

L3 STPI Meca
Parcours STM et MI

FLSI655 : Structures et Dimensionnement

Les treillis



www.GenieCivilPDF.com

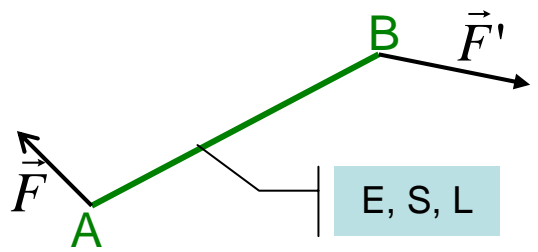
Les treillis et portiques

1. Rappel sur les poutres rectilignes
2. Généralités sur treillis
3. Calculs des efforts dans les barres
4. Calcul des déplacements
5. Exemple complet

Les treillis et portiques

1. Rappel sur les poutres rectilignes
2. Généralités sur treillis
3. Calculs des efforts dans les barres
4. Calcul des déplacements
5. Exemple complet

Sollicitations dans une barre quelconque



L : longueur initiale
 S : section
 E : module d'Young

Conditions d'équilibres
 La barre AB, soumise aux forces \vec{F} et \vec{F}' est à l'équilibre si et seulement si \vec{F} et \vec{F}' sont colinéaires à \overrightarrow{AB} , de même normes et, de sens opposés

Contrainte normale

$$\sigma_N = \frac{F}{S}$$



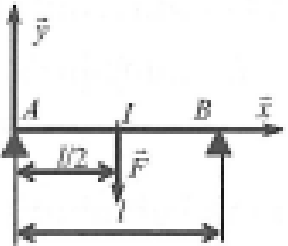
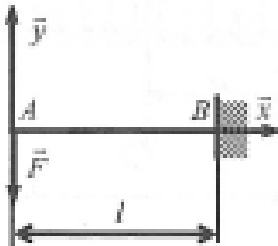
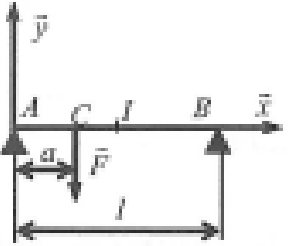
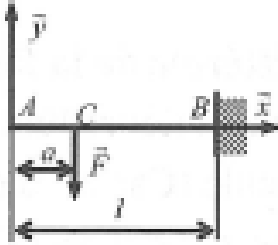
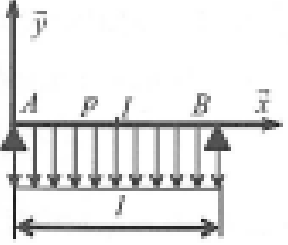
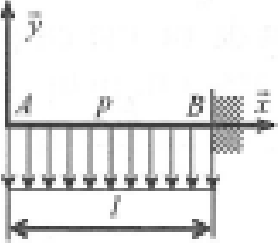
Allongement

$$\Delta L = \frac{FL}{ES}$$



Remarque : dans le cas de barres comprimées, il convient en pratique d'examiner les risques de flambage

Formulaire des déformations de flexion plane simple

<p>Cas 1 :</p> 	<p>En I :</p> $y_I = -\frac{Fl^3}{48EI_{Gz}}$ <p>En A :</p> $y'_A = -\frac{Fl^2}{16EI_{Gz}}$	<p>Cas 2 :</p> 	<p>En A :</p> $y_A = -\frac{Fl^3}{3EI_{Gz}}$ $y'_A = \frac{Fl^2}{2EI_{Gz}}$
<p>Cas 3 : ($a < l/2$)</p> 	<p>En C :</p> $y_C = -\frac{Fa^2(l-a)^2}{3EI_{Gz}l}$ <p>En I :</p> $y_I = -\frac{Fa(3l^2 - 4a^2)}{48EI_{Gz}}$ <p>En A :</p> $y'_A = -\frac{Fa(l-a)(2l-a)}{6EI_{Gz}l}$	<p>Cas 4 :</p> 	<p>En A :</p> $y_A = -\frac{F(l-a)^2(2l+a)}{6EI_{Gz}}$ <p>En C :</p> $y_C = -\frac{F(l-a)^3}{3EI_{Gz}}$ $y'_C = y'_A = \frac{F(l-a)^2}{2EI_{Gz}}$
<p>Cas 5 :</p> 	<p>En I :</p> $y_I = -\frac{5pl^4}{384EI_{Gz}}$ <p>En A :</p> $y'_A = -\frac{pl^3}{24EI_{Gz}}$	<p>Cas 6 :</p> 	<p>En A :</p> $y_A = -\frac{pl^4}{8EI_{Gz}}$ $y'_A = \frac{pl^3}{6EI_{Gz}}$

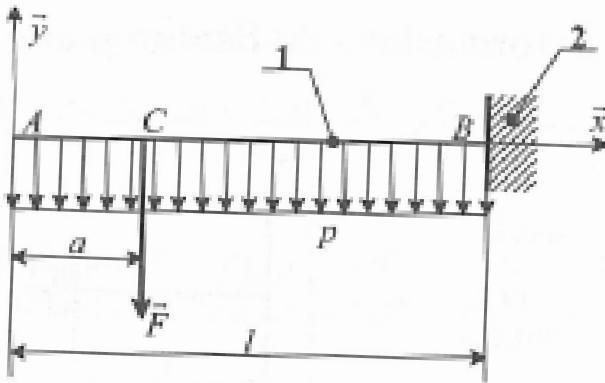
Principe de superposition des déformations

Dans la limite des déformations élastiques, le vecteur déformation en un point, dû à un système de forces extérieures est égal à la somme géométrique des vecteurs déformations dus à chacune des forces du système agissant séparément.

Application

Soit une poutre AB de longueur l . Cette poutre est encastré en B et supporte :

- Une charge verticale uniformément répartie de densité p (N/m);
- Une charge concentrée F appliquée en C d'abscisse a



Valeur de la flèche en A

Considérons les charges extérieures comme la superposition :

- de la charge répartie seule (Cas 6)
- de la charge concentrée seule (Cas 4)

Principe de superposition :

$$y_A = y_{Acas6} + y_{Acas4}$$

$$y_A = -\frac{F}{8EI_{Gz}}(l-a)^2(2l+a) - \frac{pl^4}{8EI_{Gz}}$$

Systemes hyperstatiques d'ordre 1

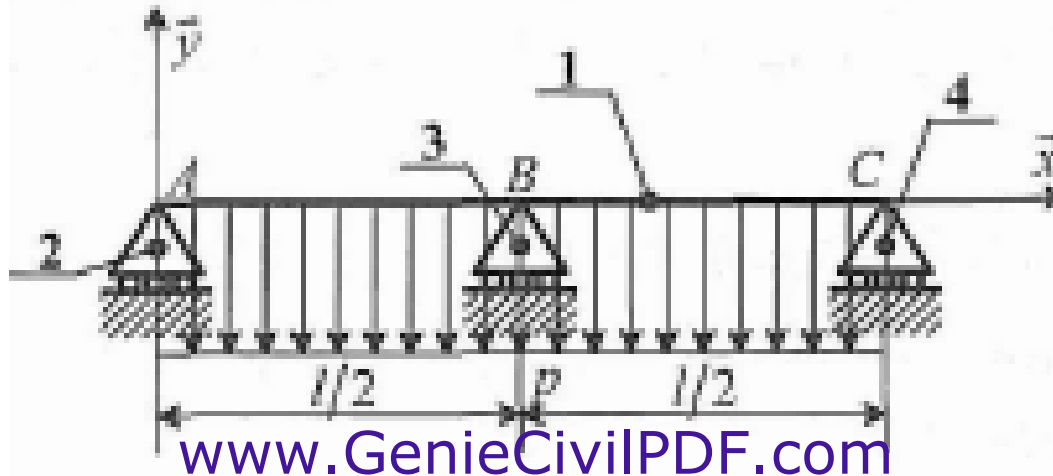
Systeme hyperstatique en equilibre

Nombre d'inconnues de liaison $N_s >$ Nombre d'equations algebriques d'equilibre r_s

h definit le degre d'hyperstatisme (nombre d'equations complementaires qu'il faudra ecrire pour resoudre le systeme).

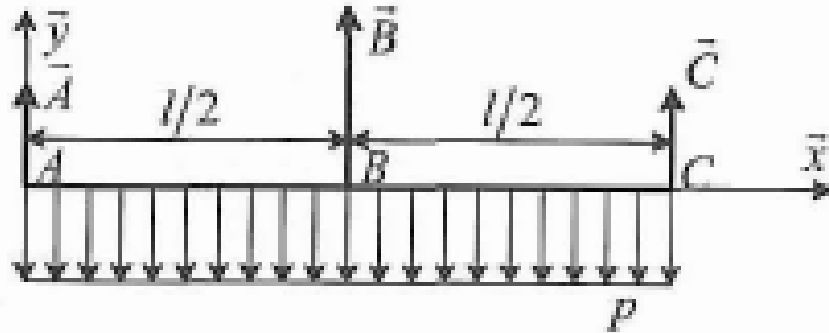
Exemple d'un cas de systemes hyperstatiques de degre 1

Une poutre 1 de section constante repose sur trois appuis de niveau sans adhesion 2,3 et 4 respectivement en \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} ; ces appuis sont equidistants. Le plan (A, \vec{x}, \vec{y}) est un plan de symetrie pour la poutre et pour les forces exterieures qui lui sont appliquees. La poutre est soumise sur toute sa longueur a une charge uniformement repartie de densite p (N/m).



Systemes hyperstatiques d'ordre 1

Désignons par \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} les résultantes des actions mécaniques des appuis 2, 3, 4 en A, B, C. Modélisons la poutre 1 par sa ligne moyenne et plaçons les résultantes A, B, C des actions des appuis.



➤ Étude de l'équilibre de la poutre

On note A, B, C les normes des vecteurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} .

Équations algébriques d'équilibre de 1 :

$$A+B+C-pl = 0 \quad (a)$$

$$A=C \quad (b)$$

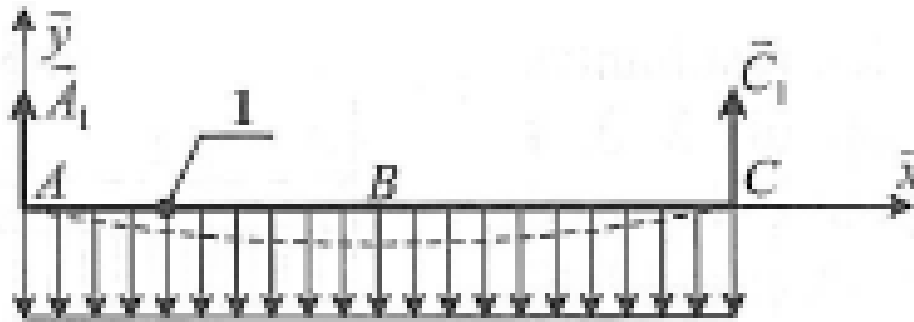
Les équations algébriques d'équilibre de 1 sont au nombre de $r_s = 2$ alors que le nombre des inconnues de liaison est de $N_s = 3$. La poutre 1 est donc bien en équilibre hyperstatique d'ordre $h = 1$.

Pour résoudre ce système il faut donc une équation complémentaire.

➤ Principe de superposition des déformations

Il nous permet de trouver cette équation.

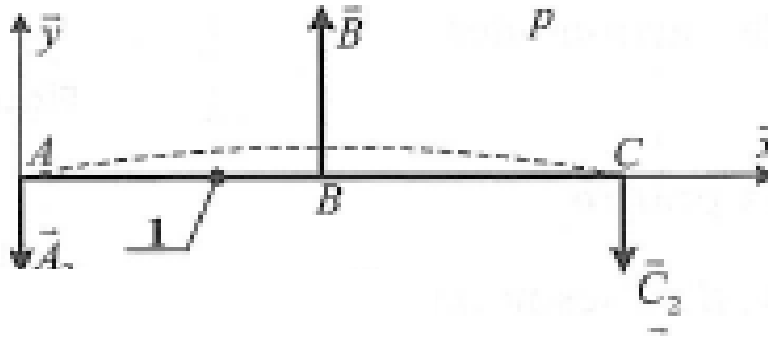
Modèle de la poutre 1 soumise seulement à la charge répartie p ; l'appui central 3 en B a été supprimé.



$$A_1 = C_1 = \frac{pl}{2} \text{ et pour la flèche partielle en B: } y_{1B} = \frac{5pl^4}{384EI_{Gz}}$$

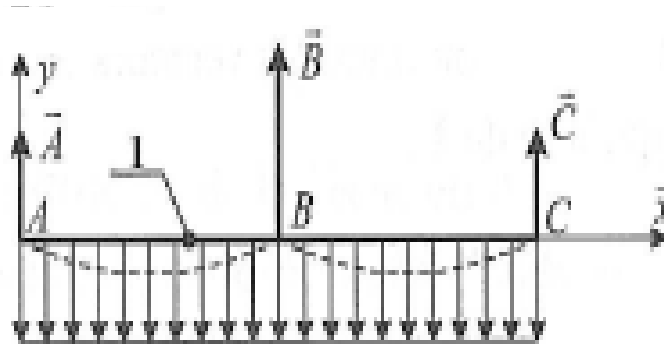
Systèmes hyperstatiques d'ordre 1

Modèle de la poutre 1 soumise seulement à l'action extérieure de l'appui 3 en B. Bien entendu ce cas de charge est fictif et on observe que les actions partielles des appuis 2 et 4 en A et C sont inversées.



$$A_2 = C_2 = \frac{B}{2} \text{ et pour la flèche partielle en B: } y_{2B} = \frac{Bl^3}{48EI_{Gz}}$$

Modèle initial de la poutre et des charges



$$y_B = y_{1B} + y_{2B} \quad \text{donc} \quad -\frac{5pl^4}{384EI_{Gz}} + \frac{Bl^3}{48EI_{Gz}} = 0 \quad (c)$$

La résolution du système (a), (b), (c) permet d'écrire

$$A = \frac{3pl}{16}; \quad B = \frac{5pl}{8}; \quad B = \frac{3pl}{16}$$

Energie de déformation dans une poutre

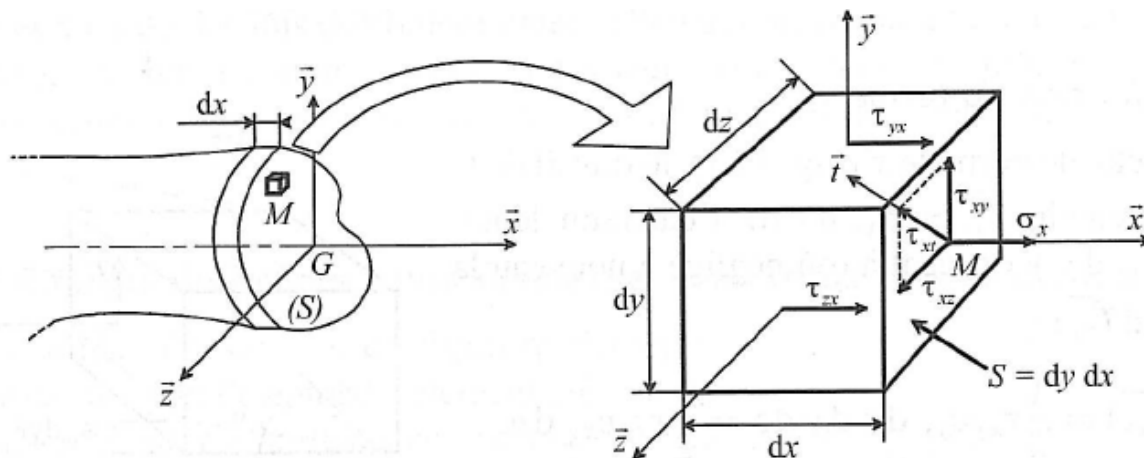
➤ Energie de déformation dans un tronçon de poutre

Soit une poutre sollicitée dans une section droite (S) de centre de surface G et de repère local principal $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, par son torseur de cohésion.

Rappel : en sollicitations simples, en un point M quelconque de (S), l'état de contrainte est tel que les termes $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ sont nuls et par conséquent l'expression caractéristique des contraintes dans la section droite est donnée sur une facette de normale \vec{x} par :

$$\vec{\Sigma}(M, \vec{x}) = \sigma_x \vec{x} + \tau_{xy} \vec{y} + \tau_{xz} \vec{z} = \sigma_x \vec{x} + \tau_{xt} \vec{t}$$

Avec : $\tau_{xt}^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2$ et \vec{t} vecteur unitaire de la contrainte tangentielle dans la section



➤ Energie de déformation dans un tronçon de poutre

Le torseur de cohésion ne dépend que de l'abscisse x , sur la ligne moyenne, de la section (S). Sur un tronçon infiniment petit dx autour de (S), on considère négligeable les variations du torseur de cohésion.

En considérant dans le tronçon de poutre, le prisme de volume élémentaire $dv = dx dy dz$ autour d'un point M , on en déduit pour l'énergie de déformation élémentaire :

$$dU = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E} \sigma_x^2 + \frac{1}{G} \tau_{xt}^2 \right] dx dy dz$$

Aussi dans une section droite (S) donnée, les contraintes σ_x et τ_{xt} ne varient qu'en fonction des coordonnées locales (y, z) du point M considéré d'où l'expression :

$$dU = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E} \int_{(S)} \sigma_x^2 dS + \frac{1}{G} \int_{(S)} \tau_{xt}^2 dS \right] dx$$

➤ Cas de l'extension compression

Soit une sollicitation d'extension dans la section droite (S) de la poutre. Le tenseur de cohésion dans cette section est défini en G par :

$$\{\tau_{\text{coh}}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \text{avec } N > 0$$

Donc l'énergie de déformation d'une poutre en extension s'écrit :

$$dU = \frac{1}{2} \frac{N^2}{ES} dx$$

➤ Cas de la flexion

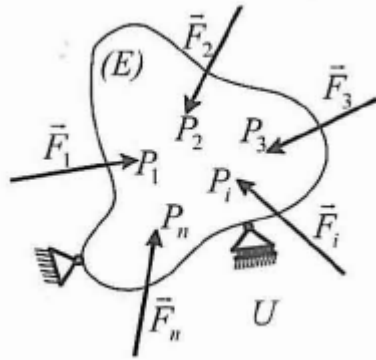
Soit une sollicitation de flexion autour de l'axe (G, \vec{y}) dans la section droite (S) de la poutre. Le torseur de cohésion dans cette section est défini en G par :

$$\left\{ \tau_{\text{coh}} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

Donc l'énergie de déformation d'une poutre en extension s'écrit :

$$dU = \frac{1}{2} \frac{M_{fy}^2}{EI_{GY}} dx$$

Théorème de Castigliano : énoncé



Soit un solide (E) soumis à un ensemble de n forces données.
 La dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à la i^{ème} force \vec{F}_i (indépendante des autres) est égale au déplacement algébrique u_i pris dans la direction et le sens de \vec{F}_i

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = u_i$$

Les déplacements et les forces sont pris au sens généralisé.
 Par exemple pour un couple C, d'axe \vec{n}_i , et de déplacement de rotation θ_i , autour de l'axe (P_i, \vec{n}_i) , le théorème de Castigliano s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \theta_i$$

➤ Cas particulier

Considérons le cas particulier où parmi l'ensemble des n forces appliquées \vec{F}_i au solide (E), les deux représentants \vec{F}_1 et \vec{F}_2 (appliqués respectivement en P_1 et P_2) soient directement opposées et de même norme F .

On montre que si l'on exprime l'énergie de déformation U à l'aide de la valeur commune F à \vec{F}_1 et \vec{F}_2 soit $U = U(F, F_3, \dots, F_n)$, l'application du théorème de Castigliano donne :

$$\frac{\partial U}{\partial F} = u_{1/2}$$

avec $u_{1/2}$ déplacement relatif des deux points d'application P_1 et P_2 .
Ce résultat sera utile pour la résolution des systèmes hyperstatiques.

Théorème de Castigliano : Théorème de la charge fictive

Le théorème de Castigliano => déplacement dans la direction d'un effort appliqué au solide étudié.

Par contre, il semble ne pas permettre de déterminer des déplacements :

- en un point du solide où aucune force n'est appliquée ;
- si les charges sont réparties sur une partie du solide.

La méthode de la charge fictive permet de répondre à cette interrogation.

Considérons un solide (E) soumis à un ensemble quelconque de forces concentrées \vec{F}_i ou réparties \vec{P}_i . On souhaite déterminer en un point P le déplacement algébrique u dans une direction \vec{n} .

Considérons une charge fictive \vec{F}_f appliquée en P dans la direction de \vec{n} .

L'énergie de déformation dans le solide est alors une fonction de l'ensemble des forces : $U = U(p_i, F_i, F_f)$.

Appliquons ensuite le théorème de Castigliano en introduisant au terme de la dérivation, le fait que la charge fictive F_f soit nulle d'où :

$$\left(\frac{\partial U(p_i, F_i, F_f)}{\partial F_f} \right)_{F_f = 0} = u$$

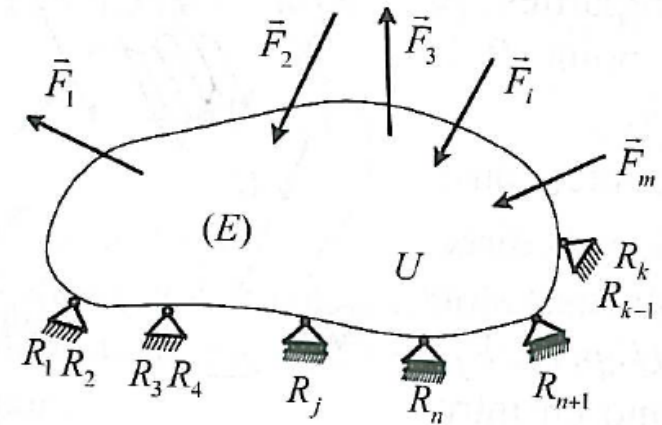
Cette relation forme le théorème de la charge fictive.

Soit une structure (E) soumise à un ensemble de m forces \vec{F}_i appliquées aux points P_i .

L'énergie de déformation est :

$$U = U(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_m)$$

Solide en liaison avec l'extérieur de telle sorte que l'ensemble soit extérieurement hyperstatique de degré n.



(E) est soumis à k action de liaison \vec{R}_j de norme R_j . On considère les n premières composantes comme les inconnues hyperstatique

Equation de la statique \rightarrow k-n actions de liaison R_j en fonction des m forces \vec{F}_i et des n inconnues de liaison choisies comme inconnues hyperstatiques :

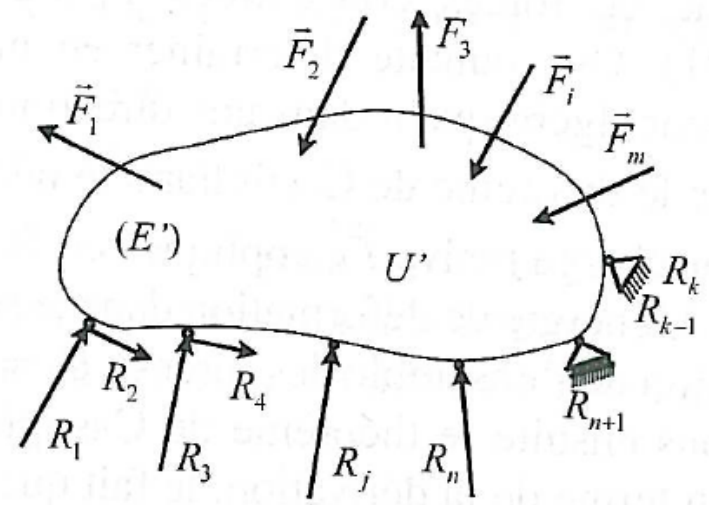
$$R_j = f_i(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_m, R_1, R_2, \dots, R_n) \text{ avec } j = n+1 \text{ à } k$$

Résolution des systèmes extérieurement hyperstatiques

Soit une structure (E') rendu isostatique en libérant les ddl correspondant aux n inconnues hyperstatiques de liaison et en considérant ces derniers comme des forces données dont les points d'application ont un déplacement nul.

Energie de déformation de (E') :

$$U' = U'(F_1, F_2, \dots, F_j, \dots, F_m, R_1, R_2, \dots, R_n)$$



Théorème de Ménabréa :

$$\frac{\partial U'}{\partial R_j} = 0 \quad j = 1 \text{ à } n$$

Les treillis et portiques

1. Rappel sur les poutres rectilignes
- 2. Généralités sur treillis**
3. Calculs des efforts dans les barres
4. Calcul des déplacements
5. Exemple complet

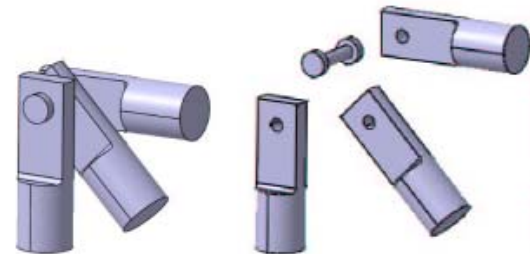
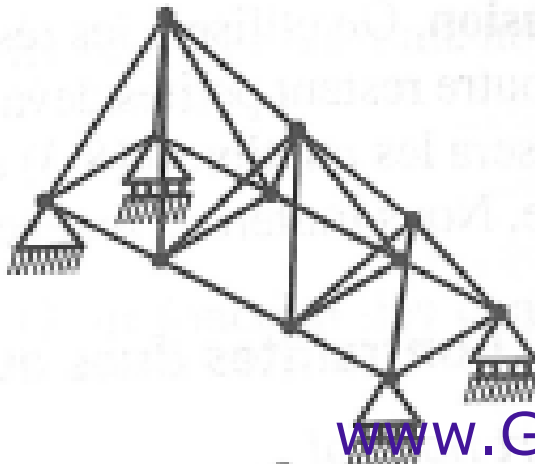
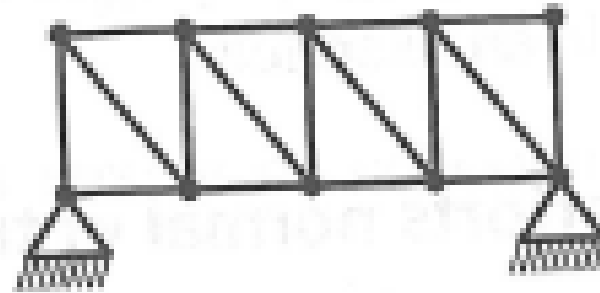
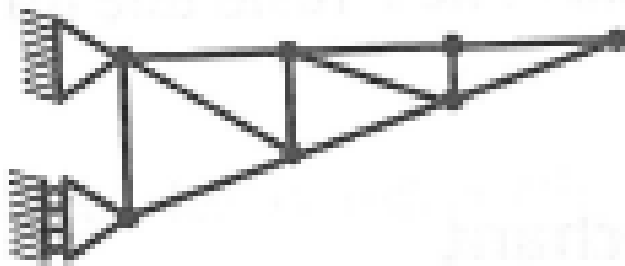
Définition

Un **système réticulé (ou treillis)** est un système composé de barres droites articulées entre elles à leurs extrémités.

On appelle **nœuds** les points d'articulation communs à plusieurs barres.

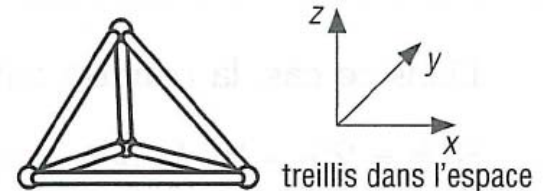
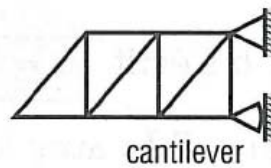
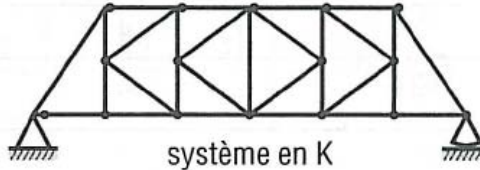
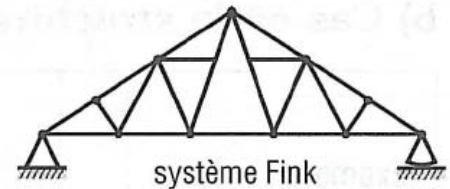
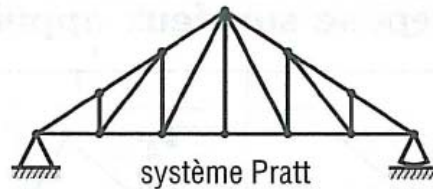
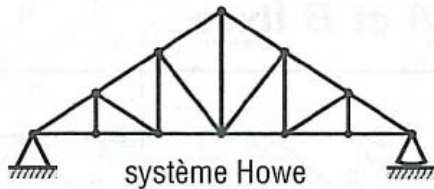
Lorsque les barres et les forces appliquées sont dans un même plan, le système est un système réticulé plan.

Un **système triangulé** est un système réticulé formé de triangles juxtaposés.



Avantages : légèreté, économique, inertie flexionnelle adaptée par variation de hauteur de la poutre

Inconvénients : temps de mise en œuvre importants



Matériaux : acier, bois, aluminium

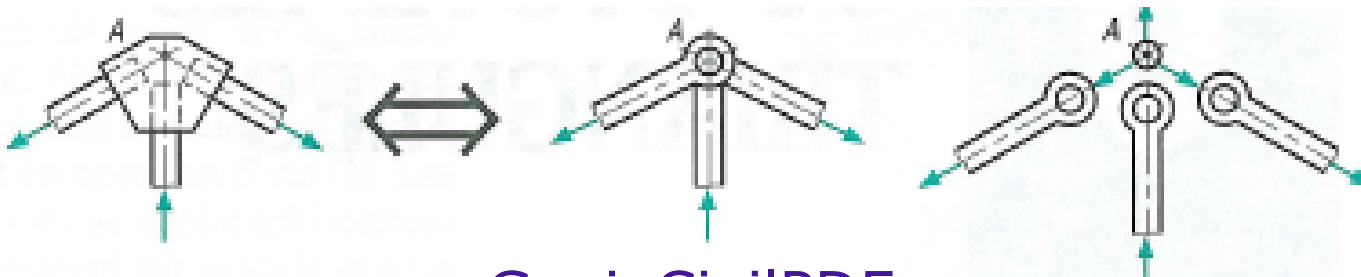
Hypothèses

- Pour déterminer les actions de liaison, on assimilera le système réticulé à un système matériel rigide

Par définition, un système matériel est constitué de solides au sens de la statique, ces solides sont donc indéformables, les barres ont une longueur invariante quel que soit l'intensité des efforts normaux et on néglige la déformation axiale des barres provenant des sollicitations de traction ou compression. Par rigide, on entend que le treillis est stable (isostatique ou hyperstatique)

- Les barres sont modélisées par leur ligne moyenne (ligne passant par le CDG des sections droites).
- On suppose les barres articulées sans frottement aux nœuds (articulation parfaite d'axe z perpendiculaire au plan du treillis)

En pratique, en construction métallique le nœud est constitué d'une plaque nommée gousset sur laquelle les barres sont le plus souvent boulonnées ou soudées. De plus certaines barres sont continues au passage d'un nœud. Parfois, lorsque les barres sont des profils creux, elles sont soudées au niveau de leurs intersections. Néanmoins tant que la longueur des barres reste grande devant les dimensions de l'assemblage, on peut considérer sans grande erreur (quelques %) que cet assemblage se comporte comme une articulation.



Hypothèses

- On néglige le poids propre des barres devant les autres charges sollicitant le treillis.
- Les forces extérieures sont toujours ponctuelles et appliquées au nœuds.
- Les calculs sont conduit exclusivement en élasticité.
- Les liaisons avec l'extérieur sont des appuis fixes ou des appuis mobiles

Avant de résoudre un système à nœuds articulés, il convient d'examiner les degrés d'hyperstatisme extérieur et intérieur pouvant compliquer la résolution.

On note pour un système plan donné :

- b le nombre de barres ;
- n le nombre de nœuds ;
- r le nombre d'inconnues de liaison avec l'extérieur.

➤ Le nombre total n_i d'inconnues statiques est la somme des b efforts intérieurs dans les barres et des r inconnues de liaisons : $n_i = b + r$.

➤ Si l'on isole un nœud, on remarque que les forces s'exerçant sur ce nœud sont toutes concourantes en celui-ci. En conséquence, l'équilibre statique du nœud implique la nullité de la résultante des forces, soit l'obtention dans le plan de deux équations algébriques d'équilibre statique par nœud. Le nombre total n_e d'équations de la statique disponible dans le plan est donc : $n_e = 2n$.

➤ Le degré d'hyperstatisme h du système se décompose en h_e degrés d'hyperstatisme extérieur et h_i degrés d'hyperstatisme intérieur. Aussi, on a la relation : $h = h_e + h_i = n_e - n_i$.

Parmi les n_e équations, trois suffisent à déterminer les inconnues de liaison d'un système isostatique extérieurement. Cette remarque amène à écrire la dernière relation sous la forme :

$$h = \underbrace{[r - 3]}_{h_e} + \underbrace{[b - (2n - 3)]}_{h_i}$$

➤ Degré d'hyperstatisme extérieur

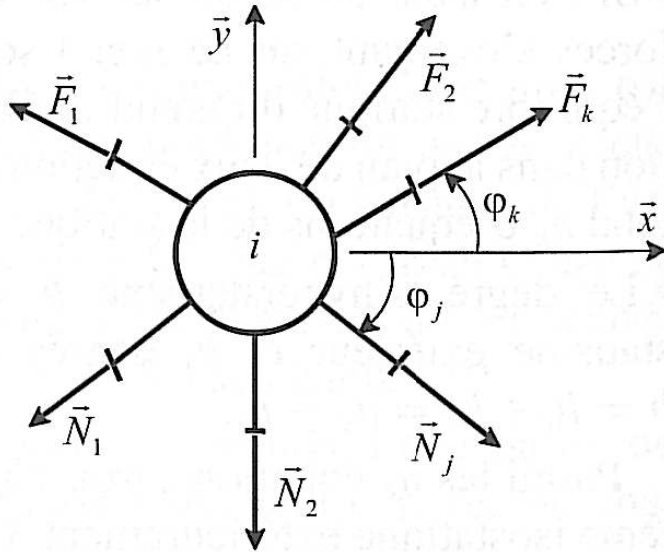
- Si $r < 3$; $h_e < 0$: le système est **instable extérieurement**. Les conditions d'appuis sont insuffisantes.
- Si $r = 3$; $h_e = 0$: le système est **isostatique extérieurement**. Les actions de liaisons sont entièrement déterminées par les équations de la statique.
- Si $r > 3$; $h_e > 0$: le système est **hyperstatique extérieurement**. Il est nécessaire d'écrire des équations supplémentaires pour déterminer les actions de liaisons.

➤ Degré d'hyperstatisme intérieur

- Si $b < 2n - 3$; $h_i < 0$: le système est **instable intérieurement**. Les efforts extérieurs déforment énormément la structure si bien qu'elle ne satisfait plus à l'hypothèse des petits déplacements énoncée en résistance des matériaux.
- Si $b = 2n - 3$; $h_i = 0$: le système est **isostatique intérieurement**. Les efforts intérieurs dans les barres sont entièrement déterminés par les équations de la statique.
- Si $b > 2n - 3$; $h_i > 0$: le système est **hyperstatique intérieurement**. Il est nécessaire d'écrire des équations supplémentaires pour déterminer les efforts intérieurs.

Les treillis et portiques

1. Rappel sur les poutres rectilignes
2. Généralités sur treillis
- 3. Calculs des efforts dans les barres**
4. Calcul des déplacements
5. Exemple complet



Soit un système plan à n nœuds articulés dans un repère (O, \vec{x}, \vec{y}) .

Isolons un nœud quelconque i reliant plusieurs barres.

Sur ce nœud s'exercent un certain nombre d'efforts extérieurs \vec{F}_k et d'efforts normaux \vec{N}_j dans les barres.

$$\text{L'équilibre du nœud } i \text{ s'écrit : } \sum_k \vec{F}_k + \sum_j \vec{N}_j = \vec{0}$$

Soit φ_k et φ_j les angles entre l'axe \vec{x} et respectivement la droite d'action des efforts extérieurs et intérieurs. La projection de la relation vectorielle ci-dessus sur les axes du repère permet d'écrire pour le nœud i deux équations algébriques :

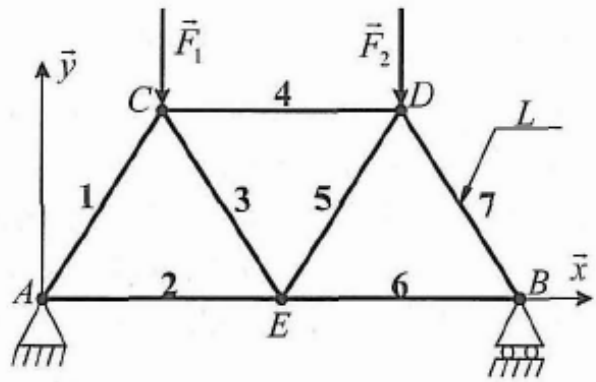
$$\begin{cases} \sum_k F_k \cos \varphi_k + \sum_j N_j \cos \varphi_j = 0 \\ \sum_k F_k \sin \varphi_k + \sum_j N_j \sin \varphi_j = 0 \end{cases}$$

Les équations de la statique fournissent trois équations d'équilibre pour tout ou partie d'un système plan isolé. Si le système est isostatique, l'isolement de la structure entière permet d'obtenir les actions de liaisons.

La méthode d'équilibre des sections ou << méthode de Ritter >> consiste à isoler une partie du système de telle sorte que n'apparaissent que trois inconnues d'efforts intérieurs. Les droites d'action de ces inconnues étant souvent concourantes, on écrit de préférence, parmi les équations de la statique disponibles, les équations de moment par rapport à ces points de concours. Cette démarche a pour effet de ne conserver qu'une inconnue dans l'équation obtenue.

Méthode d'équilibre des sections

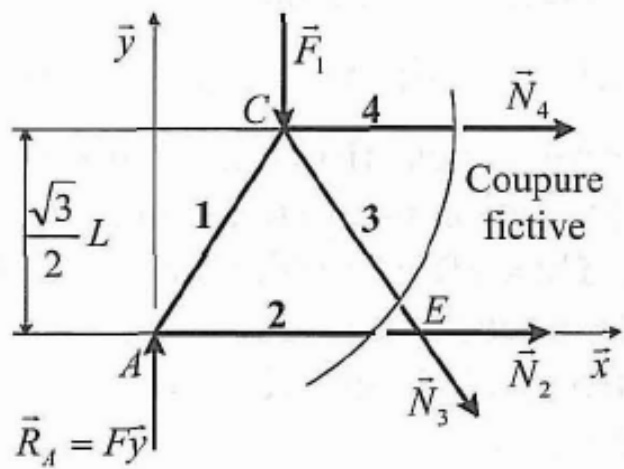
Exemple



Soit un système triangulé constitué de barres de longueur unitaire et sollicité aux nœuds sommets C et D par deux forces $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = -F\vec{y}$.

Equilibre statique de la structure entière $\rightarrow \vec{R}_A = \vec{R}_B = F\vec{y}$

Isolons la partie gauche de la structure en effectuant une coupure fictive au travers des sections des barres 2, 3 et 4. On remarque qu'une équation algébrique de moment en E permet le calcul de l'inconnue N_4 .



Hypothèse de travail. On suppose chaque effort normal positif ($N > 0$, barre en extension). Si le calcul contredit cette hypothèse ($N < 0$), la barre est donc comprimée.

La méthode d'équilibre des sections est simple et applicable dans la plupart des systèmes à nœuds articulés. Elle est très pratique pour obtenir un effort particulier

Dans le cas d'un système hyperstatique extérieurement et/ou intérieurement, il convient d'appliquer les méthodes de levée de l'hyperstatisme utilisant les **théorèmes de Castiglione-Ménabréa**.

Rappelons que dans une barre i d'un système à nœuds articulés ne règne qu'un effort normal N_i constant tout le long de la barre. L'énergie de déformation U_i de cette barre de longueur L_i , de section S_i et de module d'Young E_i s'écrit donc :

$$U_i = \frac{1}{2} \frac{N_i^2 L_i}{E_i S_i}$$

Pour un système composé de b barres, l'énergie totale U a pour expression :

$$U = \sum_{i=1}^b U_i = \sum_{i=1}^b \frac{1}{2} \frac{N_i^2 L_i}{E_i S_i}$$

Les treillis et portiques

1. Rappel sur les poutres rectilignes
2. Généralités sur treillis
3. Calculs des efforts dans les barres
- 4. Calcul des déplacements**
5. Exemple complet

Théorème de Castigliano et de la charge fictive

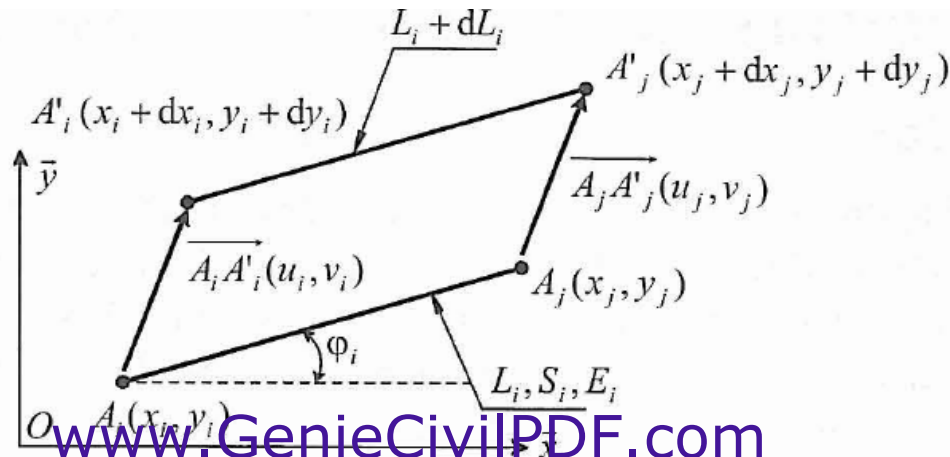
La connaissance des efforts intérieurs et de liaison permet d'écrire l'expression de l'énergie de déformation du système, ceci à l'aide de la relation (voir partie rappel).

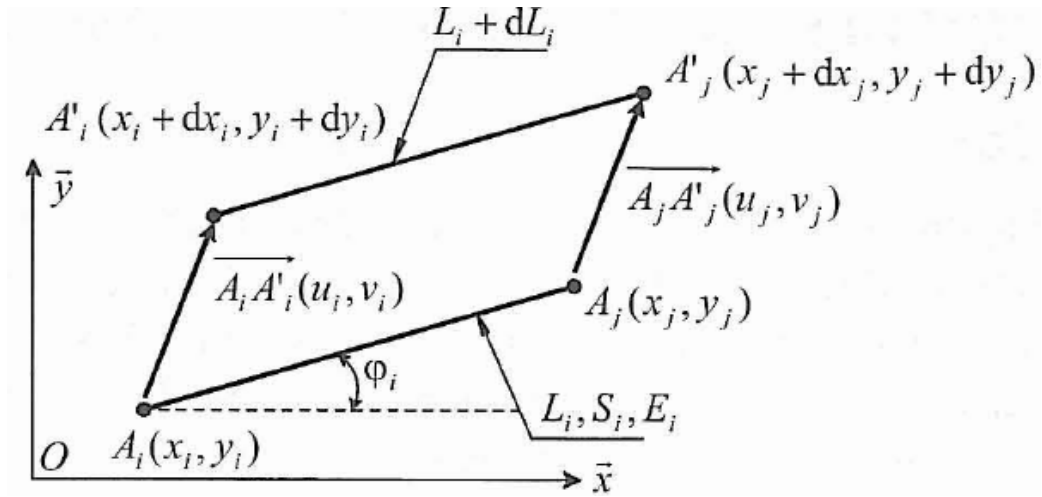
Au nœud et dans la direction d'un effort extérieur, le déplacement est donné par le théorème de Castigliano.

Pour tout autre déplacement, on a recours à l'introduction d'une charge extérieure fictive (voir le théorème de la charge fictive).

Méthode de compatibilité des déplacements

Soit une barre i de longueur L_i dans un plan (O, \vec{x}, \vec{y}) . Les nœuds extrémités de la barre ont pour coordonnées : $A_i(x_i, y_i)$ et $A_j(x_j, y_j)$. La barre fait un angle φ_i avec l'axe (O, \vec{x}) .





Longueur de la barre L_i : $L_i^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2$

Au cours d'une petite déformation, les nœuds A_i et A_j viennent se positionner en $A'_i(x_i + dx_i, y_i + dy_i)$ et $A'_j(x_j + dx_j, y_j + dy_j)$ et la barre subit en conséquence un petit allongement dL_i . Faisons apparaître ces termes en différenciant la relation précédente :

$$2L_i dL_i = 2(x_j - x_i)(dx_j - dx_i) + 2(y_j - y_i)(dy_j - dy_i)$$

Méthode de compatibilité des déplacements

Notons les petits déplacements suivant les axes du plan $u_i = dx_i$; $u_j = dx_j$;
 $v_i = dy_i$; $v_j = dy_j$ et divisons l'expression précédente par L_i afin de faire apparaître les termes :

$$\cos\varphi_i = \frac{x_j - x_i}{L_i} \text{ et } \sin\varphi_i = \frac{y_j - y_i}{L_i}$$

On a alors : $dL_i = (u_j - u_i)\cos\varphi_i + (v_j - v_i)\sin\varphi_i$

Dans la barre i , La loi de Hooke s'écrit : $\frac{N_i}{S_i} = E_i \frac{dL_i}{L_i}$

Compatibilité des déplacements avec l'effort normal N_i :

$$(u_j - u_i)\cos\varphi_i + (v_j - v_i)\sin\varphi_i = \frac{N_i L_i}{E_i S_i}$$

Conclusion : Connaissant les efforts dans les barres et un minimum de conditions en déplacement, en particulier aux liaisons (certains déplacements y sont nuls), on peut déterminer les déplacements de tous les nœuds du système.