

République Tunisienne  
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la  
Technologie

Université El Manar



المعهد التحضيري للدراسات الهندسية بالمنار

Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs – El Manar

*Kamel MEHDY & Sihem ZAGHDOUNY*



*Cours et Exercices de  
Résistance des  
Matériaux*

*Classes Préparatoires aux Etudes d'Ingénieurs*

*2<sup>èmes</sup> années PT*

Janvier 2011

# Avant-propos

*Ce support de cours et ces applications sont destinés aux étudiants des 2<sup>èmes</sup> années du cycle préparatoire aux études d'ingénieurs. Ils sont élaborés conformément au programme officiel fixé par le Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie (République Tunisienne).*

*Les bases théoriques de ce support figurent dans de nombreux ouvrages de Résistance des Matériaux.*

*Une sélection d'exercices est fournie à la fin de ce document. Ces exercices constituent des sujets d'examen et des devoirs surveillés que nous avons proposés aux étudiants l'I.P.E.I. El Manar (2002-2010)*

***Kamel MEHDI & Sihem ZAGHDOUDI***

# TABLE DES MATIERES

<b>I. LES HYPOTHESES DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX.....</b>	<b>1</b>
I.1. BUT DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX .....	1
I.2. HYPOTHESES GENERALES .....	1
I.2.1. <i>Hypothèses sur les matériaux.....</i>	<i>1</i>
<b>II. GENERALITES SUR LES POUTRES .....</b>	<b>1</b>
II.1. DEFINITION D'UNE POUTRE .....	1
II.2. HYPOTHESE SUR LES POUTRES .....	2
II.3. PARAMETRAGE DE LA POUTRE .....	2
II.4. HYPOTHESES SUR LES EFFORTS EXTERIEURS.....	3
II.5. DOMAINE DE VALIDITE DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX.....	3
<b>III. PROPRIETES GEOMETRIQUES D'UNE SECTION DROITE.....</b>	<b>3</b>
III.1. CENTRE DE SURFACE OU CENTRE DE GRAVITE D'UNE SURFACE PLANE.....	3
III.1.1. <i>Définition :</i> .....	<i>3</i>
III.1.2. <i>Définition</i> .....	<i>4</i>
III.2. MOMENT QUADRATIQUE D'UNE SURFACE PLANE PAR RAPPORT A UN AXE.....	4
III.2.1. <i>Définition</i> .....	<i>4</i>
III.3. MOMENT QUADRATIQUE POLAIRE.....	5
<b>IV. TORSEUR DES EFFORTS INTERIEURS .....</b>	<b>6</b>
IV.1. DEFINITION DU TORSEUR DES EFFORTS INTERIEURS .....	6
IV.2. COMPOSANTES DES ELEMENTS DE REDUCTION EN G DU TORSEUR DES EFFORTS DE COHESION.....	7
IV.2.1. <i>Définition du repère local lié à la section droite (S).....</i>	<i>7</i>
IV.2.2. <i>Composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion dans le repère local.</i>	<i>7</i>
IV.3. RELATION ENTRE EFFORT TRANCHANT ET MOMENT DE FLEXION.....	9
IV.4. DEFINITION DES SOLlicitATIONS SIMPLES .....	10
<b>V. NOTIONS SUR LES CONTRAINTES .....</b>	<b>11</b>
<b>I. DEFINITION .....</b>	<b>12</b>
<b>II. ESSAI DE TRACTION .....</b>	<b>13</b>
II.1. ÉTUDE EXPERIMENTALE : COURBE CONTRAINTE - DEFORMATION .....	13
II.2. CARACTERISTIQUES MECANQUES .....	13
<b>III. ETUDE DES DEFORMATIONS.....</b>	<b>14</b>
<b>IV. CONTRAINTE DANS UNE SECTION DROITE.....</b>	<b>14</b>
<b>V. CONDITION DE RESISTANCE.....</b>	<b>14</b>
<b>VI. ALLONGEMENT (OU RACCOURCISSEMENT) <math>\Delta L</math> D'UNE POUTRE DE LONGUEUR L....</b>	<b>15</b>
<b>VII. NOTION DE CONCENTRATION DE CONTRAINTES .....</b>	<b>15</b>
<b>I. DEFINITION .....</b>	<b>16</b>
<b>II. ETUDE DES DEFORMATIONS .....</b>	<b>16</b>
<b>III. ETUDE DES CONTRAINTES.....</b>	<b>17</b>
<b>IV. CONDITION DE RESISTANCE.....</b>	<b>17</b>

IV.1.	CARACTERISTIQUES DES MATERIAUX EN CISAILLEMENT .....	17
IV.2.	CONDITION DE RESISTANCE .....	18
<b>I.</b>	<b>DEFINITION .....</b>	<b>19</b>
<b>II.</b>	<b>ESSAI DE TORSION SIMPLE.....</b>	<b>20</b>
<b>III.</b>	<b>ETUDE DES DEFORMATIONS .....</b>	<b>20</b>
<b>IV.</b>	<b>ETUDE DES CONTRAINTES.....</b>	<b>21</b>
<b>V.</b>	<b>CONDITION DE RESISTANCE.....</b>	<b>22</b>
V.1.	RELATION ENTRE CONTRAINTE ET MOMENT DE TORSION : .....	22
V.2.	CONDITION DE RESISTANCE : .....	22
V.3.	CONCENTRATION DE CONTRAINTES : .....	22
<b>VI.</b>	<b>CONDITION DE RIGIDITE.....</b>	<b>23</b>
<b>I.</b>	<b>DEFINITION .....</b>	<b>24</b>
<b>II.</b>	<b>ETUDE DES DEFORMATIONS .....</b>	<b>25</b>
II.1.	ESSAI DE FLEXION .....	25
<b>III.</b>	<b>ETUDE DES CONTRAINTES.....</b>	<b>26</b>
III.1.	CONTRAINTES NORMALES .....	26
III.2.	CONTRAINTES TANGENTIELLES .....	26
<b>IV.</b>	<b>CONDITION DE RESISTANCE .....</b>	<b>27</b>
IV.1.	CONTRAINTES NORMALES .....	27
IV.2.	CONTRAINTES TANGENTIELLES .....	27
<b>V.</b>	<b>DEFORMATION DE LA POUTRE .....</b>	<b>27</b>
V.1.	EQUATION DE LA DEFORMEE .....	27
V.2.	CONDITIONS AUX LIMITES .....	28
<b>VI.</b>	<b>CONDITION DE RIGIDITE.....</b>	<b>28</b>
<b>I.</b>	<b>TD-1 : TORSEUR DE COHESION .....</b>	<b>29</b>
<b>II.</b>	<b>TD-2 : EXTENSION – COMPRESSION .....</b>	<b>32</b>
<b>III.</b>	<b>TD-3 COMPRESSION - CISAILLEMENT – TORSION .....</b>	<b>34</b>
<b>IV.</b>	<b>TD-4 : EXTENSION &amp; FLEXION PLANE.....</b>	<b>36</b>
<b>V.</b>	<b>TD-5 : TORSION SIMPLE.....</b>	<b>41</b>



## I. Les hypothèses de la résistance des matériaux

### I.1. But de la résistance des matériaux

La résistance des matériaux (RdM) étudie le comportement du solide déformable. Elle s'intéresse particulièrement au calcul des dimensions des systèmes mécaniques pour qu'ils soient en mesure de supporter les efforts qui leur sont appliqués pendant leur service dans les conditions de sécurité requise.

### I.2. Hypothèses générales

Ces hypothèses concernent essentiellement les matériaux utilisés, la forme des solides étudiés et le type d'action mécanique exercée.

#### *I.2.1. Hypothèses sur les matériaux*

- **Continuité de la matière** : Nous considérons que la matière est continue et que le matériau est homogène et isotrope. (Voir cours de technologie de production de 1ère année)
- **Caractéristiques mécaniques des matériaux** : Le comportement des matériaux est déterminé expérimentalement par des essais standard permettant de qualifier et de mesurer les paramètres du comportement. Exemple : essai de traction.

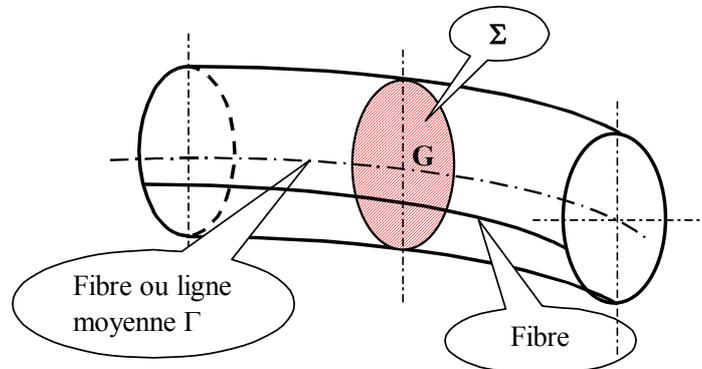
## II. Généralités sur les poutres

### II.1. Définition d'une poutre

Nous appelons poutre un solide dont une des dimensions est grande vis-à-vis de deux autres et qui est soumis à un système de sollicitation qui le fait fléchir ou le déformé.

Nous considérons dans cette partie que les poutres à plan moyen. C'est-à-dire qu'on admet un plan de symétrie dans le sens de la longueur.

Une poutre est en général un solide engendré par une aire plane ( $\Sigma$ ) dont le centre de gravité (G) décrit une courbe ( $\Gamma$ ). Le plan de l'aire ( $\Sigma$ ) reste normal à la courbe ( $\Gamma$ ).



- L'aire de la section ( $\Sigma$ ) est appelée section droite ou section normale de la poutre.
- La courbe ( $\Gamma$ ) est appelée fibre moyenne de la poutre.
- Si la fibre moyenne est une droite, la poutre est dite droite.

### II.2. Hypothèse sur les poutres

- Les dimensions transversales de la poutre considérée sont petites par rapport à sa longueur. Pour une poutre droite, le rapport de la hauteur sur la longueur doit être compris entre 1/5 et 1/30.

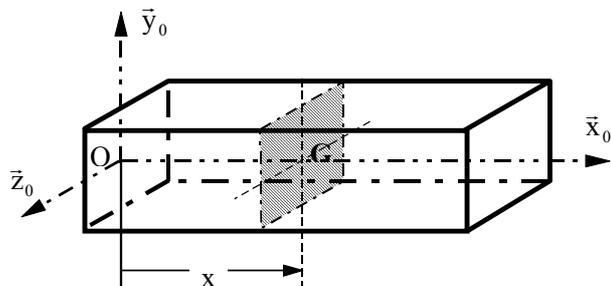
$$\frac{1}{30} \leq \frac{h}{L} \leq \frac{1}{5} \quad (\text{valeur courante de } 1/10 \text{ à } 1/15)$$

Pour les poutres courbes, ce rapport peut s'abaisser à 1/50 et même à 1/100.

- Le rayon de courbure de la fibre moyenne est suffisamment grand par rapport à la dimension transversale de la poutre. En général, ce rayon doit être supérieur à 5 fois la hauteur de la section.
- Dans le cas où la poutre est de section variable, la variation de la section doit être lente et progressive.

### II.3. Paramétrage de la poutre

Soit  $R_0(O, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$  un repère lié à la poutre. Ce repère est choisi tel que  $(O, \bar{x}_0)$  soit porté par la ligne moyenne de la poutre. Ce repère est appelé repère de position. Il est utilisé pour :



- L'étude de l'équilibre de la poutre (E) et la détermination des actions mécaniques extérieures qu'elle supporte.

- Repérer la section droite (S) de la poutre (E) dans laquelle nous cherchons les contraintes.

Dans le repère  $R_0$ , on a :  $\vec{OG} = x \vec{x}_0$

#### II.4. Hypothèses sur les efforts extérieurs

Toute action mécanique est représentée par un torseur en un point. Ces actions peuvent être concentrées ou réparties, exercées à distance ou en contact.

Les efforts extérieurs sont situés dans le plan de symétrie de la poutre ou disposés symétriquement par rapport à ce plan.

#### II.5. Domaine de validité de la résistance des matériaux

**Hypothèse de Navier-Bernoulli** : Les sections planes normales aux fibres avant la déformation restent planes et normales aux fibres après la déformation.

**Hypothèse de Barré de Saint Venant** : Les résultats de la RdM ne s'appliquent qu'à une distance suffisante de la zone d'application des efforts concentrés (problème de concentration de contraintes).

**Domaine d'élasticité** : Dans le cadre de la RdM, les pièces qui constituent un système mécanique ne doivent pas entrer dans le domaine des déformations plastiques.

### III. Propriétés géométriques d'une section droite

#### III.1. Centre de surface ou centre de gravité d'une surface plane

##### III.1.1. Définition :

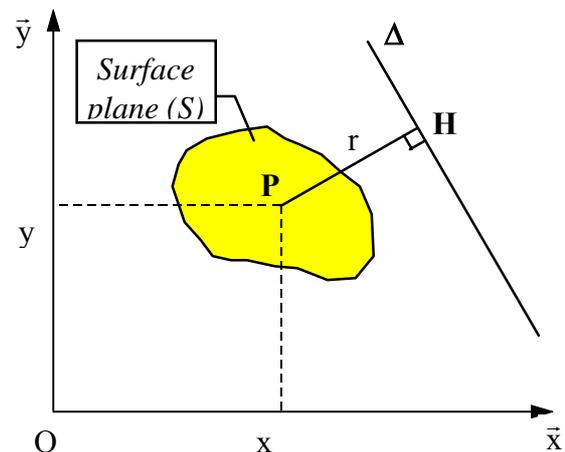
On considère une surface plane (S) du plan  $\pi(O, \vec{x}, \vec{y})$ .

Nous appelons centre de surface de la surface plane (S), le point G tel que :

$$\int_{P \in S} \vec{GP} \, ds = \vec{0} \text{ ou encore } \vec{OG} = \frac{1}{S} \int_{P \in S} \vec{OP} \, ds$$

avec  $\vec{OP} = x \vec{x} + y \vec{y}$  et  $\vec{OG} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y}$

$$\Rightarrow x_G = \frac{1}{S} \int_{P \in S} x \, ds \text{ et } y_G = \frac{1}{S} \int_{P \in S} y \, ds$$



- $\int_{P \in S} x \, ds$  appelé moment statique de la surface (S) par rapport à l'axe  $(O, \vec{y})$
- $\int_{P \in S} y \, ds$  appelé moment statique de la surface (S) par rapport à l'axe  $(O, \vec{x})$

### III.1.2. Définition

On considère une surface plane (S) et  $\Delta$  une droite de son plan. Soit H, le point projeté orthogonal d'un point P de (S) sur  $\Delta$ .

Nous appelons moment statique de la surface plane (S) par rapport à la droite  $\Delta$  de son plan le scalaire défini par :

$$m(S)_{/\Delta} = \int_{P \in S} \overline{PH} \, ds \quad ; \quad \overline{PH} \text{ doit être affecté de signe (+) ou (-) selon que}$$

l'élément de surface ds et d'un côté ou de l'autre de la droite  $\Delta$ .

#### Remarques

- Si le point G est confondu avec l'origine du repère O, alors :

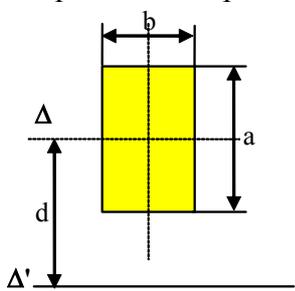
$$m(S)_{/(O, \vec{x})} = \int_{P \in S} y \, ds = 0 \quad \text{et} \quad m(S)_{/(O, \vec{y})} = \int_{P \in S} x \, ds = 0$$

- D'une manière générale, si le centre de gravité G est un point de la droite  $\Delta$ , alors  $m(S)_{/\Delta} = 0$ .

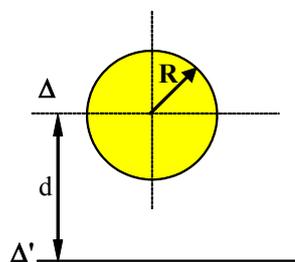
- Soit  $\Delta'$  une droite parallèle à  $\Delta$  et distant de d de celui-ci. On vérifie facilement que  $m(S)_{/\Delta'} = m(S)_{/\Delta} + S.d$ .

d doit être affecté de signe (+) ou (-) selon la position respective de  $\Delta$  et  $\Delta'$  par rapport à la surface (S).

- Le moment statique d'une surface par rapport à un axe de symétrie est nul. (Puisque cette axe passe par le centre G).



$$m(S)_{/\Delta'} = m(S)_{/\Delta} + S.d = a.b.d$$



$$m(S)_{/\Delta'} = m(S)_{/\Delta} + S.d = \pi.R^2.d$$

## III.2. Moment Quadratique d'une surface plane par rapport à un axe

(par analogie avec le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe)

### III.2.1. Définition

Nous appelons moment quadratique d'une surface plane (S), par rapport à une droite  $\Delta$  de son plan, le scalaire positif défini par :

$$I(S)_{/\Delta} = \int_{P \in S} PH^2 \, ds = \int_{P \in S} r^2 \, ds \quad \text{avec} \quad r = \left\| \overrightarrow{PH} \right\| \quad \text{et H est le point projeté orthogonal du}$$

point P sur  $\Delta$ .

#### Remarques

- On considère les deux droites parallèles  $\Delta(G, \vec{n})$  et  $\Delta'(M, \vec{n})$  distant de  $d$ . On vérifie que  $I(S)_{/\Delta'} = I(S)_{/\Delta} + S \cdot d^2$  (Théorème de HUYGHENS).
- Le moment quadratique est homogène à une longueur à la puissance 4. Il s'exprime en  $m^4$  ou en  $cm^4$  ou en  $mm^4$ .

### III.3. Moment Quadratique Polaire

Le moment quadratique polaire d'une surface plane (S) par rapport à un point O de son plan est le scalaire positif défini par :

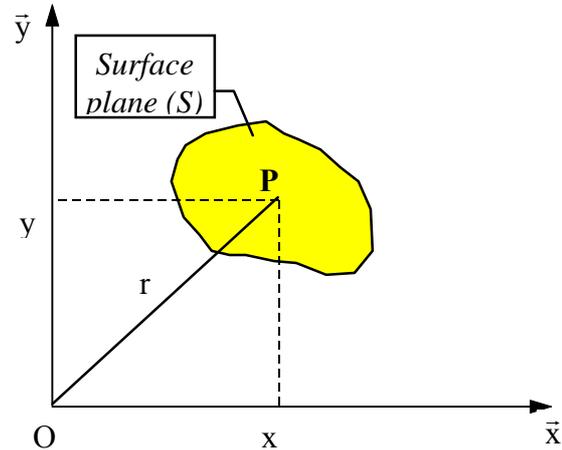
$$I_o(S) = \int_{P \in S} r^2 ds \text{ avec } r = \left\| \vec{OP} \right\|$$

Dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  on a :

$$I(S)_{/\Delta(O, \vec{x})} = \int_{P \in S} y^2 ds,$$

$$I(S)_{/\Delta(O, \vec{y})} = \int_{P \in S} x^2 ds$$

$$I_o(S) = \int_{P \in S} (x^2 + y^2) ds = I(S)_{/\Delta(O, \vec{x})} + I(S)_{/\Delta(O, \vec{y})}.$$

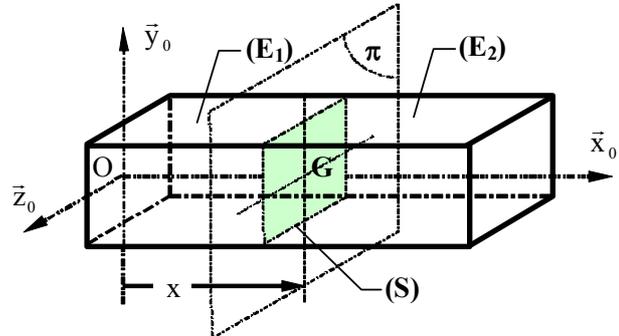


## IV. Torseur des efforts intérieurs

### IV.1. Définition du torseur des efforts intérieurs

On considère une poutre (E), en équilibre, par rapport au repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , sous l'effet des actions mécaniques exercées par le milieu extérieur noté  $(\bar{E})$ .

Imaginons un plan  $(\pi)$  qui décompose la poutre en deux parties  $(E_1)$  et  $(E_2)$ .



On désigne par (S) la section commune à  $(E_1)$  et  $(E_2)$ .

- L'équilibre de la poutre (E) se traduit en tout point par :  $\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\} = \{\vec{0}\}$   
Au point G, centre de gravité de la section (S), la relation précédente entraîne :

$$\begin{cases} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) \\ \vec{m}_G(\bar{E} \rightarrow E)_G \end{cases} = \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{0} \end{cases}$$

- L'équilibre du tronçon  $(E_1)$  de la poutre (E), se traduit par :  $\{\mathcal{T}(\bar{E}_1 \rightarrow E_1)\} = \{\vec{0}\}$   
avec  $(\bar{E}_1)$  le milieu extérieur pour  $(E_1)$  qui comprend :
  - le milieu extérieur  $(\bar{E})$ ,
  - le tronçon  $(E_2)$ .

Les actions mécaniques exercées par le tronçon  $(E_2)$  sur  $(E_1)$  à travers la section (S) sont extérieures pour  $(E_1)$ , mais intérieures pour la poutre (E). La connaissance des actions dites de cohésion ou actions élastiques et leur répartition à travers la section (S) constitue l'un des buts de la résistance des matériaux.

Par conséquent, l'équilibre du tronçon  $(E_1)$  de la poutre (E), se traduit par :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_1)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\} = \{\vec{0}\} \Rightarrow \{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\} = -\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_1)\}$$

#### Définition

Le torseur  $\{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\}$  sera appelé torseur des actions de cohésion ou torseur des actions élastiques qu'exerce le tronçon  $(E_2)$  sur le tronçon  $(E_1)$  à travers la section (S). On le note par  $\{\mathcal{T}_{coh}\}$ .

Les éléments de réduction en G du torseur  $\{\mathcal{T}_{coh}\}$  sont alors :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_G = \begin{cases} \vec{R}(E_2 \rightarrow E_1) \\ \vec{m}_G(E_2 \rightarrow E_1)_G \end{cases} = - \begin{cases} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_1) \\ \vec{m}_G(\bar{E} \rightarrow E_1)_G \end{cases}$$

**Notation :**

Dans le but de simplifier l'écriture des équations, nous désignons les éléments de réduction au point G, du torseur des efforts de cohésion dans la poutre exercés par le tronçon (E<sub>2</sub>) sur le tronçon (E<sub>1</sub>), par  $\vec{R}$  et  $\vec{m}_G$ .

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{m}_G \end{matrix} \right\}_G = - \left\{ \begin{matrix} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_1) \\ \vec{m}_G(\bar{E} \rightarrow E_1) \end{matrix} \right\}_G \quad (1)$$

**Remarque**

- Les éléments de réduction en G du torseur  $\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}$  sont des fonctions de l'abscisse x du centre de surface G de la section (S).
- Comme la poutre (E) est en équilibre par rapport au repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , alors  $\left\{ \mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E) \right\} = \left\{ \mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_1) \right\} + \left\{ \mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_2) \right\} = \left\{ \vec{0} \right\}$

Par conséquent, les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion pourront être également exprimés comme suit :

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{m}_G \end{matrix} \right\}_G = + \left\{ \begin{matrix} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_2) \\ \vec{m}_G(\bar{E} \rightarrow E_2) \end{matrix} \right\}_G \quad (2)$$

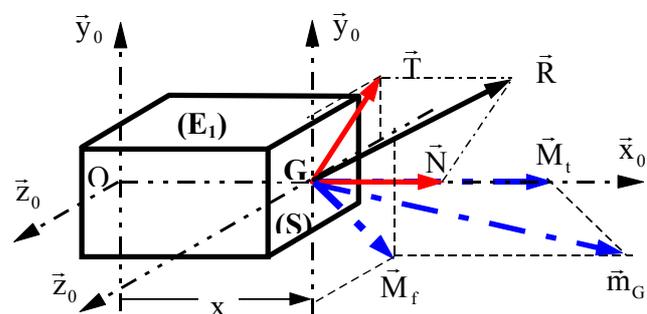
Pour effectuer les calculs pratiques de  $\vec{R}$  et  $\vec{m}_G$  on pourra utiliser, soit la relation donnée par (1), soit la relation donnée par (2). Le choix dépendra uniquement de la difficulté de leur expression.

**IV.2. Composantes des éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion**

**IV.2.1. Définition du repère local lié à la section droite (S)**

On considère le tronçon (E) de la poutre (E) en équilibre, par rapport au repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

On désigne par  $R_G(G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le repère local orthonormé direct, lié à la section (S) d'abscisse x ( $\vec{OG} = x \vec{x}_0$ ), tel que  $(G, \vec{x}_0)$  soit confondu avec la normale extérieure en (G) à (S) (dirigée vers l'extérieur de la matière).



**IV.2.2. Composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion dans le repère local**

Supposons que les éléments de réduction au point G du torseur des efforts de cohésion

sont connus :  $\{\mathcal{T}_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{m}_G \end{array} \right\} .$

En projection sur les axes du repère  $R_G(G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , les composantes des vecteurs  $\vec{R}$  et  $\vec{m}_G$  se notent conventionnellement comme suit :

- La projection de  $\vec{R}$  sur la normale extérieure  $(G, \vec{x}_0)$  est notée par  $N$ , appelée effort normal.
- La projection de  $\vec{R}$  sur l'axe  $(G, \vec{y}_0)$  est notée par  $T_y$ , appelée effort tranchant suivant  $(G, \vec{y}_0)$ .
- La projection de  $\vec{R}$  sur l'axe  $(G, \vec{z}_0)$  est notée par  $T_z$ , appelée effort tranchant suivant  $(G, \vec{z}_0)$ .
- La projection de  $\vec{m}_G$  sur la normale extérieure  $(G, \vec{x}_0)$  est notée par  $M_t$ , appelée moment de torsion.
- La projection de  $\vec{m}_G$  sur l'axe  $(G, \vec{y}_0)$  est notée par  $M_{fy}$ , appelée moment de flexion suivant  $(G, \vec{y}_0)$ .
- La projection de  $\vec{m}_G$  sur l'axe  $(G, \vec{z}_0)$  est notée par  $M_{fz}$ , appelée moment de flexion suivant  $(G, \vec{z}_0)$ .

Par conséquent :  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = N\vec{x}_0 + T_y\vec{y}_0 + T_z\vec{z}_0 \\ \vec{m}_G = M_t\vec{x}_0 + M_{fy}\vec{y}_0 + M_{fz}\vec{z}_0 \end{array} \right.$

On pose :  $\vec{T} = T_y\vec{y}_0 + T_z\vec{z}_0$  ; appelé effort tranchant.

$\vec{M}_f = M_{fy}\vec{y}_0 + M_{fz}\vec{z}_0$  ; appelé moment de flexion.

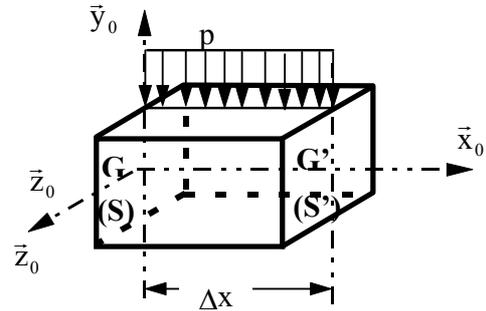
Nous rappelons que les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion sont des fonctions de l'abscisse  $x$  du centre de gravité de la section (S).

Ainsi :  $\{\mathcal{T}_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{ll} N(x) & M_t(x) \\ T_y(x) & M_{fy}(x) \\ T_z(x) & M_{fz}(x) \end{array} \right\}_{(x_0, y_0, z_0)} ;$

La représentation graphique de ces fonctions donne les diagrammes de composantes algébriques des éléments de réduction. Ces graphes sont appelés diagrammes de l'état de sollicitation de la poutre.

**IV.3. Relation entre effort tranchant et moment de flexion**

On considère la répartition de charge, d'équation  $p(x)$  sur une poutre (E) ou sur un tronçon de la poutre. Afin de simplifier le calcul, nous supposons que la charge est uniformément répartie définie par sa densité linéique  $p$  parallèle à la direction du vecteur  $\vec{y}_0$ .



On considère un élément de la poutre de longueur  $\Delta x$ , délimité par les sections droites (S) et (S') de centre de gravité respectivement G et G'.

On suppose qu'entre (S) et (S') aucune charge concentrée n'est appliquée (voir fig. )

Les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion au centre de gravité de la section (S) d'abscisse  $x$  sont :

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{coh}} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(x) \\ \vec{m}_G(x) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} N(x) & M_t(x) \\ T_y(x) & M_{fy}(x) \\ T_z(x) & M_{fz}(x) \end{array} \right\}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)} ;$$

soient  $\vec{T}(x) = T_y(x) \vec{y}_0 + T_z(x) \vec{z}_0$  et  $\vec{M}_f(x) = M_{fy}(x) \vec{y}_0 + M_{fz}(x) \vec{z}_0$  respectivement l'effort tranchant et le moment de flexion en G.

Les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion au centre de gravité G' de la section (S') d'abscisse  $x + \Delta x$  sont :

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{coh}} \right\}_{G'} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(x + \Delta x) \\ \vec{m}_{G'}(x + \Delta x) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} N(x + \Delta x) & M_t(x + \Delta x) \\ T_y(x + \Delta x) & M_{fy}(x + \Delta x) \\ T_z(x + \Delta x) & M_{fz}(x + \Delta x) \end{array} \right\}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)} ;$$

soient  $\vec{T}(x + \Delta x) = T_y(x + \Delta x) \vec{y}_0 + T_z(x + \Delta x) \vec{z}_0$  et

$\vec{M}_f(x + \Delta x) = M_{fy}(x + \Delta x) \vec{y}_0 + M_{fz}(x + \Delta x) \vec{z}_0$  respectivement l'effort tranchant et le moment de flexion en G'.

Évaluons les éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion au point G' :

$$\vec{R}(x + \Delta x) = \vec{R}(x) + \Delta \vec{R} \text{ avec } \Delta \vec{R} = -p \Delta x \vec{y}_0$$

$$\vec{m}_{G'}(x + \Delta x) = \vec{m}_G(x) + \vec{R}(x) \wedge \vec{GG}' + p \frac{(\Delta x)^2}{2} \vec{z}_0 \text{ avec } \vec{GG}' = \Delta x \vec{x}_0$$

On pose :

$$\Delta \vec{R} = -p \Delta x \vec{y}_0$$

$$\Delta \vec{m} = \vec{m}_{G'}(x + \Delta x) - \vec{m}_G(x) = \vec{R}(x) \wedge \vec{GG}' + p \frac{(\Delta x)^2}{2} \vec{z}_0$$

## Chapitre I Généralités sur la RdM

En remplaçant les vecteurs par leur expression respective et en faisant la projection sur les trois axes du repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , les relations deviennent :

$$\Delta T_y = T_y(x + \Delta x) - T_y(x) = -p \Delta x \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T_y}{\Delta x} = -p$$

$$\Delta M_{fy} = M_{fy}(x + \Delta x) - M_{fy}(x) = T_z \Delta x \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta M_{fy}}{\Delta x} = T_z$$

$$\Delta M_{fz} = M_{fz}(x + \Delta x) - M_{fz}(x) = -T_y \Delta x + p \frac{(\Delta x)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta M_{fz}}{\Delta x} = -T_y + p \frac{\Delta x}{2}$$

Au passage à la limite (en remplace  $\Delta$  par  $d$ ), et en faisant tendre  $\Delta x$  vers zéro, nous obtenons :

$$\frac{dT_y}{dx} = -p ; \quad \frac{dM_{fy}}{dx} = T_z ; \quad \text{et} \quad \frac{dM_{fz}}{dx} = -T_y$$

Ces relations restent valable même lorsque  $p$  n'est pas constante.

Nous démontrons que, pour une répartition de charge donnée, la relation suivante :

$\frac{dM_f}{dx} = -T$ , où  $T$  désigne la valeur algébrique de l'effort tranchant et  $M_f$  la valeur algébrique du moment de flexion.

### IV.4. Définition des sollicitations simples

Une sollicitation est dite simple lorsque toutes les composantes du tenseur des efforts de cohésion sont nulles sauf une.

Tenseur $\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Désignation	Tenseur $\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Désignation
$\left\{ \begin{array}{cc} N(x) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G$	Traction ( $N > 0$ ) Compression ( $N < 0$ )	$\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{array} \right\}_G$	Flexion plane simple
$\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{array} \right\}_G$	Cisaillement	$\left\{ \begin{array}{cc} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G$	Torsion
$\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{array} \right\}_G$	Flexion pure		

## V. Notions sur les contraintes

Considérons une poutre (E) en équilibre sous l'effet de l'action des forces extérieures par rapport au repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

Imaginons un plan ( $\pi$ ) qui décompose la poutre en deux tronçons ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ). On désigne par (S) la section commune à ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ).

Nous admettons que l'action exercée par le tronçon ( $E_2$ ) sur le tronçons ( $E_1$ ) est la suivante :

Sur chaque élément de surface  $ds$  de la section (S), ( $E_2$ ) exerce sur ( $E_1$ ) une force dite élastique  $\vec{f} = \vec{C} ds$  appliquée au centre de l'élément  $ds$ .

Par définition,  $\vec{C}$  est le vecteur contrainte relatif à l'élément de surface  $ds$ . Le vecteur  $\vec{C}$  dont la direction est quelconque dans l'espace peut être décomposé en :

- Une projection normale à l'élément  $ds$  suivant  $\vec{n}$ . C'est la contrainte normale ou pression  $\vec{C}_n$  ou  $\vec{\sigma}$ ; Elle peut être une compression ou une traction suivant le sens de  $\vec{C}$  par rapport à la normale extérieure. (S'ils sont de même sens « traction », s'ils sont de sens contraire « compression »).
- Une projection sur le plan tangent à l'élément  $ds$ . C'est la contrainte tangentielle  $\vec{C}_t$  ou  $\vec{\tau}$ .

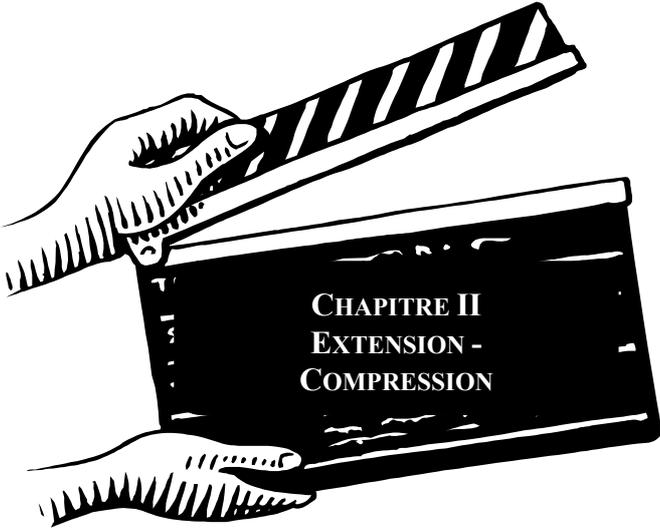
La dimension d'une contrainte est celle d'une force par unité de surface (1MPa = 1N/mm<sup>2</sup>).

L'ensemble des forces  $\vec{f}$  appliquées à la surface (S) forme un système équivalent aux système de forces extérieures directement appliquées au tronçon ( $E_1$ ) ou au tronçon ( $E_2$ ).

$$\vec{R}_{E_2 \rightarrow E_1} = \int_{P \in S} \vec{C} ds \text{ et } \vec{m}(G)_{E_2 \rightarrow E_1} = \int_{P \in S} \vec{GP} \wedge \vec{C} ds$$

La statique élémentaire ne permet pas de déterminer les contraintes en tout point. Il faut faire appel pour cela à d'autres hypothèses résultant de l'étude expérimentale permettant l'étude de la déformation des corps sous l'action des forces extérieures.

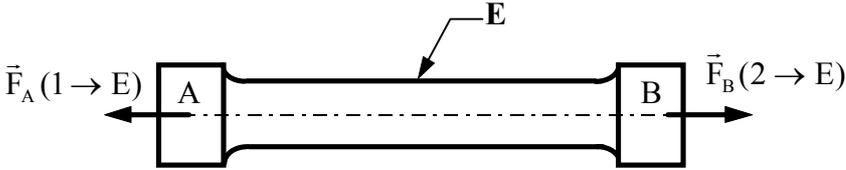
**Chapitre II**  
**Extension - Compression**



Ces deux sollicitations simples sont distinctes et un certain nombre de matériaux ont un comportement différent en traction et en compression (fonte :  $\sigma_e = 20 \text{ MPa}$  et  $\sigma_{ec} = 150 \text{ MPa}$ ). Cependant dans les deux cas nous avons les mêmes relations entre contraintes et déformations.

**I. DEFINITION**

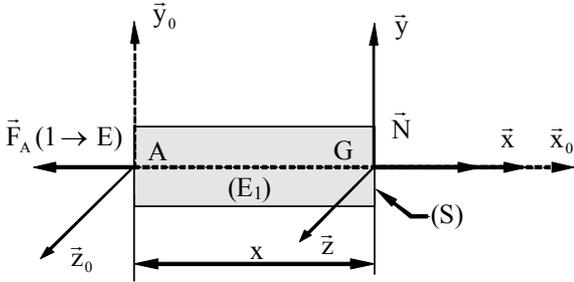
On dit qu'une poutre (E) travaille en extension simple (ou en compression simple) quand elle est soumise à deux forces axiales directement opposées, appliquées au centre de surface des sections extrêmes qui tendent à l'allonger (ou à la raccourcir).



Dans le repère de définition des sollicitations  $R_G(G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  lié à la section droite (S), les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

$$\{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \bar{R} \\ \bar{m}_G \end{Bmatrix}_G = - \begin{Bmatrix} -F \cdot \bar{x} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_G$$

$$\{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$



- En Traction :  $N > 0$
- En Compression :  $N < 0$

**Remarques :**

Une poutre qui travaille en compression ne doit pas être trop élancée, sinon il y a risque de flambement. Les règles suivantes doivent être respectées :

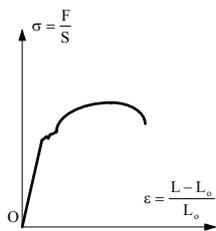
- La section doit être de forme compacte. Les dimensions transversales doivent être de même ordre de grandeur.
- La longueur ne doit pas dépasser 7 à 8 fois la plus petite dimension transversale.

En outre, le poids de la poutre est négligé dans la plupart des applications de la traction ou de la compression simple (sauf les cas où **la ligne moyenne de la poutre est verticale**).

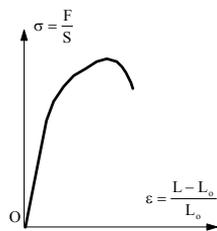
## II. ESSAI DE TRACTION

### II.1. Étude expérimentale : Courbe Contrainte - Déformation

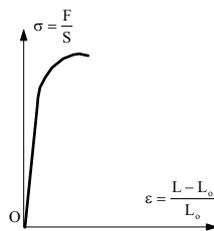
En appliquant graduellement la charge par incréments, l'allongement total mesuré sur la longueur de référence pour chaque incrément de charge et ceci jusqu'à rupture de l'éprouvette. La contrainte normale  $\sigma$  peut être calculée pour toute valeur de la charge axiale à partir de la surface initiale de la section droite, en utilisant l'équation :  $\sigma = \frac{F}{S}$  où F est la charge axiale en Newtons et S la surface initiale de la section droite. On peut tracer une courbe en mettant en abscisses la déformation normale  $\varepsilon$  et en ordonnées la contrainte normale  $\sigma$ . On obtient la courbe ou le diagramme contrainte déformation du matériau pour ce type de charge. Les allures de ces courbes sont très différentes suivant les matériaux. (voir figures ci-dessous).



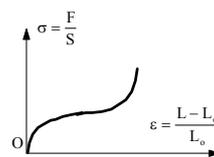
**Figure a :**  
Acier de construction à teneur moyenne en carbone (acier doux)



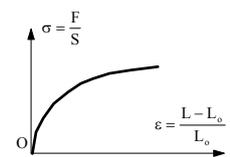
**Figure b**  
Acier alliés (acier mi-dur)



**Figure c**  
Acier durs et certains alliages non ferreux



**Figure d**  
Fontes et les autres alliages non ferreux



**Figure e**  
Caoutchouc

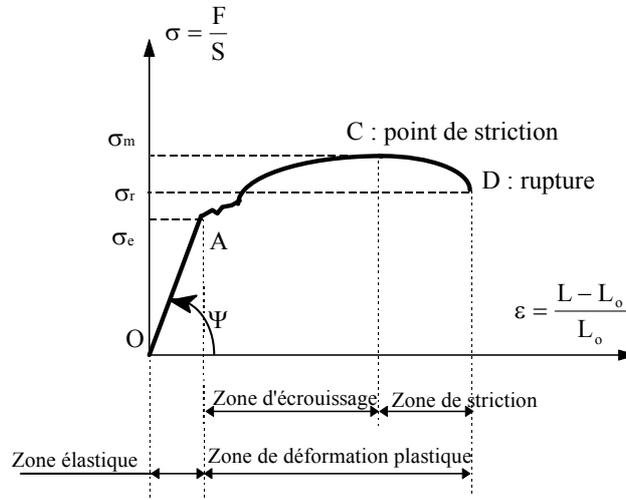
### II.2. Caractéristiques mécaniques

Les caractéristiques mécaniques tirées de l'essai sont :

- Limite élastique : Elle peut être apparente ( $R_e$  ou  $\sigma_e$ ) ou conventionnelle ( $R_{e0,2}$ )
- Module d'élasticité longitudinale ou module de Young : E.
- Résistance à la rupture :  $\sigma_r$  ou  $R_r$ .
- Contrainte maximale :  $\sigma_m$  ou  $R_m$ .

**Chapitre II**  
**Extension - Compression**

- Allongement  $A\% = \frac{l_u - l}{l} \times 100$  : après rupture l'éprouvette a une longueur ultime  $l_u$ ,  $l$  étant la longueur initiale.



COURBE CONTRAINTE - DEFORMATION DANS UN ESSAI DE TRACTION

### III. ETUDE DES DEFORMATIONS

**Hypothèse de Navier - Bernoulli :**

Les sections planes, normales aux fibres avant déformation, demeurent planes et normales aux fibres après déformation.

L'allongement  $\Delta x$  est le même pour tous les points d'une section droite (S) repérée par  $x$ . Il s'en suit que l'**allongement unitaire**  $\epsilon_x = \frac{\Delta x}{x}$  (sans unité) est le même en tout point de la section.

**Remarque :** En général, on néglige la variation de la section, c'est à dire la déformation transversale (striction) :  $\epsilon_y = - \nu \epsilon_x$ ,  $\nu$  étant le coefficient de Poisson compris entre 0.3 et 0.5 pour les aciers.

### IV. CONTRAINTE DANS UNE SECTION DROITE

Les contraintes sont parallèles à  $(G, \vec{x})$  et sont également réparties uniformément dans (S). Le vecteur contrainte  $\vec{C}(M, \vec{n}) = \vec{C}(M, \vec{x}) = \sigma \vec{x}$ . Par suite  $N = \iint_{(S)} \sigma dS = \sigma.S$ . D'où :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

**Unités :** N en Newton, S en  $mm^2$ ,  $\sigma$  en MPa.

- En extension :  $N > 0, \sigma > 0$ .
- En compression :  $N < 0, \sigma < 0$ .

### V. CONDITION DE RESISTANCE

**Hypothèse :** Les contraintes nominales sont calculées dans une zone relativement éloignée des perturbations causées par les forces concentrées.

Les contraintes développées dans les poutres doivent rester dans le domaine élastique.  
En général, on adopte un coefficient de sécurité  $s$ .

- La condition de résistance pour une contrainte normale d'extension est :

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq \sigma_{pe} = \frac{\sigma_e}{s}$$

$\sigma_{pe}$  (ou  $R_{pe}$ ) : contrainte pratique de limite élastique en traction.

- En construction mécanique :  $1,2 \leq s \leq 5$
- La condition de résistance pour une contrainte normale de compression est :

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq \sigma_{pc} = \frac{\sigma_e}{s}$$

- $\sigma_{pc}$  ( $R_{pc}$ ) : contrainte pratique de limite élastique en compression.

## VI. ALLONGEMENT (OU RACCOURCISSEMENT) $\Delta L$ D'UNE POUTRE DE LONGUEUR $L$ .

D'après la loi de Hooke :  $\sigma = E \varepsilon$ .

On peut donc écrire, en supposant que l'allongement est également réparti sur toute la longueur  $L$  de la poutre :  $\frac{N}{S} = E \frac{\Delta L}{L}$ , soit :

$$\Delta L = \frac{N L}{E S}$$

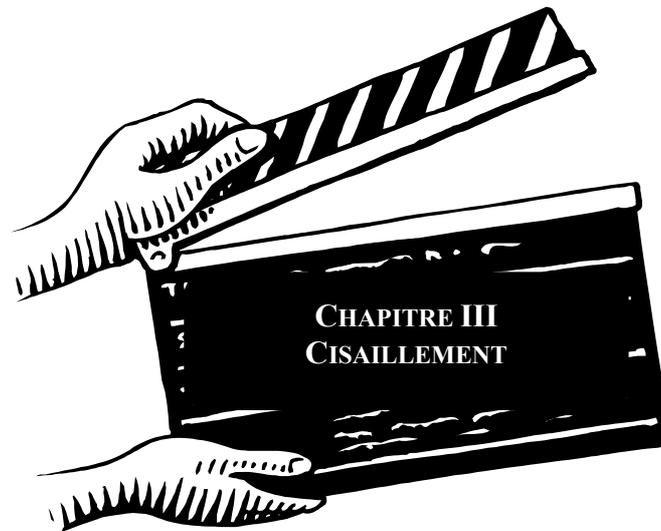
## VII. NOTION DE CONCENTRATION DE CONTRAINTES

La plupart des pièces mécaniques présentent des singularités de forme (perçages, gorges, filetages, épaulements...). La valeur de la contrainte augmente au voisinage de ces singularités. Pour rendre compte de cette augmentation, on multiplie la contrainte nominale par un coefficient  $k$  appelé coefficient de concentration de contraintes.

La contrainte réelle devient :  $\sigma_{réelle} = k \cdot \sigma$

Et la condition de résistance devient :  $\sigma_{réelle} \leq \sigma_{adm}$  avec :

- $\sigma_{adm} = \sigma_{pe}$  en extension
- $\sigma_{adm} = \sigma_{pc}$  en compression.



La sollicitation de cisaillement pur est un cas très particulier de la RDM car elle est impossible à réaliser expérimentalement. D'autre part le cisaillement simple concerne une section de la poutre et non la poutre entière.

## I. DEFINITION

Une section droite (S) d'une poutre (E) est sollicitée au cisaillement simple si les éléments de réduction au centre de surface G de (S) du torseur des efforts de cohésion sont :

$$\{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}_G \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \vec{T} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}; \text{ avec } \vec{T} : \text{effort tranchant dans la section (S).}$$

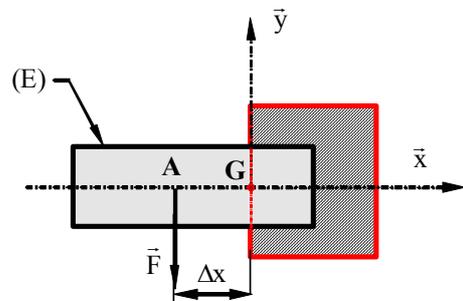
## II. ETUDE DES DEFORMATIONS

La réalisation du cisaillement simple est difficile. Cependant, on va décrire un modèle qui s'en approche.

Considérons une poutre encadrée à une extrémité. Soit (S) de centre G la section d'encastrement. Appliquons un effort F dans une section (S') distante de  $\Delta x$  de (S).

Le torseur des efforts de cohésion se réduit en G

$$\hat{a} : \{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}_G \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} -\vec{F} \\ -\vec{GA} \wedge \vec{F} \end{Bmatrix}$$



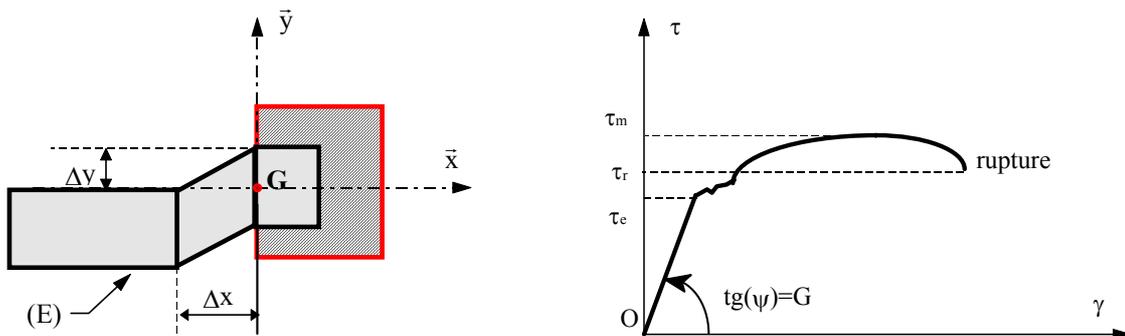
En projection dans le repère  $R(G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  lié à (S) on obtient :

$$\left\{ T_{coh} \right\}_G = \begin{Bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_t \\ M_{fy} \\ M_{fz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & -F \cdot \Delta x \end{Bmatrix}$$

On voit bien que le moment de flexion n'est pas identiquement nul. Cependant si  $\Delta x$  tend vers zéro, on peut négliger ce moment.

Si on trace la variation du glissement  $\Delta y$  en fonction de l'effort  $F$ , on obtient une courbe dont l'allure est indiquée ci-dessous.

1. La déformation  $\gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  est appelée **glissement relatif** ou **déviations** (sans unité).
2.  $\frac{F}{S}$  est appelé effort **unitaire de cisaillement**.
3. Dans la zone élastique, la pente de la droite est le **module d'élasticité transversale** ou **module de Coulomb G** (exprimé en MPa).



### III. ETUDE DES CONTRAINTES

Du fait que  $N = M_{fy} = 0$  et  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} M_{fz} = 0$ , on peut admettre que la composante normale du vecteur contrainte est nulle en tout point de (S) ; ainsi  $\vec{C}(M, \vec{x}) = \tau_y \cdot \vec{y} + \tau_z \cdot \vec{z} = \vec{\tau}$

**Hypothèse simplificatrice** : à priori nous ignorons la répartition de la contrainte tangentielle (seul un calcul par élément fini peut donner une idée de cette répartition). Nous supposons alors que la valeur moyenne de la contrainte tangentielle  $\tau$  vaut :

$$\tau_{moy} = \frac{|T|}{S} \quad \text{avec} \quad |T| = \sqrt{T_y^2 + T_z^2}$$

### IV. CONDITION DE RESISTANCE

#### IV.1. Caractéristiques des matériaux en cisaillement.

1.  $\tau_e$  (ou  $R_{eg}$ ) : contrainte tangentielle limite élastique.  $\tau_e = \frac{k_0}{1+k_0} \sigma_e$  avec  $k_0 = \frac{\sigma_e}{\sigma_{ec}}$

## Chapitre IV Torsion simple

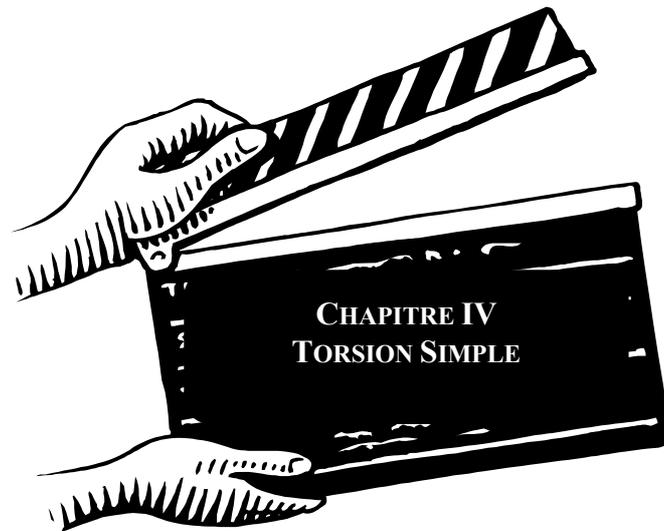
2.  $\tau_r$  (ou  $R_{rg}$ ) : contrainte limite de rupture au cisaillement
3.  $G$  : module de Coulomb  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  ;  $\nu$  étant le coefficient de Poisson
4. La loi de Hooke s'écrit :  $\tau = G \cdot \gamma$

### IV.2. Condition de résistance

Compte tenu des hypothèses simplificatrices que nous avons fait, il convient d'adopter un coefficient de sécurité  $s$  par rapport à la limite élastique et de définir une contrainte admissible  $\tau_{adm}$ , ainsi :

$$\tau_{moy} \leq \tau_{adm} = \frac{\tau_e}{s} = \tau_p$$

$\tau_p$  est appelée contrainte pratique de cisaillement (elle est parfois notée :  $R_{pg}$ ).



## I. DEFINITION

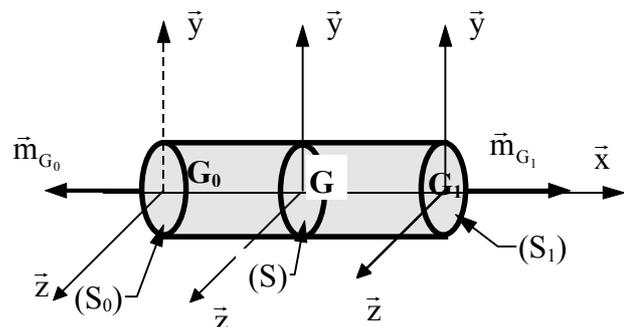
Une poutre est sollicitée à la torsion simple quand les éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion s'expriment dans le repère de définition des sollicitations  $R$  lié à la section droite (S) de centre de surface G par :

$$\{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{m}_G = M_t \vec{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Un cylindre de révolution est soumis à un ensemble d'actions mécaniques modélisées au centre de surface des deux sections extrêmes par un torseur couple :

$$\{T_0\}_{G_0} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{m}_{G_0} \end{Bmatrix} \text{ et}$$

$$\{T_1\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{m}_{G_1} \end{Bmatrix}$$



L'équilibre général de la poutre impose :

$$\vec{m}_{G_0} + \vec{m}_{G_1} = \vec{0}$$

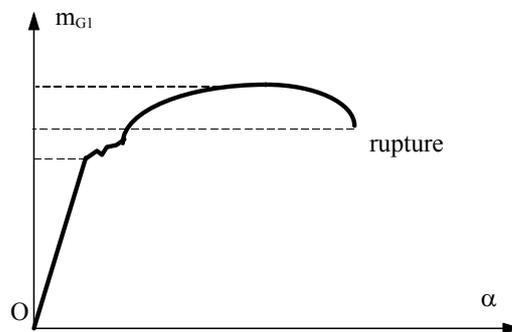
**Hypothèses :**

1. Le solide est un cylindre de révolution
2. Le poids du solide est négligé

## II. ESSAI DE TORSION SIMPLE

Une éprouvette cylindrique de révolution est encastrée à son extrémité ( $S_0$ ) de centre de surface  $G_0$ . On applique à l'extrémité droite sur la section ( $S_1$ ) de centre de surface  $G_1$  une action mécanique modélisée en  $G_1$  par un torseur « couple » :  $\{T_1\}_{G_1} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{m}_{G_1} \end{matrix} \right\}$  tel que  $\vec{m}_{G_1} = m_{G_1} \vec{x}$ .

On augmente graduellement la valeur de  $m_{G_1}$  et on mesure la rotation d'angle  $\alpha$  d'une section droite autour de son axe. La courbe obtenue a une allure semblable à celle de l'essai de traction.

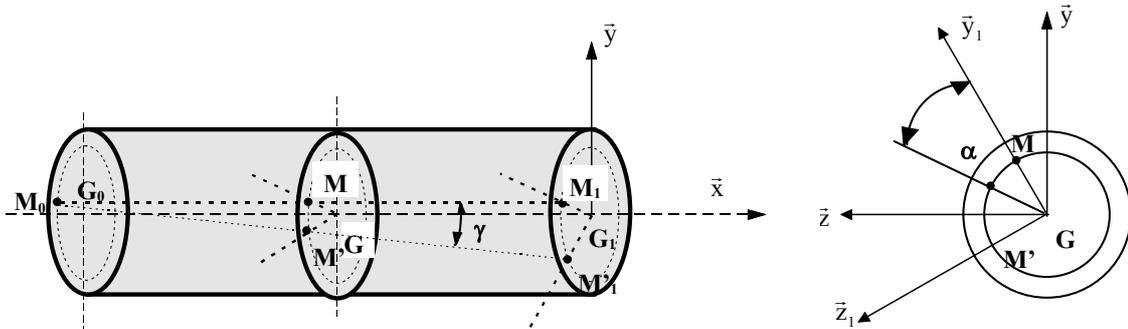


Essai de torsion simple

## III. ETUDE DES DEFORMATIONS

L'essai montre que :

1. toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe.
2. La distance relative entre deux sections reste sensiblement constante.
3. La section ( $S$ ) subit uniquement une rotation d'angle  $\alpha$  proportionnel à sa distance  $x$  par rapport à la surface ( $S_0$ ).



Avant déformation, les points  $M_0$ ,  $M$  et  $M_1$  sont situés sur la même génératrice.

Après déformation, le point  $M$  vient en  $M'$  et le point  $M_1$  vient en  $M_1'$

*Dans la zone des déformations élastiques, on appelle angle de torsion unitaire, la déformation angulaire relative  $\theta$  entre deux sections distantes de l'unité de longueur :*

$$\theta = \frac{\alpha}{x}$$

Unités :  $\alpha$  (rad),  $x$  (mm) et  $\theta$  (rad/mm)

L'essai montre que  **$\theta$  est une constante**. Toutes les fibres se déforment donc suivant une hélice, sauf la ligne moyenne qui reste droite.

D'autre part l'angle  $(\overline{M_0M}, \overline{M_0M'}) = \gamma_M$ .

Dans la zone des déformations élastiques, l'angle  $\gamma_M$  est petit. L'arc  $MM' = \alpha\rho = \gamma_M x$ .

La fibre  $M_0M$  a subi une distorsion ou glissement  $\gamma_M$  tel que :

$$\gamma_M = \frac{\alpha}{x} \rho = \theta \rho$$

$\gamma_M$  est aussi appelé **déviation** (qui s'exprime en rad)

#### IV. ETUDE DES CONTRAINTES

Si on admet l'hypothèse que la distance relative entre deux sections reste constante au cours de la déformation, donc l'allongement  $\Delta x = 0$ , alors on peut écrire que la déformation longitudinale

$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = 0$  en tout point de la section (S). On admet donc que la composante normale

du vecteur contrainte est nulle :  $\sigma = 0$ . Et par suite  $\vec{C}(M, \vec{x}) = \vec{\tau} = \tau_{y1} \vec{y}_1 + \tau_{z1} \vec{z}_1$  avec

$$\vec{y}_1 = \frac{\overline{GM}}{\|\overline{GM}\|}$$

D'autre part on admet que la composante  $\tau_{y1} = 0 = \tau$

**La loi de Hooke pour les contraintes tangentielles** est :  $\tau = G \cdot \gamma_M = G \cdot \theta \cdot \rho$

Unités :  $G$  (MPa),  $\theta$  (rad/mm),  $\rho$  (mm),  $\tau$  (MPa).

$$M_t = \iint_{(S)} y_i \cdot \tau_{z1} \cdot ds = \iint_{(S)} \rho^2 \cdot G \cdot \theta \cdot ds = G \cdot \theta \cdot \iint_{(S)} \rho^2 \cdot ds$$

Or  $\iint_{(S)} \rho^2 \cdot ds$  représente le moment quadratique polaire  $I_0$  de (S).

Si la section (S) est de diamètre D, alors  $I_0 = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi R^4}{2}$  avec  $R = D/2$  ( $I_0$  s'exprime en  $\text{mm}^4$ )

$$M_t = G \cdot \theta \cdot I_0$$

Unités : G (MPa),  $\theta$  (rad/mm),  $I_0$  ( $\text{mm}^4$ ),  $M_t$  (N.mm).

## V. CONDITION DE RESISTANCE

### V.1. Relation entre contrainte et moment de torsion :

$$M_t = G \cdot \theta \cdot I_0 = \frac{\tau}{\rho} I_0 \Rightarrow \tau = \frac{M_t}{\left(\frac{I_0}{\rho}\right)}$$

Dans cette relation,  $\tau$  et  $M_t$  sont algébriques.

### V.2. Condition de résistance :

Lorsque le moment de torsion est variable le long de l'arbre, on prend sa valeur maximale

soit  $M_t$  max.

Soit  $\nu$  la valeur maximale de  $\rho$  ; Dans la plupart des cas  $\nu$  est égal au rayon maximum de l'arbre.

La contrainte maximale de torsion s'exprime par :

$$|\tau|_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{\left(\frac{I_0}{\nu}\right)}$$

Le rapport  $\frac{I_0}{\nu} = \frac{\pi D^3}{16}$  s'appelle le « **module de torsion** »

la condition de résistance est :

$$|\tau|_{\max} \leq \tau_{\text{adm}}$$

En torsion la contrainte admissible  $\tau_{\text{adm}} = \frac{\tau_e}{s} = \left(\frac{R_{\text{eg}}}{s}\right) = \tau_p (R_{\text{pg}})$

$\tau_p$  (ou  $R_{\text{pg}}$ ) : contrainte pratique de cisaillement

s : coefficient de sécurité

### V.3. Concentration de contraintes :

En tenant compte d'un éventuel coefficient k de concentration de contraintes :

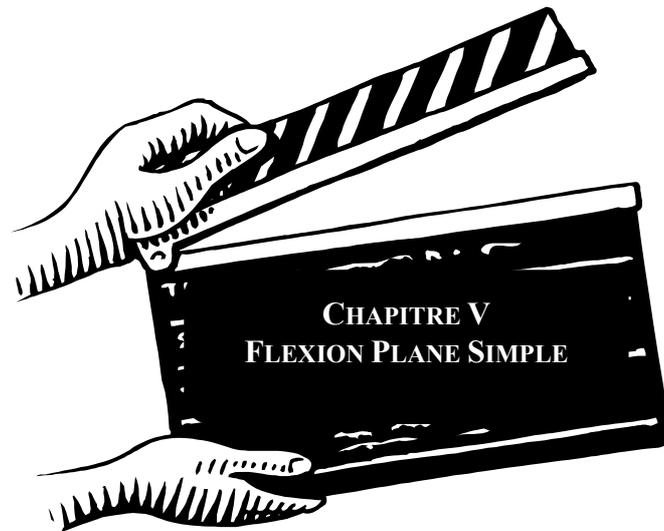
$$\tau_{réelle} = k \cdot \tau_{max} < \tau_{adm}$$

## VI. CONDITION DE RIGIDITE

Le calcul des dimensions des arbres de transmission ou barres de torsion se fait plus par une condition de déformation qu'une condition de résistance. En effet pour assurer une transmission rigide et éviter les vibrations, l'angle de torsion unitaire  $\theta$  ne doit pas dépasser , pendant le service, une valeur limite  $\theta_{lim}$  :

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_0} \leq \theta_{lim}$$

$\theta_{lim}$  est de l'ordre  $0,5^\circ / m$

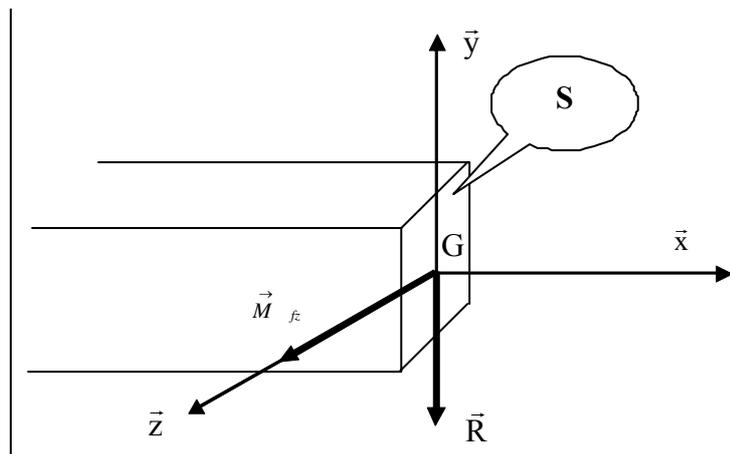


## I. DEFINITION

Une poutre (E) est sollicitée à la flexion plane simple si le torseur des efforts de cohésion se réduit en G, centre de surface d'une section droite (S) de la poutre à laquelle on lie le repère de définition des sollicitations  $\mathfrak{R} = (G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , par :

$$\{T_{\text{coh}}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}_G \end{Bmatrix};$$

$$\{T_{\text{coh}}\}_G = \begin{Bmatrix} N=0 & M_t=0 \\ T_y \neq 0 & M_f=0 \\ T_z=0 & M_{fz} \neq 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



### HYPOTHESES :

- La ligne moyenne de la poutre est rectiligne. L'axe  $(O, \bar{x})$  est confondu avec la ligne moyenne.
- La section droite de la poutre est constante.
- La poutre admet un plan de symétrie longitudinal, par exemple le plan  $(O, \bar{x}, \bar{y})$ . Il en résulte que  $(G, \bar{y})$  et  $(G, \bar{z})$  sont les axes de principaux de la section droite.

- Toutes les forces appliquées à la poutre que ce soit les forces à distance ou les forces élémentaires de liaison sont :
  - perpendiculaires à la ligne moyenne
  - situées dans le plan de symétrie ou réparties symétriquement par rapport à celui-ci.
  - concentrées en un point ou réparties suivant une loi.
- Au cours de la déformation, les sections droites restent planes et normales à la ligne moyenne.

**REMARQUE :**

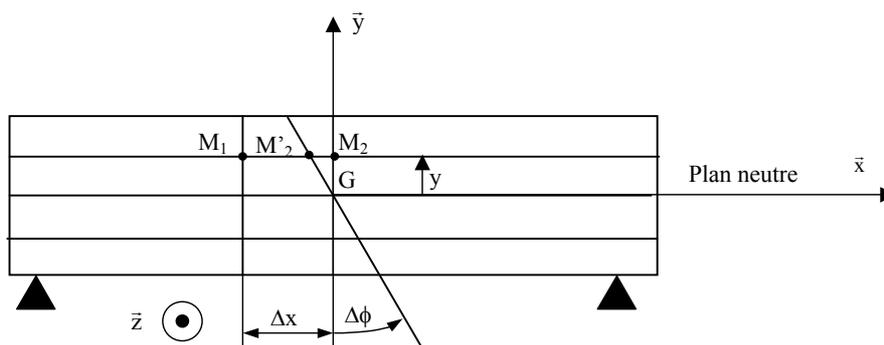
Pour les poutres homogènes, l'action de la pesanteur est modélisée par une charge uniformément répartie  $d\vec{p}$  sur toute la longueur et non par un glisseur appliqué au centre de gravité de la poutre. On note  $\vec{p}$  la densité linéique de force de pesanteur :  $\vec{p} = \frac{d\vec{p}}{dx}$ , la norme de  $\vec{p}$  s'exprime en N/m.

## II. ETUDE DES DEFORMATIONS

### II.1. ESSAI DE FLEXION

Les jauges de déformation placées du coté de la section droite montrent que :

- Les fibres situées au dessus du plan  $(G, \vec{x}, \vec{z})$  se raccourcissent.
- Les fibres appartenant au plan  $(G, \vec{x}, \vec{z})$  ne changent pas de longueur. Ce plan est appelé le **plan neutre** et la ligne moyenne est **la fibre neutre**.
- Les fibres situées au dessous du plan  $(G, \vec{x}, \vec{z})$  s'allongent.
- Les allongements ou raccourcissements relatifs  $\epsilon_x$  sont proportionnels à la distance  $y$  de la fibre considérée au plan  $(G, \vec{x}, \vec{z})$



$$\epsilon_x = \frac{M_2 M_2'}{M_1 M_2} \quad \text{or} \quad \overline{M_2 M_2'} = -y \operatorname{tg}(\Delta\Phi) \approx -y \Delta\Phi \quad ; \quad \epsilon_x = -y \frac{\Delta\Phi}{\Delta x}$$

Tout se passe comme si la section (S) avait pivoté autour de l'axe d'un angle faible  $\Delta\Phi$  pour venir en (S').

### III. ETUDE DES CONTRAINTES

#### III.1. CONTRAINTES NORMALES

La flexion plane simple engendre des contraintes normales aux sections droites et proportionnelles à leur distance au plan neutre.

La loi de Hooke relative aux contraintes normales permet d'écrire :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_x = E y \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} \Rightarrow \sigma_x \text{ est proportionnel à } y \text{ soit : } \sigma = k \cdot y$$

Calculons ce coefficient de proportionnalité  $k$  à partir de la relation entre le moment de flexion et la contrainte normale :

$$M_{fz} = - \iint_{(S)} y \sigma \, ds = - \iint_{(S)} k y^2 \, ds = -k \iint_{(S)} y^2 \, ds = -k I_{Gz} \text{ soit } k = - \frac{M_{fz}}{I_{Gz}}$$

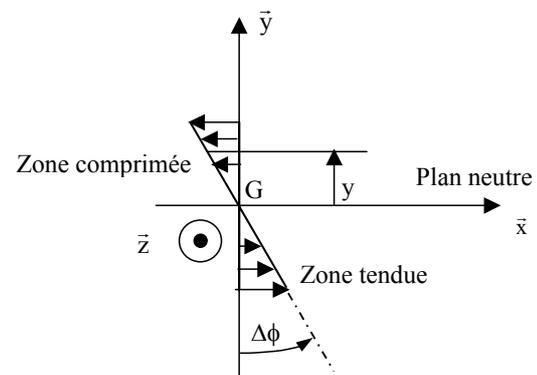
d'où :

$$\sigma = - \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} y$$

La contrainte normale est maximale dans la section où  $M_{fz}$  est maximal et pour  $y_{\max} = v$  :

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_{fz}|_{\max}}{\frac{I_{Gz}}{v}}$$

$\frac{I_{Gz}}{v}$  est appelé le «**module de flexion**»

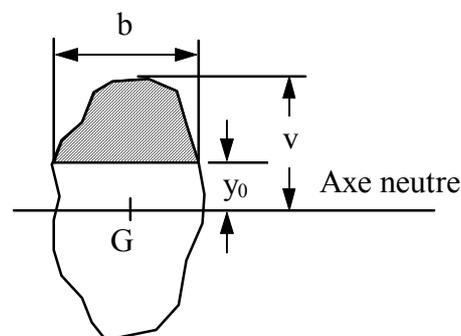


#### III.2. CONTRAINTES TANGENTIELLES

La répartition des contraintes tangentielles est plus difficile à déterminer. Pour cela on fait l'hypothèse que la contrainte tangentielle  $\tau_y$  est uniformément répartie, non pas sur la section entière mais sur toutes les fibres situées à une distance  $y_0$  de l'axe neutre dans le plan de la section (S). Sa valeur est donnée par :

$$\tau_y = - \frac{T_y w_{Gz}}{b I_{Gz}} \text{ avec :}$$

- $W_{Gz} = \iint_{(S)} y \, ds$  représente le moment statique (d'ordre un) de la région hachurée de la section par rapport à l'axe neutre.
- $b$  est la largeur de poutre à l'endroit où est calculée la contrainte de cisaillement.



## IV. CONDITION DE RESISTANCE

### IV.1. CONTRAINTES NORMALES

En tenant compte des singularités de forme et des hypothèses simplificatrices, la contrainte réelle doit être inférieure à une contrainte admissible. La condition de résistance pour les contraintes normales s'écrit donc :

$$k \cdot |\sigma_{\max}| \leq \sigma_p = \frac{\sigma_e}{S}$$

$k$  : coefficient de concentration de contraintes en flexion.

$s$  : coefficient de sécurité.

### IV.2. CONTRAINTES TANGENTIELLES

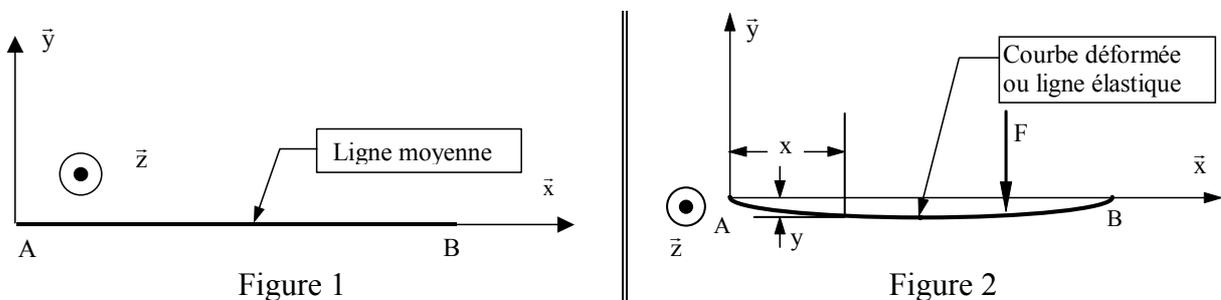
De même la condition de résistance pour les contraintes tangentielles s'écrit :

$$|\tau_{\text{moy}}| \leq \tau_p = \frac{\tau_e}{S}$$

## V. DEFORMATION DE LA POUTRE

### V.1. EQUATION DE LA DEFORMEE

Avant application des efforts mécaniques, la ligne moyenne est rectiligne (fig.1). Après application des efforts la ligne moyenne se déforme (fig.2). La courbe obtenue est appelée courbe déformée ou simplement la déformée. Son équation dans le plan  $(O, \bar{x}, \bar{y})$  est  $y = f(x)$ .



L'équation de la déformée est :

$$y''(x) = \frac{M_{fz}(x)}{E \cdot I_{Gz}}$$

$y''$  : la fonction dérivée seconde de la fonction  $y$  par rapport à la variable  $x$ .

L'ordonnée  $y$  désigne la déflexion (ou la flèche) de la poutre à la distance  $x$  d'une extrémité de la poutre. Il est nécessaire d'intégrer deux fois l'équation différentielle pour obtenir une équation algébrique de la déflexion  $y$  en fonction de  $x$ .

**Attention** : La fonction  $y$  ne doit pas être confondue avec l'ordonnée  $y$  d'une fibre donnée dans le plan de la section (S).

## V.2. CONDITIONS AUX LIMITES

L'intégration de l'équation précédente introduit des variables d'intégration qui sont déterminées à partir des conditions aux limites qui sont :

- Encastrement en un point A : le déplacement en A et la rotation en A sont nuls, alors  $y(x_A) = 0$  et  $y'(x_A) = 0$ .
- Appui simple en un point A : le déplacement en A est nul, alors  $y(x_A) = 0$ .
- Pivot en un point A : le déplacement en A est nul, alors  $y(x_A) = 0$ .
- Lorsque la fonction  $M_{fz}$  est continue par zone, on doit écrire la condition de continuité de la fonction  $y(x)$  et de sa dérivée  $y'(x)$  à droite et à gauche des limites de zones : si le point A est la limite entre deux zones, alors on doit écrire :
  - $y(x_A)_{\text{droite}} = y(x_A)_{\text{gauche}}$
  - $y'(x_A)_{\text{droite}} = y'(x_A)_{\text{gauche}}$

Sinon, il faut prendre en compte les discontinuités.

## VI. CONDITION DE RIGIDITE

La valeur  $y(x)$  en un point donné est appelée la flèche et est notée  $f$ .

Il arrive qu'une poutre vérifie les conditions de résistance mais se déforme dans des proportions inacceptables. Il faut donc exprimer des conditions de déformation en plus des conditions de résistance. La flèche maximale doit être inférieure à une flèche limite imposée par le cahier des charges :

$$f_{\max} \leq f_{\text{lim}}$$



## I. TD-1 : Torseur de cohésion

### Exercice 1

Nous proposons de faire l'étude de résistance de l'arbre (9) aux efforts extérieurs. L'étude sera menée au moment où la roue dentée (10) est actionnée. La chaîne de transmission (14) et le dispositif de freinage ne sont pas actionnés et n'ont aucune action mécanique sur l'arbre (9).

Soit  $R(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  le repère lié à l'arbre (9) modélisé par une poutre d'axe  $(A, \vec{x})$ . (figure 1)

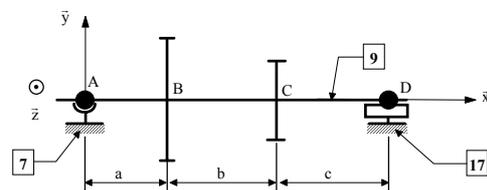


Figure 1

Le roulement à bille (7) est modélisé par une liaison rotule sans frottement de centre A.

On note par  $\{\mathbf{T}_{7 \rightarrow 9}\}_A = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$  le torseur d'action mécanique de (7) sur (9).

Le roulement à aiguilles (17) est modélisé par une liaison linéaire annulaire sans frottement d'axe  $(D, \vec{x})$ .

On note par  $\{\mathbf{T}_{17 \rightarrow 9}\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_D & 0 \\ Z_D & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$  le torseur d'action mécanique de (17) sur l'arbre (9).

L'action de la roue dentée motrice (2) sur l'arbre (9) est modélisée au point B par le torseur :

$\{\mathbf{T}_{2 \rightarrow 9}\}_B = \begin{Bmatrix} X_B & L_B \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ .

## Exercices de Travaux Dirigés

L'action de la roue dentée (11) sur l'arbre (9) est modélisée au point C par le torseur :

$$\left\{ \mathbf{T}_{11 \rightarrow 9} \right\}_C = \begin{Bmatrix} X_C & L_C \\ Y_C & 0 \\ Z_C & N_C \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$$

On pose :  $\vec{AB} = a \vec{x}$  ;  $\vec{BC} = b \vec{x}$  ;  $\vec{CD} = c \vec{x}$ .

### Application numérique :

<b>Les constantes géométriques</b>	a = 20 mm ;    b = 40 mm ;    c = 50 mm
<b>Action de (2) sur (9) au point B</b>	$X_B = 364 \text{ N}$ ; $Y_B = -388 \text{ N}$ ; $Z_B = 1000 \text{ N}$ ; $L_B = 3.10^4 \text{ N.mm}$ et $N_B = -10910 \text{ N.mm}$
<b>Action de (11) sur (9) au point C</b>	$X_C = -14506 \text{ N}$ ; $Y_C = 5330 \text{ N}$ ; $Z_C = 2000 \text{ N}$ ; $L_C = -3.10^4 \text{ N.mm}$ et $N_C = 217590 \text{ N.mm}$

### Questions

- 1) Déterminer les torseurs des actions mécaniques des liaisons aux points A et D.
- 2) Déterminer le torseur des efforts de cohésion tout au long de la ligne moyenne de la poutre droite. En déduire les types de sollicitations pour les différentes parties de la poutre.
- 3) Tracer les diagrammes de sollicitation tout au long de la ligne moyenne de la poutre. En déduire le point le plus sollicité de la poutre.

### Exercice 2

On se propose d'étudier un système roue et vis sans fin (39 & 11). Pour cela la vis (39) est modélisée par une poutre droite OB, de section constante. Les liaisons de la poutre avec le bâti (9) sont modélisées de la manière suivante :

- Au point O : Liaison linéaire annulaire parfaite d'axe  $(O, \vec{x})$ . On note par  $\left\{ \mathbf{T}_1 \right\}$  le torseur associé à cette liaison.
  - Au point B : Liaison rotule de centre B. On note par  $\left\{ \mathbf{T}_3 \right\}$  le torseur associé à cette liaison.
  - Le moteur transmet à la poutre en O un couple moteur  $\vec{C}_m = 100.1 \vec{x}$  (valeur en Nm).
  - L'action de la roue (11) sur la vis (39) est modélisée, au point A par le torseur
 
$$\left\{ \mathbf{T}_2 \right\}_A = \begin{Bmatrix} 1980 & -100.1 \\ 825 & 0 \\ 455 & 435.6 \end{Bmatrix}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$
 . Les forces sont exprimées en N et les moments sont en Nm.
  - L'action du champ de la pesanteur est supposée négligeable.
- 1) On donne a = 198 mm et b = 132 mm.

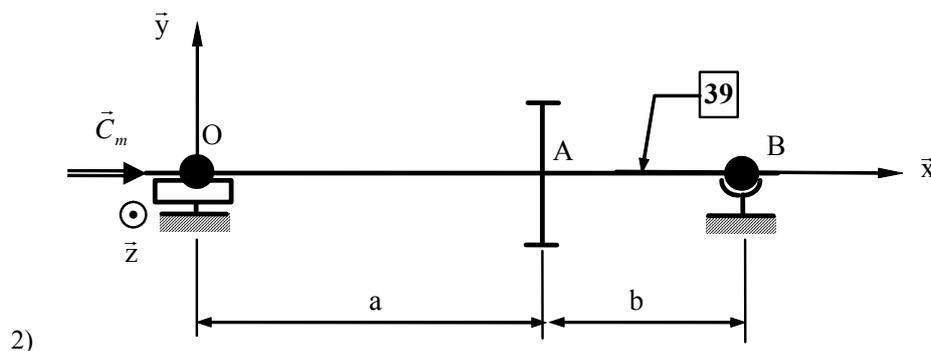


Figure 1

## Exercices de Travaux Dirigés

### Questions

- 1) Déterminer les torseurs des actions mécaniques des liaisons aux points O et B.
- 2) Déterminer le torseur des efforts de cohésion tout au long de la ligne moyenne de la poutre droite. En déduire les types de sollicitations pour les différentes parties de la poutre.
- 3) Tracer les diagrammes de sollicitation tout au long de la ligne moyenne de la poutre. En déduire le point le plus sollicité de la poutre.

### Exercice 3

On considère la poutre (1) représentée par sa ligne moyenne AD, de section constante.

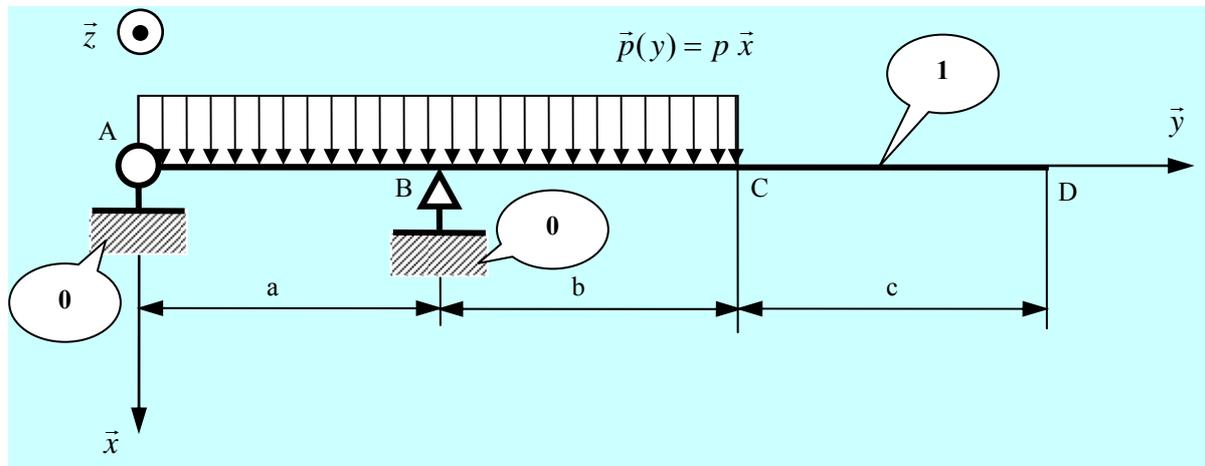
Les liaisons (supposées parfaites) de la poutre avec le bâti (0) sont :

- Une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z})$ .
- Une liaison ponctuelle de normale  $(B, \vec{x})$ .

La poutre est soumise en outre à deux actions mécaniques extérieures modélisées par :

- Au point D par le torseur  $\{T\}_D = \begin{Bmatrix} -200 & 0 \\ 100 & 50 \\ 0 & 20 \end{Bmatrix}_{(D, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ . Les forces s'expriment en N et les moments en Nm.

- Une charge uniformément répartie sur le tronçon AC, représentée par une densité linéique de force :  $\vec{p}(y) = p \vec{x}$ .  $p = 500 \text{ N/m}$



On donne :  $a=b=c=1\text{m}$

1. Déterminer les torseurs des liaisons aux points A et B.
2. Déterminer le torseur des efforts de cohésion le long de la poutre.
3. Tracer les diagrammes des sollicitations le long de la poutre.

## II. TD-2 : Extension – Compression

### Exercice 1

Déterminer les contraintes en chaque section de la poutre schématisée par la figure 1.

On donne :

$$\vec{F}_1 = 1000 \vec{x} ; \vec{F}_2 = 2000 \vec{x} ; \vec{F}_3 = -1000 \vec{x} ; (\text{unité : N})$$

$$d_1 = 10 \text{ mm} ; d_2 = 20 \text{ mm} ; d_3 = 30 \text{ mm} ;$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = 200 \text{ mm} ;$$

### Exercice 2

Déterminer l'augmentation de la longueur d'un barreau de section constante suspendu verticalement et soumis seulement à son propre poids. (Figure 2)

Le barreau est droit au départ. On pose  $\rho$  le poids volumique (poids par unité de volume) du barreau = constante.

### Exercice 3

Calculer la section des barres telle que la contrainte subie ne soit pas plus grande que 200 MPa. (Figure 3)

Calculer le déplacement vertical du point B.

On donne  $E = 200 \text{ GPa}$ .

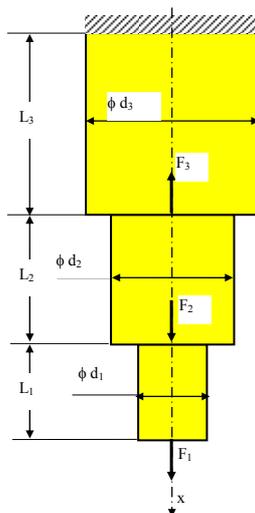


Figure 1

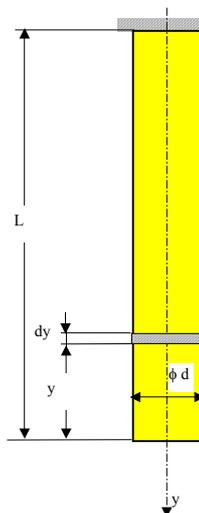


Figure 2

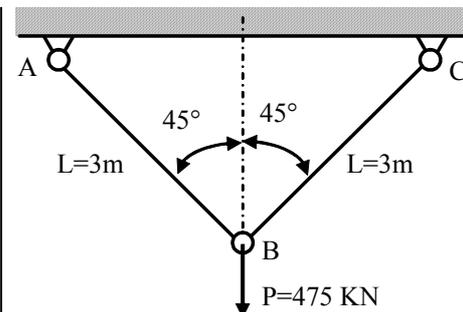


Figure 3

### Exercice 4

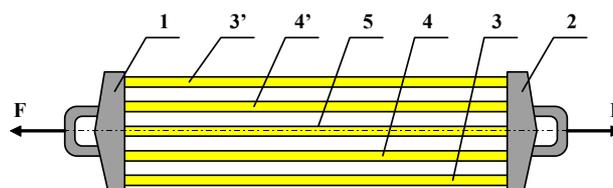


Figure 4

L'appareil ci-dessus est utilisé pour la rééducation des muscles. Il se compose de deux brides (1) et (2), supposées indéformables et liées par cinq Sandows en caoutchouc (3), (3'), (4), (4') et (5).

## Exercices de Travaux Dirigés

Le Sandow (5) a pour une longueur initiale  $L_0$ . Les Sandows (4) et (4') ont pour longueur initiale  $L_1 = 1.1 L_0$  et les Sandows (3) et (3') ont pour longueur initiale  $L_2 = 1.2 L_0$ .

Les Sandows ont tous la même section  $S = 220 \text{ mm}^2$  et les déformations sont élastiques.

- 1) Déterminez l'intensité des efforts  $F_5$ ,  $F_4$  et  $F_3$  appliqués sur chaque Sandow lorsque la longueur commune des cinq Sandows est égale à  $1.5 L_0$ . On donne le module d'élasticité longitudinal du caoutchouc  $E = 0.75 \text{ N/mm}^2$ .
- 2) En déduire l'effort total  $F$  à exercer sur les brides pour maintenir l'appareil en équilibre.

### Exercice 5

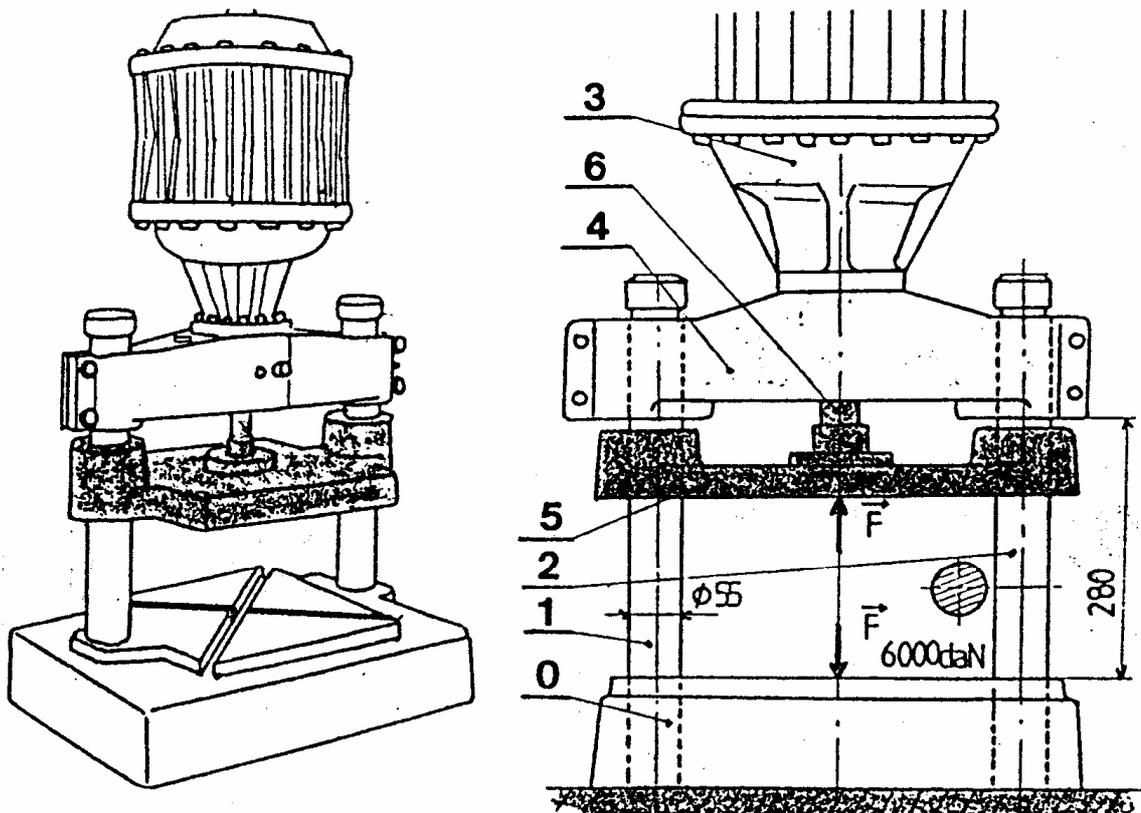


Figure 5

La petite presse pneumatique ci-dessus est utilisée pour les opérations d'assemblages, de fabrication et d'entretien. Elle se compose d'un socle (0), de deux colonnes rectifiées (1) et (2) et d'acier E295 et d'un support fixe (4). L'effort de pressage est fourni par le vérin pneumatique composé d'un corps (3) et d'une tige (6). (La pression maximale d'alimentation est de 10 bars). Le pressage est réalisé par le coulisseau (5) d'un côté et par le socle (0) de l'autre côté.

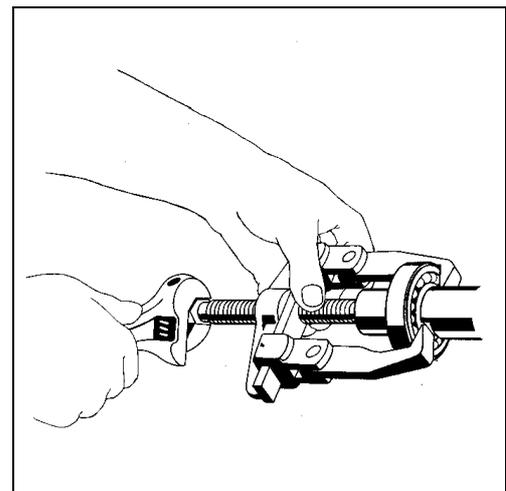
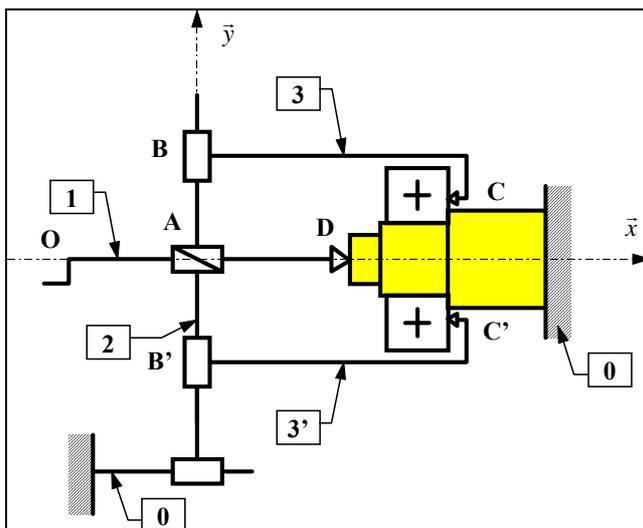
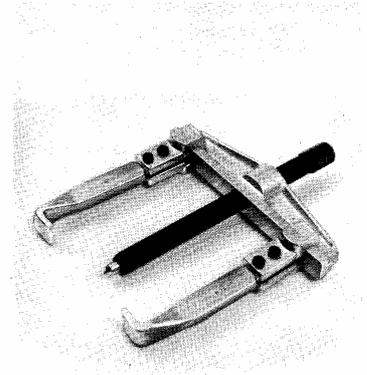
- 1) L'effort de pressage est de 6000 daN
  - a) Déterminez la valeur de la contrainte dans les deux colonnes. Donnez la nature de la sollicitation.
  - b) Calculez l'allongement total de chaque colonne. La longueur déformée est de 280 mm. (Le module d'élasticité longitudinal  $E = 20000 \text{ daN/mm}^2$ ).
- 2) Dans le cas où la charge  $F$  atteint accidentellement la valeur 12000 daN, les deux colonnes peuvent-elles résister? La limite à la rupture de l'acier E295 est  $50 \text{ daN/mm}^2$ .
- 3) On souhaite que l'allongement total de chaque colonne ne dépasse pas 0.005 mm. Déterminez dans ce cas le diamètre minimal pour la construction des colonnes.

### III. TD-3 Compression - Cisaillement – Torsion

#### Présentation du sujet

Le dispositif schématisé par la figure 1 est un extracteur usuel utilisé pour le démontage à froid des petits roulements. Le roulement ayant un ajustement serré sur l'arbre. Il faut toujours essayer de le démonter sans l'endommager, notamment quand on veut le réutiliser. Il est donc important d'effectuer le démontage correctement. L'effort de démontage doit toujours s'appliquer sur la bague intérieure. Les griffes des deux crochets (3) et (3') doivent être parfaitement centrées pour éviter d'endommager la portée du roulement.

Le démontage est assuré en maintenant l'extracteur par une main et en appliquant graduellement à la tête de la vis, par l'autre main, un couple de démontage jusqu'à où il atteint une valeur maximale. (Valeur qui donne un effort d'extraction supérieur à celui produit par l'ajustement serré du roulement avec l'arbre).



**Figure 1 :** Schéma de l'extracteur et du principe de démontage

#### Données

- Toutes les liaisons sont considérées parfaites (sans frottement). L'action du champ de pesanteur est supposée négligeable devant toutes les autres actions mécaniques.
- La vis (1) est réalisée avec un filetage à un seul filet de profil métrique ISO M16 x 2 (figure 2).
- Le torseur d'action mécanique de l'écrou (2) sur la vis (1) est noté par

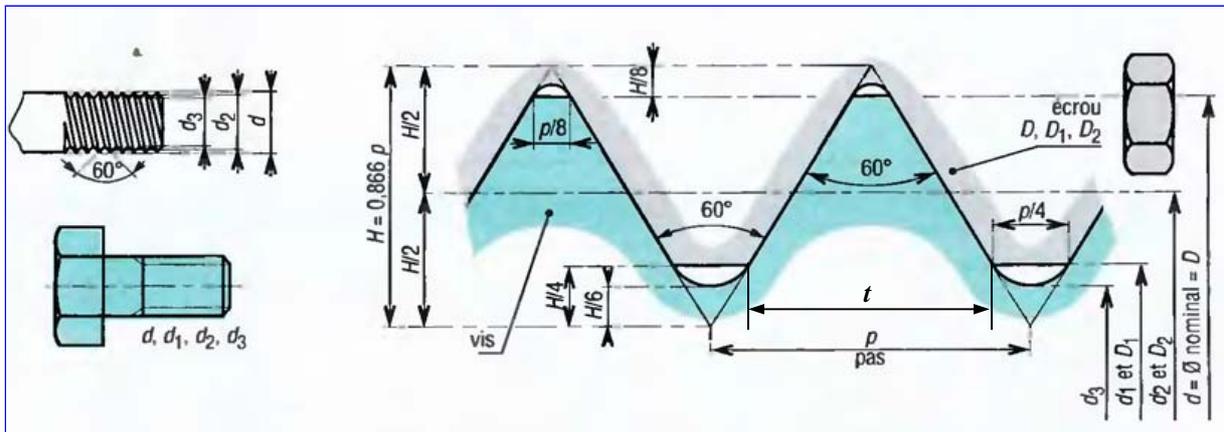
$$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\}_A = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{(A, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \text{avec } L_{21} = -\frac{p}{2\pi} X_{21} \quad \text{où } p \text{ représente le pas du filetage.}$$

- Le couple maximale appliqué à la tête de la vis est  $\vec{C}_m = 3500 \vec{x}$  (valeur en N.mm).
- La vis est modélisée par une poutre droite de longueur  $L=200$  mm. On donne  $\vec{OA} = \frac{L}{2} \vec{x}$  et  $\vec{OD} = L \vec{x}$
- La limite élastique du matériau en traction et en compression de la vis (1):  $R_e = 840$  MPa.
- La limite élastique du matériau en traction et en compression de l'écrou (2):  $R_e = 510$  MPa.
- Pour tous les calculs, on prendra comme limite élastique de cisaillement  $R_{eg} = 0.5 R_e$  avec un coefficient de sécurité  $s = 3$ .

## Exercices de Travaux Dirigés

### Question

- 1) Donner, au point D, la forme du torseur d'action mécanique de l'arbre sur la vis.
- 2) Isoler la vis (1) et déterminer les composantes des torseurs statiques des liaisons en A et en D.
- 3) Déterminer le torseur des efforts de cohésion le long de la vis. En déduire le type des sollicitations en chaque section de la vis.
- 4) Ecrire la condition de la résistance du matériau de la vis pour une section droite de centre G pris :
  - entre A et D et calculer le diamètre minimal.
  - entre O et A et calculer le diamètre minimal.
- 5) Calculer la contrainte maximale développée par la partie filetée de la vis si le coefficient de concentration de contrainte est  $k=2$ . Que peut conclure de la résistance de la vis?
- 6) Les filets de l'écrou (2) sont sollicités au cisaillement. Calculer la section cisillée d'un filet.
- 7) Calculer le nombre minimal de filets en prise entre (1) et (2) pour assurer la résistance au cisaillement.
- 8) Déterminer, dans ce cas, la longueur minimale de la partie filetée de l'écrou.



**Figure 2 :** Dimensions et caractéristiques du filetage de la vis (2) (profil métrique ISO)

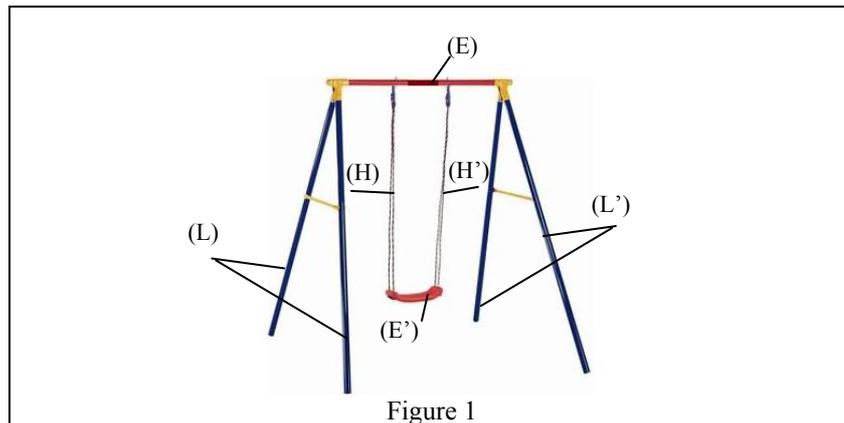
Diamètre  $D = d = 16 \text{ mm}$   
 Diamètre  $D_1 = d_1 = d - 1.0825 p$   
 Diamètre  $d_3 = d - 1.2268 p$   
 Hauteur  $H = 0.866 p$

Pas  $p = 2 \text{ mm}$   
 Diamètre sur flancs  $D_2 = d_2 = d - 0.6495 p$   
 Epaisseur d'un filet  $t = 0.75 p$

## IV. TD-4 : Extension & Flexion plane

### Exercice 1

On se propose d'étudier la résistance de certains éléments d'une balançoire (figure 1). La nacelle (E') est destinée pour recevoir un enfant de 50 Kg. La nacelle est attachée au montant (E) par deux cordes (H) et (H'). La poutre (E) repose à ses extrémités sur les supports (L) et (L') qui sont supposés indéformables.



#### Dimensionnement des cordes (H) et (H')

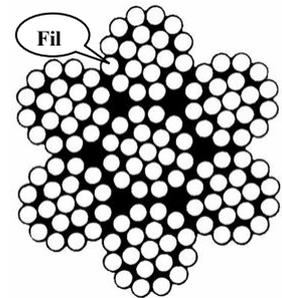
Nous allons étudier les deux cordes de longueur de 1m chacune qui maintiennent la nacelle. On suppose qu'elles sont uniquement mises en traction par le poids de l'enfant.

1. Calculer l'effort normal dans chaque corde et calculer ensuite la section minimale de l'une des deux cordes afin qu'elle reste dans le domaine élastique avec un coefficient de sécurité 6.
2. La corde est composée de (7 x 19) fils en acier. La répartition des fils dans la corde est représentée sur la figure ci-contre. Déterminer le diamètre minimal de chaque fil
3. Quel est l'allongement maximal que subit la corde ?

Données :  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$  ;  $E = 200 \text{ GPa}$  ;  $R_e = 250 \text{ MPa}$ .

#### Dimensionnement du montant (E)

On modélise (E) par une poutre droite de ligne moyenne OC (figure 2). Les appuis entre le montant et les supports (L) et (L') sont modélisés par une liaison rotule de centre O et une liaison linéaire annulaire d'axe (C,  $\vec{x}$ ), toutes deux sans frottement. Les efforts exercés par les cordes (H) et (H'), en A et B, sont notés chacun  $\vec{F}$  (ceux là qui ont été calculés dans la première partie). Le poids propre du montant est négligé.



Coupe transversale de la corde

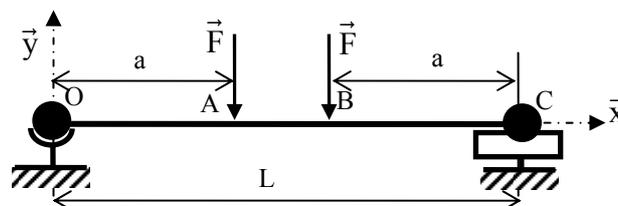


Figure 2

1. Ecrire l'équilibre de (E) au point O et déterminer, en fonction de F, les inconnues de liaison aux points O et C.

## Exercices de Travaux Dirigés

2. En déduire le torseur des efforts de cohésion le long de la ligne moyenne.
3. Tracer le diagramme du moment de flexion. En déduire le moment de flexion maximal.
4. Le montant choisi est en acier et sa section est circulaire de 40 mm de diamètre. Donner l'expression de la contrainte normale maximale en flexion et la calculer. Vérifier alors la résistance de la poutre vis-à-vis de la flexion seule (coefficient de sécurité = 4).
5. On donne l'équation de la déformée statique en flexion en fonction de l'abscisse  $x$  :

$$\begin{cases} EI_{Gz} Y(x) = \frac{Fx}{6}(3x^2 - 3aL + 3a^2) & \text{pour } x \in [0, a] \\ EI_{Gz} Y(x) = \frac{Fa}{6}(3x^2 - 3Lx + 3a^2) & \text{pour } x \in [a, (L-a)] \\ EI_{Gz} Y(x) = \frac{F(L-x)}{6}[(L-x)^2 - 3a(L-a)] & \text{pour } x \in [(L-a), L] \end{cases}$$

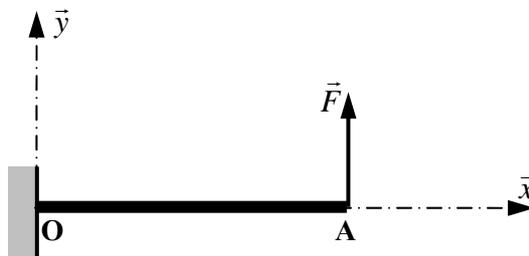
Déterminer l'expression de la flèche maximale  $f$  et la calculer alors en fonction des données.

6. Pour la contrainte maximale calculée dans la question 7, Quel est le gain de masse que l'on réalise si on remplace le montant plein par un tube creux dont le rapport des diamètres intérieur  $d$  et extérieur  $D$  est  $\alpha = \frac{d}{D} = 0,6$ .

Données :  $a = 1 \text{ m}$  ;  $L = 2.5 \text{ m}$  ,  $E = 200 \text{ GPa}$  ;  $Re = 260 \text{ MPa}$ .

### Exercice 2

On se propose d'étudier la déformation de la dent d'une roue dentée. Cette dent est modélisée par une poutre droite encastree libre soumise à une force concentrée comme l'indique la figure suivante :



On désigne par :

$R_{pe}$  : Résistance pratique à la contrainte normale ;

$E$  : Module d'élasticité longitudinale ;

$OA = 2,25 m_n$  : Longueur de la poutre

$\frac{I_{Gz}}{y} = \frac{\pi^2}{24} k m_n^3$  Module de rigidité en flexion.

Où  $m_n$  est le module de la denture et  $k$  est une constante telle que  $6 \leq k \leq 10$ .

1. Définir et déterminer les composantes du torseur de cohésion tout au long de la ligne moyenne (OA).
2. Tracer le diagramme du moment de flexion.
3. En déduire l'expression de la contrainte normale en fonction du moment de flexion dans la section droite la plus sollicitée.

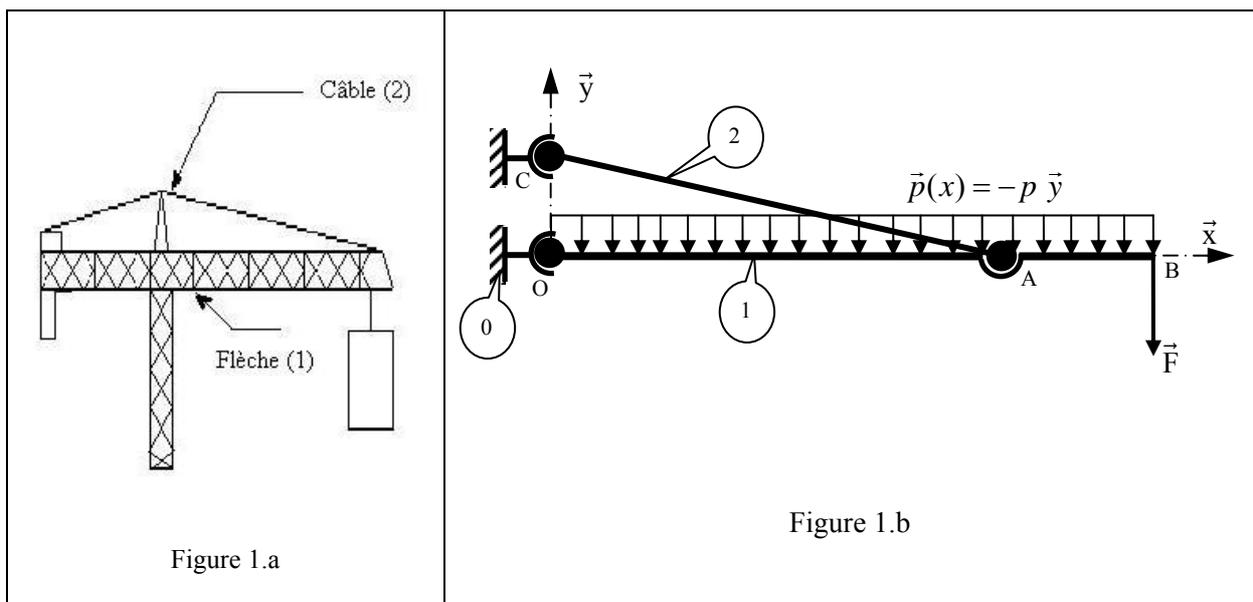
## Exercices de Travaux Dirigés

4. En appliquant la condition de résistance à la contrainte normale produite par la flexion, établir l'expression permettant de calculer le module  $m_n$ .
5. Donner l'équation différentielle de la déformée statique créée par la force  $\vec{F}$ .
6. En appliquant les conditions aux limites, déterminer alors l'expression permettant de calculer la flèche au point A.

### Exercice 3

On se propose d'étudier les deux éléments (1) et (2) d'une grue de chantier représentée par la figure 1.a. Pour cela on utilise la modélisation de la figure 1.b. La flèche (1) est modélisée par une poutre droite de ligne moyenne OB, de section constante, lié au bâti (0) par une rotule de centre O et au câble (2) par une rotule de centre A. La poutre est soumise en B à un effort mécanique  $\vec{F} = -F \vec{y}$ . Son poids propre est représenté par une charge linéique  $p$  uniformément répartie. Le câble (2) (dont on néglige le poids propre) est lié en outre au bâti (0) par une rotule de centre C. Toutes les liaisons sont parfaites.

On donne  $F = 22$ . KN ;  $p = 3.2$  KN/m. Les longueurs  $OA = 45$  m,  $OC = 9$  m et  $OB = 65$  m.



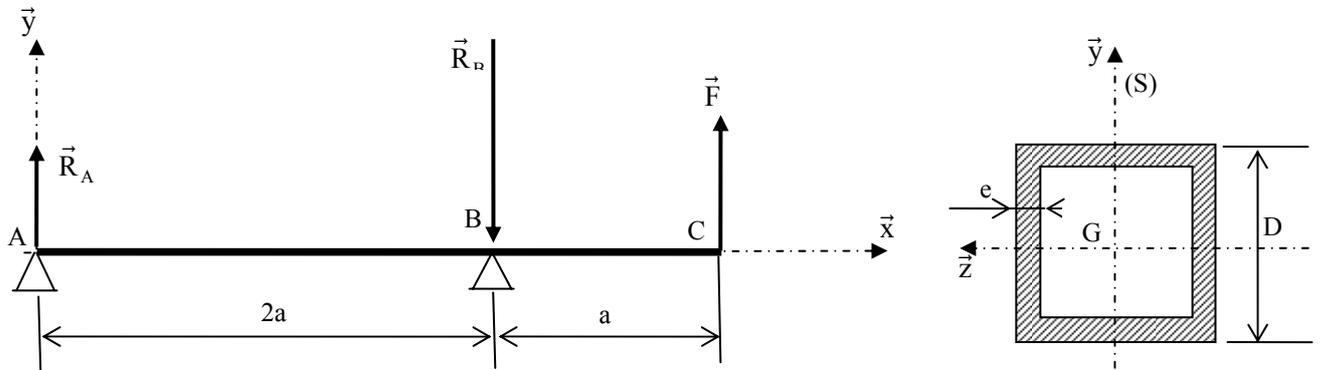
1. En écrivant l'équilibre du système au point A :
  - 1.1 Isoler le câble (2) et trouver des relations entre les inconnues de liaison en A et C.
  - 1.2 Isoler ensuite la poutre (1) et calculer complètement les inconnues de liaison en O, A et C
2. Déterminer le torseur des efforts de cohésion dans une section du câble (1) et préciser comment est sollicité ce dernier.
3. Déterminer le torseur des efforts de cohésion au niveau d'une section droite située dans la zone OA de la poutre (2). Indiquer les différentes sollicitations.

### Exercice 4

On se propose d'étudier la résistance d'une poutre droite creuse de section (S) carrée de côté  $D$  et d'épaisseur  $e$ . La poutre est simplement appuyée en A et B (liaisons ponctuelles

## Exercices de Travaux Dirigés

parfaites), l'extrémité C est en porte-à-faux (libre) et doit supporter un effort F comme schématisé ci-dessous :



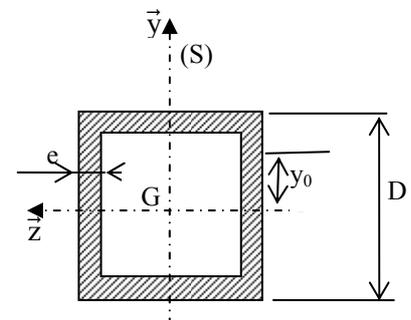
$AB = 2a = 100 \text{ mm}$ ,  $BC = a = 50 \text{ mm}$ .

Une étude préliminaire de l'équilibre du système a permis de calculer les réactions aux appuis  $R_A$  et  $R_B$  en fonction de l'effort  $F$  :  $R_A = \frac{F}{2}$  et  $R_B = -\frac{3F}{2}$ .

### Données :

- Caractéristiques de la section :  $D = 22 \text{ mm}$  et  $e = 2 \text{ mm}$ .
- Module de Young :  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
- flèche limite :  $f_{\text{lim}} = 2 \text{ mm}$  pour 1 m.
- Contrainte tangentielle admissible  $\tau_{\text{adm}} = 70 \text{ MPa}$
- Contrainte normale admissible :  $\sigma_{\text{adm}} = 140 \text{ MPa}$
- On rappelle que la contrainte tangentielle en flexion est donnée par :

$$\tau_y = -\frac{T_y W_{Gz}}{2e I_{Gz}} \text{ avec } W_{Gz} = \iint y ds = 2e \int_{y_0}^{D/2} y dy$$



## Exercices de Travaux Dirigés

**1) Déterminer les composantes du torseur des efforts de cohésion tout au long de cette poutre :**

**2) Etude de la résistance de l'arbre au moment de flexion :**

2.a) Tracer le diagramme du moment de flexion :

2.b) Calculer l'effort maximal  $F$  qui s'exerce sur la poutre pour que celle-ci résiste à la flexion.

**3) Etude de la déformée :**

3.a) Déterminer les expressions de la déformée :

3.b) Ecrire les conditions aux limites et déterminer complètement les équations de la déformée :

3.c) Calculer la flèche au point C. Calculer  $f_{im}$  dans ce cas et conclure.

**4) Etude de la résistance à l'effort tranchant :**

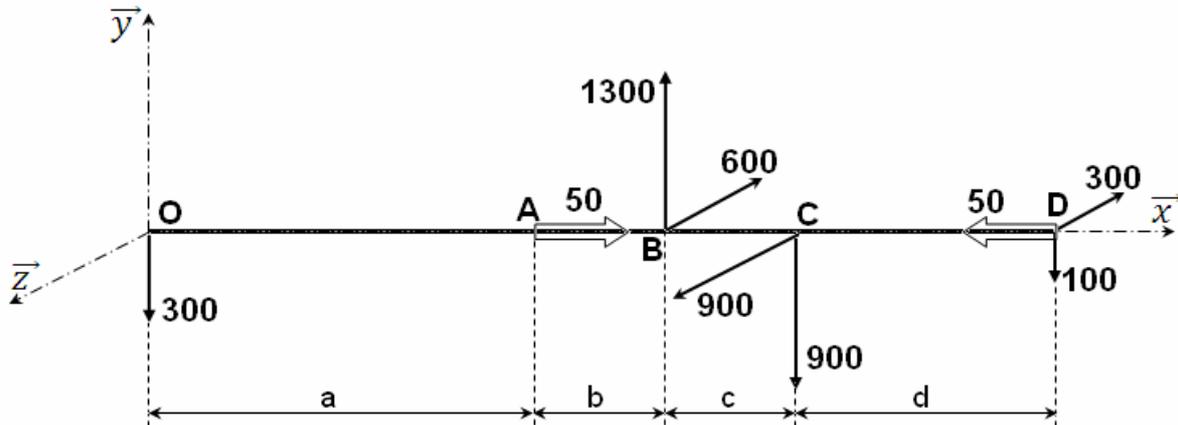
4.a) Tracer le diagramme de l'effort tranchant.

4.b) Déduire la section la plus sollicitée au cisaillement. Calculer la contrainte tangentielle maximale et conclure.

## V. TD-5 : Torsion simple

### Exercice corrigé

On se propose d'étudier la résistance d'un arbre de transmission modélisé par une poutre droite, de section circulaire constante comme l'indique la figure ci-dessous :



OA = a = 300 mm, AB = b = 100 mm, BC = c = 100 mm, CD = d = 200 mm.

Les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur l'arbre sont représentées par les torseurs suivants :

$$\{T_1\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -300 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O, \quad \{T_2\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 50 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A, \quad \{T_3\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1300 & 0 \\ -600 & 0 \end{Bmatrix}_B, \quad \{T_4\}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -900 & 0 \\ 900 & 0 \end{Bmatrix}_C,$$

$$\{T_5\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & -50 \\ -100 & 0 \\ -300 & 0 \end{Bmatrix}_D.$$

**N.B.** Les forces sont données en Newton (N) et les moments en Newton-mètre (Nm).

#### Données :

- Module de Coulomb :  $G = 8 \cdot 10^4$  MPa .
- Coefficient de sécurité :  $s = 3$ .
- Angle limite de torsion :  $\theta_{\text{lim}} = 0,45^\circ / \text{m}$ .
- Contrainte tangentielle à la limite élastique (glissement) :  $\tau_e = R_g = 120 \text{ MPa}$  .

Pour une équation de la forme  $x^4 - (30)^3 x - 22^4 = 0$ , la solution est  $x \approx 32,5$ .

#### QUESTIONS - REPONSES

1) Déterminer les composantes du torseur des efforts de cohésion tout au long de cette poutre :

Première coupure :  $G \in [O, A[$ ,  $\vec{OG} = x \vec{x}$ ,  $x$  en mètre

## Exercices de Travaux Dirigés

$$\{\tau_{coh}\}_G = -\{\tau_1\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \\ 0 & -300x \end{Bmatrix}_{(G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

Deuxième coupure :  $G \in [A, B]$ ,  $\vec{OG} = x \vec{x}$ ,  $x$  en mètre

$$\{\tau_{coh}\}_G = -\{\tau_1\}_G - \{\tau_2\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & -50 \\ 300 & 0 \\ 0 & -300x \end{Bmatrix}_{(G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

Troisième coupure :  $G \in [B, C]$ ,  $\vec{OG} = x \vec{x}$ ,  $x$  en mètre

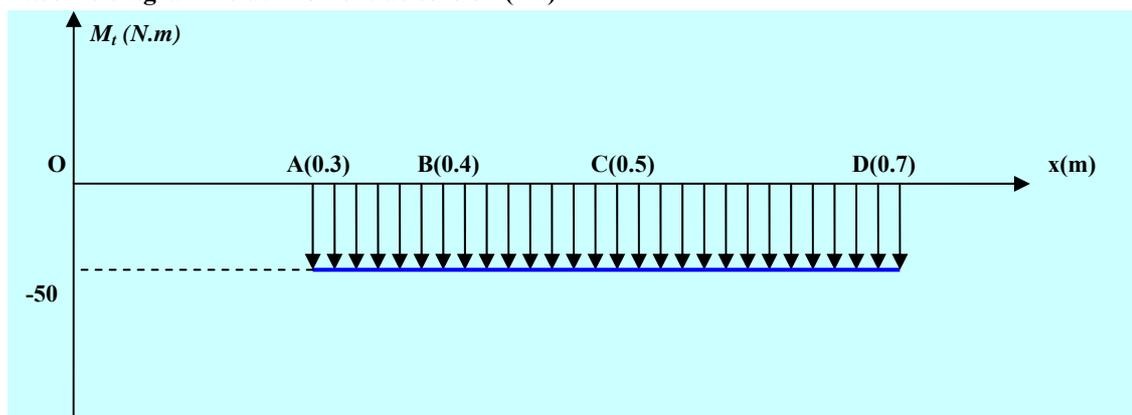
$$\begin{aligned} \{\tau_{coh}\}_G &= -\{\tau_1\}_G - \{\tau_2\}_G - \{\tau_3\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & -50 \\ 300 & 0 \\ 0 & -300x \end{Bmatrix}_{(G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} - \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1300 & -600(x - (a+b)) \\ -600 & -1300(x - (a+b)) \end{Bmatrix}_{(G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 & -50 \\ -1000 & 600(x - (a+b)) \\ 600 & 1000x - 1300(a+b) \end{Bmatrix}_{(G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \begin{Bmatrix} 0 & -50 \\ -1000 & 600x - 240 \\ 600 & 1000x - 520 \end{Bmatrix}_{(G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}, \quad (a+b)=0.4 \text{ m} \end{aligned}$$

Quatrième coupure :  $G \in [C, D]$ ,  $\vec{OG} = x \vec{x}$ ,  $x$  en mètre

$$\{\tau_{coh}\}_G = +\{\tau_5\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & -50 \\ -100 & -300(x - 0.7) \\ -300 & 100(x - 0.7) \end{Bmatrix}_{(G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \begin{Bmatrix} 0 & -50 \\ -100 & -300x + 210 \\ -300 & 100x - 70 \end{Bmatrix}_{(G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

### 2) Etude de la résistance de l'arbre au moment de torsion :

#### 2.a) Tracer le diagramme du moment de torsion (Mt).



#### 2.b) Calculer le diamètre minimal (d) de l'arbre à partir de la condition de rigidité.

Condition de rigidité :  $\theta \leq \theta_{lim}$  avec  $\theta = \frac{|M_t|}{G I_G(S)} = \frac{32|M_t|}{G \pi d^4} \leq \theta_{lim}$

## Exercices de Travaux Dirigés

$$D'où : d \geq \sqrt[4]{\frac{32|M_t|}{G \pi \theta_{lim}}} \text{ soit } d_{min} = \sqrt[4]{\frac{32 * 50 * 10^3 * 180}{\pi * 8 * 10^4 * 0.45 * \pi * 10^{-3}}} = \sqrt[4]{810570} = 30 \text{ mm}$$

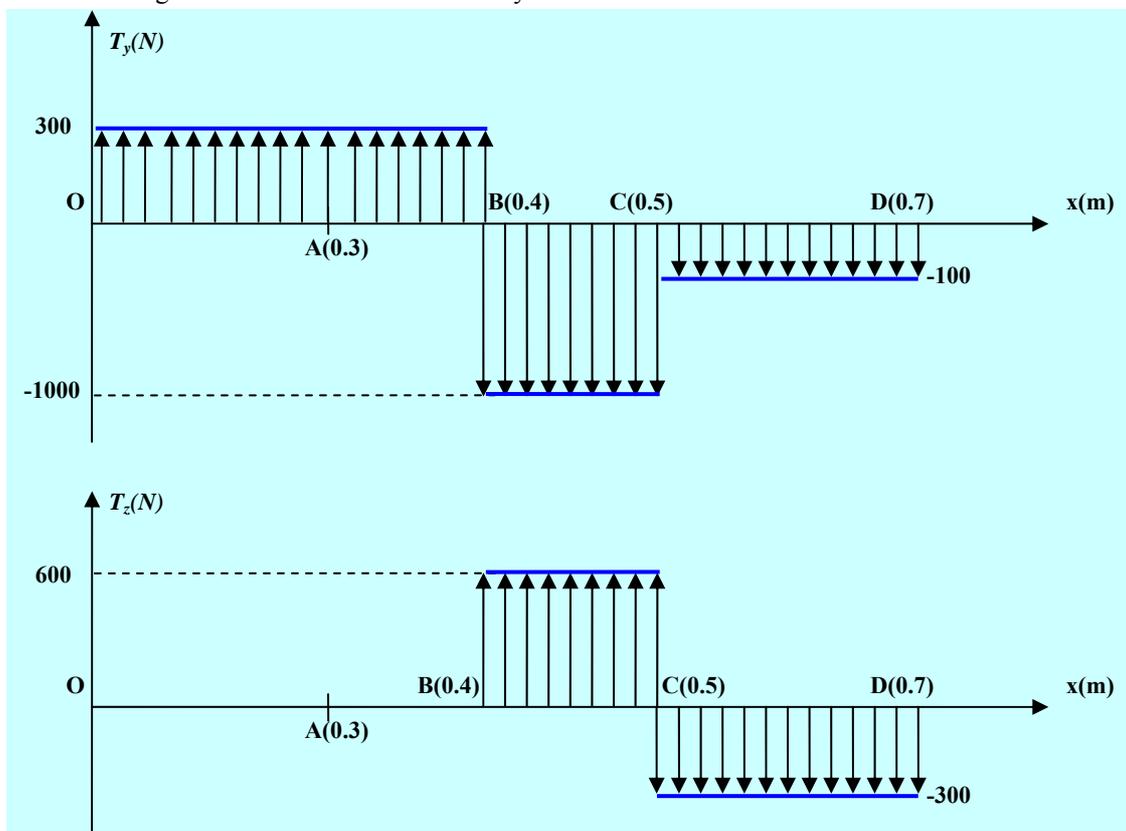
2.c) Pour ce diamètre, calculer alors la contrainte tangentielle maximale en torsion et conclure.

$$|\tau_{max}| = \frac{|M_t|}{I_G(S)} = \frac{16|M_t|}{\pi d^3} = \frac{16 * 50 * 10^3}{\pi 30^3} = 9.43 \text{ MPa}$$

$$|\tau_{max}| < R_{pg} = \frac{120}{3} = 40 \text{ MPa} \Rightarrow \text{L'arbre résiste à la torsion}$$

3) Etude de résistance aux efforts tranchants :

3.a) Tracer les diagrammes des efforts tranchants  $T_y$  et  $T_z$ .



3.b) Déduire la section la plus sollicitée au cisaillement et l'intensité de l'effort tranchant résultant ( $T$ ) dans cette section.

La section de centre B est la plus sollicitée

$$L'intensité de l'effort tranchant dans cette section est : T = \sqrt{T_y^2 + T_z^2} = \sqrt{1300^2 + 600^2} = 1431.7821$$

(N)

3.c) Pour le diamètre trouvé en 2.b), vérifier la résistance de cette section vis-à-vis du cisaillement.

$$\tau_{moy} = \frac{T}{S} = \frac{4T}{\pi d^2} = \frac{4 * 1431.7821}{\pi * 30^2} = 2.055 \text{ (MPa)}$$

$$\tau_{moy} < R_{pg} = \frac{120}{3} = 40 \text{ MPa} \Rightarrow \text{L'arbre résiste au cisaillement}$$

**Exercices de Travaux  
Dirigés**

4) On suppose que le diamètre de l'arbre plein est  $d = 30$  mm. Pour l'alléger on se propose de le remplacer par un arbre creux de diamètre intérieur  $d_1 = 22$  mm.

**4.a) Calculer le diamètre extérieur ( $d_2$ ) de façon à ce que la contrainte tangentielle maximale en torsion garde la même valeur que celle de l'arbre plein :**

$$\text{Pour l'arbre creux : } |\tau_{\max}| = \frac{|M_t|}{I_G(S)} = \frac{16 d_2 |M_t|}{\pi (d_2^4 - d_1^4)}$$

$$\text{Pour l'arbre plein : } |\tau_{\max}| = \frac{|M_t|}{I_G(S)} = \frac{16 |M_t|}{\pi d^3}$$

En faisant l'égalité entre les deux expressions, on aura :  $\frac{(d_2^4 - d_1^4)}{d_2} = d^3 \Rightarrow d_2^4 - d_1^4 - d_2 d^3 = 0$

$$\text{A.N : } d_2^4 - 30^3 d_2 - 22^4 = 0 \Rightarrow d_2 \approx 32.5 \text{ mm}$$

**4.b) Calculer alors le rapport de masse des deux arbres ( $m_2/m_1$ ) ainsi que le rapport des angles de torsion unitaires  $\square_2/\square_1$  (1 : arbre plein, 2 : arbre creux). Conclure.**

$$\text{Rapport des masses : } \frac{m_2}{m_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{(d_2^2 - d_1^2)}{d^2} = \frac{32.5^2 - 22^2}{30^2} = 0.6358$$

$$\text{Rapport des angles unitaires de torsion : } \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{I_G(S_1)}{I_G(S_2)} = \frac{d^4}{(d_2^4 - d_1^4)} = \frac{30^4}{32.5^4 - 22^4} = 0.919$$

**Conclusion :** Pour le même chargement (même contrainte), l'arbre creux est plus léger ( $m_2 < m_1$ ) et plus rigide ( $\theta_2 < \theta_1$ ) que l'arbre plein