GF	0.4	1200	100	-140.68	-1.11948905	-0.00486988	-5.84385585	41.5403146			-0.00181192	-142.5
ED	0.3	900	100	49.94	0.70644389	0.00290564	2.6150731	52.368938	0.00730592	0.00059036	0.00789628	57.8
DI	0.3	1200	100	35.24	0.49858752	0.001525	1.82999736	51.9250198			0.00730592	42.5
IH	0.3	900	100	-44.76	-0.63318097	-0.00237287	-2.135584	47.7151636			0.00730592	-37.5
HE	0.3	1200	100	-64.08	-0.90651518	-0.00460884	-5.53060665	86.3108312		0.00181192	0.00911784	-55.0



… un peu plus tard

Tronçon	D[m]	L [m]	C	$Q_{(supposé)}$ [l/s]	v [m/s]	S	δH	Hl/Q0	δ	δ	δ	$Q_{(recalculé)}$ [l/s]
AB	0.5	900	100	183.84	0.93627867	0.00269763	2.42786709	13.2065654	-2.4922E-06		-2.4922E-06	183.8
BE	0.4	1200	100	52.15	0.4150029	0.00077665	0.93198165	17.8708977		-1.4437E-05	-1.6929E-05	52.1
EF	0.4	900	100	-80.50	-0.6406079	-0.00173391	-1.56052155	19.3850809		-1.4158E-05	-1.665E-05	-80.5
FA	0.6	1200	100	-216.16	-0.76451708	-0.00149921	-1.79905615	8.3227173			-2.4922E-06	-216.2
BC	0.5	900	100	131.69	0.67067682	0.00145523	1.30970961	9.94561921	1.4437E-05		1.4437E-05	131.7
CD	0.4	1200	100	91.69	0.72962264	0.00220579	2.64694327	28.8693142			1.4437E-05	91.7
DE	0.3	900	100	-54.05	-0.76466336	-0.00336409	-3.02768129	56.0154054		2.2363E-06	1.6673E-05	-54.0
EB	0.4	1200	100	-52.15	-0.4150029	-0.00077665	-0.93198165	17.8708977		2.4922E-06	1.6929E-05	-52.1
FE	0.4	900	100	80.50	0.6406079	0.00173391	1.56052155	19.3850809	1.4158E-05	2.4922E-06	1.665E-05	80.5
EH	0.3	1200	100	58.60	0.82903593	0.00390668	4.68802125	79.9988656		2.2363E-06	1.6394E-05	58.6
HG	0.4	900	100	-55.66	-0.44293577	-0.00087612	-0.78850495	14.1662144			1.4158E-05	-55.6
GF	0.4	1200	100	-135.66	-1.07955554	-0.00455339	-5.46406684	40.2773742			1.4158E-05	-135.6
ED	0.3	900	100	54.05	0.76466336	0.00336409	3.02768129	56.0154054	-2.2363E-06	-1.4437E-05	-1.6673E-05	54.0
DI	0.3	1200	100	45.74	0.64705968	0.00246999	2.96398428	64.8036051			-2.2363E-06	45.7
IH	0.3	900	100	-34.26	-0.48470881	-0.0014474	-1.30265621	38.0203855			-2.2363E-06	-34.3
HE	0.3	1200	100	-58.60	-0.82903593	-0.00390668	-4.68802125	79.9988656		-1.4158E-05	-1.6394E-05	-58.6



Ecoulements à surface libre

I – Canal d'irrigation

I – 1 – Présentation

Un canal d'irrigation a une section trapézoïdale dont les parois latérales sont inclinées à 45°. La largeur du fond est de 4 [m] et la pente est uniforme (0,01).
Le coefficient de Strickler du canal sera pris égal à 65.
Ce canal est alimenté à la cote +20 [m] par une station de pompage comportant 4 pompes centrifuges identiques de rendement 0,78, aspirant de l'eau dans une rivière dont la surface libre est à la côte +10 [m]. La conduite d'aspiration de chaque pompe a un diamètre de 600 [mm] et une longueur de 20 [m]. La conduite de refoulement a un diamètre de 500 [mm] et une longueur de 100 [m]. Le coefficient de Chézy des conduites est égal à 70.

I – 2 – Questions

a) Déterminez le débit s'écoulant dans le canal en régime uniforme pour la profondeur de 1 [m].
b) Déterminez dans ce cas, la hauteur d'élévation H et la puissance de chaque pompe.
c) Nous désirons installer les pompes à 2 [m] au dessus de la surface libre de la rivière en régime normal. Or la cavitation apparaît pour ce type de pompe pour une pression absolue à l'aspiration :

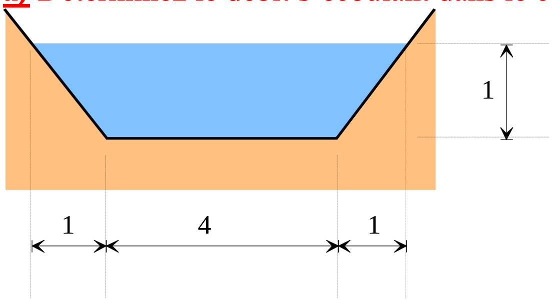
$$P_a = 2130 \cdot \left(\frac{N \cdot \sqrt{1{,}36 \cdot Pu}}{H^{\frac{5}{4}}} \right)^{\frac{4}{3}} \cdot H$$

P_a étant la pression exprimée en [Pa] ;
H étant la hauteur manometrique exprimée en [mCe] ;
Pu étant la puissance abosrbée exprimée en [kW] ;
N étant la vitesse de rotation de la pompe [tr/min].

Déterminez la vitesse de rotation maximale admissible des pompes.

I – 3 – Réponses

a) Déterminez le débit s'écoulant dans le canal en régime uniforme pour la profondeur de 1 [m].



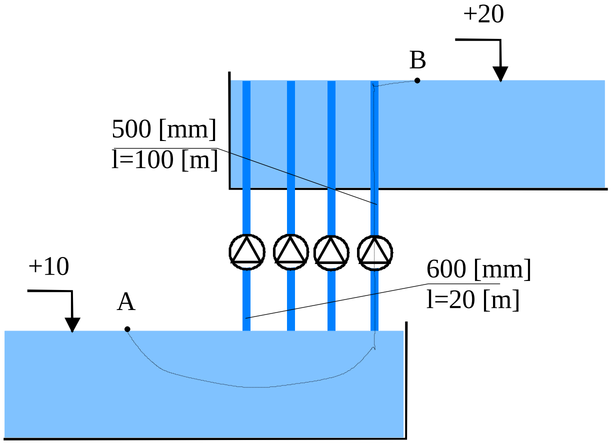
Les caractéristiques du canal sont les suivantes :

$$S = (4+1)*1 = 5[m^2]$$
$$B = 6[m]$$
$$P = 4 + 2*1*\sqrt{2} = 6{,}82[m]$$
$$D_h = \frac{S}{B} = \frac{5}{6} = 0{,}833[m]$$
$$R_h = \frac{S}{P} = \frac{5}{6{,}82} = 0{,}734[m]$$

D'après la formule de Strickler, nous avons la relation :

$$Q_v = K_s \cdot S \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{I} = 65 \cdot 5 \cdot 0{,}734^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{0{,}01} = 2{,}64\left[\frac{m^3}{s}\right]$$

b) Déterminez dans ce cas, la hauteur d'élévation H et la puissance de chaque pompe.



Le coefficient de Chézy des tubes est de 70.
Chaque pompe devra véhiculer un débit de :

$$Q_{pompe} = \frac{Q_{total}}{4} = \frac{2{,}64}{4} = 0{,}66\left[\frac{m^3}{s}\right].$$

En faisant un bilan le long d'une ligne de flux partant de la surface libre de la rivière (A) à la surface libre du canal (B), nous trouvons :

$$\frac{P_A}{\rho \cdot g} + z_A + \frac{V_A^2}{2 \cdot g} + H - \Delta H_{asp} - \Delta H_{ref} = \frac{P_B}{\rho \cdot g} + z_B + \frac{V_B^2}{2 \cdot g}$$

$$or \quad P_A = P_B = P_{atm} \quad et\ V_A = V_B \approx 0[m/s]$$

$$H = z_B - z_A + \Delta H_{asp} + \Delta H_{ref}$$

Il nous reste à calculer les pertes de charges engendrées à l'aspiration et au refoulement.
D'après la formule de Chézy, nous avons :

$$V_{moy} = C \cdot \sqrt{R_h \cdot I}$$

La perte de charge s'obtient en calculant :

$$\Delta H = I \cdot L = \frac{L}{R_h} \cdot \left(\frac{V_{moy}}{C}\right)^2 = \frac{L}{R_h} \cdot \left(\frac{Q_v}{\pi \cdot R_h^2 \cdot C}\right)^2 = L \cdot \left(\frac{Q_v}{\pi \cdot R_h^{\frac{5}{2}} \cdot C}\right)^2$$

$$\Delta H_{asp} = 20 \cdot \left(\frac{0{,}66}{\pi \cdot 0{,}3^{\frac{5}{2}} \cdot 70}\right)^2 = 0{,}074[m]$$

$$\Delta H_{ref} = 100 \cdot \left(\frac{0{,}66}{\pi \cdot 0{,}25^{\frac{5}{2}} \cdot 70}\right)^2 = 0{,}922[m]$$

La hauteur manométrique à reprendre est de :

$$H = z_B - z_A + \Delta H_{asp} + \Delta H_{ref} = 20 - 10 + 0{,}074 + 0{,}922 \approx 11[m]$$

La puissance de chaque pompe vaut :

$$P_{pompe} = \frac{\rho \cdot g \cdot Q_v \cdot H_m}{\eta} = \frac{1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}66 \cdot 11}{0{,}78} = 91{,}3[kW]$$

c) Nous désirons installer les pompes à 2 [m] au dessus de la surface libre de la rivière en régime normal. Or la cavitation apparaît pour la pression absolue à l'aspiration :

$$P_a = 2130 \cdot \left(\frac{N \cdot \sqrt{1{,}36 \cdot Pu}}{H^{\frac{5}{4}}}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot H$$

P_a étant la pression exprimée en [Pa] ;
H étant la hauteur manométrique exprimée en [mCe] ;
Pu étant la puissance abosrbée exprimée en [kW] ;
N étant la vitesse de rotation de la pompe [tr/min].

Déterminez la vitesse de rotation maximale admissible des pompes.

Pour qu'il n'y ait pas de dépression, il faut que la valeur de la pression à l'aspiration ne soit pas inférieure à Pa donnée par la formule ci-dessus.

Appliquons Bernoulli entre le point A et l'aspiration de la pompe :

$$\frac{P_A}{\rho \cdot g} + z_A + \frac{V_A^{\ 2}}{2 \cdot g} - \Delta H_{asp} = \frac{P_{asp}}{\rho \cdot g} + z_{asp} + \frac{V_{asp}^{\ 2}}{2 \cdot g}$$

$$or \quad P_A = P_{atm} \quad et\ V_A \approx 0[m/s]$$

$$P_{asp} = P_A + \left(z_A - z_{asp} - \Delta H_{asp}\right) \cdot \rho \cdot g - \frac{V_{asp}^{\ 2} \cdot \rho}{2}$$

et

$$P_A + \left(z_A - z_{asp} - \Delta H_{asp}\right) \cdot \rho \cdot g - \frac{V_{asp}^{\ 2} \cdot \rho}{2} > 2130 \cdot \left(\frac{N \cdot \sqrt{1{,}36 \cdot Pu}}{H^{\frac{5}{4}}}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot H$$

$$100000 + (10 - 12 - 0{,}074) \cdot 1000 \cdot 9{,}81 - \frac{2{,}33^2 \cdot 1000}{2} > 2130 \cdot \left(\frac{N \cdot \sqrt{1{,}36 \cdot Pu}}{H^{\frac{5}{4}}}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot H$$

$$76939 > 2130 \cdot \left(\frac{N \cdot \sqrt{1{,}36 \cdot Pu}}{H^{\frac{5}{4}}}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot H$$

$$\left(\frac{76939}{2130 \cdot H}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{H^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{1{,}36 \cdot Pu}} > N \quad soit \quad \left(\frac{76939}{2130 \cdot 11}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{11^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{1{,}36 \cdot 91{,}3}} > N$$

$$4{,}38 > N$$

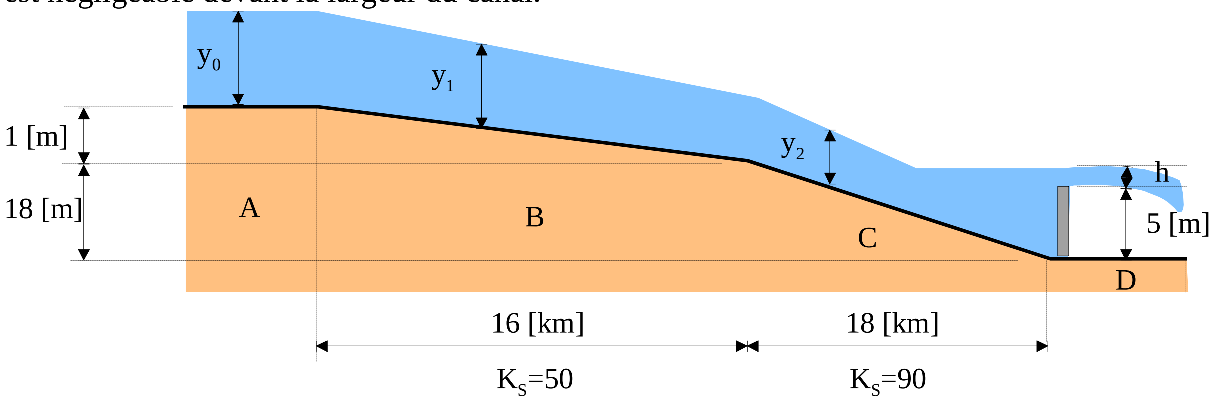
II – Canal

II – 1 – Présentation

Le débit Qv=800 [m³/s] du circuit de refroidissement d'une centrale thermique est évacué par un aménagement comprenant :

- un bassin (A), de grande largeur, où l'on peut considérer la vitesse de l'écoulement comme nulle ;
- un canal (B) en terre, à section rectangulaire, de largeur b, de longueur 16 [km], et dont le fond, en pente régulière i, présente une dénivelée de 1 [m] ;
- un canal (C) en béton à section rectangulaire, de même largeur b, de longueur 8 [km], et dont le fond, en pente régulière, présente une dénivelée de 18 [m] ;
- un déversoir D de même longueur que le canal C et dont la côte du seuil est de 5 [m] au dessus du fond du canal C.

Le coefficient de Strickler K est égal à 50 pour le canal B et à 90 pour le canal C. La profondeur d'eau est négligeable devant la largeur du canal.



II – 2 – Questions

a) A quelles conditions doit satisfaire la largeur b, pour que :

- la vitesse moyenne dans le canal B soit supérieure à la valeur donnée $V_0 = 1$ [m/s] ;
- l'écoulement dans le canal C ne soit pas torrentiel ?

b) Quelles sont les profondeurs d'eau y_1 et y_2 et les vitesses moyennes V_1 et V_2 dans les canaux B et C pour la largeur b = 200 [m] ?

c) Le débit du déversoir étant donné par la relation : $Q_v = \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot h^{\frac{3}{2}}$, calculez h (la hauteur de l'eau au dessus du déversoir, la profondeur y_0 et la dénivelée H entre la surface de l'eau dans le bassin A et la surface de l'eau au dessus du seuil.

Tracez schématiquement la forme de la ligne d'eau le long de l'aménagement, en indiquant les différentes valeurs des profondeurs et des vitesses.

d) Quel est le débit maximal qu'il est possible d'évacuer en restant en écoulement fluvial dans le canal C ?

e) Quel devrait être le coefficient de Strickler des parois du canal B, pour que sans changer les caractéristiques topographiques de l'ouvrage, la côte du plan d'eau dans le bassin A soit réduite de 1 [m], dans l'hypothèse du débit Q=800 [m³/s] ?

II – 3 – Réponses

a) A quelles conditions doit satisfaire la largeur b, pour que :

- la vitesse moyenne dans le canal B soit supérieure à la valeur donnée $V_0 = 1$ [m/s] ;
- l'écoulement dans le canal C ne soit pas torrentiel ?

La vitesse moyenne est donnée par la relation :

$$V_{moy} = K_S \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{I} \quad avec \quad \left| \begin{array}{l} K_S = 50 \\ R_h = \dfrac{S}{p} \approx \dfrac{b \cdot h}{b} \approx h \\ I = \dfrac{1}{16000} = 6{,}25 \cdot 10^{-5} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} V_{moy} = K_S \cdot h^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{I} \\ h = \left(\dfrac{V_{moy}}{K_S \cdot \sqrt{I}} \right)^{\frac{3}{2}} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} Q_v = V_{moy} \cdot b \cdot h \\ h = \dfrac{Q_v}{V_{moy} \cdot b} \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{V_{moy}}{K_S \cdot \sqrt{I}} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{Q_v}{V_{moy} \cdot b} \quad soit \quad b = Q_v \cdot K_S^{\frac{3}{2}} \cdot V_{moy}^{-\frac{5}{2}} \cdot I^{\frac{3}{4}}$$

$$V_{moy} \geq V_0 \quad nous\ donne\ l'inégalité\ \ b \leq Q_v \cdot K_S^{\frac{3}{2}} \cdot V_0^{-\frac{5}{2}} \cdot I^{\frac{3}{4}}$$

$$soit\ b \leq 199\ [m]$$

Pour que l'écoulement soit fluvial dans le tronçon C, il faut et il suffit que la profondeur normale soit supérieure à la profondeur critique. Déterminons celle-ci.

$$F_r = \frac{V}{\sqrt{g \cdot h}} = 1 \quad soit \quad V_{moy} = \frac{Q_v}{h \cdot b} = \sqrt{g \cdot h} \quad soit \quad h^{\frac{3}{2}} = \frac{Q_v}{b \cdot \sqrt{g}}$$

$$h = Q_v^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{2}{3}} \cdot g^{-\frac{1}{3}}$$

Nous avions :

$$\left| V_{moy} = K_S \cdot h^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{I} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} Q_v = V_{moy} \cdot b \cdot h \\ V_{moy} = \dfrac{Q_v}{b \cdot h} \end{array} \right.$$

$$K_S \cdot h^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{I} = \frac{Q_v}{b \cdot h} \quad soit \quad h^{\frac{5}{3}} = \frac{Q_v}{b \cdot K_S \cdot \sqrt{I}}$$

$$h = Q_v^{\frac{3}{5}} \cdot b^{-\frac{3}{5}} \cdot K_S^{-\frac{3}{5}} \cdot I^{-\frac{3}{10}}$$

Ce qui nous donne :

$$Q_v^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{2}{3}} \cdot g^{-\frac{1}{3}} \leq Q_v^{\frac{3}{5}} \cdot b^{-\frac{3}{5}} \cdot K_S^{-\frac{3}{5}} \cdot I^{-\frac{3}{10}}$$

$$b^{-\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{3}{5}} \leq Q_v^{\frac{3}{5}} \cdot Q_v^{-\frac{2}{3}} \cdot K_S^{-\frac{3}{5}} \cdot I^{-\frac{3}{10}} \cdot g^{\frac{1}{3}}$$

$$b^{-\frac{1}{15}} \leq Q_v^{-\frac{1}{15}} \cdot K_S^{-\frac{3}{5}} \cdot I^{-\frac{3}{10}} \cdot g^{\frac{1}{3}}$$

$$b \geq Q_v \cdot K_S^{\,9} \cdot I^{\frac{9}{2}} \cdot g^{-5} \quad soit \quad b \geq 800 \cdot 90^9 \cdot \left(\frac{18}{18000}\right)^{\frac{9}{2}} \cdot 9{,}81^{-5}$$

$$soit \quad b \geq 108\,[m]$$

b) Quelles sont les profondeurs d'eau y_1 et y_2 et les vitesses moyennes V_1 et V_2 dans les canaux B et C pour la largeur b = 200 [m] ?

Pour une largeur b de 200 [m], nous obtiendrons :

$$h = Q_v^{\frac{3}{5}} \cdot b^{-\frac{3}{5}} \cdot K_S^{-\frac{3}{5}} \cdot I^{-\frac{3}{10}}$$

Dans le canal B :

$$h = Q_v^{\frac{3}{5}} \cdot b^{-\frac{3}{5}} \cdot K_S^{-\frac{3}{5}} \cdot I^{-\frac{3}{10}} = 800^{\frac{3}{5}} \cdot 200^{-\frac{3}{5}} \cdot 50^{-\frac{3}{5}} \cdot \left(\frac{1}{16000}\right)^{-\frac{3}{10}} = 4\,[m]$$

$$Q_v = V_{moy} \cdot b \cdot h \quad soit \quad V_{moy} = \frac{Q_v}{b \cdot h} = \frac{800}{200 \cdot 4} = 1\,[m/s]$$

Dans le canal C :

$$h = Q_v^{\frac{3}{5}} \cdot b^{-\frac{3}{5}} \cdot K_S^{-\frac{3}{5}} \cdot I^{-\frac{3}{10}} = 800^{\frac{3}{5}} \cdot 200^{-\frac{3}{5}} \cdot 90^{-\frac{3}{5}} \cdot \left(\frac{18}{18000}\right)^{-\frac{3}{10}} = 1{,}22\,[m]$$

$$Q_v = V_{moy} \cdot b \cdot h \quad soit \quad V_{moy} = \frac{Q_v}{b \cdot h} = \frac{800}{200 \cdot 1{,}22} = 3{,}26\,[m/s]$$

c) Le débit du déversoir étant donné par la relation : $Q_v = \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot h^{\frac{3}{2}}$, calculez h (la hauteur de l'eau au dessus du déversoir, la profondeur y_0 et la dénivelée H entre la surface de l'eau dans le bassin A et la surface de l'eau au dessus du seuil.
Tracez schématiquement la forme de la ligne d'eau le long de l'aménagement, en indiquant les différentes valeurs des profondeurs et des vitesses.

Le débit évacué est de 800 [m^3/s].

$$Q_v = \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot h^{\frac{3}{2}} = 800 \quad soit \quad h^{\frac{3}{2}} = \frac{3 \cdot Q_v}{2 \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g}}$$

$$h = \left(\frac{3 \cdot Q_v}{2 \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3 \cdot 800}{2 \cdot 200 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1{,}22\,[m]$$

Il nous faut maintenant déterminer la valeur de y_0.
En appliquant Bernoulli entre le bassin A et le haut du bassin B, nous avons :

$$\frac{P_A}{\rho \cdot g} + z_A + \frac{V_A{}^2}{2 \cdot g} = \frac{P_B}{\rho \cdot g} + z_B + \frac{V_B{}^2}{2 \cdot g}$$

$$or \quad P_A = P_B = P_{atm} \quad et\, V_A \approx 0[m/s]$$

ce qui nous donne :

$$z_A - z_B = \frac{V_B{}^2}{2 \cdot g} = \frac{1^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}05[m]$$

$$y_0 = 4{,}05[m]$$

Au final, la dénivelée est de :
4,05+1+18-5-1,22=16,83 [m].

d) Quel est le débit maximal qu'il est possible d'évacuer en restant en écoulement fluvial dans le canal C ?

Nous allons nous placer à la valeur limite entre un écoulement fluvial et un écoulement torrentiel.
Nous avions :

$$b = Q_v \cdot K_S{}^9 \cdot I^{\frac{9}{2}} \cdot g^{-5} \quad soit \quad Q_v = b \cdot K_S{}^{-9} \cdot I^{-\frac{9}{2}} \cdot g^5$$

$$Q_v = 200 \cdot 90^{-9} \cdot \left(\frac{18}{18000}\right)^{-\frac{9}{2}} \cdot 9{,}81^5$$

$$soit \quad Q_v = 1483 \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

e) Quel devrait être le coefficient de Strickler des parois du canal B, pour que sans changer les caractéristiques topographiques de l'ouvrage, la côte du plan d'eau dans le bassin A soit réduite de 1 [m], dans l'hypothèse du débit Q=800 [m^3/s] ?

Pour que la côte dans le bassin A soit réduite de 1 [m], il faut réduire d'autant la côte d'altitude dans le bassin B, ce qui revient à augmenter la vitesse d'écoulement de l'eau pour continuer à véhiculer le même débit.
Les canaux A et B sont liés par la relation suivante :

$$\frac{P_A}{\rho \cdot g} + z_A + \frac{V_A{}^2}{2 \cdot g} = \frac{P_B}{\rho \cdot g} + z_B + \frac{V_B{}^2}{2 \cdot g} \quad or \quad P_A = P_B = P_{atm} \quad et\, V_A \approx 0[m/s]$$

ce qui nous donne:

$$z_A = \frac{V_B{}^2}{2 \cdot g} + z_B = \frac{V_B{}^2}{2 \cdot 9{,}81} - z_B = 3{,}05[m]$$

De plus, nous avons $V_B = \frac{Q_v}{b \cdot z_B} = \frac{800}{200 \cdot z_B}$

$$\begin{cases} \dfrac{V_B{}^2}{2\cdot 9{,}81} + z_B = 3{,}05 \\ V_B = \dfrac{800}{200\cdot z_B} \quad \Rightarrow \quad z_B = \dfrac{800}{200\cdot V_B} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \dfrac{V_B{}^2}{2\cdot 9{,}81} + \dfrac{800}{200\cdot V_B} = 3{,}05 \\ V_B = \dfrac{800}{200\cdot z_B} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{V_B{}^3}{2\cdot 9{,}81} + 3{,}05\cdot V_B - 4 = 0 \quad \Rightarrow V_B = 1{,}276 \quad \left[\dfrac{m}{s}\right] \\ V_B = \dfrac{800}{200\cdot z_B} \quad \Rightarrow \quad z_B = 3{,}134[m] \end{cases}$$

Nous obtenons ensuite :

$$z_b = Q_v^{\frac{3}{5}} \cdot b^{-\frac{3}{5}} \cdot K_S{}^{-\frac{3}{5}} \cdot I^{-\frac{3}{10}} = 800^{\frac{3}{5}} \cdot 200^{-\frac{3}{5}} \cdot K_S{}^{-\frac{3}{5}} \cdot \left(\frac{1}{16000}\right)^{-\frac{3}{10}} = 3{,}134[m]$$

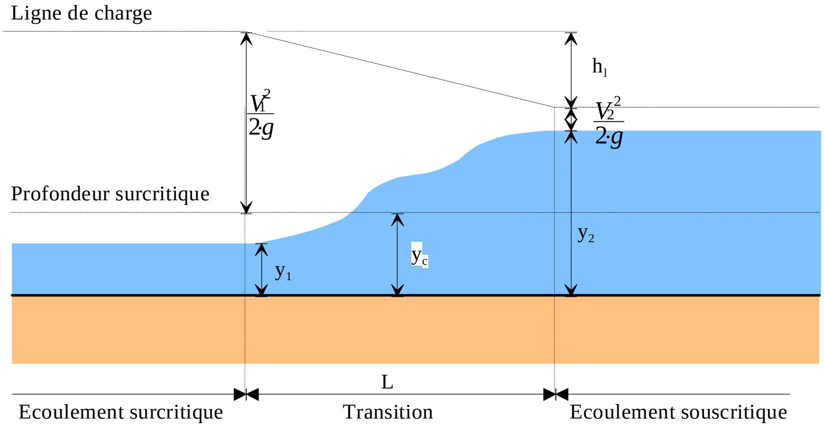
$$Il\ vient \quad 800^{-1} \cdot 200^{1} \cdot K_S{}^{1} \cdot \left(\frac{1}{16000}\right)^{\frac{1}{2}} = 3{,}134^{-\frac{5}{3}}$$

$$K_S = 3{,}134^{-\frac{5}{3}} \cdot \frac{800}{200} \cdot \sqrt{16000} = 75{,}4$$

III – Ressaut

III – 1 – Présentation

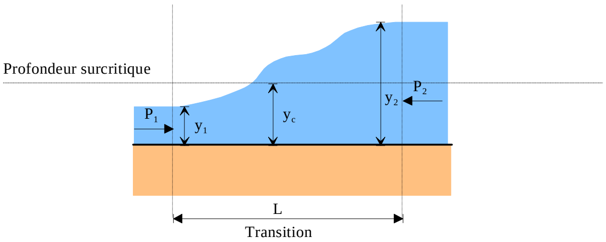
Pour un canal rectangulaire, établissez l'expression de la relation entre la profondeur avant (y_1) et après le ressaut (y_2) ainsi que la profondeur critique y_c.



III – 2 – Réponse

Etudions le système en équilibre entre la section 1 et la section 2 sur 1 [m] de largeur et pour un débit Q_v.

Un bilan des forces nous donne :



Force du à la pression en (1) :

$$F_1 = \rho \cdot g \cdot \frac{y_1}{2} \cdot y_1 \cdot 1$$

Force du à la pression en (2) :

$$F_2 = \rho \cdot g \cdot \frac{y_2}{2} \cdot y_2 \cdot 1$$

D'après le principe de la conservation de mouvement, nous avons :

$$\frac{d(m \cdot v)}{dt} = \sum F_{ext} \text{ soit } \frac{m \cdot (v_2 - v_1)}{\mathrm{dt}} = \frac{\rho \cdot g}{2} \cdot (y_1^2 - y_2^2)$$

Le débit étant le même de la section (1)à la section (2), nous obtenons :

$$v_1 \cdot y_1 \cdot 1 = v_2 \cdot y_2 \cdot 1 = Q_v$$

En utilisant l'équation obtenue avec le principe de la conservation de mouvement,

$$\frac{\rho \cdot V \cdot (v_2 - v_1)}{\mathrm{dt}} = \frac{\rho \cdot g}{2} \cdot (y_1^2 - y_2^2) \text{ soit } \rho \cdot Q_v \cdot (v_2 - v_1) = \frac{\rho \cdot g}{2} \cdot (y_1^2 - y_2^2)$$

$$Q_v \cdot \left(\frac{Q_v}{y_2} - \frac{Q_v}{y_1}\right) = \frac{g}{2} \cdot (y_1^2 - y_2^2) \text{ soit } Q_v^{\,2} \cdot \left(\frac{y_1 - y_2}{y_2 \cdot y_1}\right) = \frac{g}{2} \cdot (y_1^2 - y_2^2)$$

$$Q_v^{\,2} = \frac{g}{2} \cdot (y_1 + y_2) \cdot y_1 \cdot y_2$$

De plus, à l'aide de la profondeur critique (nombre de Froude égale à 1), nous obtenons :

$$Q_v = v_c \cdot y_c \cdot 1 \text{ et } \mathrm{Fr} = \frac{\mathrm{v_c}}{\sqrt{\mathrm{g \cdot y_c}}} = 1 \text{ soit } v_c^{\,2} = g \cdot y_c \ .$$

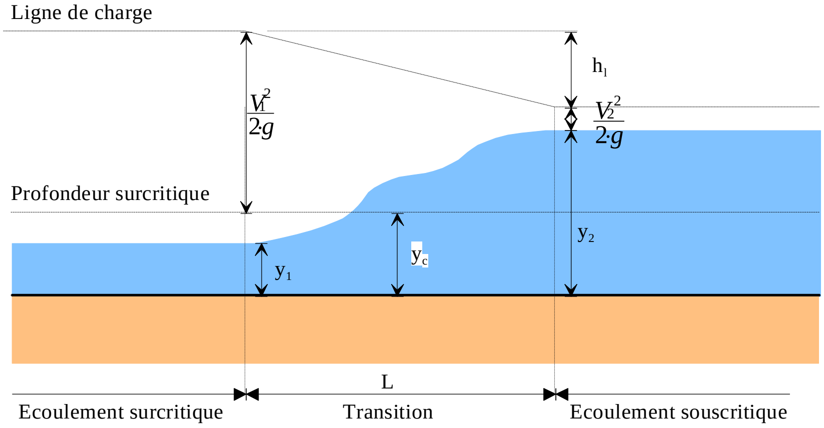
$$y_c = \frac{Q_v}{v_c} \text{ soit } y_c^{\,2} = \frac{Q_v^{\,2}}{v_c^{\,2}} \ ; \ y_c^{\,2} = \frac{Q_v^{\,2}}{g \cdot y_c} \ ; \ y_c^{\,3} = \frac{Q_v^{\,2}}{g}$$

$$y_c^{\,3} = \frac{1}{2} \cdot (y_1 + y_2) \cdot y_1 \cdot y_2$$

IV – Ressaut – application numérique

IV – 1 – Présentation

Un canal rectangulaire, de 6,1 [m]de large, transporte 11,3 [m^3/s] d'eau et les déverse sur un tablier de 6,1 [m] de large à une vitesse de 6,1 [m/s].



IV – 2 – Questions

a) Quelle est la hauteur du ressaut ?
b) Quelle est l'énergie perdue par le ressaut ?

IV – 3 – Réponses

a) Quelle est la hauteur du ressaut ?

Calculons y_1.

$$v_1 \cdot y_1 \cdot b = Q_v \text{ soit } y_1 = \frac{Q_v}{v_1 \cdot b} = \frac{11,3}{6,1 \cdot 6,1} = 0,303[m]$$

Vérifions que nous sommes en régime torrentiel :

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot y_1}} = \frac{6,1}{\sqrt{9,81 \cdot 0,303}} = 3,53 > 1$$

Calculons la valeur de y_2.

Dans la formule démontrée dans l'exercice précédent, le débit est calculé pour 1 [m] de largeur de canal. Le débit correspondant devient :

$$Q_v = \frac{11,3}{6,1} = 1,85\left[\frac{m^3}{s \cdot m}\right]$$

$$Q_v^2 = \frac{g}{2} \cdot (y_1 + y_2) \cdot y_1 \cdot y_2 \text{ soit } 1,85^2 = \frac{9,81}{2} \cdot (0,303 + y_2) \cdot 0,303 \cdot y_2$$

$y_2 = 1,37[m]$.

La hauteur du ressaut est donc de 1,37-0,303=1,067[m].

b) Quelle est l'énergie perdue par le ressaut ?

En appliquant Bernoulli entre (1)et (2), nous obtenons :

$$\Delta H_{12} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2 \cdot g} + z_1 - z_2$$

avec $v_2 \cdot y_2 \cdot b = Q_v$ soit $v_2 = \frac{Q_v}{y_2 \cdot b} = \frac{11,3}{1,37 \cdot 6,1} = 1,353[m/s]$

$$\Delta H_{12} = \frac{6{,}1^2 - 1{,}353^2}{2 \cdot g} + 0{,}303 - 1{,}37 = 0{,}73 \left[m\right].$$

L’énergie perdue correspond à une perte de chute de 1,7 [mCe], ce qui correspond à une puissance de :

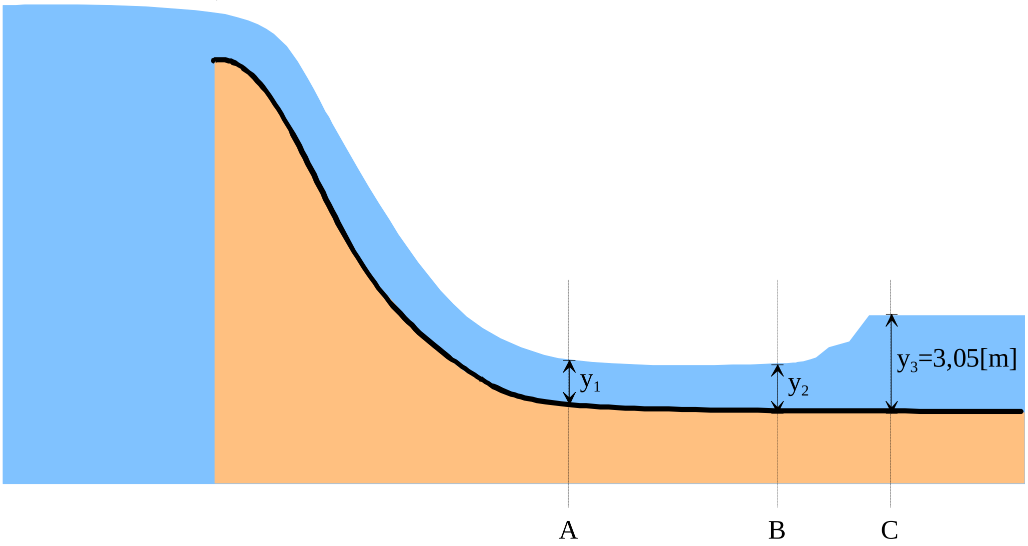
$$Pu = \rho \cdot g \cdot \Delta H_{12} \cdot Q_v = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}73 \cdot 11{,}3 = 80{,}9 \left[kW\right].$$

Un ressaut correspond à un dissipateur d’énergie !

V – Ressaut – longueur de tablier

V – 1 – Présentation

Après être passé par le déversoir de béton d'un barrage, 254,7 [m^3/s] se déversent sur un tablier en béton (n=0,013). La vitesse de l'eau à la base du déversoir est de 12,8 [m/s] et la largeur du tablier est de 54,86 [m]. Les conditions découlement vont produire un ressaut, la profondeur du canal en aval du tablier étant de 3,05 [m].



V – 2 – Questions

Pour que le ressaut s'effectue :

a) Quelle doit être la longueur du tablier ?

b) Quelle est l'énergie perdue du pied du réservoir au côté aval du ressaut ?

V – 3 – Réponses

Pour que le ressaut s'effectue :

a) Quelle doit être la longueur du tablier ?

Nous avions la relation :

$$Q_v{}^2 \cdot = \frac{g}{2}\cdot(y_2+y_3)\cdot y_2\cdot y_3 \quad soit \quad \left(\frac{254{,}7}{54{,}86}\right)^2 \cdot = \frac{9{,}81}{2}\cdot(y_2+3{,}05)\cdot y_2\cdot 3{,}05$$

$$y_2 = 0{,}418[m]$$

$$\text{Comme } Q_v = y_1\cdot v_1 \quad soit \quad y_1 = \frac{Q_v}{v_1} = \frac{\frac{254{,}7}{54{,}86}}{12{,}8} = 0{,}362[m]$$

Calculons maintenant la longueur AB sur laquelle s'effectue l'écoulement retardé.

En appliquant Bernoulli entre (1) et (2) à la surface de l'écoulement, nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + y_1 + \frac{V_1^{\;2}}{2 \cdot g} - I \cdot L = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + y_2 + \frac{V_2^{\;2}}{2 \cdot g}$$

$$L = \frac{y_1 + \frac{V_1^{\;2}}{2 \cdot g} - y_2 - \frac{V_2^{\;2}}{2 \cdot g}}{I} = \frac{y_1 + \frac{V_1^{\;2}}{2 \cdot g} - y_2 - \frac{V_2^{\;2}}{2 \cdot g}}{\left(\frac{n \cdot Qv}{S \cdot R_h^{\frac{2}{3}}}\right)^2} \quad avec \quad \left| \begin{array}{l} y_1 = 0{,}362[m] \quad et \quad y_2 = 0{,}418[m] \\ n = 0{,}013 \\ R_h \approx \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{0{,}418 + 0{,}362}{2} = 0{,}39[m] \\ V_{moy} \approx \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{12{,}8 + \frac{254{,}7}{54{,}86 \cdot 0{,}418}}{2} = 11{,}95\left[\frac{m}{s}\right] \end{array} \right.$$

Nous obtenons L=24,39 [m] .
Comme la longueur du ressaut est comprise entre 4,3 et 5,2 y_3, nous obtenons :
L_{totale}=24,39+5*3,05=40 [m]

b) Quelle est l'énergie perdue du pied du réservoir au côté aval du ressaut ?
L'énergie dissipée se mesure dans un premier temps en appliquant Bernoulli entre (2) et (3) :

$$\Delta H_{13} = \frac{V_1^2 - V_3^2}{2 \cdot g} + z_2 - z_3 = \frac{12{,}8^2 - 1{,}52^2}{2 \cdot 9{,}81} + 0{,}362 - 3{,}05 = 5{,}54[mCe]$$

Ce qui nous fait une puissance dissipée de :

$$P = \rho \cdot g \cdot Q_v \cdot \Delta H_{13} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 254{,}7 \cdot 5{,}54 = 13842[kW]$$