RAPPELS DE LA STATIQUE

1) Introduction:

La statique couvre l'étude des forces extérieures agissant sur un solide au repos. L'équilibre statique du solide exige que la somme de toutes les forces agissant sur le solide soit égale à zéro. Les équations fondamentales de la statique sont à la base des calculs de la RDM. Malheureusement, beaucoup d'étudiant et d'ingénieurs qui connaissent pourtant ces équations ont de la difficulté à les utiliser efficacement. Cela peut être causé par une pratique insuffisante ou inappropriée, ou par l'incompréhension des principes fondamentaux sur lesquels ces équations sont basées.

Dans ce chapitre, on rappellera les équations d'équilibre statique et comment les utilisées pour déterminer les réactions d'appuis des structures, particulièrement des structures planes isostatiques.

2) Forces:

Une force est une grandeur vectorielle. Elle est caractérisée par :

- son point d'application ;
- sa ligne d'action (direction) ;
- son sens ;
- son intensité (module) ;

On voit sur la figure 1 la ligne d'action, le sens montré par la flèche, le point d'application (o) et l'intensité de la force qui est représentée par la longueur du vecteur F ($\left\| \overrightarrow{OA} \right\|$) .

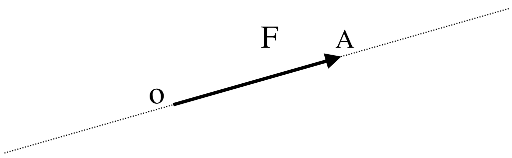


Fig.1

> ***Note*** : *Pour simplifier la présentation, on ne montre pas la petite flèche au-dessus des symboles désignant les forces .*

3) Equilibre statique d'un solide:

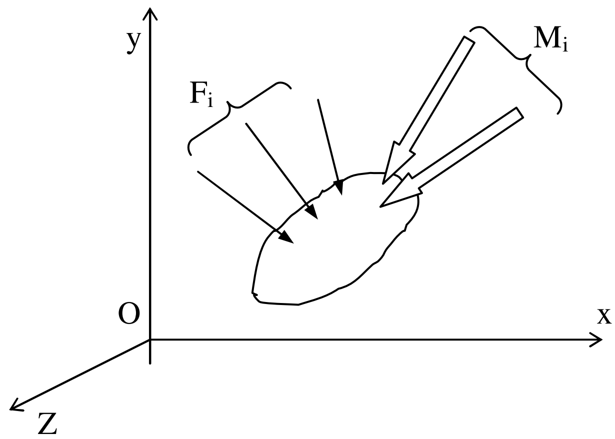
3-1. Principe fondamental de la statique :

Pour qu'un système matériel soit en équilibre, il faut et il suffit que le torseur des actions extérieures qui lui sont appliquées soit équivalent à zéro.

$$\{\zeta_{ext}\} = \left\{ F \begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_z \end{cases} \quad M \begin{cases} M_x \\ M_y \\ M_z \end{cases} \right\} = \{0\}$$

3-2. Cas général : (Dans l'espace)

Soit un solide matériel indéformable (S) en équilibre soumis à des forces F_i et à des couples M_i :



Soient :

- un repère orthonormé $\mathfrak{R}$ (o,x,y) ;
- x_i, y_i, z_i les coordonnées de Ai , point d'application de la force F_i ;
- F_x, F_y, F_z les composantes de la force F_i ;
- M_x, M_y, M_z les composantes du couple M_i.

Traduisons le principe fondamentale de la statique en écrivant que le torseur des actions extérieures est équivalent à zéro : $\begin{cases} \sum F_i = 0 \\ \sum M_i + \sum OA_i \wedge F_i = 0 \end{cases}$

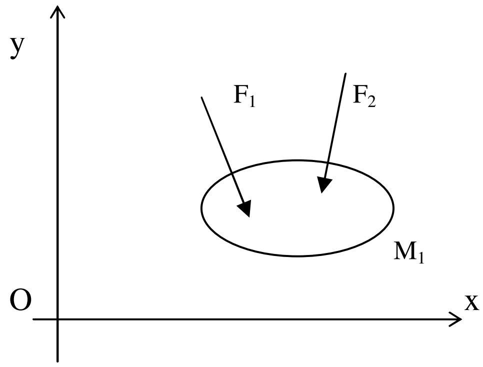
> Remarque : *Cette égalité torsorielle est vraie quel que soit le point choisi pour exprimer le torseur des actions externes (ce point est appelé point de calcul).*

Ces deux relations vectorielles, projetées sur les axes du repère $\mathfrak{R}$ conduisent aux six équations :

$$\underbrace{\begin{cases} \sum Fx = 0 \\ \sum Fy = 0 \\ \sum Fz = 0 \end{cases}}_{\textit{Forces}} \qquad \underbrace{\begin{cases} \sum Mx + \sum (yF_z - zF_y) = 0 \\ \sum My + \sum (zF_x - xF_z) = 0 \\ \sum Mz + \sum (xF_y - yF_x) = 0 \end{cases}}_{\textit{moments}}$$

3-3. *Cas particulier :* (dans le plan)

Si toutes les forces sont dans un même plan, il est judicieux de choisir un repère R tel que le plan (Ox, Oy) coïncide avec le plan des forces .



Dans ces conditions, la projection sur les axes des équations du principe fondamental de la statique fournit trois équations scalaires : :

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z + \sum (xF_y - yF_x) = 0 \end{cases}$$

Note : *Pour établir les équations d'équilibre statique, on admet que les solides ou les structures considérées sont rigides, c'est-à-dire qu'ils ne changent pas de géométrie ou déforme sous l'action des forces, qu'ils sont indéformables.*

4) Actions-réactions:

Les actions sont les forces appliquées à une structure (les forces connues) . Ces actions ou forces créent des réactions aux appuis de la structure (forces inconnues). L'ensemble des forces et des réactions d'appui doit constituer un système de forces extérieures en équilibre.

On peut calculer les réactions d'appui, par l'application du principe fondamentale de la statique, tout en respectant le type de la liaison.

Les réactions (ou forces de liaison) sont caractérisées suivant les types de liaison (appuis). Pour faire apparaître les réactions d'appui, il faut donc couper la structure au droit de ses appuis.

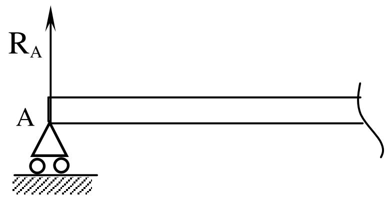
5) Appuis usuels:

Les types de liaisons usuelles en Génie Civil :

5-1.L'appui simple :

L'appui simple est une liaison qui supprime le déplacement relatif suivant une direction entre les solides en contact.

a_Symbole :



b_Exemple : (fig.3) Poutre reposant sur un corbeau solidaire d'un poteau par l'intermédiaire d'un appui néoprène (le néoprène assurant la possibilité de déplacement horizontal et de rotation autour du centre O de la liaison).

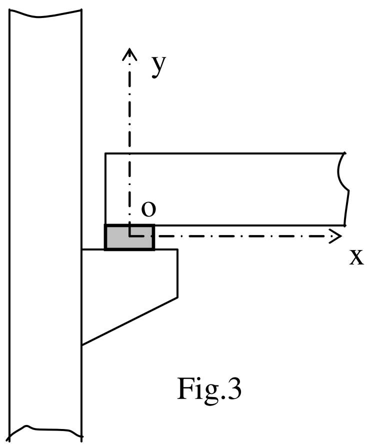


Fig.3

Le seul effort transmissible dans cette liaison est une force portée par y. Donc, lorsqu'on isolera la poutre par exemple, afin d'étudier son équilibre, il faudra remplacer cette liaison par une « réaction de liaison » inconnue qui sera une force R appliquée en O et dont la direction sera celle de l'axe Oy (perpendiculaire à la direction suivant laquelle l'appui peut se déplacer) Dans le cas de la Fig.3, le torseur des efforts transmissibles dans la liaison s'écrit :

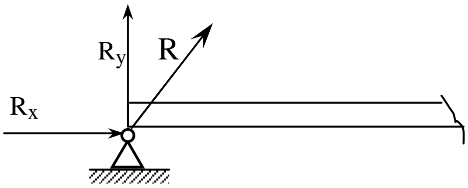
$$\left\{ \zeta_{ext} \right\}_O = \left\{ R \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ Ry \\ 0 \end{array} \right. \quad M \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \right\}$$

> ***Note*** : *On supposera toujours que la liaison est « bilatérale », c'est-à-dire que le contact sera toujours maintenu, même en cas de soulèvement de la poutre.*

5-2. L'articulation :

L'articulation est une liaison qui supprime tout déplacement dans le plan du système. Par contre, elle autorise la rotation entre les deux solides en liaison.

a_Symbole :



b_Exemple : (fig.4) poteau métallique articulé en pied sur un massif en béton :

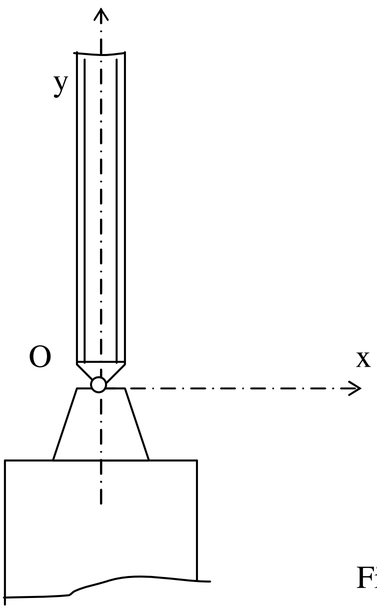


Fig. 4

Les efforts transmissibles dans cette liaison sont des forces portée par x et y .

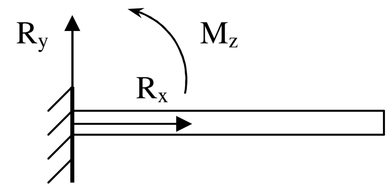
Par conséquent, le torseur des efforts transmissibles dans la liaison s'écrit :

$$\{\zeta_{ext}\}_O = \left\{ R \begin{cases} Rx \\ Ry \\ 0 \end{cases} \quad M \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \right\}$$

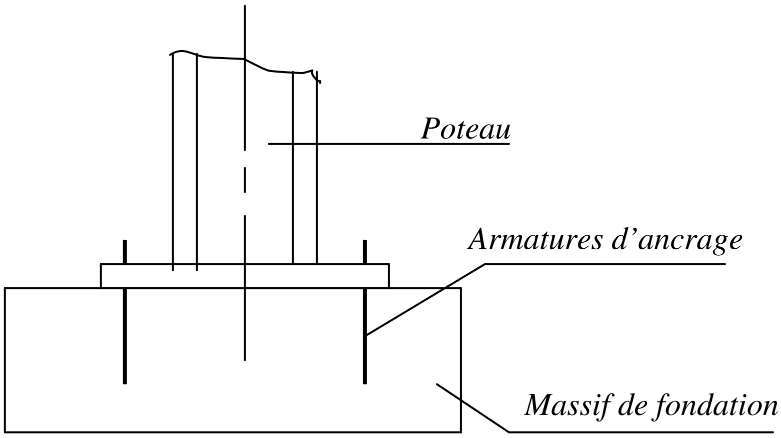
5-3. L'encastrement :

L'encastrement est une liaison qui supprime tout déplacement entre les solides en liaison .

a) Symbole :



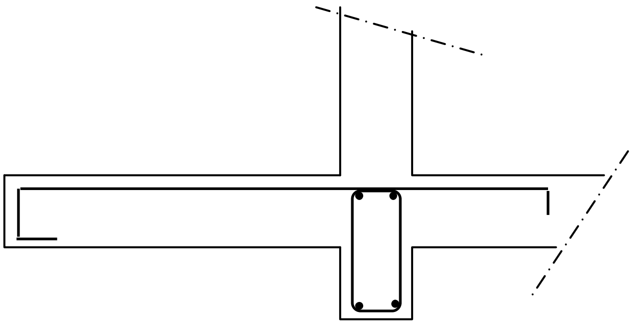
b)Exemple :



Le torseur des efforts transmissibles dans cette liaison s'écrit :

$$\left\{ \zeta_{ext} \right\}_O = \left\{ R \begin{cases} Rx \\ Ry \\ 0 \end{cases} \quad M \begin{cases} 0 \\ 0 \\ Mz \end{cases} \right\}$$

***A**utres exemples* : *balcon en B.A (ferraillage):*



6) Structures isostatiques et hyperstatiques :

Une structure est en équilibre lorsque les conditions exposées au paragraphe II sont remplies, (équations fondamentales d'équilibre statique).

Pour une **structure plane**, ces équations sont au nombre de trois. Soit R le nombre des inconnues des réactions d'appui d'une structure plane chargée dans son plan :

- Si $R = 3$, les équations de la statique permettent de déterminer les réactions d'appui. On dit que la structure est **isostatique extérieurement** ;
- Si $R > 3$, le nombre des équations d'équilibre est insuffisant pour permettre la détermination des réactions d'appui. On dit que la structure est **hyperstatique extérieurement** d'ordre R-3, il faut donc R-3 équation supplémentaire pour déterminer toutes les réactions ;
- Si $R < 3$, l'équilibre de la structure ne peut être assuré. On dit que la structure est **instable** ; il s'agit d'un mécanisme. On appelle mécanisme une structure qui n'est pas complètement immobilisée par ses appuis ;

7) Applications :

✓ Calculer les réactions d'appui de la poutre montée ci-après :

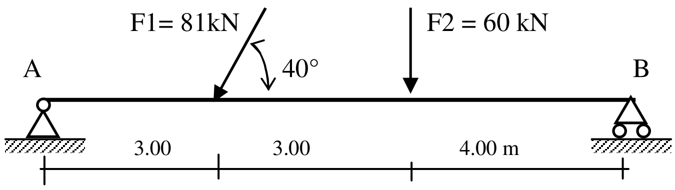


Fig.1

<u>*Solution :*</u>

On montre sur la figure suivante les composantes suivant x et y des réactions d'appui en A et B, les intensité de la force F_2 et les composantes de la force F_1.

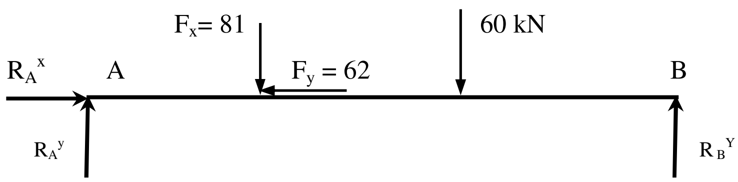


Fig.1a

On a :

$$\begin{cases} \Sigma F_x = R_A^x - F_1.\cos\alpha = 0 & (1) \\ \Sigma F_Y = R^Y{}_A + R^B{}_Y - F_1.\sin\alpha - F_2 = 0 & (2) \\ \Sigma \mathcal{M}_{/A} = -10.\,R^B{}_Y + 3.\,F_1.\sin\alpha + 6.\,F_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

de ces trois équations, on trouve que :

$$R^Y{}_A = 60.4 \text{ kN} \qquad R^B{}_Y = 51.6 \text{ kN} \qquad R^x{}_A = 62 \text{ kN}$$

<u>*Note*</u> : les resultats étant positives, le sens choisi pour les réactions est bon .

✓ **C**alculer les réactions d'appui de l'arc à trois articulations monté ci-après :

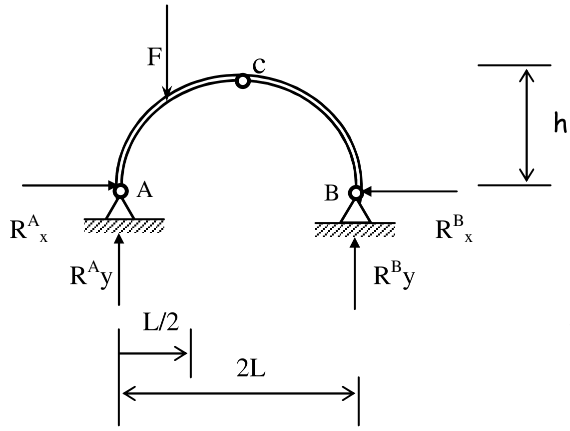


Fig.2

Données :

F=80 kN, L = 40m , h = 20m

Solution :

On considère les composants horizontales et verticales R^A_x, R^B_x, R^A_y et R^B_y des réactions d'appui en A et en B. Comme on le constate, on a quatre inconnues et seulement trois équations d'équilibre statique. Cependant la géométrie de l'arc à trois articulations permet d'écrire une équation supplémentaire et ainsi de résoudre le problème. Donc, un arc à trois articulations est une structure isostatique.

A l'articulation C, en considérant l'équilibre du tronçon de gauche, on a :

$$\Sigma\, Mc = 20\, R^A_y - 20\, R^A_x - (80\,.10\,) = 0$$

A l'articulation B, en considérant l'équilibre de la structure, on a :

$$\Sigma\, M_B = 40\, R^A_y - (\,80.30\,) = 0$$

de ces deux équations, on trouve que :

$$R^A_y = 2400/40 = 60 \text{ kN}$$

Et

$$R^A_x = 400/20 = 20 \text{ kN}$$

On a

$$\Sigma\, Fx = R^A_x - R^B_X = 0$$

d'où

$$R^B_X = R^A_X = 20 \text{ kN}$$

Et

$$\Sigma\, Fy = R^A_y + R^B_y - 80 = 0$$

d'où

$$R^B_Y = 20 \text{ kN}$$

✓ La structure à trois articulations, représentée ci-après, est soumise aux charges indiquées sur cette figure. Déterminer les réactions aux appuis A et E. Les charges montrées sur la figure sont des charges perpendiculaire aux tronçons ABC et CDE de la structure et elles sont uniformément réparties :

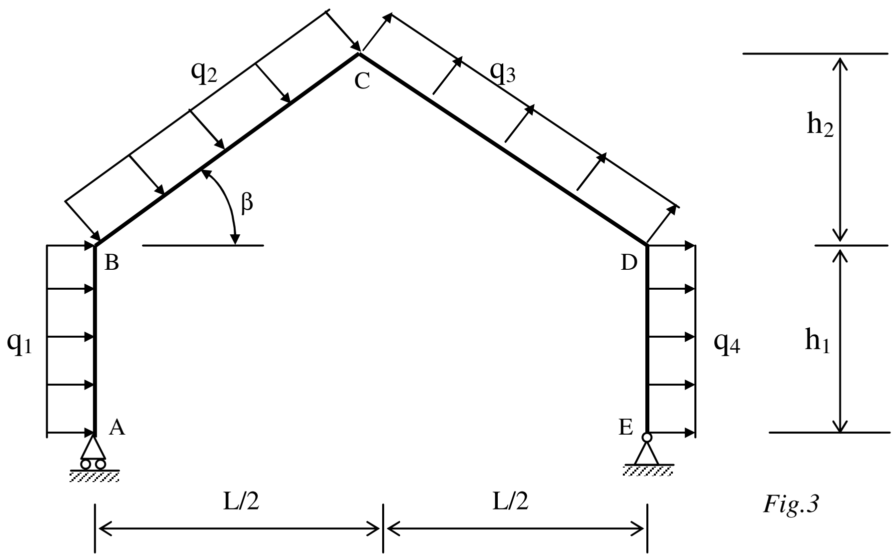


Fig.3

Solution :

Pour faciliter les réactions le calcul des réactions aux appuis A et E, on peut remplacer les charges montrées sur la figure 3.a par leurs résultantes (voir figure 3.b) du tronçon ABC est égal à :

$$BC = \sqrt{8^2+10^2} = 12.8 \text{ m}$$

Il fait avec l'horizontale un angle β donné par :

$$\text{tang } \beta = 8/10 = 0.8$$

$$\text{d'où} \quad \beta = 38.66°$$

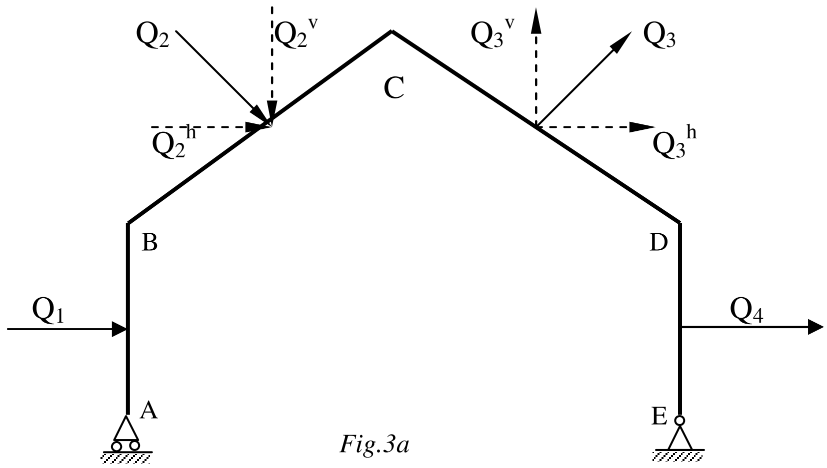


Fig.3a

Sur la partie AB du tronçon ABC, la résultante Q_1 est égale à :

$$Q_1 = 6 \times 10 = 60 \text{ kN}$$

Sur la partie BC, la résultante Q2 est égale à :

$$Q_2 = 12{,}8 \times 12 = 153{,}6 \text{ kN}$$

Les composantes verticale et horizontale de Q2 sont égales à

$$Q^2{}_v = Q_2.\cos \beta = 153{,}6 \times 0.781 = 120 \text{ kN}$$

$$Q^2{}_h = Q_2.\sin \beta = 153{,}6 \times 0.625 = 96 \text{ kN}$$

Sur la partie CD du tronçon CDE, la résultante Q3 est égale à

$$Q_3 = 12{,}8 \times 15 = 192 \text{ kN}$$

Les composantes verticale et horizontale de Q3 sont égales à

$$Q^3{}_v = Q3 \cos\beta = 192 \times 0{,}781 = 150 \text{ kN}$$

$$Q^3{}_h = Q3 \sin\beta = 192 \times 0.625 = 150 \text{ kN}$$

Enfin, sur la partie DE, la résultante Q4 est égale à

$$Q_4 = 6 \times 15 = 90 \text{ kN}$$

- détermination des réactions aux appuis A et E :

on a

$$\Sigma M_c = 10.\ R^A{}_Y - 14.\ R^A{}_x + (60 \times 11) + (96 \times 4) + (120 \times 5) = 0$$

$$\Sigma M_E = 20.R^A{}_Y + (120 \times 15) - [(60 + 90) \times 3] - [(96 + 120) \times 10] - (150 \times 5) = 0$$

de cette dernière équation, on trouve que

$$R^A{}_Y = 78 \text{ kN}$$

Et en remplaçant la valeur de RAY dans l'équation donnant Σ Mc, on trouve que

$$R^A{}_X = 731{,}1 \text{ kN}$$

De l'équation, on a

$$\Sigma F_x = - R^A{}_X - R^E{}_X + 60 + 96 + 120 + 90 = 0$$

d'où

$$R^E{}_X = 192{,}9 \text{ kN}$$

On a aussi

$$\Sigma F_y = R^A{}_y - R^E{}_y + 120 - 150 = 0$$

d'où

$$R^E{}_y = 48 \text{ kN}$$

Les résultats étant positives, les sens données aux composantes des réactions en A et en E sont exacts. On vérifie les résultats en prenant les moments à l'articulation C en commençant par l'appui E.

$$\Sigma Mc = (192,9 \text{ x } 14) – (48 \text{ x } 10) – (90 \text{ x } 11) – (120 \text{ x } 4) – (150 \text{ x } 5) = 0$$

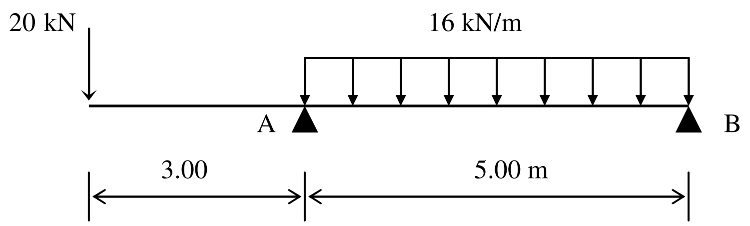
$$2700 – 480 – 990 – 480 –750 = 0$$

Commentaire : le remplacement des charges uniformément réparties par leurs résultantes doit être considéré uniquement pour le calcul des réactions aux appuis. Pour le calcul des efforts internes comme les moments fléchissants, les efforts tranchants et les efforts normaux aux différentes sections de la structure, on doit utiliser les charges uniformément réparties. Dans le cas contraire, les résultats des calculs sont inexacts.

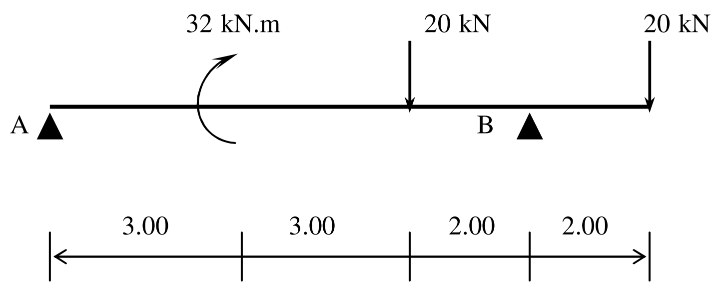
EXERCICES

Déterminer les valeurs des composantes horizontales et verticales des réactions d'appui des structures montrées ci-après.

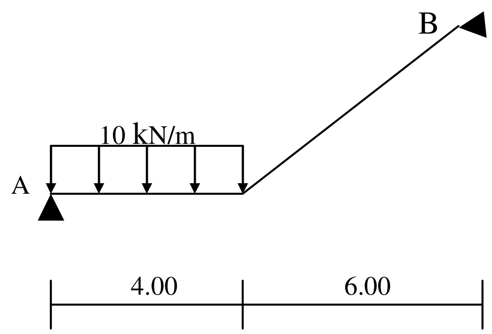
Exercice I.1



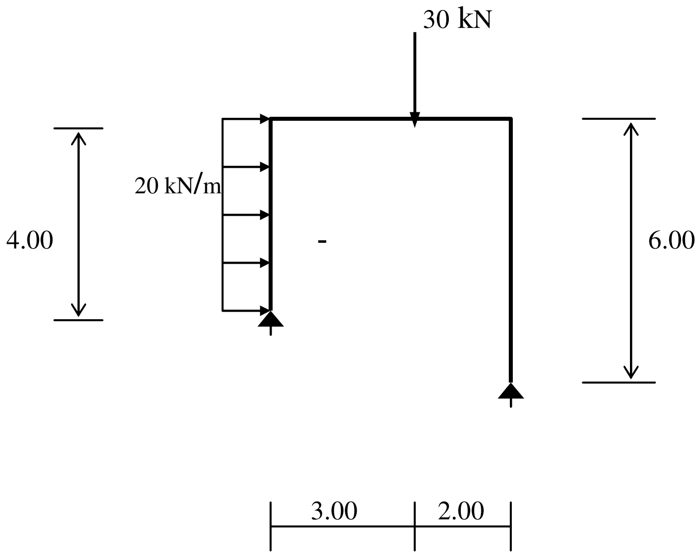
Exercice I.2



Exercice I.3



Exercice I.4


30 kN
20 kN/m
4.00
6.00
3.00
2.00