

# RESISTANCE DES MATERIAUX



**F.Golay**

I.S.I.T.V.

[www.GenieCivilPDF.com](http://www.GenieCivilPDF.com)



Ce cours de résistance des matériaux a pour objectif d'approfondir la mécanique des solides élastiques, puis à partir de la mécanique des milieux continus, nous introduirons la théorie des poutres. Dans une première partie, nous étudierons la démarche qui nous permet l'établissement des équations de la théorie des poutres (une démarche similaire pourrait être utilisée pour les plaques et coques). Dans une deuxième partie, nous nous attacherons à exposer les outils classiques de la théorie des poutres: étude de cas simples, méthodes énergétiques, ...etc...

La résistance des matériaux est un outil indispensable à toute modélisation en calcul des structures. Même si d'autres méthodes (par exemple les éléments finis) sont en général utilisées, un calcul rapide de RDM permet de vérifier les ordres de grandeur et de juger de l'opportunité d'utiliser d'autres méthodes plus complexes.

Ce polycopié est en perpétuel correction (quand j'en prends le temps). C'est pourquoi, je serai reconnaissant aux étudiants de m'exposer toute suggestion susceptible d'en améliorer le contenu.

# SOMMAIRE

## RAPPELS DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

I - CINEMATIQUE.....	7
I - 1 Configuration, mouvement, déplacement, .....	7
I - 2 Déformation.....	8
I - 3 Cas des petites perturbations.....	9
I - 4 Conditions de compatibilité.....	10
II - STHENIQUE.....	11
II - 1 Forces.....	11
II - 2 Contraintes.....	11
II - 3 Equilibre.....	13
II - 4 Quelques propriétés du tenseur des contraintes.....	18
III - LOI DE COMPORTEMENT POUR LES SOLIDES ELASTIQUES.....	21
III - 1 Approche expérimentale: essai de traction.....	21
III - 2 Loi de comportement élastique linéaire (en HPP).....	22
III - 3 Théorème de superposition.....	24
III - 4 Critères de limite d'élasticité pour les matériaux isotropes.....	24
III - 5 Thermoélasticité.....	24

## THEORIE DES POUTRES

I - DEFINITIONS, HYPOTHESES DE BERNOUILLI .....	25
I - 1 Définition d'une poutre .....	25
I - 2 Notations.....	25
I - 3 Hypothèse de Bernouilli.....	26
II - DEPLACEMENTS ET FORCES GENERALISEES.....	27
II - 1 Déplacement généralisé .....	27
II - 2 Puissance virtuelle des efforts extérieurs.....	28
II - 3 Forces généralisées.....	28
III - DEFORMATION ET CONTRAINTES GENERALISEES .....	29
III - 1 Déformations généralisées.....	29
III - 2 Puissance Virtuelle des efforts intérieurs.....	31
III - 3 Contraintes généralisées, équation d'équilibre.....	32
IV - LOI DE COMPORTEMENT ELASTIQUE LINEAIRE .....	34

**ETUDE DE SOLLECITATIONS SIMPLES**

I - TRACTION OU COMPRESSION .....	36
I - 1 Définition.....	36
I - 2 Déformations et contraintes.....	36
II - TORSION.....	37
II - 1 Définition.....	37
II - 2 Déplacement, contraintes, déformations.....	37
II - 3 Exemple.....	39
III - FLEXION.....	40
III - 1 Flexion pure.....	40
III - 2 Flexion pure plane.....	40
III - 3 Flexion plane simple.....	41
III - 4 Exemples.....	42
III - 5 Etude de la déformation des poutres en flexion.....	44

**METHODES ENERGETIQUES**

I - THEOREMES DE L'ENERGIE EN ELASTICITE LINEAIRE .....	49
I - 1 Notations et définitions.....	49
I - 2 Théorème fondamental.....	50
II - ENERGIE DE DEFORMATION EN RDM.....	51
II - 1 Cas général.....	51
II - 2 Cas particulier de la Traction/Compression.....	51
II - 3 Cas particulier de la flexion plane simple.....	52
II - 4 Cas particulier de la torsion.....	52
III - THEOREME DE RECIPROCITE DE MAXWELL-BETTI.....	53
IV - THEOREME DE CASTIGLIANO ET APPLICATIONS.....	54
IV - 1 Théorème de Castigliano.....	54
IV - 2 Conséquence: Principe du travail minimum ou théorème de Ménabréa.....	55
IV - 3 Exemples.....	56
V - EQUATION DE BERTRAND DE FONTVIOLANT.....	58
V - 1 Enoncé.....	58
V - 2 Application: Evaluation des réactions hyperstatiques surabondantes.....	59
V - 3 Application: Détermination des déplacements et rotations.....	60

**FLAMBEMENT**

I - STABILITE D'UNE POUTRE EN COMPRESSION .....	62
II - ETUDE DE QUELQUES CAS SIMPLES.....	63
II-1 Colonne Rotule-Rotule.....	63

II-2 Colonne Encastrée-Libre.....	65
II-3 Colonne Encastrée-Rotule.....	65
III - GENERALISATION: FORMULE D'EULER.....	66
IV - EXEMPLE .....	68
<b>COMPORTEMENT AU DELA DU DOMAINE ELASTIQUE - CHARGES LIMITES</b>	
I - INTRODUCTION .....	70
I-1 Critères de défaillance.....	70
I-2 Comportement du matériau .....	70
II - ANALYSE LIMITE EN TRACTION .....	71
II-1 Analyse élastique.....	71
II-2 Analyse élastique-plastique .....	72
II-3 Décharge .....	73
III - ANALYSE LIMITE A LA TORSION .....	74
III-1 Généralités .....	74
III-2 Exemple.....	75
IV - ANALYSE LIMITE A LA FLEXION .....	76
IV-1 Généralités .....	76
IV-2 Exemple: Méthode "pas à pas".....	77
IV-3 Théorème énergétique .....	79
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>82</b>
<b>ANNEXE.....</b>	<b>84</b>

# RAPPELS DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

## I - Cinématique

### I - 1 Configuration, mouvement, déplacement, ...

L'espace physique est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . L'ensemble des particules ou points matériels constituant le milieu continu étudié, occupe à chaque instant  $t$ , un ensemble de positions dans l'espace: c'est la **configuration** du système à l'instant  $t$ , noté  $\bar{\Omega}(t)$  (d'intérieur  $\Omega(t)$  et de frontière  $\partial\Omega(t)$ ).

On introduit aussi la notion de **configuration de référence**: c'est la configuration particulière du système à un instant  $t_0$  fixé. Souvent on prendra  $\bar{\Omega}_0 = \bar{\Omega}(0)$ , et on parlera alors de **configuration initiale**.

Toute particule  $M_0$  de  $\bar{\Omega}_0$  est repérée par son vecteur position  $\vec{X}(t)$  dans la configuration de référence. Toute particule  $M$  de  $\bar{\Omega}(t)$  est repérée par son vecteur position  $\vec{x}(t)$  dans la configuration actuelle (à l'instant  $t$ ).

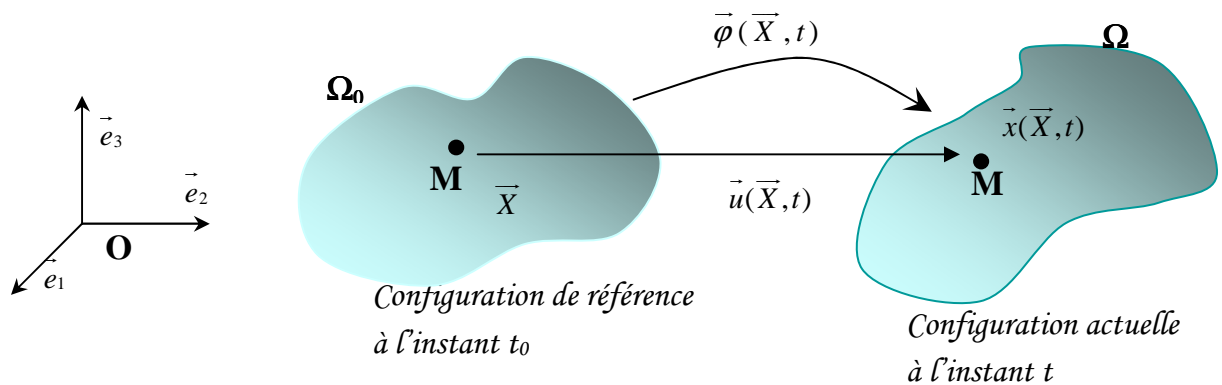


Figure 1

La position de chaque particule  $M$  sera donc déterminée si on connaît sa position dans la configuration de référence et une fonction  $\Phi$  telle que:

$$\vec{x}(t) = \Phi(\vec{X}, t) \tag{1}$$

$\Phi$  définit le mouvement par rapport à  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Dire que le milieu est continu, c'est dire que  $\Phi$  est une fonction continue et biunivoque de  $X$ .

$\vec{X}$  et  $t$  définissent les variables de Lagrange

$\vec{x}$  et  $t$  définissent les variables d'Euler

Le déplacement par rapport à la configuration  $\bar{\Omega}_0$ , à l'instant t, de la particule  $M_0$  est le vecteur

$$\bar{u}(X, t) = \bar{x}(X, t) - \bar{X} \quad (2)$$

## I - 2 Déformation

Considérons deux particules voisines X et X+dX. A l'instant t ces particules occupent la position x et x+dx avec  $d\bar{x}(t) = \Phi(\bar{X} + d\bar{X}, t) - \Phi(\bar{X}, t)$

Par définition du gradient on écrit:

$$\Phi(\bar{X} + d\bar{X}, t) = \Phi(\bar{X}, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial X}(\bar{X}, t) d\bar{X} + \Theta(\|d\bar{X}\|^2)$$

Soit

$$d\bar{x} = \bar{F}(\bar{X}, t) d\bar{X} \quad \text{avec} \quad \bar{F}(\bar{X}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial X}(\bar{X}, t) \quad (3)$$

$\bar{F}$  est une application linéaire qui fait passer de l'espace vectoriel dans lequel peut varier  $d\bar{X}$  dans l'espace vectoriel où varie à priori  $d\bar{x}$ . Cette application linéaire, appelée **tenseur gradient**, permet donc le passage de la configuration  $\bar{\Omega}_0$  à la configuration  $\bar{\Omega}(t)$ .

En notation indicielle,

$$F_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

### Remarques:

\* Transformation d'un élément de volume dV dans  $\bar{\Omega}_0$  en un élément de volume dv dans  $\bar{\Omega}(t)$ .

$$dv = \det(\bar{F}) dV$$

\* Transformation d'un élément de surface  $\bar{N} dS$  dans  $\bar{\Omega}_0$  en un élément de surface dans  $\bar{\Omega}(t)$ .

$$\bar{n} ds = \det \bar{F} \bar{F}^{-T} \bar{N} dS$$

Le tenseur gradient décrit la transformation locale au voisinage d'une particule donnée. Afin de rendre compte des déformations, c'est à dire des changements de forme autour de cette particule, on s'intéresse à l'évolution du produit scalaire de deux vecteurs matériels pris respectivement dans les deux configurations  $\bar{\Omega}_0$  et  $\bar{\Omega}(t)$ .

Considérons trois particules voisines X, X+dX, X+dX'. Après déformations, elles occupent dans  $\bar{\Omega}(t)$  les positions respectives x, x+dx, x+dx'.



$$d\bar{x} \cdot d\bar{x}' = \left( \overline{\overline{F}}(\bar{X}, t) d\bar{X} \right) \cdot \left( \overline{\overline{F}}(\bar{X}', t) d\bar{X}' \right) = \left( \frac{\partial x_k}{\partial X_i} dX_i \right) \cdot \left( \frac{\partial x'_k}{\partial X'_j} dX'_j \right)$$

d'où sa variation autour de la transformation

$$d\bar{x} \cdot d\bar{x}' - d\bar{X} \cdot d\bar{X}' = \left( \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x'_k}{\partial X'_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX'_j$$

soit

$$d\bar{x} \cdot d\bar{x}' - d\bar{X} \cdot d\bar{X}' = 2d\bar{X} \overline{\overline{\varepsilon}} d\bar{X}'$$

en posant

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \overline{\overline{F}}^T(X, t) \overline{\overline{F}}(X, t) - \overline{\overline{1}} \right) \quad (4)$$

L'application linéaire  $\overline{\overline{\varepsilon}}$  est appelée **tenseur des déformations**. Cette application est symétrique mais dépend bien sûr de la base  $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  initialement choisie.

Autre écriture:

D'après (2) et (3)

$$\overline{\overline{F}}(X, t) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial X}(X, t) = \overline{\overline{1}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial X}(X, t)$$

soit

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial X}(X, t) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial X}^T(X, t) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial X}(X, t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial X}^T(X, t) \right) \quad (5)$$

ou encore en notation indicielle

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

### I - 3 Cas des petites perturbations

Cette hypothèse correspond au cas où  $\|\bar{u}(X, t)\|$  et  $\left\| \frac{\partial \bar{u}}{\partial X}(X, t) \right\|$  sont *petits*.

En reprenant (5) et en ne retenant que les termes d'ordre 1, on obtient:

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_{\text{HPP}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial X}(X, t) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial X}^T(X, t) \right) \quad (6)$$

ou encore en notation indicielle

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

### I - 4 Conditions de compatibilité

A tout déplacement  $\bar{u}$  on fait correspondre une déformation  $\bar{\varepsilon}$ . On peut aussi se poser le problème inverse. Ce problème est dit '*problème de compatibilité géométrique d'un champ de déformation*', ou encore '*problème d'intégrabilité d'un champ de déformation*'.

Les conditions de compatibilité peuvent être établies dans le cas général, cependant nous ne les établirons que dans le cas des petites perturbations.

Décomposons maintenant le gradient des déplacements en une partie symétrique  $\bar{\varepsilon}$  et une partie antisymétrique  $\bar{\omega}$ .

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial X}(X, t) = \bar{\varepsilon}(X, t) + \bar{\omega}(X, t)$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial X}(X, t) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial X}(X, t)^T \right) \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

On a

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i}$$

soit en dérivant une nouvelle fois

$$\omega_{ij,kl} = \omega_{ij,lk} \quad \forall i,j,k,l \text{ dans } \{1,2,3\}$$

$\forall i, j, k, l, \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$	(7)
---	-----

Réciproquement, si  $\bar{\varepsilon}$  vérifie (7), alors les formes différentielles

$$d\omega_{ij} = (\varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i}) dx_k$$

sont exactes; elles permettent donc de construire le champ  $\bar{\omega}$  de tenseur antisymétrique.

On vérifie ensuite que les formes différentielles

$$du_i = (\omega_{ik} + \varepsilon_{ik}) dx_k$$

sont exactes, d'où la possibilité de construire un champ de déplacement  $\bar{u}(X, t)$  défini dans  $\bar{\Omega}_0$ .

## II - Sthénique

### II -1 Forces

Elles résument les effets mécaniques, autres que cinématiques, exercés sur le milieu continu considéré par le reste du domaine physique. Leur schématisation à chaque instant repose sur la définition d'un champ de vecteur  $\vec{\Phi}(x,t)$  et d'une mesure positive  $\omega$ , définis sur la configuration actuelle  $\bar{\Omega}(t)$ .  $\vec{\Phi}(x,t)$  est une densité de force pour la mesure  $\omega$ .

\* Si  $\omega$  est une mesure de volume, alors  $\vec{\Phi}(x,t)$  est une force volumique (densité volumique de force) définie dans  $\Omega(t)$  de la configuration actuelle, par la fonction

$$\vec{f}: \bar{x} \in \Omega(t) \rightarrow \vec{f}(x,t) \in \mathcal{R}^3$$

\* Si  $\omega$  est une mesure de surface, alors  $\vec{\Phi}(x,t)$  est une force surfacique (densité surfacique de force) définie sur  $\partial\Omega_F(t)$  de la configuration actuelle, par la fonction

$$\vec{F}: \bar{x} \in \partial\Omega_F(t) \rightarrow \vec{F}(x,t) \in \mathcal{R}^3$$

\* ... etc ...

#### Remarques:

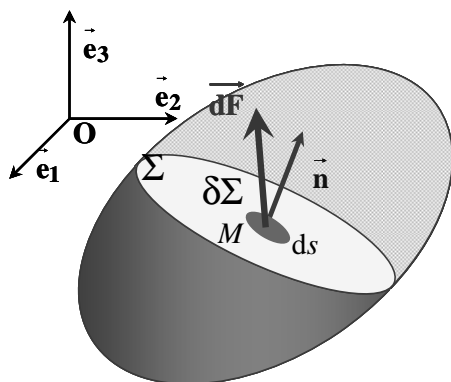
\* Les forces sont définies sur la configuration actuelle.

\* A un instant donné et en un point donné  $x$  de  $\partial\Omega(t)$ , on ne peut imposer à la fois le déplacement et la force !. Mais l'un des deux doit être imposé. On note  $\partial\Omega_F(t)$  la frontière où la force est imposée, et  $\partial\Omega_U(t)$  la frontière où le déplacement est imposé. Dans le cas des appuis mobiles, les composantes non imposées cinématiquement le sont pour les forces

\* Le monde extérieur au milieu considéré doit, pour imposer le déplacement  $\vec{U}(t)$  au bord  $\partial\Omega_U(t)$ , exercer des forces que nous noterons  $\vec{R}(x,t)$ . Comme elles sont à priori inconnues, nous les appellerons **réactions** pour éviter de les confondre avec les autres forces qui, elles, sont données.

### II - 2 Contraintes

#### II - 2.1 Notion de Vecteur-contrainte et tenseur des contraintes



Soit un corps (C) en équilibre par application d'un système d'actions mécaniques extérieures. Imaginons qu'une surface  $\Sigma$  divise (C) en deux parties (1) et (2). La partie (1) est en équilibre sous les actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées et les actions mécaniques exercées par la partie (2). Nous admettrons que sur chaque élément de surface  $d\Sigma$  de  $\Sigma$ , (2) exerce sur (1) une force  $d\vec{F}(x,t,\vec{n})_{1/2}$  de densité superficielle  $\vec{T}(x,t,\vec{n})$ .

$$d\vec{F}(x,t,\vec{n})_{1/2} = \vec{T}(x,t,\vec{n})d\Sigma \tag{8}$$

$\vec{T}(x,t,\vec{n})$  est le **vecteur contrainte** au point  $x$ , relativement à la facette  $d\Sigma$  définie par son

vecteur normal  $\vec{n}$ .

La densité surfacique de forces exercées en  $x$  dépend de  $x$ ,  $t$  et aussi de l'orientation de la surface  $\Sigma$  au voisinage de  $x$ . Elle est linéairement dépendante de  $\vec{n}$ . On introduit alors l'application  $\vec{\sigma}$  telle que:

$$\vec{T}(x, t, \vec{n}) = \vec{\sigma}(x, t)\vec{n} \tag{9}$$

L'application  $\vec{\sigma}(x, t)$  s'appelle le **tenseur des contraintes de Cauchy** en  $x$  à l'instant  $t$ ; il caractérise, dans la configuration actuelle, les efforts intérieurs de cohésion exercés sur une partie du solide à travers l'élément de surface  $\vec{n} d\Sigma$ .

### II - 2.2 Autre écriture du tenseur des contraintes

En utilisant la remarque du §I-2 pour exprimer  $\vec{n} d\Sigma$  en fonction de  $\vec{N} dS$ , (8) devient:

$$d\vec{F}(x(X, t), t, \vec{n}(\vec{N}, t)) = \vec{\Pi}\vec{N}(X)dS$$

où  $\vec{\Pi}$  est le tenseur

$$\vec{\Pi}(X, t): \vec{N} \in \mathcal{R}^3 \rightarrow \vec{\Pi}(X, t, \vec{N}) = \vec{\Pi}(X, t)\vec{N} \in \mathcal{R}^3$$

défini par

$$\vec{\Pi}(X, t) = (\det F)^{-1} \vec{\sigma} F^T$$

Cette application linéaire  $\vec{\Pi}(X, t)$ , définie pour  $X \in \bar{\Omega}_0$ , s'appelle le **premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff** en  $X$  à l'instant  $t$ ; la composante  $\Pi_{ij}$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur contrainte exercée sur la déformée d'une surface unité, normale à  $\vec{e}_j$ , de la configuration de référence. *On prendra garde au fait que le tenseur  $\vec{\Pi}$  n'est pas symétrique.*

Si maintenant on cherche le vecteur "force de cohésion" dans la configuration de référence

$$d\vec{F}_0(X, t, \vec{N}) = \vec{F}^{-1}(X, t) d\vec{F}(x(X, t), t, \vec{n}(\vec{N}, t)) = \vec{S}\vec{N}(X)dS$$

où  $\vec{S}$  est le tenseur défini par

$$\vec{S} = \vec{F}^{-1} \vec{\Pi}$$

Cette application linéaire  $\vec{S}(X, t)$ , définie pour  $X \in \bar{\Omega}_0$ , s'appelle le **second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff** en  $X$  à l'instant  $t$ . Attention, sa composante  $S_{ij}$  n'est pas la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur contrainte exercée sur la déformée d'une surface unité, normale à  $\vec{e}_j$ , de la configuration de référence, mais seulement la  $i^{\text{ème}}$  composante de son transporté dans la configuration de référence.

Selon le jeu d'écriture adopté, on a donc trois descriptions des contraintes:

$\vec{\sigma} = (\det F)^{-1} \vec{\Pi} F^T = (\det F)^{-1} \vec{S} F^T \tag{10}$
---

## II -3 Equilibre

### II - 3.1 Le Principe des Puissances Virtuelles

Pour schématiser les efforts mis en jeu, il est commode d'imaginer des mouvements fictifs (ou virtuels) et d'analyser le travail ou la puissance qui en résulte. Par exemple, pour évaluer les forces de gravité agissant sur un objet, on peut imaginer de le soulever (mouvement virtuel de bas en haut).

#### II-3.1.1 Le Principe des Puissances Virtuelles (Germain 1972)

Un milieu matériel étant isolé, on peut distinguer les actions extérieures qui agissent sur le milieu, des actions intérieures qui représentent les liaisons existant entre toutes les parties du milieu.

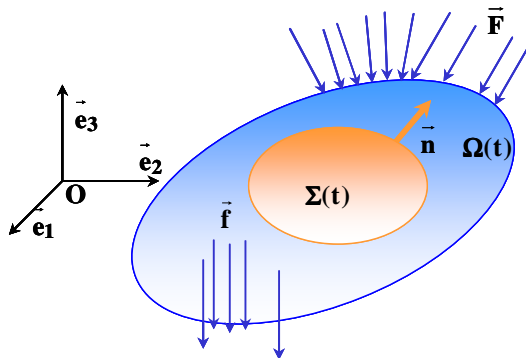
#### Axiome d'objectivité

*La puissance virtuelle des efforts intérieurs associée à tout mouvement rigidifiant est nulle.*

#### Axiome d'équilibre

*Pour tout milieu matériel repéré dans un référentiel absolu, à chaque instant et pour tout mouvement virtuel, la puissance virtuelle des quantités d'accélération  $\Pi_a$  est égale à la somme des puissances virtuelles des efforts intérieurs  $\Pi_i$  et des efforts extérieurs  $\Pi_e$ .*

#### II-3.1.2 Position du problème



Soit un milieu continu  $\bar{\Omega}(t)$  d'intérieur  $\Omega(t)$  et de frontière  $\partial\Omega(t)$ . Isolons maintenant un domaine  $\Sigma(t)$  de frontière  $\partial\Sigma(t)$  intérieur à  $\Omega(t)$ , et soit  $\vec{n}$  la normale en un point de  $\partial\Sigma(t)$ . A un instant  $t$  fixé, un mouvement virtuel défini par une vitesse virtuelle  $\delta\vec{v}$  est appliqué à  $\Sigma(t)$ . Cette vitesse est supposée continue et continûment dérivable sur  $\Sigma(t)$ .

#### II-3.1.3 Puissance virtuelle des efforts intérieurs

Pour déterminer la puissance virtuelle des efforts intérieurs nous ferons les hypothèses suivantes:

\*  $\Pi_i$  admet une densité volumique  $p_i$ :

$$\Pi_i = \iiint_{\Sigma} p_i dx$$

\*  $\Pi_i$  est en chaque point une forme linéaire des valeurs en ce point de  $\delta\vec{v}$  et de ses dérivées premières:

En décomposant le gradient des vitesses virtuelles en une partie symétrique  $\overline{\delta D}$  et une partie antisymétrique  $\overline{\delta W}$ ,

$$\frac{\partial \overline{\delta v}}{\partial x} = \overline{\delta D} + \overline{\delta W}$$

$$\overline{\delta W} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{\delta \delta v} & \overline{\delta \delta v}^T \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\delta W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\overline{\delta D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{\delta \delta v} & \overline{\delta \delta v}^T \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\delta D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right)$$

la densité volumique des efforts intérieurs devient:

$$p_i = A_i \delta v_i + B_{ij} \delta w_{ij} - \sigma_{ij} \delta D_{ij} \tag{11}$$

Le premier axiome du principe des puissances virtuelles impose que pour tout mouvement de solide rigide la puissance des efforts intérieurs soit nulle. D'où:

- Soit un mouvement de translation:  $\delta \vec{v} \neq \vec{0}$ ,  $\overline{\delta W} = \vec{0}$  et  $\overline{\delta D} = \vec{0}$

alors

$$\Pi_i = \iiint_{\Sigma} p_i dx = \iiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \delta \vec{v} dx = 0 \quad \forall \Sigma \text{ dans } \Omega$$

soit  $\vec{A} \cdot \delta \vec{v} = 0 \quad \forall \delta \vec{v}$ , ou encore  $\vec{A} = \vec{0}$

- Soit un mouvement de rotation:  $\delta \vec{v} = \vec{0}$ ,  $\overline{\delta W} \neq \vec{0}$  et  $\overline{\delta D} = \vec{0}$

alors

$$\Pi_i = \iiint_{\Sigma} p_i dx = \iiint_{\Sigma} \vec{B} : \overline{\delta W} dx = 0 \quad \forall \Sigma \text{ dans } \Omega$$

soit  $\vec{B} : \overline{\delta W} = 0 \quad \forall \overline{\delta W}$ , ou encore  $\vec{B} = \vec{0}$ .

Donc en définitive:

$\Pi_i = - \iiint_{\Sigma} \sigma : \delta D dx$	(12)
--	------

On peut montrer que le tenseur  $\overline{\sigma}$  introduit ici correspond bien au tenseur des contraintes de Cauchy exprimé au §II-2.1.

### II-3.1.4 Puissance virtuelle des efforts extérieurs

Les efforts extérieurs comprennent

- des efforts exercés à distance par des systèmes extérieurs à  $\Omega$ , supposés définis par une densité volumique de forces  $\vec{f}$ ,

- des efforts de cohésion schématisés par une densité surfacique de force  $\vec{T}$  sur  $\partial \Sigma$

$\Pi_e = \iiint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \delta \vec{v} dx + \iint_{\partial \Sigma} \vec{T} \cdot \delta \vec{v} dx$	(13)
---	------

**II-3.1.5 Puissance virtuelle des quantités d'accélération**

Si  $\vec{\gamma}$  est l'accélération et  $\rho$  la masse volumique de chacun des points de  $\Sigma$ , alors

$$\Pi_a = \iiint_{\Sigma} \rho \vec{\gamma} \cdot \delta \vec{v} dx \tag{14}$$

**II - 3.2 Application du Principe des Puissances Virtuelles**

En application du Principe des Puissances Virtuelles on obtient:

$$- \iiint_{\Sigma} \overline{\overline{\sigma}} : \delta D dx + \iiint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \delta \vec{v} dx + \iint_{\partial \Sigma} \vec{T} \cdot \delta \vec{v} dx = \iiint_{\Sigma} \rho \vec{\gamma} \cdot \delta \vec{v} dx \tag{15}$$

Pour exploiter le fait que (15) est vérifié pour tout mouvement virtuel, nous allons faire apparaître  $\delta \vec{v}$  dans chacun des termes.

En appliquant le théorème de la divergence, le premier terme devient:

$$- \iiint_{\Sigma} \overline{\overline{\sigma}} : \delta D dx = - \iiint_{\Sigma} \overline{\overline{\sigma}} : \frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial x} dx = - \iint_{\partial \Sigma} \overline{\overline{\sigma}} \cdot \delta \vec{v} \cdot \vec{n} dx + \iiint_{\Sigma} \text{div}_x \overline{\overline{\sigma}} \cdot \delta \vec{v} dx$$

Soit:

$$\iint_{\partial \Sigma} (\vec{T} - \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n}) \delta \vec{v} dx + \iiint_{\Sigma} (\vec{f} + \text{div}_x \overline{\overline{\sigma}} - \rho \vec{\gamma}) \cdot \delta \vec{v} dx = \vec{0} \cdot \delta \vec{v}$$

Ou encore

$$\begin{cases} \vec{f} + \text{div}_x \overline{\overline{\sigma}} - \rho \vec{\gamma} \text{ dans } \Sigma \\ \vec{T} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} \text{ sur } \partial \Sigma \end{cases} \tag{16}$$

**II - 3.3 Equilibre**

En considérant les développements du paragraphe précédent et en se ramenant au domaine  $\Omega(t)$ , nous pouvons donc écrire les équations d'équilibre d'un solide soumis à un champ de forces extérieures  $\vec{f}$  dans  $\Omega(t)$ , à un champ de forces extérieures  $\vec{F}_e$  sur  $\partial \Omega_F(t)$  et à un déplacement imposé  $\vec{U}_e$  sur  $\partial \Omega_U(t)$ .

Dans la configuration actuelle:

$$\vec{f}(x, t) + \text{div}_x \overline{\overline{\sigma}}(x, t) = \vec{0} \quad \forall x \in \Omega(t) \tag{17}$$

$$\overline{\overline{\sigma}}(x, t) \cdot \vec{n}(x, t) = \begin{cases} \vec{F}_e(x, t) \quad \forall x \in \partial \Omega_F(t) \\ \vec{R}(x, t) \quad \forall x \in \partial \Omega_U(t) \end{cases} \tag{18}$$

Dans la configuration de référence:

De même, si on note  $\vec{f}_0$ ,  $\vec{R}_0$  et  $\vec{F}_0$  les densités volumiques et surfaciques de forces mesurées dans la configuration de référence:

$$\vec{f}_0(X, t) + \text{div}_X \overline{\overline{\Pi}}(X, t) = \vec{0} \quad \forall x \in \Omega_0 \tag{19}$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{X}, t) \cdot \vec{\mathbf{N}}(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} \vec{\mathbf{F}}_0(\mathbf{x}, t) \forall \mathbf{x} \in \mathbf{x}^{-1}(\partial\Omega_F(t), t) \\ \vec{\mathbf{R}}_0(\mathbf{x}, t) \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{0U} \end{cases} \quad (20)$$

### II - 3.4 Cas des petites perturbations

Reprenons (17), en l'exprimant en fonction de X

$$f_i(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = 0 \forall \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \in \Omega(t)$$

$$f_i(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_k}(\mathbf{X}, t) \frac{\partial X_k}{\partial x_j}(\mathbf{X}, t) = 0 \forall \mathbf{X} \in \Omega_0$$

Or  $\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \vec{\mathbf{X}} + \vec{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)$  soit  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{1} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, t)$

On peut donc écrire l'équation d'équilibre sous la forme

$$f_i(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_k}(\mathbf{X}, t) \left[ \mathbf{1} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, t) \right]_{kj}^{-1} = 0 \forall \mathbf{X} \in \Omega_0$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations, on peut alors écrire:

$$\left[ \mathbf{1} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, t) \right]^{-1} = \mathbf{1} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, t)$$

soit

$$f_i(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_k}(\mathbf{X}, t) \left[ \delta_{jk} - \frac{\partial u_k}{\partial X_j}(\mathbf{X}, t) \right] = 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_0$$

Enfin, en ne retenant que les termes d'ordre 0, et après avoir effectué un développement de  $f_i$  au voisinage de X, on obtient:

$$f_i(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j}(\mathbf{X}, t) = 0 \forall \mathbf{X} \in \Omega_0$$

soit

$$\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) + \text{div}_{\mathbf{X}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{X}, t) = \vec{\mathbf{0}} \forall \mathbf{X} \in \Omega_0 \quad (21)$$

Le raisonnement qui a permis de remplacer  $\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$  par  $\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t)$ , permet aussi de remplacer  $\vec{\mathbf{F}}_e(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$  par  $\vec{\mathbf{F}}_e(\mathbf{X}, t)$  et  $\vec{\mathbf{R}}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$  par  $\vec{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, t)$ . Donc, comme condition sur la frontière on obtient:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{X}, t) \cdot \vec{\mathbf{N}}(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} \vec{\mathbf{F}}_e(\mathbf{X}, t) \forall \mathbf{X} \in \partial\Omega_{0F} \\ \vec{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, t) \forall \mathbf{X} \in \partial\Omega_{0U} \end{cases} \quad (22)$$



**II - 3.5 Autre approche**

On utilise la loi fondamentale de la dynamique qui stipule que :

*le torseur dynamique, qui est la dérivée temporelle du torseur cinématique est égal au torseur des actions extérieures.*

Ce qui se met en équations sous la forme suivante, en l’appliquant au domaine d’étude  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \rho \vec{v} \, dx &= \iint_{\partial\Sigma} \vec{T} \, dx + \iiint_{\Sigma} \vec{f} \, dx \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \overline{OM} \wedge \rho \vec{v} \, dx &= \iint_{\partial\Sigma} \overline{OM} \wedge \vec{T} \, dx + \iiint_{\Sigma} \overline{OM} \wedge \vec{f} \, dx \end{aligned} \tag{23}$$

Par application des propriétés de la dérivée particulière on peut écrire pour tout vecteur  $\vec{b}$  :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \rho \vec{b} \, dx = + \iiint_{\Sigma} \left( \frac{\partial \rho \vec{b}}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{b} \otimes \vec{v}) \right) dx$$

puis en utilisant le fait que pour tout vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$

$$\text{div}(\vec{a} \otimes \vec{b}) = \nabla \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \, \text{div} \vec{b}$$

on peut développer sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \rho \vec{b} \, dx &= \iiint_{\Sigma} \left( \frac{\partial \rho \vec{b}}{\partial t} + \nabla \rho \vec{b} \cdot \vec{v} + \rho \vec{b} \, \text{div} \vec{v} \right) dx \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \rho \vec{b} \, dx &= \iiint_{\Sigma} \left( \rho \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \vec{b} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \vec{b} \cdot \vec{v} + \nabla \rho \otimes \vec{b} \cdot \vec{v} + \rho \vec{b} \, \text{div} \vec{v} \right) dx \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \rho \vec{b} \, dx &= \iiint_{\Sigma} \left( \rho \left( \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \nabla \vec{b} \cdot \vec{v} \right) + \vec{b} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \vec{v} + \rho \, \text{div} \vec{v} \right) \right) dx \end{aligned}$$

Par définition de la dérivée particulière :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \rho \vec{b} \, dx = \iiint_{\Sigma} \left( \rho \frac{d\vec{b}}{dt} + \vec{b} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} \right) \right) dx$$

Donc, grâce à la conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \, \text{div} \vec{v} = 0 \tag{24}$$

et la définition du vecteur contrainte (8), la première équation de (23) devient :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \rho \vec{v} \, dx = \iiint_{\Sigma} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \, dx = \iiint_{\Sigma} \rho \vec{\gamma} \, dx = \iint_{\partial\Sigma} \overline{\sigma} \vec{n} \, dx + \iiint_{\Sigma} \vec{f} \, dx$$

et par application du théorème de la divergence

$$\iiint_{\Sigma} \rho \vec{\gamma} \, dx = \iiint_{\Sigma} \text{div} \overline{\sigma} \, dx + \iiint_{\Sigma} \vec{f} \, dx$$

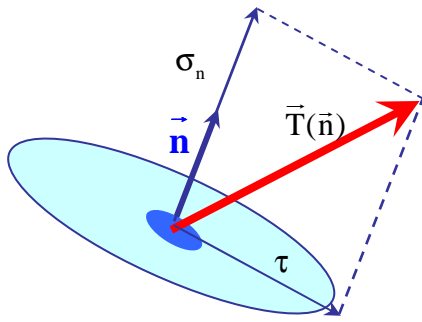
On retrouve donc bien la forme locale de la conservation de la quantité de mouvement :

$\text{div} \overline{\sigma} + \vec{f} = \rho \vec{\gamma}$	(25)
--	------

## II - 4 Quelques propriétés du tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique. Dans tous les développements à venir, nous nous placerons dans le cas des petites perturbations pour un solide en équilibre. En conséquence, nous omettrons les variables  $x$  et  $t$ .

### II - 4.1 Contrainte normale et contrainte tangentielle



Considérons une facette de normale  $\vec{n}$ . Tout naturellement, le vecteur contrainte  $\vec{T}(\vec{n})$  peut être décomposé en une composante normale  $\sigma_n$  et une composante tangentielle  $\tau$ .

$$\sigma_n = \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}$$

et

$$\|\tau\| = \sqrt{(\vec{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n})^2 - (\vec{n} \cdot \vec{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n})^2}$$

On dira que  $\sigma_n$  est positive en traction et négative en compression.

### II - 4.2 Directions principales, contraintes principales

La matrice représentant le tenseur des contraintes est symétrique, elle est donc diagonalisable. Les valeurs propres sont réelles et appelées **contraintes principales** ( $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ ). Les vecteurs propres, orthogonaux deux à deux, sont les **directions principales** ( $\vec{n}_I, \vec{n}_{II}, \vec{n}_{III}$ ). On a donc:

$$\sigma_I = \vec{T}(\vec{n}_I) \cdot \vec{n}_I, \sigma_{II} = \vec{T}(\vec{n}_{II}) \cdot \vec{n}_{II}, \sigma_{III} = \vec{T}(\vec{n}_{III}) \cdot \vec{n}_{III}$$

### II - 4.3 Invariants

Le tenseur des contraintes possède trois invariants définis mathématiquement comme les coefficients de l'équation caractéristique  $\det(\vec{\bar{\sigma}} - \alpha \vec{1})$ . C'est à dire les quantité scalaires:

$$\Sigma_I = \text{Tr}(\vec{\bar{\sigma}}) \tag{27}$$

$$\Sigma_{II} = \frac{1}{2} \left[ \text{Tr}(\vec{\bar{\sigma}})^2 - \text{Tr}(\vec{\bar{\sigma}}^2) \right] \tag{28}$$

$$\Sigma_{III} = \text{Det}(\vec{\bar{\sigma}}) \tag{29}$$

Exprimés en fonction des contraintes principales, on obtient

$$\Sigma_I = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$\Sigma_{II} = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I$$

$$\Sigma_{III} = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III}$$

### II - 4.4 Cercles de Mohr

Connaissant le tenseur des contraintes  $\vec{\bar{\sigma}}$ , on se propose de déterminer le domaine engendré par l'extrémité du vecteur contrainte quand  $\vec{n}$  varie. Par commodité, nous nous

plaçons dans une base orthonormée dirigée suivant les directions principales de  $\bar{\sigma}$ . Soit

$$\bar{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \text{ et } \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \text{ avec } n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

et

$$\bar{T} = \begin{Bmatrix} n_1 \sigma_1 \\ n_2 \sigma_2 \\ n_3 \sigma_3 \end{Bmatrix}$$

D'après (23)

$$\sigma_n = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2$$

et d'après (24)

$$\tau^2 + \sigma_n^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2$$

Dans l'hypothèse où les contraintes principales sont distinctes, on obtient alors après résolution du système:

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III})}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})}$$

$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{III})}{(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{II} - \sigma_{III})}$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II})}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})}$$

Si on ordonne les contraintes principales de telle sorte que  $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ , alors

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III}) \geq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{III}) \leq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II}) \geq 0$$

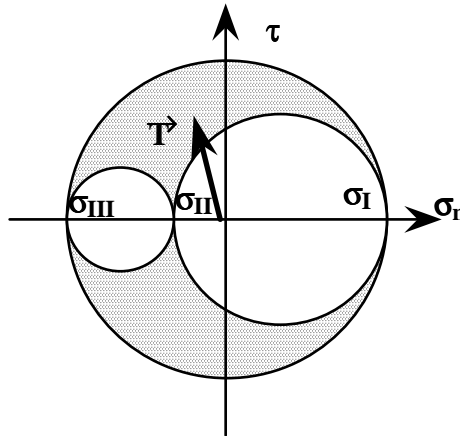
ou encore

$$\tau^2 + \left( \sigma_n - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2} \right)^2 \geq \left( \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \right)^2 \tag{30}$$

$$\tau^2 + \left( \sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \right)^2 \leq \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right)^2 \tag{31}$$

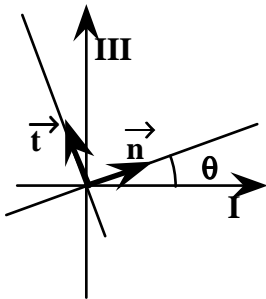
$$\tau^2 + \left( \sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right)^2 \geq \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)^2 \tag{32}$$

Dans le plan de Mohr, l'extrémité du vecteur contrainte, d'après (31), est donc intérieure au cercle centré sur  $0\sigma_n$  d'abscisse  $(\sigma_I + \sigma_{III})/2$  et de rayon  $(\sigma_I - \sigma_{III})/2$ . Par contre, d'après (30) (res. (32)), l'extrémité du vecteur contrainte est extérieure au cercle centré sur  $0\sigma_n$  d'abscisses  $(\sigma_{II} + \sigma_{III})/2$  (resp.  $(\sigma_I + \sigma_{II})/2$ ) et de rayon  $(\sigma_{II} - \sigma_{III})/2$  (resp.  $(\sigma_I - \sigma_{II})/2$ ).



**Description des Cercles principaux:**

Nous allons étudier la description du grand Cercle de Mohr. Les facettes concernées sont parallèles à la direction associée à la contrainte principale  $\sigma_{II}$ .



On constitue avec les directions I,III,II un trièdre direct  $(O, \vec{e}_I, \vec{e}_{III}, \vec{e}_{II})$ , la normale  $\vec{n}$  de la facette évoluant dans le plan I III. Et on définit l'angle  $\theta = (I, \vec{n})$ , et le vecteur  $\vec{t}$  tel que  $(\vec{n}, \vec{t}, II)$  soit direct.

On a alors

$$\vec{n} = \cos\theta \vec{e}_I + \sin\theta \vec{e}_{III}$$

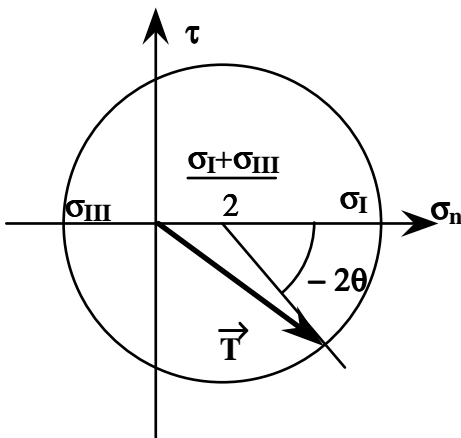
et

$$\vec{T} = \sigma_I \cos\theta \vec{e}_I + \sigma_{III} \sin\theta \vec{e}_{III}$$

En utilisant les formules de changement de base de  $(O, \vec{e}_I, \vec{e}_{III}, \vec{e}_{II})$  à  $(\vec{n}, \vec{t}, II)$ , on a donc

$$\sigma_n = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \sin 2\theta$$



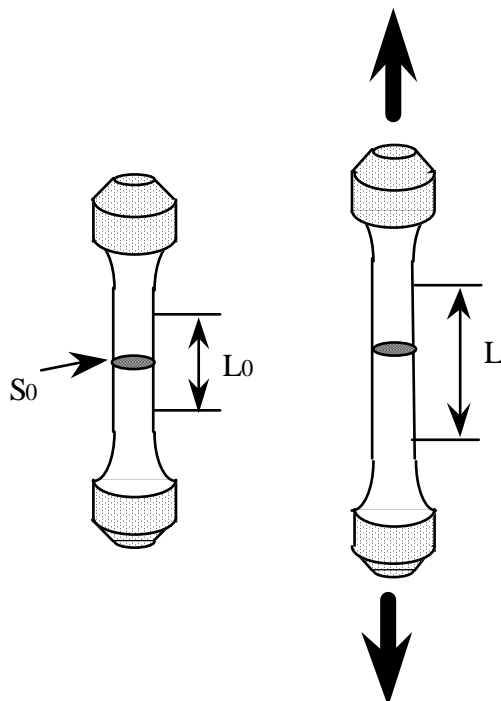
*Lorsque la facette tourne autour de la direction de la contrainte principale  $\sigma_{II}$  d'un angle donné, l'extrémité du vecteur-contrainte tourne sur le cercle de Mohr d'un angle double dans le sens opposé (autour du centre du cercle).*

### III - Loi de Comportement pour les solides élastiques

Pour déterminer l'évolution d'un système déformable, nous avons déjà déterminé les équations de la cinématique et de la sthénique. A ces équations, il est maintenant nécessaire d'adjoindre une relation supplémentaire reliant les efforts internes et les grandeurs cinématiques. Cette relation, appelée **Loi de Comportement**, dépend du matériau considéré. La construction d'une loi de comportement est basée sur des observations expérimentales.

Dans ce chapitre nous exposerons le modèle de comportement des matériaux élastiques, sous l'hypothèse des petites perturbations.

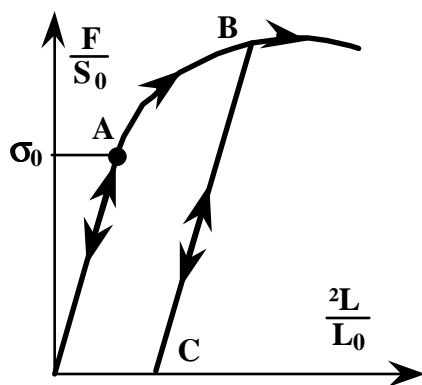
#### III - 1 Approche expérimentale: essai de traction



Pour effectuer un essai de traction simple sur un métal, on utilise une éprouvette cylindrique caractérisée par:

- des extrémités surdimensionnées
- des congés de raccordement (pour éviter les concentrations de contrainte)
- une partie médiane cylindrique dans laquelle le champ de contrainte est supposé homogène, de traction simple parallèlement à l'axe de l'éprouvette.

L'essai de traction consiste à enregistrer l'évolution de l'allongement relatif de la longueur initiale  $L_0$  en fonction de la force de traction  $F$ , ou du rapport  $F/S_0$ , où  $S_0$  représente l'aire initiale de la section de l'éprouvette.



La figure ci-contre représente un tel enregistrement pour un acier inox. On remarque alors les propriétés suivantes:

- Le diagramme est indépendant de la vitesse de chargement
- La partie OA du diagramme est réversible. Si on charge jusqu'à un niveau inférieur à  $\sigma_0$ , alors la décharge décrit la même courbe OA.
- La partie réversible est linéaire
- Si on effectue un chargement au delà du seuil  $\sigma_0$ , puis une décharge, l'éprouvette présente une déformation

permanente.

La partie réversible du diagramme de traction est, par définition, représentative du **comportement élastique** du matériau.  $\sigma_0$  est la limite initiale d'élasticité du matériau. La linéarité du segment OA caractérise le **comportement élastique linéaire** du matériau.

### III - 2 Loi de comportement élastique linéaire (en HPP)

#### III - 2.1 Forme générale

A partir des observations expérimentales on peut écrire que les contraintes dépendent linéairement des déformations. En l'absence d'effets thermique et de contraintes initiales on a:

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, t) = \underline{\underline{C}}(x) : \underline{\underline{\epsilon}}(x, t) \quad (33)$$

$\underline{\underline{C}}$  est un tenseur du quatrième ordre, dont les composantes sont les coefficients d'élasticité du matériau.

$$\sigma_{ij}(x, t) = C_{ijkl} \epsilon_{kl}(x, t)$$

En utilisant les propriétés des tenseurs de contrainte et de déformation, on peut montrer que:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad C_{ijkl} = C_{klij}$$

Le tenseur  $\underline{\underline{C}}$ , dont la matrice représentative comporte 81 composantes, ne dépend donc plus que de 21 paramètres indépendants.

#### III - 2.2 Matériau élastique homogène isotrope

Toutes les directions sont équivalentes, de telle sorte que la loi de comportement est invariante dans toute rotation de la configuration de référence. Ce modèle s'applique à la plupart des matériaux: acier, béton, ...

Si la configuration est libre de contraintes, alors la loi de comportement s'écrit:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} \quad (34)$$

ou encore en notation indicielle

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

Les coefficients matériel  $\lambda$  et  $\mu$ , qui dépendent de la particule considérée, sont appelés les **coefficients de Lamé**. Leur expression en fonction du **module d'Young E** et du **coefficient de Poisson  $\nu$** , est

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ et } \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ ou } \quad (35)$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \text{ et } \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

avec, en inversant (34)

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} \quad (36)$$

### III - 2.3 Matériau élastique homogène orthotrope

Le matériau possède trois directions privilégiées deux à deux orthogonales. La loi de comportement est invariante par les symétries par rapport aux plans orthogonaux construits à partir de ces directions. Dans ces matériaux, on peut classer les tôles laminées, les composites tissés, le bois, certains bétons structurés, ...

Dans ce cas on montre que la matrice de comportement est définie par 9 paramètres indépendants. Dans le repère principal d'orthotropie, la loi se met sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

Avec les conditions de symétrie

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$$

### III - 2.4 Matériau élastique homogène isotrope transverse

Un matériau homogène isotrope transverse est tel que la matrice de comportement est invariante par toute rotation autour d'un axe privilégié. En utilisant cette invariance, on montre que seuls 5 paramètres indépendants caractérisent le comportement. Si l'axe est porté par la direction 3, on a alors:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

### III - 3 Théorème de superposition

Si  $(\bar{U}, \bar{f}, \bar{F})$  et  $(\bar{V}, \bar{g}, \bar{G})$  sont deux jeux de données engendrant respectivement des solutions  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$ , alors  $\alpha\bar{u} + \beta\bar{v}$  est solution du problème de données  $(\alpha\bar{U} + \beta\bar{V}, \alpha\bar{f} + \beta\bar{g}, \alpha\bar{F} + \beta\bar{G})$ .

### III - 4 Critères de limite d'élasticité pour les matériaux isotropes

Les critères de résistance que nous allons définir représentent des valeurs limites pour les contraintes maximales, et permettent de ce fait de garder un caractère élastique aux déformations.

#### III - 4.1 Critère de Tresca

Il consiste à considérer de manière indépendante les trois contraintes de cisaillement maximal du tricercler de Mohr. Soit en fonction des contraintes principales

$$\text{Sup}\{|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_I - \sigma_{III}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|\} \leq \sigma_0 \quad (39)$$

#### III - 4.2 Critère de Von-Mises

$$\sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2)} \leq \sigma_0 \quad (40)$$

ou encore

$$\sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2))} \leq \sigma_0$$

### III - 5 Thermoélasticité

Tout solide soumis à un écart de température cherche à se dilater s'il le peut. S'il ne peut se dilater, alors il y a apparition de contraintes dites « d'origine thermiques ». Ce phénomène, pour des écarts de température  $\delta T$  faibles par rapport à la « température de repos se traduit par une loi de comportement dans le cas général sous la forme:

$$\bar{\sigma}(x, t) = \bar{C}(x) : (\bar{\varepsilon}(x, t) - \bar{\alpha}\delta T) \quad (41)$$

où  $\bar{\alpha}$  représente le tenseur anisotrope des dilatations (en  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ).

Pour plus de rigueur, nous invitons le lecteur à se référer au polycopié du cours de Mécanique des Milieux Continus.

Dans le cas où le matériau est isotrope la loi se simplifie en :

$$\bar{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{1} + 2\mu \bar{\varepsilon} - \alpha(3\lambda + 2\mu) \delta T \bar{1} \quad (42)$$

Et la relation inverse :

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\bar{\sigma}) \bar{1} + \frac{1 + \nu}{E} \bar{\sigma} + \alpha \delta T \bar{1} \quad (43)$$



# THEORIE DES POUTRES

*A partir de ce chapitre, on utilise les hypothèses des petites perturbations, du quasi-équilibre et de l'élasticité linéaire isotrope.*

## I - Définitions, hypothèses de Bernouilli

### I - 1 Définition d'une poutre

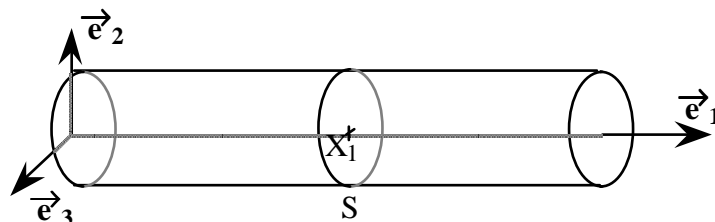
On appelle **poutre** le solide engendré par une surface plane dont le centre de gravité décrit une courbe  $\gamma$ , la surface  $S$  restant normale à cette courbe, avec:

- \* La courbe  $\gamma$  est appelée **ligne moyenne** ou  **fibre moyenne**
- \* La surface  $S$  est appelée **section normale**
- \* Le rayon de courbure en tout point de  $\gamma$  doit être grand par rapport aux dimensions de  $S$
- \* Les dimensions de  $S$  sont négligeables devant la longueur de la courbe  $\gamma$
- \* Les variations de forme et de dimension de  $S$  doivent être progressives

### I - 2 Notations

Considérons une poutre rectiligne de section droite constante  $S_0$  et de longueur  $L_0$  dans la configuration de référence. A cette configuration de référence on associe le repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , tel que :

- \*  $O$  est un point d'une section extrémité de la poutre sur la fibre moyenne
- \*  $\vec{e}_1$  est le vecteur unitaire porté par l'axe de la poutre
- \*  $\vec{e}_2$  est un vecteur unitaire dans le plan des sections droites, de préférence parallèle à un axe de symétrie de  $S$  (s'il en existe un)



On note  $S(X_1)$  la section droite d'abscisse  $X_1$ . Dans la configuration déformée, le point courant de la fibre moyenne déformée est  $x(\bar{X}_1)$ ,

- \* le vecteur unitaire tangent à la déformée de la fibre moyenne

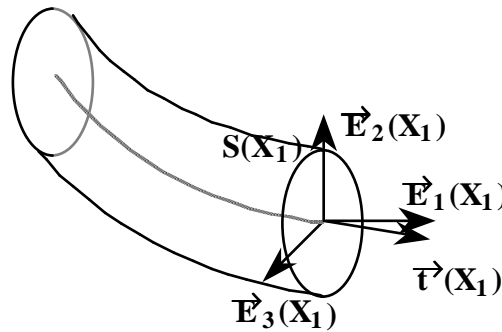
$$\vec{t}(X_1) = a \vec{\bar{F}}(X_1) \vec{e}_1 \text{ avec } a = \left\| \vec{\bar{F}}(X_1) \vec{e}_1 \right\|^{-1}$$

\* Le plan  $P(X_1)$  tangent en  $x(\vec{X}_1)$  à  $x(S(\vec{X}_1))$ , défini par le point  $x(\vec{X}_1)$  et les vecteurs

$$\vec{\bar{F}}(X_1) \vec{e}_3 \text{ et } \vec{E}_2(X_1) = b \vec{\bar{F}}(X_1) \vec{e}_2 \text{ avec } b = \left\| \vec{\bar{F}}(X_1) \vec{e}_2 \right\|^{-1}$$

\* Le vecteur unitaire  $\vec{E}_1(X_1)$  normal à  $P(X_1)$

\* Le vecteur unitaire  $\vec{E}_3(X_1)$  tel que  $(x(X_1), \vec{E}_1(X_1), \vec{E}_2(X_1), \vec{E}_3(X_1))$  soit un repère orthonormé direct.



On notera  $\vec{u}(X) = \vec{u}(X_1, X_2, X_3)$  le déplacement de la particule  $X$ , et  $\vec{u}(X_1)$  celui de la particule située sur la fibre moyenne.

### I - 3 Hypothèse de Bernoulli

Le caractère linéique de la géométrie des poutres fait qu'on s'attend à ce que les phénomènes prépondérants soient essentiellement longitudinaux. On ne s'intéressera donc pas aux déformations de sections droites. On énonce alors les hypothèses de Bernoulli

(i) *Les sections droites restent planes*

(ii) *Les sections droites se déforment librement dans leur plan*

(iii) *La variation des déformations de la section le long de la poutre est très petite*

#### Remarques:

\* D'après (i) on peut confondre  $P(X_1)$  et  $x(S(X_1))$

\* Le déplacement de la section droite peut être représenté par un vecteur translation (par exemple  $\vec{u}(X_1)$ ) et par un vecteur rotation (par exemple le vecteur rotation  $\vec{\omega}(X_1)$  du repère  $(x(X_1), \vec{E}_1(X_1), \vec{E}_2(X_1), \vec{E}_3(X_1))$  par rapport au repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ).

\* Le déplacement d'un point courant de la section considérée, dû à la déformation de la section, est donc de la forme

$$v_2(X) \vec{E}_2(X_1) + v_3(X) \vec{E}_3(X_1)$$

les fonctions  $v_2$  et  $v_3$  sont nulles en  $X_1$ , et d'après (iii) leurs dérivées  $v_{2,1}$  et  $v_{3,1}$  petites

devant  $u_i$ ,  $\omega_i$  et  $u_{i,1}$ ,  $\omega_{i,1}$ . On peut donc écrire:

$$\forall X \in S(X_1) \quad \bar{u}(X) = \bar{u}(X_1) + \bar{\omega}(X_1) \wedge \overline{X_1 X} + v_2(X) \bar{E}_2(X_1) + v_3(X) \bar{E}_3(X_1) \quad (1)$$

L'hypothèse des petites perturbations fait que les composantes  $u_i$ ,  $v_i$ , et  $\omega_i$  sont petites; ceci implique que  $\bar{E}_2(X_1)$  est de la forme  $\bar{e}_2 + \bar{\eta}$ , ainsi que  $\bar{E}_3(X_1)$ .

Si on explicite (1) dans la base  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  en ne retenant que les termes d'ordre 1, on obtient:

$$\forall X \in S(X_1) \bar{u}(X) = \left\{ \begin{array}{l} u_1(X_1) + \omega_2(X_1)X_3 - \omega_3(X_1)X_2 \\ u_2(X_1) - \omega_1(X_1)X_3 + v_2(X) \\ u_3(X_1) + \omega_1(X_1)X_2 + v_3(X) \end{array} \right\} \quad (2)$$

On remarque alors, en ne retenant que les termes d'ordre 1:

- $\bar{F}(X_1) \bar{e}_2$  et  $\overline{x(X_1) x(X_1, 1, 0)}$  sont égaux et unitaires, donc égaux à  $\bar{E}_2$
- $\bar{F}(X_1) \bar{e}_3$  est unitaire et orthogonal à  $\bar{F}(X_1) \bar{e}_2$

Par contre,

$$\begin{aligned} \left( \bar{F}(X_1) \bar{e}_1 \right) \cdot \left( \bar{F}(X_1) \bar{e}_2 \right) &\approx u_{2,1}(X_1) - \omega_3(X_1) + \dots \\ \left( \bar{F}(X_1) \bar{e}_1 \right) \cdot \left( \bar{F}(X_1) \bar{e}_3 \right) &\approx u_{3,1}(X_1) + \omega_2(X_1) + \dots \end{aligned}$$

**Donc en général la déformée d'une section droite n'est pas, au second ordre près, orthogonale à la déformée de la fibre moyenne.**

## II - Déplacements et forces généralisés

La géométrie des poutres fait que les sollicitations extérieures peuvent être considérées comme données

- soit sur une partie de la surface latérale  $[X_1^i; X_1^{i+1}] \in \partial S$   $i \in \{0, \dots, J\}$  avec  $X_1^0 = 0$  et  $X_1^J = L$
- soit sur les sections extrémités
- soit sur des cercles  $\Gamma^i = \{X_1^i\} \in \partial S$

### II - 1 Déplacement généralisé

Afin de bien distinguer le déplacement du milieu continu de celui de la fibre moyenne, on note

$$\bar{u}(X_1, 0, 0) = \bar{u}^f$$

D'après (2), se donner  $\bar{u}$  satisfaisant à l'hypothèse de Bernoulli équivaut à se donner  $u^p = (\bar{u}^f, \bar{\omega})$

On appellera  $u^p$  le **déplacement généralisé** de la poutre.

## II - 2 Puissance virtuelle des efforts extérieurs

Soit  $\delta\vec{u}$  une vitesse virtuelle de déplacement et  $\vec{\phi}$  un système de forces extérieures, c'est à dire le couple  $(\vec{f}, \vec{F})$  densité volumique de forces et densité surfacique de forces. La puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit alors:

$$\Pi_{\text{ext}}(\delta\vec{u}, \vec{\phi}) = \iiint_{\Omega} \vec{f} \cdot \delta\vec{u} dx + \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \delta\vec{u} dx$$

ou encore

$$\Pi_{\text{ext}}(\delta\vec{u}, \vec{\phi}) = \sum_{i=1}^{J-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \iint_S \vec{f} \cdot \delta\vec{u} dx \right) dX_i + \sum_{i=1}^{J-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \int_{\partial S} \vec{F} \cdot \delta\vec{u} dx \right) dX_i + \sum_{i=1}^J \int_{\Gamma_i} \vec{F} \cdot \delta\vec{u} dx$$

Soit  $\delta u^p = (\delta\vec{u}^f, \delta\vec{\omega})$  une vitesse virtuelle généralisée de la poutre, et associons lui la vitesse virtuelle de déplacement

$$\delta\vec{u}(X) = \delta\vec{u}^f(X_1) + \delta\vec{\omega}(X_1) \wedge \overline{X_1 X} = \begin{Bmatrix} \delta u_1^f \\ \delta u_2^f \\ \delta u_3^f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta\omega_1^f \\ \delta\omega_2^f \\ \delta\omega_3^f \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta u_1^f + \delta\omega_2^f X_3 - \delta\omega_3^f X_2 \\ \delta u_2^f - \delta\omega_1^f X_3 \\ \delta u_3^f + \delta\omega_1^f X_2 \end{Bmatrix}$$

et en utilisant la propriété du produit mixte  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$ , on a finalement

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{ext}}(\delta\vec{u}, \vec{\phi}) &= \sum_{i=1}^{J-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \delta\vec{u}^f \cdot \left[ \iint_S \vec{f} dx + \int_{\partial S} \vec{F} dx \right] dX_i \\ &+ \sum_{i=1}^{J-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \delta\vec{\omega} \cdot \left[ \iint_S \overline{X_1 X} \wedge \vec{f} dx + \int_{\partial S} \overline{X_1 X} \wedge \vec{F} dx \right] dX_i \\ &+ \sum_{i=1}^J \left\{ \delta\vec{u}^f(X_1^i) \cdot \int_{\Gamma_i} \vec{F} dx + \delta\vec{\omega}(X_1^i) \cdot \int_{\Gamma_i} \overline{X_1 X} \wedge \vec{F} dx \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

## II - 3 Forces généralisées

En posant

$$\begin{aligned} \vec{f}^f(X_1) &= \iint_S \vec{f} dx + \int_{\partial S} \vec{F} dx & \vec{F}^i &= \int_{\Gamma_i} \vec{F} dx \\ \vec{c}^f(X_1) &= \iint_S \overline{X_1 X} \wedge \vec{f} dx + \int_{\partial S} \overline{X_1 X} \wedge \vec{F} dx & \vec{C}^i &= \int_{\Gamma_i} \overline{X_1 X} \wedge \vec{F} dx \end{aligned}$$

Soit

$$\Pi_{\text{ext}}(\delta\vec{u}, \vec{\phi}) = \Pi_{\text{ext}}(\delta u^p, \phi^p) = \int_0^L \delta u^f(X_1) \cdot \phi^f(X_1) dX_1 + \sum_{i=1}^J \delta u^f(X_1^i) \cdot \Phi^i \quad (4)$$

avec  $\phi^p = (\phi^f, \Phi^1, \dots, \Phi^J)$  et  $\phi^f = (\vec{f}^f, \vec{c}^f)$ ,  $\Phi^i = (\vec{F}^i, \vec{C}^i)$

On appelle  $\phi^p$  **force généralisée** appliquée à la poutre. Cette force est constituée d'une densité linéique de force généralisée  $\phi^f$  répartie le long de la fibre moyenne et de forces généralisée concentrées  $\Phi^i$ .

### III - Déformation et contraintes généralisées

#### III - 1 Déformations généralisées

D'après (2) en utilisant l'hypothèse des petites perturbations, et en négligeant les dérivées de  $v_2$  et  $v_3$ , on obtient

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} u_{1,1}^f + \omega_{2,1}X_3 - \omega_{3,1}X_2 & \text{Sym} & \text{Sym} \\ \frac{1}{2}(u_{2,1}^f - \omega_{1,1}X_3 - \omega_3) & v_{2,2} & \text{Sym} \\ \frac{1}{2}(u_{3,1}^f + \omega_{1,1}X_2 + \omega_2) & \frac{1}{2}(v_{2,3} + v_{3,2}) & v_{3,3} \end{bmatrix} \quad (5)$$

En introduisant alors les six quantités

$$\begin{aligned} a_1(X_1) &= u_{1,1}^f(X_1) & \chi_1(X_1) &= \omega_{1,1}(X_1) \\ a_2(X_1) &= u_{2,1}^f(X_1) - \omega_3(X_1) & \chi_2(X_1) &= \omega_{2,1}(X_1) \\ a_3(X_1) &= u_{3,1}^f(X_1) + \omega_2(X_1) & \chi_3(X_1) &= \omega_{3,1}(X_1) \end{aligned} \quad (6)$$

on trouve de manière simple

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} a_1 + \chi_2 X_3 - \chi_3 X_2 & \text{Sym} & \text{Sym} \\ \frac{1}{2}(a_2 - \chi_1 X_3) & v_{2,2} & \text{Sym} \\ \frac{1}{2}(a_3 + \chi_1 X_2) & \frac{1}{2}(v_{2,3} + v_{3,2}) & v_{3,3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Les six quantités définies par (6) constituent la déformation généralisée de la poutre en la section  $S(X_1)$ .

Afin d'interpréter mécaniquement cette définition nous allons étudier successivement les cas où une seule de ces quantités est non nulle.

**Cas1:  $a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$**

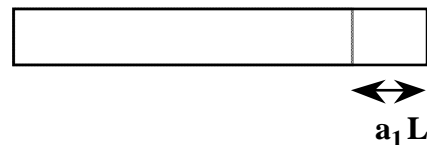
On en déduit

$$u_2^f = 0, u_3^f = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\omega} = \bar{0}$$

soit

$$u_1(X) = a_1 X_1 \quad \text{et} \quad u_3(X) = u_2(X) = 0$$

La poutre est dans un état d'allongement pur



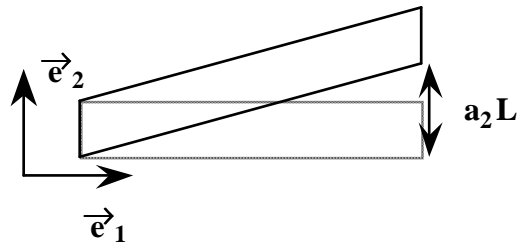
**Cas2:**  $a_2 \neq 0, a_1 = a_3 = \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$

On en déduit

$$u_1^f = 0, u_3^f = 0 \text{ et } \vec{\omega} = \vec{0}$$

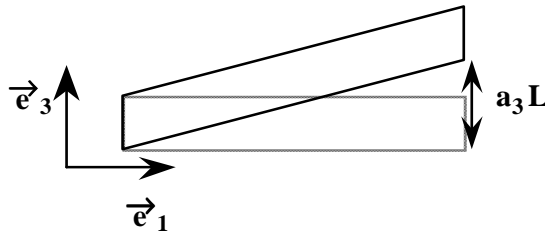
$$u_2^f(X_1) = a_2 X_1 \text{ et } u_2(X) = a_2 X_1$$

La poutre est dans un état de glissement dans le plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$



**Cas3:**  $a_3 \neq 0, a_1 = a_2 = \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$

La poutre est dans un état de glissement dans le plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$



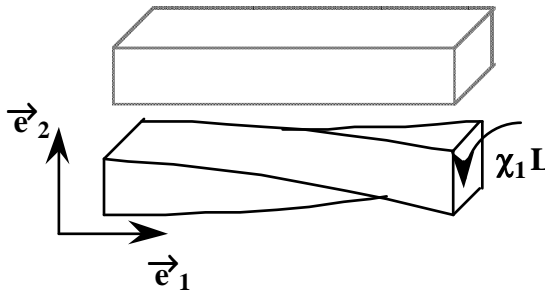
**Cas4:**  $\chi_1 \neq 0, a_1 = a_2 = a_3 = \chi_2 = \chi_3 = 0$

On en déduit

$$a_1 = 0 \text{ soit } \vec{u}^f = \vec{0}$$

$$\text{et } \omega_2 = \omega_3 = 0, \text{ et } \omega_1 = \chi_1 X_1$$

La poutre est dans un état de torsion autour de son axe



**Cas5:**  $\chi_2 \neq 0, a_1 = a_2 = a_3 = \chi_1 = \chi_3 = 0$

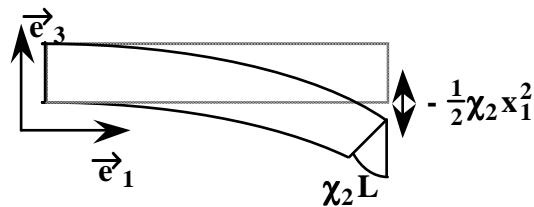
$$u_1^f = u_2^f = 0 \text{ et } \omega_1 = \omega_3 = 0$$

$$\text{Soit } \omega_2 = \chi_2 X_1 \text{ et } u_3^f(X_1) = -\frac{1}{2} \chi_2 X_1^2$$

$$\text{D'où } u_1(X) = \chi_2 X_1 X_3,$$

$$u_2(X) = 0, u_3(X) = -\frac{1}{2} \chi_2 X_1^2$$

La fibre moyenne se déforme selon une parabole dans le plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ , la section droite tournant de  $\chi_2 X_1$  autour de  $\vec{e}_2$ .

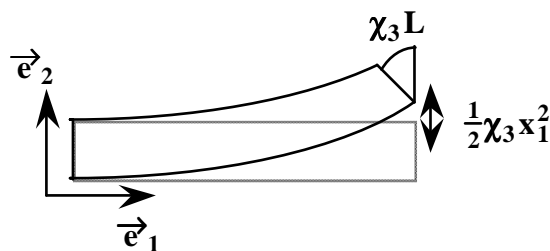


**Cas6:**  $\chi_3 \neq 0, a_1 = a_2 = a_3 = \chi_1 = \chi_2 = 0$

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \text{ et par suite } u_1(X) = -\chi_3 X_1 X_2,$$

$$u_3(X) = 0 \text{ et } u_2(X) = \frac{1}{2} \chi_3 X_1^2$$

La fibre moyenne se déforme selon une parabole dans le plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , la section droite tournant de  $\chi_3 X_1$  autour de  $\vec{e}_3$



On en déduit alors la signification des déformées généralisées:

- $a_1$  est l'allongement unitaire de la fibre moyenne
- $a_2$  et  $a_3$  sont des glissements dans les plans  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et  $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$
- $\chi_1$  est l'angle de torsion autour de l'axe  $\vec{e}_1$  par unité de longueur
- $\chi_2, \chi_3$  sont les courbures de la fibre moyenne dans les plans  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  ,  $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$

### III - 2 Puissance Virtuelle des efforts intérieurs

En tenant compte de la cinématique particulière des poutres, nous allons expliciter l'équation

$$\Pi_{\text{int}}(\overline{\delta\epsilon}, \overline{\sigma}) = - \iint_{\Omega} \overline{\sigma} : \overline{\delta\epsilon} dX \tag{8}$$

où  $\overline{\delta\epsilon}$  désigne une vitesse virtuelle de déformation, et  $\overline{\sigma}$  l'état de contrainte dans la poutre. Nous choisirons, bien sûr,  $\overline{\delta\epsilon}$  de la forme

$$\overline{\delta\epsilon} = \begin{bmatrix} \delta a_1 + \delta\chi_2 X_3 - \delta\chi_3 X_2 & \text{Sym} & \text{Sym} \\ \frac{1}{2}(\delta a_2 - \delta\chi_1 X_3) & \delta v_{2,2} & \text{Sym} \\ \frac{1}{2}(\delta a_3 + \delta\chi_1 X_2) & \frac{1}{2}(\delta v_{2,3} + \delta v_{3,2}) & \delta v_{3,3} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Pour que les contraintes satisfassent l'hypothèse (ii) de Bernouilli, il est nécessaire que

$$\overline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

En portant (9) et (10) dans (8), on trouve finalement

$$\begin{aligned} - \Pi_{\text{int}}(\overline{\delta\epsilon}, \overline{\sigma}) &= \int_0^L [\delta a_1 \iint_S \sigma_{11} dX + \delta a_2 \iint_S \sigma_{12} dX + \delta a_3 \iint_S \sigma_{13} dX] dX_1 \\ &+ \int_0^L [\delta\chi_1 \iint_S (X_2 \sigma_{31} - X_3 \sigma_{21}) dX] dX_1 \\ &+ \int_0^L [\delta\chi_2 \iint_S X_3 \sigma_{11} dX - \delta\chi_3 \iint_S X_2 \sigma_{11} dX] dX_1 \end{aligned} \tag{11}$$

Posons alors

$$\begin{aligned} T_1(X_1) &= \iint_S \sigma_{11} dX & M_1(X_1) &= \iint_S (X_2 \sigma_{31} - X_3 \sigma_{21}) dX \\ T_2(X_1) &= \iint_S \sigma_{12} dX & M_2(X_1) &= \iint_S X_3 \sigma_{11} dX \\ T_3(X_1) &= \iint_S \sigma_{13} dX & M_3(X_1) &= - \iint_S X_2 \sigma_{11} dX \end{aligned} \tag{12}$$

avec ces notation, on obtient plus simplement

$$- \Pi_{\text{int}}(\overline{\delta\epsilon}, \overline{\sigma}) = \int_0^L \left[ \sum_{i=1}^3 (\delta a_i T_i(X_1) + \delta\chi_i M_i(X_1)) \right] dX_1$$

ou encore

$$\vec{T} = \iint_S \overline{\sigma} \vec{e}_1 dX \quad \text{et} \quad \vec{M} = \iint_S X_1 \vec{X} \wedge \overline{\sigma} \vec{e}_1 dX \tag{13}$$

### III - 3 Contraintes généralisées, équation d'équilibre

#### III - 3.1 Contraintes généralisées

On définit les contraintes généralisées comme étant la fonction

$$\langle s^P \rangle : X_1 \in [0, L] \rightarrow \langle s^P(X_1) \rangle = \langle T_1(X_1), T_2(X_1), T_3(X_1), M_1(X_1), M_2(X_1), M_3(X_1) \rangle \in \mathbb{R}^6 \quad (14)$$

On appelle  $T_1$  l'effort normal,  $T_2$  et  $T_3$  les efforts tranchants,  $M_1$  le moment de torsion,  $M_2$  et  $M_3$  les moments de flexion.

Si on considère la partie de la poutre à gauche de la section  $S(X_1)$ , alors la normale unitaire sur  $S(X_1)$  sortante est  $\vec{n} = \vec{e}_1$ ; la densité surfacique de force exercée par la partie droite de la poutre sur la partie gauche est  $\vec{\sigma n}$ , c'est à dire le vecteur de composante  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ . En conséquence,

**la contrainte généralisée  $s^P(X_1)$  est constituée des éléments de réduction, au centre de la section  $S(X_1)$ , du torseur des forces appliquées par la partie droite de la poutre sur la partie gauche!**

Certains états de sollicitation élémentaires sont appelés 'sollicitations simples', ils correspondent à des cas de chargement fréquemment rencontrés. Leur étude permet par le théorème de superposition l'étude de cas plus complexes appelés 'sollicitations combinées'.

$T_1$	$T_{2ou3}$	$M_1$	$M_{2ou3}$	Désignation
$\neq 0$	0	0	0	Traction ou compression simple
0	$\neq 0$	0	0	Cisaillement pur
0	0	$\neq 0$	0	Torsion pure
0	0	0	$\neq 0$	Flexion pure
0	$\neq 0$	0	$\neq 0$	Flexion simple
$\neq 0$	0	0	$\neq 0$	Flexion composée



**III - 3.2 Equation d'équilibre**

Nous allons maintenant appliquer le principe des puissances virtuelles pour déterminer les équations d'équilibre. **Pour toute vitesse virtuelle de déplacement généralisé**, on doit avoir

$$\Pi_{\text{ext}} + \Pi_{\text{int}} = 0$$

Nous avons d'après (4)

$$\Pi_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{J-1} \int_{X_i}^{X_{i+1}} (\delta \vec{u}^f \cdot \vec{f}^f(X_1) + \delta \vec{\omega} \cdot \vec{c}^f(X_1)) dX_1 + \sum_{i=1}^J \left\{ \delta \vec{u}^f(X_1^i) \cdot \vec{F}^i + \delta \vec{\omega}(X_1^i) \cdot \vec{C}^i \right\}$$

et d'après (13)

$$\Pi_{\text{int}} = - \int_0^L \left[ \sum_{i=1}^3 (\delta a_i T_i(X_1) + \delta \gamma_i M_i(X_1)) \right] dX_1$$

En utilisant la définition des déformations généralisées (6),

$$\Pi_{\text{int}} = - \int_0^L \left[ \delta \vec{u}_{,1}^f \cdot \vec{T}(X_1) - \delta \omega_3 T_2 + \delta \omega_2 T_3 + \delta \vec{\omega}_{,1}^f \cdot \vec{M}(X_1) \right] dX_1$$

Soit en remarquant que  $\vec{e}_1 \wedge \vec{T} = T_2 \vec{e}_3 - T_3 \vec{e}_2$

$$\Pi_{\text{int}} = - \int_0^L \left[ \delta \vec{u}_{,1}^f \cdot \vec{T}(X_1) + \delta \vec{\omega}_{,1}^f \cdot \vec{M}(X_1) - \delta \vec{\omega}^f \cdot (\vec{e}_1 \wedge \vec{T}) \right] dX_1$$

On décompose alors l'intégrale en somme d'intégrales comme pour les efforts extérieurs

$$\Pi_{\text{int}} = - \sum_{i=1}^{J-1} \int_{X_1^i}^{X_1^{i+1}} \left[ \delta \vec{u}_{,1}^f \cdot \vec{T}(X_1) + \delta \vec{\omega}_{,1}^f \cdot \vec{M}(X_1) - \delta \vec{\omega}^f \cdot (\vec{e}_1 \wedge \vec{T}) \right] dX_1$$

En effectuant une intégration par partie et en notant  $X_1^{i+}$  la valeur de  $X_1^i$  pris par valeur supérieur,

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}} &= \sum_{i=1}^{J-1} \int_{X_1^i}^{X_1^{i+1}} \left[ \delta \vec{u}^f \cdot \vec{T}_{,1}(X_1) + \delta \vec{\omega}^f \cdot \vec{M}_{,1}(X_1) + \delta \vec{\omega}^f \cdot (\vec{e}_1 \wedge \vec{T}) \right] dX_1 \\ &\quad - \sum_{i=1}^{J-1} \left[ \delta \vec{u}^f \cdot \left( \vec{T}(X_1^{i+1-}) - \vec{T}(X_1^{i+}) \right) + \delta \vec{\omega}^f \cdot \left( \vec{M}(X_1^{i+1-}) - \vec{M}(X_1^{i+}) \right) \right] \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}} &= \sum_{i=1}^{J-1} \int_{X_1^i}^{X_1^{i+1}} \left[ \delta \vec{u}^f \cdot \vec{T}_{,1}(X_1) + \delta \vec{\omega}^f \cdot \vec{M}_{,1}(X_1) + \delta \vec{\omega}^f \cdot (\vec{e}_1 \wedge \vec{T}) \right] dX_1 \\ &\quad + \sum_{i=1}^J \left[ \delta \vec{u}^f \cdot \left( \vec{T}(X_1^{i+}) - \vec{T}(X_1^{i-}) \right) + \delta \vec{\omega}^f \cdot \left( \vec{M}(X_1^{i+}) - \vec{M}(X_1^{i-}) \right) \right] \end{aligned}$$

Enfin en application du principe des puissances virtuelles

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{J-1} \int_{X_1^i}^{X_1^{i+1}} \left[ \delta \vec{u}^f \cdot (\vec{f}^f + \vec{T}_{,1}) + \delta \vec{\omega}^f \cdot (\vec{c}^f + \vec{M}_{,1} + \vec{e}_1 \wedge \vec{T}) \right] dX_1 \\ &+ \sum_{i=1}^J \left[ \delta \vec{u}^f \cdot \left( \vec{F}^i + \vec{T}(X_1^{i+}) - \vec{T}(X_1^{i-}) \right) + \delta \vec{\omega}^f \cdot \left( \vec{C}^i + \vec{M}(X_1^{i+}) - \vec{M}(X_1^{i-}) \right) \right] = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Comme (15) est vérifié pour toute vitesse virtuelle, on obtient pour l'équilibre

Pour chaque intervalle $[X_1^i, X_1^{i+1}[$	$\vec{f}^f + \vec{T}_{,1} = \vec{0}$ (a)	(16)
	$\vec{c}^f + \vec{M}_{,1} + \vec{e}_1 \wedge \vec{T} = \vec{0}$ (b)	
Pour $X_1^i, i = 1, \dots, J$	$\vec{F}^i + \vec{T}(X_1^{i+}) - \vec{T}(X_1^{i-}) = \vec{0}$ (c)	
	$\vec{C}^i + \vec{M}(X_1^{i+}) - \vec{M}(X_1^{i-}) = \vec{0}$ (d)	

**Remarque importante:**

Sur un tronçon de poutre  $[X_1^i, X_1^{i+1}]$ , dans le cas où il n'est pas chargé, on a

$$\vec{T}_{,1} = \vec{0} \text{ et } \vec{M}_{,1} + \vec{e}_1 \wedge \vec{T} = \vec{0}$$

soit en particulier

$$\frac{dM_2}{dX_1} = T_3 \text{ et } \frac{dM_3}{dX_1} = -T_2$$

### IV - Loi de Comportement élastique linéaire

D'après (10), à cause de l'hypothèse (ii) de Bernouilli  $\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \text{Sym} & \text{Sym} \\ \sigma_{12} & 0 & \text{Sym} \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Or, pour un matériau élastique la loi de comportement en fonction du module d'Young E et du coefficient de poisson est

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\bar{\sigma}) \bar{1} + \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma}$$

Soit dans notre cas

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \sigma_{11}, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{E} \sigma_{11}, \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}, \varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13}, \varepsilon_{23} = 0$$

D'où

$$T_1 = \iint_S \sigma_{11} dX = \iint_S E \varepsilon_{11} dX = \iint_S E (a_1 + \chi_2 X_3 - \chi_3 X_2) dX$$

$$T_2 = \iint_S \sigma_{12} dX = \iint_S \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12} dX = \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} (a_2 - \chi_1 X_3) dX$$

$$T_3 = \iint_S \sigma_{13} dX = \iint_S \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{13} dX = \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} (a_3 + \chi_1 X_2) dX$$

$$M_1 = \iint_S (X_2 \sigma_{31} - X_3 \sigma_{21}) dX = \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} (-a_2 X_3 + a_3 X_2 + \chi_1 (X_2^2 + X_3^2)) dX$$

$$M_2 = \iint_S X_3 \sigma_{11} dX = \iint_S E (a_1 X_3 + \chi_2 X_3^2 - \chi_3 X_2 X_3) dX$$

$$M_3 = -\iint_S X_2 \sigma_{11} dX = -\iint_S E (a_1 X_2 - \chi_3 X_2^2 + \chi_2 X_2 X_3) dX$$

Pour simplifier les écritures, nous définirons la fibre moyenne telle que

$$\iint_S E(X) \bar{O} M dX = 0$$

c'est à dire

$$\iint_S E X_2 dX = \iint_S E X_3 dX = 0$$

de plus nous choisirons  $\vec{e}_2$  de telle manière que

$$\iint_S E X_2 X_3 dX = 0$$

Dans ces conditions, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 T_1 &= a_1 \iint_S E dX \\
 T_2 &= a_2 \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} dX - \chi_1 \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} X_3 dX \\
 T_3 &= a_3 \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} dX + \chi_1 \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} X_2 dX \\
 M_1 &= \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} \chi_1 (X_2^2 + X_3^2) dX \\
 M_2 &= \chi_2 \iint_S E X_3^2 dX \\
 M_3 &= \chi_3 \iint_S E X_2^2 dX
 \end{aligned}$$

Si de plus les caractéristiques ne dépendent pas de l'espace, c'est à dire que l'on peut sortir E et  $\nu$  des intégrales, on obtient:

$$T_1 = a_1 ES, T_2 = \frac{a_2 ES}{2(1+\nu)}, T_3 = \frac{a_3 ES}{2(1+\nu)} \quad (17)$$

et

$$M_1 = \frac{\chi_1 E}{2(1+\nu)} \iint_S (X_2^2 + X_3^2) dX, M_2 = E \chi_2 \iint_S X_3^2 dX, M_3 = E \chi_3 \iint_S X_2^2 dX$$

ou encore

$$M_1 = \frac{\chi_1 EI_1}{2(1+\nu)}, M_2 = E \chi_2 I_2, M_3 = E \chi_3 I_3 \quad (18)$$

où  $I_i$  est le moment d'inertie autour de l'axe  $(O, \vec{e}_i)$ .

## ETUDE DE SOLLICITATIONS SIMPLES

### I - Traction ou compression

#### I - 1 Définition

On dit qu'une poutre est dans un état de traction (ou compression) quand le torseur des actions extérieures est de la forme:

$$\mathbf{T}_1 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}_3 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_3 = \mathbf{0}$$

$$\vec{f}^f = f^f \vec{e}_1, \vec{c}^f = \vec{0}, \vec{F}^i = F^i \vec{e}_1, \vec{C}^i = \vec{0}$$

Attention: lorsque la longueur est supérieure à environs 8 fois la plus grande dimension transversale, une poutre sollicitée en compression est calculée au "flambement".

#### I - 2 Déformations et contraintes

De (II-17) et (II-18) on déduit:

$$T_1 = a_1 E S, \quad a_2 = a_3 = 0 \text{ et } \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0 \tag{1}$$

Le tenseur des contraintes qui satisfait l'équilibre est de la forme:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

où  $\sigma_n$  est une valeur constante dans toute la section. On obtient alors pour le tenseur des déformations:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_n}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_n}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_n}{E} \end{bmatrix} \tag{3}$$

#### Relation de la contrainte avec l'effort normal

On sait que

$$T_1(X_1) = \iint_S \sigma_{11} dX$$

donc dans notre cas

$$\sigma_n = \frac{T_1}{S} \quad (4)$$

**Allongement de la poutre**

Soit  $\Delta L$  l'allongement subi par une poutre de longueur  $L$ . Par définition

$$\Delta L = \int_{\gamma} du_1$$

Dans le cas présent, le déplacement d'une section droite est une translation d'axe  $\vec{e}_1$ .

$$\epsilon_{11} = \frac{du_1}{dX_1} = \frac{\sigma_n}{E} \quad (5)$$

Soit

$$\Delta L = \int_{\gamma} \epsilon_{11} dX_1 = \int_{\gamma} \frac{\sigma_n}{E} dX_1 = \int_{\gamma} \frac{T_1}{SE} dX_1 \quad (6)$$

Si la section de la poutre est constante

$$\Delta L = \frac{T_1 L}{SE} \quad (7)$$

**II - Torsion**

Les sections droites de contour quelconque, lorsqu'elles sont sollicitées en torsion, se gauchissent. Ce phénomène remet en cause l'hypothèse de Bernoulli. Les poutres droites de section circulaire ne subissent pas de gauchissement.

**II - 1 Définition**

Une poutre est sollicitée en torsion pure si:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}_3 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_1 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_3 = \mathbf{0} \\ \vec{f}^f = \vec{0}, \quad \vec{c}^f = f^f \vec{e}_1, \quad \vec{F}^i = \vec{0}, \quad \vec{C}^i = C^i \vec{e}_1 \end{aligned} \quad (8)$$

**II - 2 Déplacement, contraintes, déformations**

De (8), (II-17) et (II-18) on déduit:

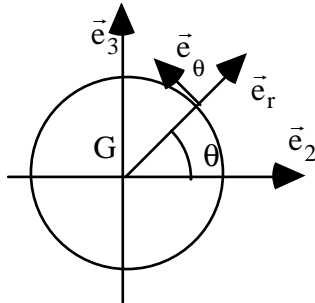
$$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, \chi_1 \neq 0, \chi_2 = 0, \chi_3 = 0 \quad (9)$$

D'après (9), on a  $\vec{u}^f = \vec{0}$ , la section tourne donc uniformément autour de son axe.  $\chi_1$  est l'angle unitaire de torsion.

Comme  $\epsilon_{11} = a_1 + \chi_2 X_3 - \chi_3 X_2 = 0$  alors  $\sigma_{11} = 0$ , soit  $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

De la loi de comportement,  $\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ , on tire:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} & \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\chi_1 X_3}{2} & \frac{\chi_1 X_2}{2} \\ -\frac{\chi_1 X_3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\chi_1 X_2}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Dans le repère (G,  $\bar{e}_1, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta$ )

$$\forall M \quad \bar{u}(M) = -\omega_1 X_3 \bar{e}_2 + \omega_1 X_2 \bar{e}_3$$

$$\text{Or } \bar{e}_r = \text{Cos}\theta \bar{e}_2 + \text{Sin}\theta \bar{e}_3$$

$$\text{et } \bar{e}_\theta = -\text{Sin}\theta \bar{e}_2 + \text{Cos}\theta \bar{e}_3$$

$$\text{Soit } \bar{u}(M) = \omega_1 r \bar{e}_\theta \tag{10}$$

Pour déterminer les déformations, nous utilisons la définition des déformations en coordonnées cylindriques:

$$\epsilon_{(G, \bar{e}_1, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial X_1} \right) \\ \text{Sym} & \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \\ \text{Sym} & \text{Sym} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial X_1} \right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( -\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \\ \text{Sym} & \text{Sym} & 0 \end{bmatrix}$$

Soit, en utilisant (II-6)

$$\epsilon_{(G, \bar{e}_1, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{r\omega_{1,1}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{r\chi_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

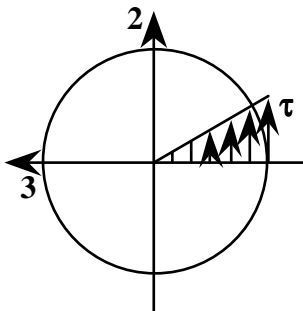
et

$$\sigma_{(G, \bar{e}_1, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } \tau = 2G\epsilon_{X_1\theta} \quad \text{et } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

G est appelé le module de glissement ou module de Coulomb. En définitive, on peut écrire:

$$\tau = G r \chi_1 \tag{11}$$

**Relation entre la contrainte et les efforts généralisés**



En utilisant (II-18) et (11)  $M_1 = \frac{\chi_1 E I_1}{2(1+\nu)} = \chi_1 G I_1 = \frac{\tau I_1}{r}$

Soit

$$\tau = \frac{M_1}{I_1} r \tag{11}$$

La contrainte de cisaillement est maximale à la périphérie.

**Détermination de l'angle de torsion**

$\chi_1$  est l'angle unitaire de torsion. Donc, si on note  $\theta_{AB}$  l'angle de torsion entre deux sections A et B, on obtient:

$$\theta_{AB} = \int_{X_A}^{X_B} \chi_1 dX_1 = \int_{X_A}^{X_B} \frac{\tau}{G r} dX_1$$

soit

$$\theta_{AB} = \int_{X_A}^{X_B} \frac{M_1}{G I_1} dX_1 \quad (12)$$

**II - 3 Exemple**

Un arbre en acier de longueur  $L=1m$  est sollicité en torsion par un couple  $M=1500 mN$ . Sous l'action de ce couple, on désire que l'angle unitaire de torsion reste inférieur à une valeur limite  $\alpha_L=0.25 \text{ }^\circ/m$  et que la contrainte de cisaillement soit inférieure à  $120 N/mm^2$ . On prendra  $G=8.10^4 N/mm^2$  et  $\rho=7800 kg/m^3$ .

a) Calculer le diamètre admissible  $D_1$  de l'arbre.

b) On suppose que l'arbre est un tube de diamètre extérieur  $D_e=90 mm$ . Quel doit-être le diamètre intérieur  $D_i$  ?

c) Quelle économie de masse a-t-on réalisée ?

**Réponses:**

a) Pour que la géométrie de l'arbre soit admissible, il est nécessaire de satisfaire deux critères.

\* Critère de déformation

$$\text{On veut } \chi_1 < \alpha_L \text{ soit } \chi_1 = \frac{M}{G I_1} \leq \alpha_L \text{ ou encore } I_1 \geq \frac{M}{G \alpha_L} = 43.10^5 \text{ mm}^4$$

$$\text{Or } I_1 = \iint (X_2^2 + X_3^2) dX = \iint r^2 r dr d\theta = 2\pi \frac{R^4}{4} = \pi \frac{D_1^4}{32}$$

$$\text{Soit } D_1 \geq \left( \frac{32M}{\pi G \alpha_L} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 82 \text{ mm}$$

\* Critère de résistance

$$\text{On veut } \tau = \frac{M D_1}{2 I_1} \leq 120 N/mm^2 \text{ soit } D_1 \geq \left( \frac{16M}{120\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 40 \text{ mm}$$

Pour satisfaire au cahier des charges, l'arbre doit au moins avoir 82 mm de diamètre.

b) Pour un tube, le moment quadratique est  $I_1 = \pi \frac{(D_e^4 - D_i^4)}{32}$ .

Avec la condition  $I_1 < 43.10^5 \text{ mm}^4$ , on trouve  $D_i = 68.3 \text{ mm}$

c) Il est immédiat de constater que le gain de poids est de environs 20 Kg.

### III - Flexion

#### III - 1 Flexion pure

Une poutre est sollicitée en flexion pure lorsque:

$$T_1=T_2=T_3=M_1=0 \text{ et } M_2 \neq 0, M_3 \neq 0 \quad (13)$$

De (II-17) et (II-18) on déduit:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \text{ et } \chi_1 = 0, \chi_2 \neq 0, \chi_3 \neq 0,$$

Soit  $\epsilon_{11} = \chi_2 X_3 - \chi_3 X_2$  et  $\epsilon_{12} = \epsilon_{13} = 0$

$$\text{Comme } \epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \text{ et } \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient:

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \text{ et } \sigma_{11} = E\chi_2 X_3 - E\chi_3 X_2$$

Soit, d'après (II-18):

$$\sigma_{11} = \frac{M_2}{I_2} X_3 - \frac{M_3}{I_3} X_2 \quad (14)$$

#### III - 2 Flexion pure plane

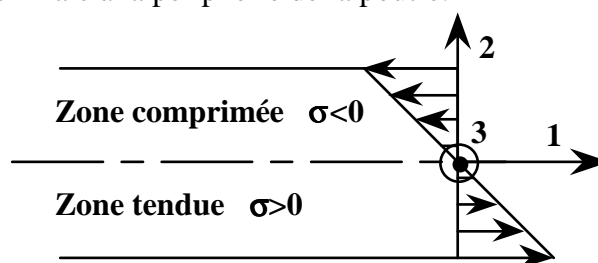
Une poutre est sollicitée en flexion pure plane lorsque:

$$T_1=T_2=T_3=M_1=M_2=0 \text{ et } M_3 \neq 0$$

D'après les développements du paragraphe précédent:

$$\sigma_{11} = -\frac{M_3}{I_3} X_2 = -E\chi_3 X_2 \quad (15)$$

La contrainte est maximale à la périphérie de la poutre.





**Déformée de la poutre**

D'après (II-6), on peut écrire:

$$\begin{aligned}
 a_1 = 0 &\rightarrow u_{1,1}^f = 0 \rightarrow u_1^f = Cste = 0 \\
 \chi_1 = 0 &\rightarrow \omega_{1,1} = 0 \rightarrow \omega_1 = Cste = 0 \\
 \chi_2 = 0 &\rightarrow \omega_{2,1} = 0 \rightarrow \omega_2 = Cste = 0 \\
 a_3 = 0 &\rightarrow u_{3,1}^f = 0 \rightarrow u_3^f = Cste = 0 \\
 a_2 = 0 &\rightarrow u_{2,1}^f = \omega_3 \rightarrow u_{2,11}^f = \omega_{3,1} = \chi_3
 \end{aligned}$$

Soit, en utilisant (II-18)

$\frac{d^2 u_2^f}{dX_1^2} = \frac{M_3}{EI_3}$	(16)
---	------

**III - 3 Flexion plane simple**

Il s'agit du cas particulier où:

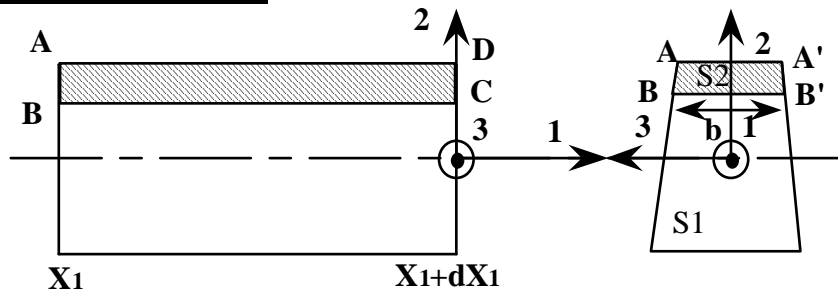
$$\begin{aligned}
 T_1 = T_3 = M_1 = M_2 = 0 \text{ et } M_3 \neq 0, T_2 \neq 0 \\
 \text{(ou } T_1 = T_2 = M_1 = M_3 = 0 \text{ et } M_2 \neq 0, T_3 \neq 0)
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

La poutre n'est soumise qu'à des efforts tranchants et des moments fléchissants.

**\* Contrainte normale due au moment fléchissant**

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} = E(a_1 + \chi_2 X_3 - E\chi_3 X_2) = -E\chi_3 X_2, \text{ soit:} \\
 \sigma_{11} = -\frac{M_3}{I_3} X_2
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

**\* Contrainte tangentielle**



Considérons un tronçon de poutre, non-chargé, compris entre  $X_1$  et  $X_1+dx_1$ .

Le problème est plan de telle sorte que  $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Les équation d'équilibre nous donnent  $\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \sigma_{12,1} = 0$  et  $\vec{T}_{,1} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
 T_{1,1} = 0 \rightarrow \iint_S \sigma_{11,1} dX_2 dX_3 = 0 \\
 \iint_{S1} \sigma_{11,1} dX_2 dX_3 + \iint_{S2} \sigma_{11,1} dX_2 dX_3 = 0
 \end{aligned}$$

$$\iint_{S1} -\sigma_{12,2} dX_2 dX_3 + \iint_{S2} \left( \frac{-M_3}{I_3} X_2 \right) dX_2 dX_3 = 0$$

$$-b\sigma_{12} + \iint_{S2} \frac{T_2}{I_3} X_2 dX_2 dX_3 = 0$$

Soit en définitive,

$$\sigma_{12} = \frac{T_2}{bI_3} \iint_{S2} X_2 dX_2 dX_3 \tag{19}$$

**\* Déformée de la fibre moyenne**

Rappel: Pour une courbe d'équation  $y=f(x)$ , la courbure est définie par  $\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y')^{3/2}}$ .

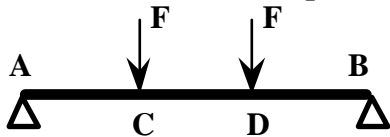
Donc pour des déformées "petites", c'est-à-dire  $y' \ll 1$ , on obtient  $1/R \approx y''$ .

Soit dans notre cas:

$$\frac{d^2 u_2^f}{dX_1^2} = \frac{M_3}{EI_3} \tag{20}$$

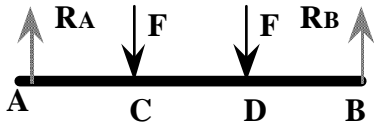
**III - 4 Exemples**

**III - 4.1 Exemple de flexion pure plane**



Une poutre droite rectiligne de section constante repose sans frottement sur 2 appuis simples en A et B et supporte une charge concentrée  $F=1500$  N en C et D.

$AC=CD=DB=a=0,5$  m.



a) On cherche à déterminer les réactions aux points où sont imposées des conditions cinématiques (en A et B). Comme il s'agit d'appuis simples, il ne peut y avoir que des réactions

(pas de couples).

Pour déterminer les réactions, on applique le principe fondamental de la statique.

Soit  $R_{AX}, R_{AY}, R_{BX}, R_{BY}$  les composantes des réactions en A et B.

$$\sum \text{Forces} = \vec{0} \text{ soit } \vec{R}_A + 2\vec{F} + \vec{R}_B = \vec{0}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{BX} \\ R_{BY} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sum \text{Moments en A} = \vec{0} \text{ soit } \overline{AC} \wedge \vec{F} + \overline{AD} \wedge \vec{F} + \overline{AB} \wedge \vec{R}_B = \vec{0}$$

$$\begin{Bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} R_{BX} \\ R_{BY} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les équations d'équilibre et la symétrie du problème impliquent:  $\vec{R}_A = \vec{R}_B = -\vec{F}$

b) On cherche les contraintes généralisées dans la poutre.

On sait que les contraintes généralisées dans une section donnée sont égales au torseur des actions extérieures à droite de la section, ou encore, à l'inverse du torseur des actions extérieures à gauche.

\* soit une section G dans le tronçon de poutre AC.

$$-\vec{T} = \vec{R}_A \quad \text{soit } T_1 = T_3 = 0 \text{ et } T_2 = -F$$

$$-\vec{M} = \overline{GA} \wedge \vec{R}_A \quad \text{soit } M_1 = M_2 = 0 \text{ et } M_3 = xF$$

Le tronçon AC est dans un état de flexion plane simple.

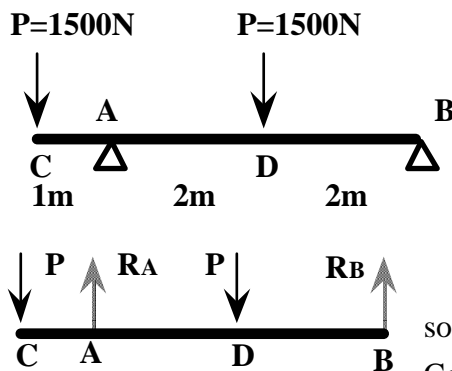
\* soit une section G dans le tronçon de poutre CD.

$$-\vec{T} = \vec{R}_A + \vec{F} \text{ soit } T_1 = T_2 = T_3 = 0$$

$$-\vec{M} = \overline{GA} \wedge \vec{R}_A + \overline{GC} \wedge \vec{F} \text{ soit } M_1 = M_2 = 0 \text{ et } M_3 = aF$$

Le tronçon CD est dans un état de flexion pure.

### III - 4.2 Exemple de flexion plane simple



Une poutre droite rectiligne de section circulaire constante repose sans frottement sur 2 appuis simples en A et B. La poutre est constituée d'un matériau de limite élastique de 1600 bars. Quel doit être le rayon de cette poutre ?

a) On cherche à déterminer les réactions aux points où sont imposées des conditions cinématiques (en A et B). Comme il s'agit d'appuis simples, il ne peut y avoir que des

réactions (pas de couples).

$$\sum \text{Forces} = \vec{0} \text{ soit } \vec{R}_A + 2\vec{P} + \vec{R}_B = \vec{0}$$

$$R_A + R_B = 2P$$

$$\sum \text{Moments en A} = \vec{0} \text{ soit } \overline{AC} \wedge \vec{P} + \overline{AD} \wedge \vec{P} + \overline{AB} \wedge \vec{R}_B = \vec{0}$$

$$P - 2P + 4R_B = 0$$

$$\text{Soit } R_B = P/4 \text{ et } R_A = 7P/4$$

b) On cherche les contraintes généralisées dans la poutre.

On sait que les contraintes généralisées dans une section donnée sont égales au torseur des actions extérieures à droite de la section, ou encore, à l'inverse du torseur des actions extérieures à gauche.

\* soit une section G dans le tronçon de poutre CA.

$$-\vec{M} = \overline{GC} \wedge \vec{P} \text{ soit } M_1 = M_2 = 0 \text{ et } M_3 = -xP$$

\* soit une section G dans le tronçon de poutre AD.

$$-\vec{M} = \overline{GC} \wedge \vec{P} + \overline{GA} \wedge \vec{R}_A \text{ soit } M_1 = M_2 = 0 \text{ et } M_3 = -Px + 7P(x-1)/4$$

\* soit une section G dans le tronçon de poutre DB.

$$\vec{M} = \overline{GB} \wedge \vec{R}_B \text{ soit } M_1 = M_2 = 0 \text{ et } M_3 = P(5-x)/4$$

Le moment maximal est atteint pour  $x=1$ , soit  $M_{3\max} = -1 \cdot P$ .

$$\sigma_{\max} = \text{Max} \left( \frac{M_3}{I_3} X_2 \right) = \text{Max} \left( \frac{4M_3}{\pi R^4} X_2 \right) \text{ d'où } R = \sqrt[3]{\frac{4M_3}{\pi \sigma_{\max}}}$$

### III - 5 Etude de la déformation des poutres en flexion

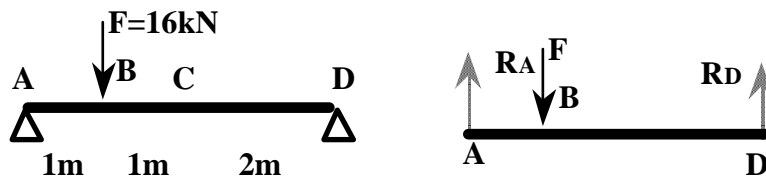
#### III - 5.1 Méthode de la double intégration

On a vu que  $\frac{d^2 u_2^f}{dX_1^2} = \frac{M_3}{EI_3}$ , donc par intégrations successives on obtient:

$$u_2^f = \int \left( \int \frac{M_3}{EI_3} dX_1 \right) dX_1 + C_1 X_1 + C_2 \tag{21}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes qui seront déterminées par les conditions aux limites.

#### Exemple:



On cherche à déterminer la déformée de la poutre.

a) Premièrement on cherche les réactions aux points d'appuis.

$$\begin{cases} \vec{R}_A + \vec{R}_D + \vec{F} = \vec{0} \\ \overline{AB} \wedge \vec{F} + \overline{AD} \wedge \vec{R}_D = \vec{0} \end{cases} \begin{cases} R_A + R_D = F \\ -F + 4R_D = 0 \end{cases} \begin{cases} R_A = 3F/4 \\ R_D = F/4 \end{cases}$$

b) On détermine maintenant le moment de flexion dans chacun des tronçons de la poutre.

\* Dans le tronçon AB:  $0 < x < 1$

$$\vec{M} = -\overline{GA} \wedge \vec{R}_A \text{ soit } M_3 = R_A X = 3FX/4 = 12X$$

$$\text{Soit } EI_3 u_2^f = 2X^3 + C_1 X + C_2$$

\* Dans le tronçon BC:  $1 < x < 2$

$$\vec{M} = -\overline{GA} \wedge \vec{R}_A - \overline{GB} \wedge \vec{F} \text{ soit } M_3 = R_A X + F(1-X) = 16 - 4X$$

$$\text{Soit } EI_3 u_2^f = -2(X-4)^3/3 + C_3 X + C_4$$

c) Pour déterminer les constantes on utilise les conditions aux limites et les conditions de continuité.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2^f|_{AB}(0) = 0 \\ u_2^f|_{AB}(1) = u_2^f|_{BD}(1) \\ u_{2,1}^f|_{AB}(1) = u_{2,1}^f|_{BD}(1) \\ u_2^f|_{BD}(4) = 0 \end{array} \right. \text{cequidonne} \left\{ \begin{array}{l} C_1 = -14 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 10 \\ C_4 = -40 \end{array} \right.$$

En définitive  $u_2^f|_{AB}(X) = 2X^3 - 14X$  et  $u_2^f|_{BD}(X) = -2(X - 4)^3 + 10X - 40$

**III - 5.2 Fonctions de singularité**

Les fonctions de singularité permettent d'exprimer analytiquement une discontinuité.

On définit la fonction de singularité d'ordre n:

$$f_n(X) \equiv \langle X - a \rangle^n \text{ telle que } \left\{ \begin{array}{l} \text{Sin} < 0 \quad f_n(X) = \infty \text{ lorsque } X = a \\ \quad \quad \quad f_n(X) = 0 \text{ lorsque } X \neq a \\ \text{Sin} \geq 0 \quad f_n(X) = (X - a)^n \text{ lorsque } X \geq a \\ \quad \quad \quad f_n(X) = 0 \text{ lorsque } X < a \end{array} \right.$$

De la même manière on définit les règles d'intégration suivantes:

lorsque  $n < 0$   $\int_{-\infty}^X \langle x - a \rangle^n dx = \langle X - a \rangle^{n+1}$

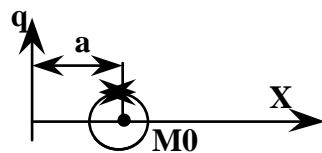
lorsque  $n \geq 0$   $\int_{-\infty}^X (x - a)^n dx = \frac{\langle X - a \rangle^{n+1}}{n + 1}$

**Utilisation pour le calcul des flèches**

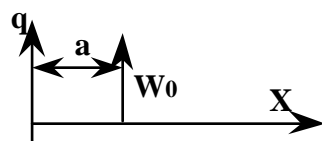
Soit  $q(X)$  un chargement vertical agissant sur une poutre. En accord avec les notations utilisées dans ce cours (II-16), on a:

$T_2 = -\int qdX$ , et d'après (II-16b)  $M_3 = -\int T_2 dX$  puis en utilisant (16), on détermine la flèche. Donc, par quatre intégrations successives on détermine la déformée de la poutre.

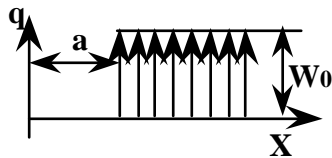
**Principales fonctions de singularités et leur utilisation**



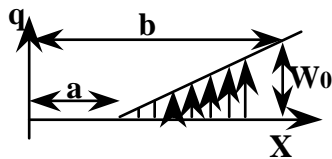
$$q = -M_0 \langle X - a \rangle^{-2}$$



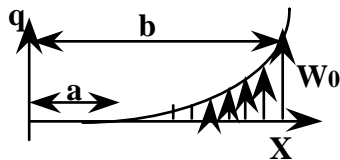
$$q = W_0 \langle X - a \rangle^{-1}$$



$$q = W_0 \langle X - a \rangle^0$$



$$q = \frac{W_0}{b - a} \langle X - a \rangle^1$$



$$q = \frac{W_0}{(b - a)^2} \langle X - a \rangle^2$$

**Utilisation dans l'exemple précédent:**

On sait que  $R_A=12\text{kN}$  et  $R_B=4\text{kN}$ .

D'où  $q(X) = 12\langle X \rangle^{-1} - 16\langle X - 1 \rangle^{-1} + 4\langle X - 4 \rangle^{-1}$

Par intégration,  $T_2 = -12\langle X \rangle^0 + 16\langle X - 1 \rangle^0 - 4\langle X - 4 \rangle^0 + \text{cste}$

La constante est nulle car pour  $X < 0$  et  $X > 4$  il n'y a aucun effort tranchant.

Par une nouvelle intégration  $M_3 = 12\langle X \rangle^1 - 16\langle X - 1 \rangle^1 + 4\langle X - 4 \rangle^1 + \text{cste}$

La constante est nulle car pour  $X < 0$  et  $X > 4$  il n'y a aucun effort moment fléchissant.

Et par la suite:

$$EI_3 u_{2,11}^f = M_3 = 12\langle X \rangle^1 - 16\langle X - 1 \rangle^1 + 4\langle X - 4 \rangle^1$$

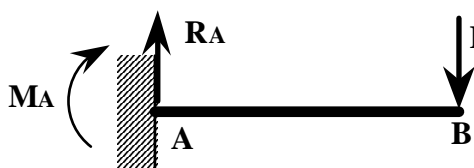
$$EI_3 u_{2,1}^f = 6\langle X \rangle^2 - 8\langle X - 1 \rangle^2 + 2\langle X - 4 \rangle^2 + C_1$$

$$EI_3 u_2^f = 2\langle X \rangle^3 - 8\langle X - 1 \rangle^3 / 3 + 2\langle X - 4 \rangle^3 / 3 + C_1 X + C_2$$

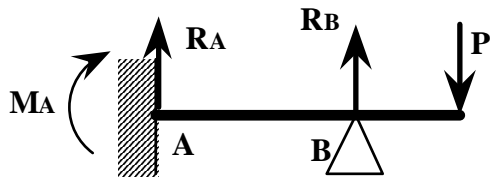
Pour déterminer les deux constantes, on utilise les conditions aux limites; le déplacement vertical est nul pour  $X=0$  et  $X=4$ . Soit  $C_1=-14\text{kN.m}^2$  et  $C_2=0$ .

**III - 5.3 Poutres constituant un système hyperstatique**

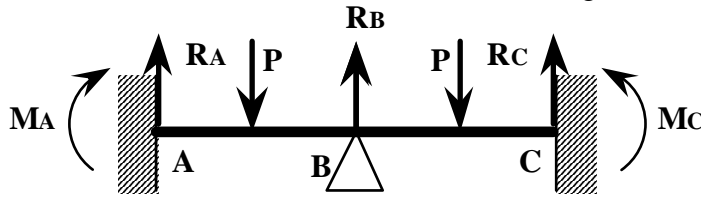
Jusqu'alors, nous n'avons étudié que des poutres formant des systèmes isostatiques, ou statiquement déterminés; c'est-à-dire que nous pouvons déterminer les réactions à l'aide des seules équations du principe fondamental de la statique. Les réactions qui ne peuvent être calculées par les seules équations d'équilibre déterminent le degré d'hyperstaticité d'un système.



Nous avons dans ce cas, 2 équations d'équilibre et 2 inconnues  $R_A$  et  $M_A$ : le système est isostatique.

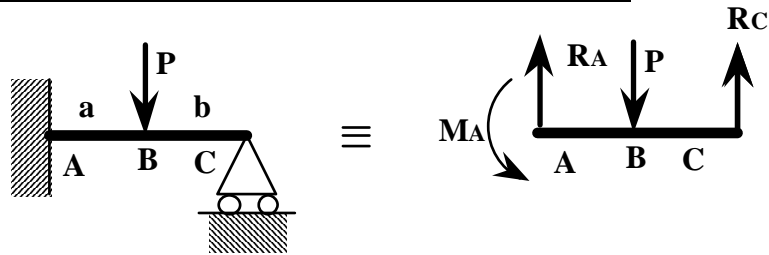


Nous avons dans ce cas, 2 équations d'équilibre et 3 inconnues  $R_A$ ,  $R_B$  et  $M_A$ : le système est hyperstatique de degré 1.



Nous avons dans ce cas, 2 équations d'équilibre et 5 inconnues  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  et  $M_A$ ,  $M_C$ : le système est hyperstatique de degré 3.

**Exemple: Résolution en utilisant les conditions géométriques**



\* Conditions d'équilibre statique:

$$R_A + R_C - P = 0$$

$$M_A + (a + b)R_C - aP = 0$$

\* Equation de la déformée

$$q(X) = -M_A \langle X \rangle^{-2} + R_A \langle X \rangle^{-1} - P \langle X - a \rangle^{-1} + R_C \langle X - (a + b) \rangle^{-1}$$

$$T_2(X) = M_A \langle X \rangle^{-1} - R_A \langle X \rangle^0 + P \langle X - a \rangle^0 - R_C \langle X - (a + b) \rangle^0$$

$$M_3(X) = -M_A \langle X \rangle^0 + R_A \langle X \rangle^1 - P \langle X - a \rangle^1 + R_C \langle X - (a + b) \rangle^1$$

$$EI_3 u_{2,1}^f(X) = -M_A \langle X \rangle^1 + R_A \langle X \rangle^2 / 2 - P \langle X - a \rangle^2 / 2 + R_C \langle X - (a + b) \rangle^2 / 2 + C_1$$

$$EI_3 u_2^f(X) = -M_A \langle X \rangle^2 / 2 + R_A \langle X \rangle^3 / 6 - P \langle X - a \rangle^3 / 6 + R_C \langle X - (a + b) \rangle^3 / 6 + C_1 X + C_2$$

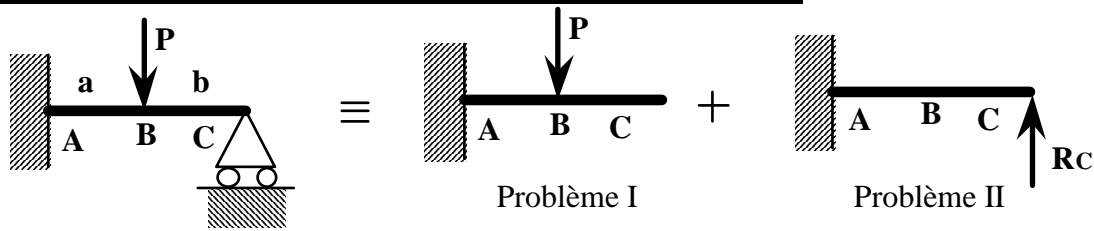
\* Utilisation des conditions aux limites.

On sait que  $u_2^f(0) = u_2^f(a + b) = 0$  et  $u_{2,1}^f(0) = 0$

Donc  $C_1 = C_2 = 0$

$$M_A = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{2L^2}, R_C = \frac{Pa^2(3L - a)}{2L^3} \text{ et } R_A = P - R_C$$

**Exemple: Résolution en utilisant la méthode de superposition**



Problème I:

L'équilibre nous donne  $R_{AI}=P$  et  $M_{AI}=Pa$

$$q_I(X) = -M_{AI}\langle X \rangle^{-2} + R_{AI}\langle X \rangle^{-1} - P\langle X - a \rangle^{-1}$$

$$q_I(X) = P(-a\langle X \rangle^{-2} + \langle X \rangle^{-1} - \langle X - a \rangle^{-1})$$

$$T_{2I}(X) = P(a\langle X \rangle^{-1} - \langle X \rangle^0 + \langle X - a \rangle^0)$$

$$M_{3I}(X) = P(-a\langle X \rangle^0 + \langle X \rangle^1 - \langle X - a \rangle^1)$$

$$EI_3 u_{2I,I}^f(X) = P(-a\langle X \rangle^1 + \langle X \rangle^2 / 2 - \langle X - a \rangle^2 / 2 + C_1)$$

$$EI_3 u_{2I}^f(X) = P(-a\langle X \rangle^2 / 2 + \langle X \rangle^3 / 6 - \langle X - a \rangle^3 / 6 + C_1 X + C_2)$$

Et en utilisant les conditions aux limites :  $u_{2I}^f(0) = 0$  et  $u_{2I,I}^f(0) = 0$

$$EI_3 u_{2I}^f(X) = P(-a\langle X \rangle^2 / 2 + \langle X \rangle^3 / 6 - \langle X - a \rangle^3 / 6)$$

Flèche en  $L=a+b$

$$EI_3 u_{2I}^f(L) = P(-aL^2 / 2 + L^3 / 6 - b^3 / 6) = Pa^2(-3L + a) / 6$$

Problème II:

Il suffit de remplacer P par  $-R_C$  et a par L.

$$EI_3 u_{2II}^f(X) = -R_C(-L\langle X \rangle^2 / 2 + \langle X \rangle^3 / 6)$$

Flèche en  $L=a+b$

$$EI_3 u_{2II}^f(L) = R_C L^3 / 3$$

Superposition des problèmes :

Comme il y a un appui simple en C, on doit écrire,

$$u_{2I}^f(L) + u_{2II}^f(L) = 0$$

Soit

$$2R_C L^3 + Pa^2(-3L + a) = 0 \quad \text{et} \quad R_C = \frac{Pa^2}{2L^3}(3L - a)$$



## METHODES ENERGETIQUES

### I - Théorèmes de l'énergie en élasticité linéaire

#### I - 1 Notations et définitions

On note  $\bar{u}$ ,  $\bar{\epsilon}$  et  $\bar{\sigma}$  les solutions du problème général d'élasticité linéaire. Les autres champs de déplacement seront notés  $\bar{v}$ , ceux de déformations  $\bar{e}$  et ceux de contraintes  $\bar{s}$ .

##### a) Champ de déplacements cinématiquement admissible (C.A.):

Un champ de déplacements  $\bar{v}$  est dit cinématiquement admissible, si il satisfait:

- les conditions de régularité (continuité et différentiabilité)
- les conditions aux bords  $\bar{v}(X) = \bar{U}(X) \forall X \in \partial\Omega_U$

##### b) Champ de contraintes statiquement admissible (S.A.):

Un champ de contraintes  $\bar{s}$  est dit statiquement admissible, si il satisfait aux équations d'équilibre:

$$\begin{cases} \text{div}(\bar{s}) + \bar{f}(X) = \vec{0} \forall X \in \Omega \\ \bar{s} \cdot \bar{n} = \bar{F}(X) \forall X \in \partial\Omega_F \end{cases} \quad (1)$$

##### c) Energie de déformation élastique:

On appelle énergie de déformation élastique d'un champ de déformations  $\bar{e}$ :

$$W(\bar{e}) = \iiint_{\Omega} \omega(\bar{e}) dX \text{ où } \omega(\bar{e}) = \frac{1}{2} \bar{C} e : e \quad (2)$$

##### d) Energie complémentaire élastique:

On appelle énergie complémentaire élastique d'un champ de contraintes  $\bar{s}$ :

$$W^*(\bar{s}) = \iiint_{\Omega} \omega^*(\bar{s}) dX \text{ où } \omega^*(\bar{s}) = \frac{1}{2} \bar{C}^{-1} s : s \quad (3)$$

##### e) Energies potentielles:

On appelle énergie potentielle élastique d'un champ de déplacements  $\bar{v}$  C.A.:

$$\xi(\bar{v}) = W(B\bar{v}) - \iiint_{\Omega} \bar{f}(X) \cdot \bar{v}(X) dX - \iint_{\partial\Omega_F} \bar{F}(X) \cdot \bar{v}(X) dX \quad (4)$$

où  $B\bar{v}$  est le champ de déformations dû au champ de déplacement  $\bar{v}$ , c'est-à-dire:

$$B = \frac{1}{2} (\text{grad} + \text{grad}^T)$$

On appelle énergie potentielle élastique d'un champ de contraintes  $\bar{s}$  S.A.:

$$\xi^*(\bar{s}) = -W^*(\bar{s}) - \iint_{\partial\Omega_U} (\bar{s}(X) \cdot \bar{n}(X)) \cdot \bar{U}(X) dX \quad (5)$$

## I - 2 Théorème fondamental

### Proposition:

Pour tout champ de déformations  $\bar{\bar{e}}$  et tout champ de contraintes  $\bar{\bar{s}}$ , on a:

$$W(\bar{\bar{e}}) + W^*(\bar{\bar{s}}) - \iiint_{\Omega} \bar{\bar{e}}(X) : \bar{\bar{s}}(X) dX \geq 0 \quad (6)$$

et l'égalité n'a lieu que si et seulement si  $\bar{\bar{e}}$  et  $\bar{\bar{s}}$  satisfont la loi de comportement

$$\bar{\bar{s}} = \bar{\bar{C}} : \bar{\bar{e}}.$$

### Démonstration:

$\bar{\bar{C}}$  est un opérateur défini positif. Donc,

$$\forall X \in W, \forall \bar{\bar{s}}(X) \in \mathbb{R}^3 \otimes_s \mathbb{R}^3 \quad \text{Max}_{\bar{\bar{e}}(X) \in \mathbb{R}^3 \otimes_s \mathbb{R}^3} \left\{ \bar{\bar{e}}(X) : \bar{\bar{s}}(X) - \frac{1}{2} \bar{\bar{e}}(X) : \bar{\bar{C}}(X) \bar{\bar{e}}(X) \right\} = \frac{1}{2} \bar{\bar{s}}(X) : \bar{\bar{C}}^{-1}(X) \bar{\bar{s}}(X)$$

Comme le maximum est atteint pour  $\bar{\bar{e}}(X) = \bar{\bar{C}}^{-1}(X) \bar{\bar{s}}(X)$ , on peut écrire

$$\forall \bar{\bar{e}}(X) \in \mathbb{R}^3 \otimes_s \mathbb{R}^3, \forall \bar{\bar{s}}(X) \in \mathbb{R}^3 \otimes_s \mathbb{R}^3 \quad \frac{1}{2} \bar{\bar{e}}(X) : \bar{\bar{C}}(X) \bar{\bar{e}}(X) + \frac{1}{2} \bar{\bar{s}}(X) : \bar{\bar{C}}^{-1}(X) \bar{\bar{s}}(X) - \bar{\bar{e}}(X) : \bar{\bar{s}}(X) \geq 0$$

Par intégration, on retrouve donc bien (6).

Il est évident que si la loi de comportement est satisfaite pour  $\bar{\bar{e}}(X)$  et  $\bar{\bar{s}}(X)$ , alors nous avons égalité.

### Théorème fondamental:

Le triplet  $(\bar{\bar{u}}, \bar{\bar{\varepsilon}}, \bar{\bar{\sigma}})$  est solution du problème d'élasticité linéaire

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\bar{u}} \text{ est C.A.} \\ \bar{\bar{\sigma}} \text{ est S.A.} \\ \forall X \in \Omega \quad \bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\text{grad } \bar{\bar{u}} + \text{grad}^T \bar{\bar{u}}) \text{ si et seulement si} \\ \bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{C}} \bar{\bar{\varepsilon}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall \bar{\bar{v}} \text{ C.A.} \\ \forall \bar{\bar{s}} \text{ S.A.} \\ \xi(\bar{\bar{v}}) \geq \xi(\bar{\bar{u}}) = \xi^*(\bar{\bar{\sigma}}) \geq \xi^*(\bar{\bar{s}}) \end{array} \quad (7)$$

### Démonstration:

Soient  $\bar{\bar{v}}$  C.A. et  $\bar{\bar{s}}$  S.A.; d'après (6) on a

$$W(B\bar{\bar{v}}) + W^*(\bar{\bar{s}}) - \iiint_{\Omega} B\bar{\bar{v}} : \bar{\bar{s}} dX \geq 0$$

Par application du principe des puissances virtuelles et des équations d'équilibre (I-18), on a

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} B\bar{\bar{v}} : \bar{\bar{s}} dX &= \iiint_{\Omega} \bar{\bar{f}} \cdot \bar{\bar{v}} dX + \iint_{\partial\Omega_F} \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{v}} dX + \iint_{\partial\Omega_U} \bar{\bar{s}} \bar{\bar{n}} \cdot \bar{\bar{v}} dX \\ &= \iiint_{\Omega} \bar{\bar{f}} \cdot \bar{\bar{v}} dX + \iint_{\partial\Omega_F} \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{v}} dX + \iint_{\partial\Omega_U} \bar{\bar{s}} \bar{\bar{n}} \cdot \bar{\bar{U}} dX \end{aligned}$$

En reportant dans (6)

$$W(B\bar{\bar{v}}) - \iiint_{\Omega} \bar{\bar{f}} \cdot \bar{\bar{v}} dX - \iint_{\partial\Omega_F} \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{v}} dX \geq -W^*(\bar{\bar{s}}) + \iint_{\partial\Omega_U} \bar{\bar{s}} \bar{\bar{n}} \cdot \bar{\bar{U}} dX$$

Soit, en utilisant (4) et (5)

$$\xi(\bar{\bar{v}}) \geq \xi^*(\bar{\bar{s}})$$

## II - Energie de déformation en RDM

### II - 1 Cas général

Nous sommes dans le cas où  $\xi(\bar{u}) = \xi^*(\bar{\sigma})$ , donc :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} dX = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \bar{f}(X) \cdot \bar{u}(X) dX + \frac{1}{2} \iint_{\partial\Omega_F} \bar{F}(X) \cdot \bar{u}(X) dX + \frac{1}{2} \iint_{\partial\Omega_U} (\bar{\sigma}(X) \cdot \bar{n}(X)) \cdot \bar{U}(X) dX$$

Soit le cas de l'élasticité linéaire isotrope

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + 2\sigma_{yz} \varepsilon_{yz}) dX \\ W &= \iiint_{\Omega} \left[ \frac{1}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xy} \sigma_{xy} + \sigma_{xz} \sigma_{xz} + \sigma_{yz} \sigma_{yz}) + \frac{1}{2G} (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2) \right] dX \\ W &= \iiint_{\Omega} \left[ \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 + G(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + 2G(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2) \right] dX \end{aligned}$$

et pour les poutres

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \sum_{i=1}^3 (a_i T_i + \chi_i M_i) \right] dX_1 \quad (8)$$

Mais comme d'après (II-17) et (II-18)

$$T_1 = a_1 ES, T_2 = \frac{a_2 ES}{2(1+\nu)}, T_3 = \frac{a_3 ES}{2(1+\nu)}, M_1 = \frac{\chi_1 EI_1}{2(1+\nu)}, M_2 = E\chi_2 I_2, M_3 = E\chi_3 I_3$$

on obtient

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ ES \left( a_1^2 + \frac{a_2^2}{2(1+\nu)} + \frac{a_3^2}{2(1+\nu)} \right) + E \left( \frac{I_1 \chi_1^2}{2(1+\nu)} + I_2 \chi_2^2 + I_3 \chi_3^2 \right) \right] dX_1 \quad (9)$$

ou encore

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{T_1^2}{ES} + \frac{T_2^2}{GS} + \frac{T_3^2}{GS} + \frac{M_1^2}{GI_1} + \frac{M_2^2}{EI_2} + \frac{M_3^2}{EI_3} \right] dX_1 = \sum_i (\bar{F}_i \cdot \bar{u}_i + \bar{C}_i \cdot \bar{\theta}_i) \quad (9)$$

Dans le second membre de (9), pour l'exemple et par soucis de simplification, nous ne présentons que des chargements ponctuels, mais la généralisation ne pose aucun problème.

### II - 2 Cas particulier de la Traction/Compression

Soit un barreau de longueur L, de section S, soumis à une force F à chaque extrémité.

On a donc,  $T_1 = F$  et  $T_2 = T_3 = M_1 = M_2 = M_3 = 0$  et

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T_1^2}{ES} dX_1$$

Soit dans notre cas

$$W = \frac{F^2 L}{2ES} \quad (10)$$

### II - 3 Cas particulier de la flexion plane simple

Soit une poutre droite soumise à des charges transversales, c'est-à-dire  $T_1=T_3=M_1=M_2=0$  et  $T_2 \neq 0, M_3 \neq 0$

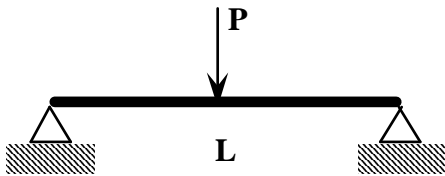
Dans ce cas

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{T_2^2}{GS} + \frac{M_3^2}{EI_3} \right] dX_1 \quad (11)$$

On peut vérifier que, dans la plupart des cas, l'énergie associée aux contraintes de cisaillement est négligeable comparativement à l'énergie associée aux contraintes normales. Soit,

$$W = \int_0^L \frac{M_3^2}{2EI_3} dX_1 \quad (12)$$

#### Exemple:



$$q = \frac{P}{2} \langle x \rangle^{-1} - P \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^{-1}$$

$$T_2 = -\frac{P}{2} \langle x \rangle^0 + P \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^0$$

$$M_3 = \frac{P}{2} \langle x \rangle^1 - P \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^1$$

$$\int_0^L T_2^2 dX_1 = \int_0^{L/2} \frac{P^2}{4} dX_1 + \int_{L/2}^L \frac{P^2}{4} dX_1 = \frac{P^2 L}{4}$$

$$\int_0^L M_3^2 dX_1 = \int_0^{L/2} \frac{P^2 X^2}{4} dX + \int_{L/2}^L \frac{P^2}{4} (X-L)^2 dX = \frac{P^2 L^3}{48}$$

Soit une section circulaire de rayon R :  $S = \pi R^2, I_3 = \pi R^4 / 4$

$$\frac{\int_0^L \frac{T_2^2}{GS} dX_1}{\int_0^L \frac{M_3^2}{EI_3} dX_1} = \frac{2(1+\nu)}{E} \times \frac{1}{\pi R^2} \times \frac{P^2 L}{4} \times \frac{E \pi R^4}{4} \times \frac{48}{P^2 L^3} = 6(1+\nu) \left( \frac{R}{L} \right)^2 \ll 1$$

Car  $R \ll L$ . Donc on peut légitimement négliger l'influence du cisaillement.

### II - 4 Cas particulier de la torsion

Soit une poutre droite soumise à un moment de torsion, c'est-à-dire  $T_2=T_3=T_1=M_2=M_3=0$  et  $M_1 \neq 0$

Dans ce cas

$$W = \int_0^L \frac{M_1^2}{2GI_1} dX_1 \quad (13)$$

### III - Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

On considère deux états d'équilibre d'un même système.

- L'état d'équilibre I, défini par les champs  $\bar{\sigma}^I, \bar{\varepsilon}^I, \bar{u}^I$ , correspond à des forces volumiques  $\bar{f}^I$  et à des efforts surfaciques  $\bar{F}^I$  sur  $\partial\Omega$ .

$$\text{div} \bar{\sigma}^I + \bar{f}^I = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\bar{\sigma}^I \cdot \bar{n} = \bar{F}^I \quad \text{sur } \partial\Omega$$

- L'état d'équilibre II, défini par les champs  $\bar{\sigma}^{II}, \bar{\varepsilon}^{II}, \bar{u}^{II}$ , correspond à des forces volumiques  $\bar{f}^{II}$  et à des efforts surfaciques  $\bar{F}^{II}$  sur  $\partial\Omega$ .

$$\text{div} \bar{\sigma}^{II} + \bar{f}^{II} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\bar{\sigma}^{II} \cdot \bar{n} = \bar{F}^{II} \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Par application du principe des puissances virtuelles, au champ de contraintes  $\bar{\sigma}^I$  en prenant pour champ de déplacement virtuel  $\bar{u}^{II}$ , on obtient:

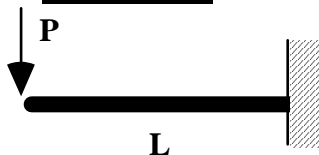
$$\iiint_{\Omega} \bar{\sigma}^I : \bar{\varepsilon}^{II} \, d\Omega = \iiint_{\Omega} \bar{f}^I \cdot \bar{u}^{II} \, d\Omega + \iint_{\partial\Omega} \bar{F}^I \cdot \bar{u}^{II} \, d\partial\Omega$$

Or  $\bar{\sigma}^I : \bar{\varepsilon}^{II} = \bar{\varepsilon}^I : \bar{\sigma}^{II} = \bar{\sigma}^I : \bar{\varepsilon}^I$ , soit

$$\iiint_{\Omega} \bar{f}^I \cdot \bar{u}^I \, d\Omega + \iint_{\partial\Omega} \bar{F}^I \cdot \bar{u}^I \, d\partial\Omega = \iiint_{\Omega} \bar{f}^I \cdot \bar{u}^{II} \, d\Omega + \iint_{\partial\Omega} \bar{F}^I \cdot \bar{u}^{II} \, d\partial\Omega \quad (14)$$

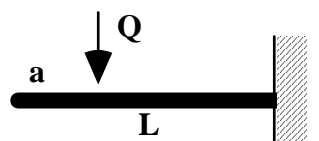
Le travail d'un système de forces  $(\bar{f}^I, \bar{F}^I)$  dans le déplacement produit par le système de forces  $(\bar{f}^{II}, \bar{F}^{II})$  est égal au travail du système de forces  $(\bar{f}^{II}, \bar{F}^{II})$  dans le déplacement produit par le système de forces  $(\bar{f}^I, \bar{F}^I)$ .

#### Application:



Dans le problème suivant, la flèche est donnée par :

$$y = -\frac{P}{6EI} (2L^3 - 3L^2X + X^3)$$



Quelle est la flèche, à l'extrémité de la poutre si on applique une charge Q à une distance 'a' de cette extrémité?

- Soit  $(y_P)_Q$  la flèche au point d'application de la charge P due à la charge Q.

- Soit  $(y_Q)_P$  la flèche au point d'application de la charge Q due à la charge P.

Par application du théorème de réciprocité:

$$(y_P)_Q P = (y_Q)_P Q$$

Soit

$$(y_P)_Q = -\frac{Q}{6EI} (2L^3 - 3L^2a + a^3)$$

## IV - Théorème de Castigliano et applications

### IV - 1 Théorème de Castigliano

Considérons un système de forces  $\vec{P}_i$  ( $i=1\dots n$ ) appliqué à une structure. Ces forces et les réactions constituent le système I. A chaque point d'application de ces forces, on a un déplacement  $(\vec{u}_i)_I$ . D'après (9), l'énergie de déformation est alors

$$W_I = \frac{1}{2} \sum_i \vec{P}_i \cdot \vec{u}_i$$

On cherche la variation de l'énergie par rapport à une force donnée ou encore la dérivée de l'énergie par rapport à une force par exemple  $\vec{P}_r$ . Par définition de la dérivée, on a pour tout accroissement  $\delta\vec{P}_r$  :

$$\frac{\partial W}{\partial \vec{P}_r} \cdot \delta\vec{P}_r = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} (W(\vec{P}_r + \theta\delta\vec{P}_r) - W(\vec{P}_r))$$

Augmentons donc la valeur de  $\vec{P}_r$ , d'une quantité  $\theta\delta\vec{P}_r$ . On constitue ainsi un système de forces II. En chaque point d'application des forces on aura alors un déplacement  $\vec{u}_i + \theta\delta\vec{u}_i$ , et

$$W_{II} = \frac{1}{2} \sum_i (\vec{P}_i + \theta\delta\vec{P}_i) \cdot (\vec{u}_i + \theta\delta\vec{u}_i)$$

Par application du théorème de réciprocité, on peut alors écrire

$$\sum_i (\vec{P}_i + \theta\delta\vec{P}_i) \cdot \vec{u}_i = \sum_i \vec{P}_i \cdot (\vec{u}_i + \theta\delta\vec{u}_i)$$

Soit

$$\delta\vec{P}_r \cdot \vec{u}_r = \sum_i \vec{P}_i \cdot \delta\vec{u}_i$$

Puis

$$\begin{aligned} W_{II} - W_I &= \frac{1}{2} \sum_i (\vec{P}_i + \theta\delta\vec{P}_i) \cdot (\vec{u}_i + \theta\delta\vec{u}_i) - \frac{1}{2} \sum_i \vec{P}_i \cdot \vec{u}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \vec{P}_i \cdot \theta\delta\vec{u}_i + \frac{1}{2} \sum_i \theta\delta\vec{P}_i \cdot (\vec{u}_i + \theta\delta\vec{u}_i) \\ &= \frac{1}{2} \theta\delta\vec{P}_r \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{2} \theta\delta\vec{P}_r \cdot (\vec{u}_r + \theta\delta\vec{u}_r) \\ &= \frac{1}{2} \theta^2 \delta\vec{P}_r \cdot \delta\vec{u}_r + \theta\delta\vec{P}_r \cdot \vec{u}_r \end{aligned}$$

Ou encore

$$\frac{\partial W}{\partial \vec{P}_r} \cdot \delta\vec{P}_r = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \left( \frac{1}{2} \theta^2 \delta\vec{P}_r \cdot \delta\vec{u}_r + \theta\delta\vec{P}_r \cdot \vec{u}_r \right) = \delta\vec{P}_r \cdot \vec{u}_r$$

Donc avec un abus de notation, on écrira classiquement:

$$\frac{\partial W}{\partial \vec{P}_r} = \mathbf{u}_r \quad (15)$$

où  $\mathbf{u}_r$  est la valeur du déplacement compté positivement dans le sens d'application de la force

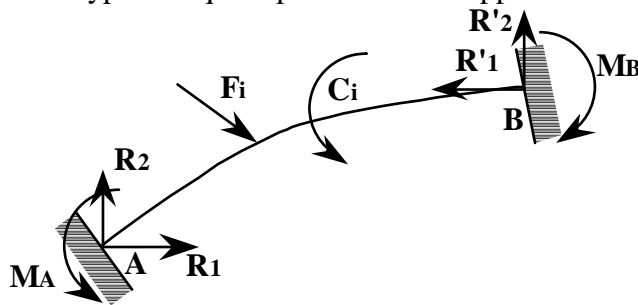
En généralisant le développement précédent, on peut énoncer le théorème de Castigliano:

**La projection du déplacement du point d'application d'une force sur la direction de cette force est égale à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cette force.**

**Le vecteur rotation du point d'application d'un couple quelconque, projeté sur l'axe de ce couple, est égal à la dérivée partielle, par rapport au moment de ce couple, de l'énergie de déformation.**

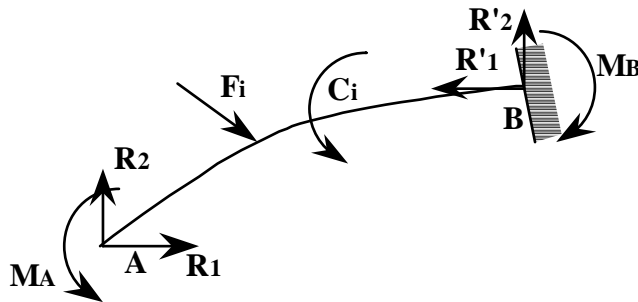
#### IV - 2 Conséquence: Principe du travail minimum ou théorème de Ménabréa

Considérons une poutre hyperstatique reposant sur des appuis invariables.



Les appuis introduisent 6 inconnues  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $M_A$ ,  $R'_1$ ,  $R'_2$ ,  $M_B$ . Or, il n'y a que 3 équations d'équilibre; le système est donc 3 fois hyperstatique.

Rendons la poutre isostatique en supprimant les liaisons surabondantes (par exemple en A).



Ce système a la même énergie de déformation que précédemment. Par application du théorème de Castigliano, comme la section A est encastree, on obtient:

$$\frac{\partial W}{\partial R_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial R_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial M_A} = 0$$

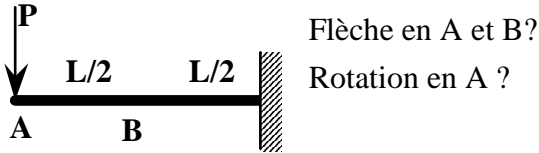
ce qui donne 3 équations linéaires en  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $M_A$ .

**Les valeurs que prennent les réactions hyperstatiques correspondant aux liaisons surabondantes rendent stationnaire l'énergie interne.**

C'est le théorème de Ménabréa ou théorème du travail minimum.

### IV - 3 Exemples

#### IV - 3.1 Poutre console



a) La poutre est sollicitée en flexion. Le moment fléchissant est  $M_3 = -Px$

D'après (12)

$$W = \int_0^L \frac{M_3^2}{2EI_3} dx = \int_0^L \frac{P^2 x^2}{2EI_3} dx = \frac{P^2 L^3}{6EI_3}$$

Donc

$$u_A = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{PL^3}{3EI_3} \quad (\text{vers le bas})$$

b) Pour déterminer le déplacement du point B, on applique en B une charge fictive Q.

Pour  $0 \leq x \leq L/2$   $M_3 = -Px$  et pour  $L/2 \leq x \leq L$   $M_3 = -Px - Q(x - L/2)$

d'où

$$W = \frac{L^3}{48EI_3} (8P^2 + Q^2 + 5PQ)$$

et finalement

$$u_B = \frac{\partial W}{\partial Q} \Big|_{Q=0} = \frac{L^3}{48EI_3} (2Q + 5P) \Big|_{Q=0} = \frac{5PL^3}{48EI_3} \quad (\text{vers le bas})$$

c) Pour déterminer la rotation de la section A, on applique en A un couple fictif  $M_A$ .

Pour  $0 \leq x \leq L$   $M_3 = -Px - M_A$

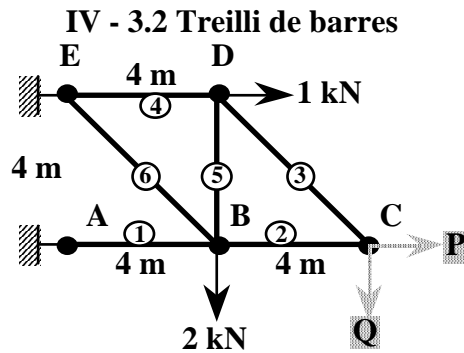
d'où

$$W = \int_0^L \frac{1}{2EI_3} (M_A + Px)^2 dx = \frac{1}{2EI_3} \left( \frac{P^2 L^3}{3} + PM_A L^2 + M_A^2 L \right)$$

et finalement

$$\theta_A = \frac{\partial W}{\partial M_A} \Big|_{M_A=0} = \frac{PL^2}{2EI_3}$$





On considère un treilli de barres articulées.  
Chaque barre est constituée du même matériau et a la même section.  
On cherche le déplacement du point C.

Pour ce faire, on applique en C deux charges fictives P et Q (avec P=Q=0)

Equilibre du point C :  $\cos 45^\circ F_3 = Q$   
 $\sin 45^\circ F_3 + F_2 = P$

Equilibre du point D :  $F_4 = \cos 45^\circ F_3 + 1$   
 $\sin 45^\circ F_3 + F_5 = 0$

Equilibre du point B :  $F_2 = \cos 45^\circ F_6 + F_1$   
 $\sin 45^\circ F_6 + F_5 = 2$

D'où

$$F_1 = P - 2Q - 2, \quad F_2 = P - Q, \quad F_3 = Q\sqrt{2}, \quad F_4 = 1 + Q, \quad F_5 = -Q, \quad F_6 = \sqrt{2}(Q + 2)$$

Par application de (10),

$$W = \sum_{i=1}^6 \frac{F_i^2 L_i}{2S_i E_i} = \frac{1}{2SE} \sum_{i=1}^6 F_i^2 L_i$$

d'où

$$W = \frac{L}{2SE} (F_1^2 + F_2^2 + \sqrt{2}F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + \sqrt{2}F_6^2)$$

\*Détermination du déplacement vertical du point C

$$\left. \frac{\partial W}{\partial Q} \right|_{\substack{P=0 \\ Q=0}} = \frac{L}{2SE} (-4(P - 2Q - 2) - 2(P - Q) + 4\sqrt{2}Q + 2(1 + Q) + 4Q + 4\sqrt{2}(2 + Q)) \Big|_{\substack{P=0 \\ Q=0}}$$

Soit

$$\Delta y_C = -\frac{L}{SE} (5 + 4\sqrt{2})$$

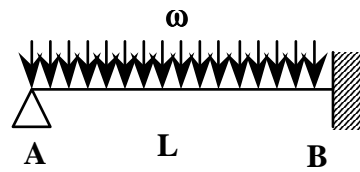
\*Détermination du déplacement horizontal du point C

$$\Delta x_C = \left. \frac{\partial W}{\partial P} \right|_{\substack{P=0 \\ Q=0}} = \frac{L}{2SE} (2(P - 2Q - 2) + 2(P - Q)) \Big|_{\substack{P=0 \\ Q=0}}$$

Soit

$$\Delta x_C = -\frac{2L}{SE}$$

**IV - 3.3 Application aux systèmes hyperstatiques**



La réaction en A est une réaction surabondante.

$$q(x) = R_A \langle x \rangle^{-1} - \omega \langle x \rangle^0$$

d'où

$$M_3 = R_A x - \omega \frac{x^2}{2}$$

puis d'après (12)

$$W = \int_0^L \frac{M_3^2}{2EI_3} dx = \frac{1}{2EI_3} \left( R_A^2 \frac{L^3}{3} - \omega R_A \frac{L^4}{4} + \frac{\omega L^5}{20} \right)$$

Or comme le déplacement vertical du point A est nul

$$\frac{\partial W}{\partial R_A} = \frac{1}{2EI_3} \left( 2R_A \frac{L^3}{3} - \omega \frac{L^4}{4} \right) = 0$$

d'où

$$R_A = \frac{3\omega L}{8}$$

**V - Equation de Bertrand de Fontviolant**

**V - 1 Enoncé**

L'équation de Bertrand de Fontviolant est une application directe du principe des puissances virtuelles. Nous avons vu (14), en considérant deux états d'équilibre d'un même système, que:

$$\iiint_{\Omega} \bar{\sigma}^I : \bar{\varepsilon}^{II} d\Omega = \iiint_{\Omega} \bar{f}^I \cdot \bar{u}^{II} d\Omega + \iint_{\partial\Omega} \bar{F}^I \cdot \bar{u}^{II} d\partial\Omega$$

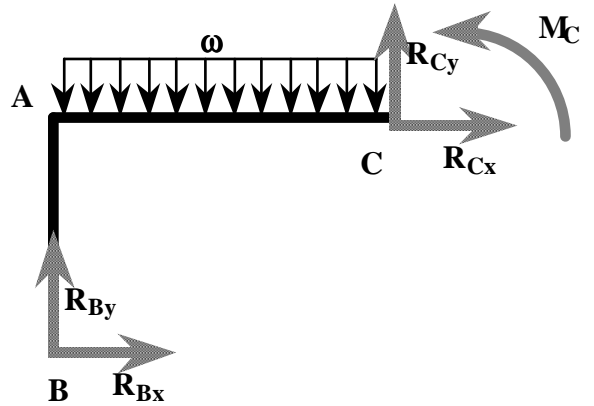
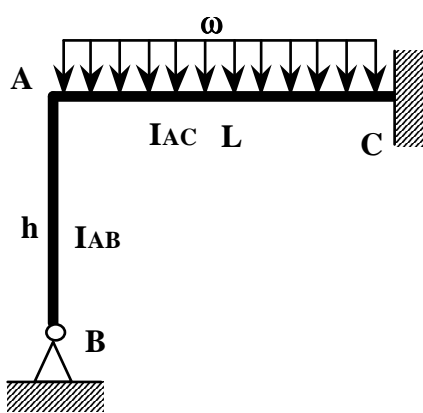
Si le système n'est soumis qu'à J forces ou couples ponctuels

$$\iiint_{\Omega} \bar{\sigma}^I : \bar{\varepsilon}^{II} d\Omega = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^I \cdot \bar{u}^{II}(x_1^i) + \sum_{i=1}^n \bar{C}_i^I \cdot \bar{\omega}^{II}(x_1^i)$$

d'où, en développant l'énergie interne, on obtient:

$$\int_0^L \left( \frac{T_1^I T_1^{II}}{ES} + \frac{T_2^I T_2^{II}}{GS} + \frac{T_3^I T_3^{II}}{GS} + \frac{M_1^I M_1^{II}}{GI_1} + \frac{M_2^I M_2^{II}}{EI_2} + \frac{M_3^I M_3^{II}}{EI_3} \right) dX_1 = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^I \cdot \bar{u}^{II}(x_1^i) + \sum_{i=1}^n \bar{C}_i^I \cdot \bar{\omega}^{II}(x_1^i) \tag{16}$$

**V - 2 Application: Evaluation des réactions hyperstatiques surabondantes**



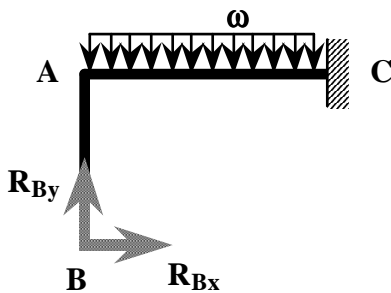
Réaction en B:  $R_{Bx}, R_{By}$ .

Réaction en C:  $M_C, R_{Cx}, R_{Cy}$ .

Le système est hyperstatique de degré 2.

$$\begin{cases} R_{Bx} + R_{Cx} = 0 \\ R_{By} + R_{Cy} - \omega L = 0 \\ M_C - R_{By}L + R_{Bx}h + \frac{\omega L^2}{2} = 0 \end{cases}$$

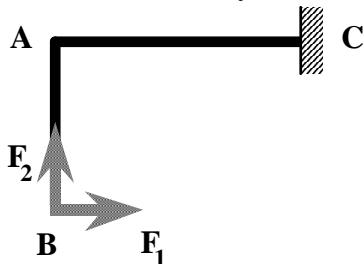
\* On définit le système I par le portique isostatique associé (on supprime l'articulation en B).



sur AB  $M_3^I = R_{Bx}y$

sur BC  $M_3^I = R_{Bx}h - R_{By}x + \frac{\omega x^2}{2}$

\* On définit le système II par :



sur AB  $M_3^{II} = F_1y$

sur BC  $M_3^{II} = F_1h - F_2x$

Le point B ne se déplaçant pas

En négligeant l'influence des effort tranchant et normal, par application de (16), les points

B et C étant fixes, on obtient:

$$\int_0^h \frac{M_3^I M_3^{II}}{EI_{AB}} dy + \int_0^L \frac{M_3^I M_3^{II}}{EI_{AC}} dx = 0$$

$$\int_0^h \frac{1}{EI_{AB}} [(R_{Bx}y)(F_1y)] dy + \int_0^L \frac{1}{EI_{AC}} \left[ \left( R_{Bx}h - R_{By}x + \frac{\omega x^2}{2} \right) (F_1h - F_2x) \right] dx = 0$$

$$\frac{R_{Bx} F_1 h^2}{2I_{AB}} + \frac{1}{I_{AC}} \left( F_1 R_{Bx} h^2 L - F_1 h R_{By} \frac{L^2}{2} + F_1 h \omega \frac{L^3}{6} - F_2 R_{Bx} h \frac{L^2}{2} + F_2 R_{By} \frac{L^3}{3} - F_2 \omega \frac{L^4}{8} \right) = 0$$

$$F_1 \left( \frac{I_{AC} R_{Bx} h^2}{2I_{AB}} + R_{Bx} h^2 L - h R_{By} \frac{L^2}{2} + h \omega \frac{L^3}{6} \right) + F_2 \left( -R_{Bx} h \frac{L^2}{2} + R_{By} \frac{L^3}{3} - \omega \frac{L^4}{8} \right) = 0$$

Ceci doit être vrai en particulier pour  $F_1=0$  ou  $F_2=0$ , d'où

$$\begin{cases} \frac{3I_{AC} R_{Bx} h^2}{I_{AB}} + 6R_{Bx} h^2 L - 3h R_{By} L^2 + h \omega L^3 = 0 \\ -12R_{Bx} h L^2 + 8R_{By} L^3 - 3\omega L^4 = 0 \end{cases}$$

Soit, en posant  $k = \frac{I_{AC} h}{I_{AB} L}$

$$R_{Bx} = \frac{\omega L^2}{4h(4k+3)} \quad \text{et} \quad R_{By} = \frac{3\omega L(k+1)}{2(4k+3)}$$

### V - 3 Application: Détermination des déplacements et rotations

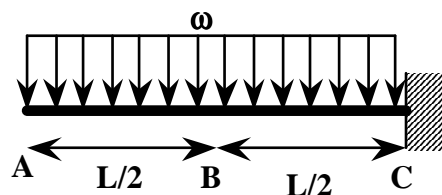
Si en un point d'abscisse curviligne  $X_1^P$ , on applique une force ponctuelle unitaire pour le système I, on obtient:

$$\int_0^L (\dots) dX_1 = u^{II}(X_1^P)$$

où  $u^{II}(X_1^P)$  est le déplacement du point dans le sens d'application de la force unitaire

#### Exemple:

On cherche, dans le cas d'une poutre console chargée uniformément, les déplacements et rotations aux point A et B.

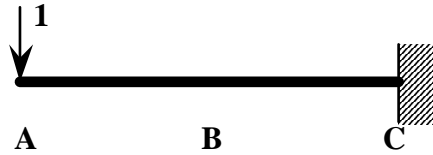


Pour le système courant, que nous appellerons le système II, on a:

$$M_3^{II} = -\omega \frac{x^2}{2}$$

#### \* Flèche en A

Soit le système I suivant:



Dans ce cas  $M_3^I = -1 \times x$ . D'où:

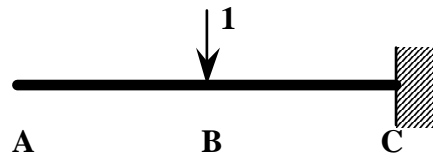
$$\int_0^L \frac{M_3^I M_3^{II}}{EI_3} dX_1 = 1 \times u_A^{II}$$

soit

$$u_A^{II} = \frac{1}{EI_3} \int_0^L \omega \frac{x^3}{2} dx = \frac{\omega L^4}{8EI_3}$$

**\* Flèche en B**

Soit le système I suivant:

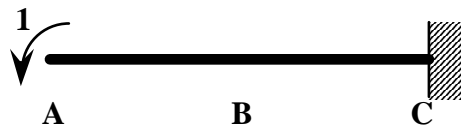


Dans ce cas  $M_3^I = -1 \times \langle x - \frac{1}{2} \rangle^1$ . D'où:

$$u_B^{II} = \frac{1}{EI_3} \int_0^L \omega \frac{x^2}{2} \langle x - \frac{1}{2} \rangle^1 dx = \frac{1}{EI_3} \int_{L/2}^L \omega \frac{x^2}{2} (x - \frac{1}{2}) dx = \frac{17\omega L^4}{384EI_3}$$

**\* Rotation en A**

Soit le système I suivant:

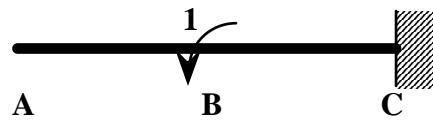


Dans ce cas  $M_3^I = -1$ . D'où:

$$\theta_A^{II} = \int_0^L \frac{M_3^I M_3^{II}}{EI_3} dX_1 = \frac{1}{EI_3} \int_0^L \omega \frac{x^2}{2} dx = \frac{\omega L^3}{6EI_3}$$

**\* Rotation en B**

Soit le système I suivant:



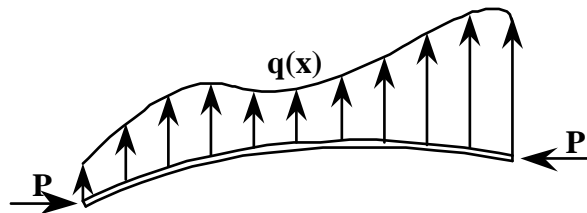
Dans ce cas  $M_3^I = -1 \times \langle x - \frac{1}{2} \rangle^0$ . D'où:

$$\theta_B^{II} = \int_0^L \frac{M_3^I M_3^{II}}{EI_3} dX_1 = \frac{1}{EI_3} \int_{L/2}^L \omega \frac{x^2}{2} dx = \frac{7\omega L^3}{48EI_3}$$

# FLAMBEMENT

## I - Stabilité d'une poutre en compression

On étudie le comportement d'une poutre droite soumise à une compression  $P$  et une charge répartie transversale  $q(x)$ . On se place dans la configuration déformée de la poutre.



D'après (II-16) nous savons que l'équilibre se traduit par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour chaque intervalle } [X_1^i, X_1^{i+1}] \left[ \begin{array}{l} \vec{f}^f + \vec{T}_{,1} = \vec{0} \quad (a) \\ \vec{c}^f + \vec{M}_{,1} + \vec{e}_1 \wedge \vec{T} = \vec{0} \quad (b) \end{array} \right. \\ \text{Pour } X_1^i = 1, \dots, J \quad \left[ \begin{array}{l} \vec{F}^i + \vec{T}(X_1^{i+}) - \vec{T}(X_1^{i-}) = \vec{0} \quad (c) \\ \vec{C}^i + \vec{M}(X_1^{i+}) - \vec{M}(X_1^{i-}) = \vec{0} \quad (d) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1)$$

Or dans le cas présent, pour un tronçon, nous obtenons:

$$\vec{f}^f = q(x)\vec{e}_2, \vec{c}^f = \vec{0}, \vec{C}^0 = \vec{C}^1 = \vec{0}, \vec{F}^0 = -\vec{F}^1 = \vec{P} \quad (2)$$

et en considérant la déformée

$$\vec{e}_1 = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ u_{2,1}^f \\ 0 \end{array} \right\}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{1,1} = 0 \\ T_{2,1} = -q(x) \\ M_{3,1} + T_2 - T_1 u_{2,1}^f = 0 \\ T_1(0) = -P \end{array} \right. \quad (3)$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = -P \\ T_{2,1} = -q(x) \\ M_{3,11} - q(x) + P u_{2,11}^f = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

et enfin en utilisant l'expression du moment fléchissant (III -20)

$$M_3 = EI_3 u_{2,11}^f$$

on peut conclure que

$$EI_3 u_{2,1111}^f + P u_{2,11}^f = q(x) \quad (5)$$

Si la charge latérale est nulle, l'équation d'équilibre se traduit par:

$$EI_3 \frac{d^4 u_2^f}{dx^4} + P \frac{d^2 u_2^f}{dx^2} = 0 \quad (6)$$

Une solution triviale de (6) est  $u_2^f = 0$ , mais dans le cas général on trouve:

$$u_2^f(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \sin(nx) + c_4 \cos(nx) \quad (7)$$

où

$$n = \sqrt{\frac{P}{EI_3}} \quad (8)$$

Pour déterminer les 4 constantes, nous utiliserons les conditions aux limites suivantes:

\* Le déplacement latéral de la fibre moyenne

$$u_2^f(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \sin(nx) + c_4 \cos(nx) \quad (9a)$$

\* La pente de la déformée de la fibre moyenne

$$u_{2,1}^f(x) = c_2 + n c_3 \cos(nx) - n c_4 \sin(nx) \quad (9b)$$

\* Le moment fléchissant

$$u_{2,11}^f(x) = \frac{M_3(x)}{EI_3} = -n^2 c_3 \sin(nx) - n^2 c_4 \cos(nx) \quad (9c)$$

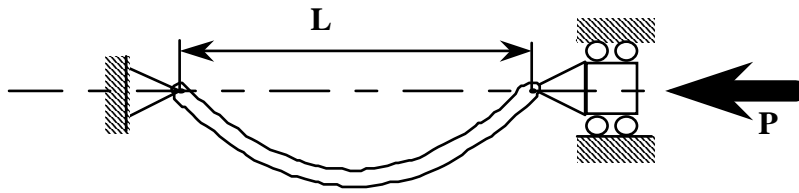
\* L'effort tranchant (en utilisant (3))

$$\begin{aligned} \frac{T_2(x)}{EI_3} &= -\frac{M_{3,1}(x)}{EI_3} - \frac{P u_{2,1}^f}{EI_3} \\ &= -u_{2,111}^f - n^2 u_{2,1}^f \\ &= n^3 c_3 \cos(nx) - n^3 c_4 \sin(nx) - n^2 (c_2 + n c_3 \cos(nx) - n c_4 \sin(nx)) \\ &= -n^2 c_2 \end{aligned} \quad (9d)$$

## II - Etude de quelques cas simples

### II-1 Colonne Rotule-Rotule

Nous considérons une poutre rectiligne ayant une rotule à chacune de ses extrémités. Nous recherchons alors la charge critique de flambement que peut supporter cette poutre.



En chaque rotule le déplacement latéral et le moment sont nuls. Donc, si on élimine la solution triviale  $u_2^f = 0$ , l'équilibre se traduit par une déformée de type (7) avec pour conditions aux limites:

$$\begin{cases} u_2^f(0) = c_1 + c_4 = 0 \\ M_3(0)/EI_3 = -n^2 c_4 = 0 \\ u_2^f(L) = c_1 + c_2 L + c_3 \sin(nL) + c_4 \cos(nL) = 0 \\ M_3(L)/EI_3 = -n^2 c_3 \sin(nL) - n^2 c_4 \cos(nL) = 0 \end{cases}$$

soit,

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 \sin(nL) = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}$$

si on élimine la solution triviale, on obtient un équilibre pour  $nL = N\pi$ . C'est-à-dire, en utilisant (8), pour chaque compression telle que:


$$P = \frac{(N\pi)^2 EI_3}{L^2} \tag{10}$$


et la déformée est telle que:

$$u_2^f(x) = c_3 \sin\left(\frac{N\pi x}{L}\right) \tag{11}$$


On remarquera que le déplacement latéral est **indéterminé!**

En conclusion:

\* Pour  $P < P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_3}{L^2}$  l'équilibre est stable la poutre ne flambe pas. 

\* Pour  $P = P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_3}{L^2}$  la poutre flambe 

\* Pour  $P_{cr} < P < \frac{4\pi^2 EI_3}{L^2}$  l'équilibre est instable

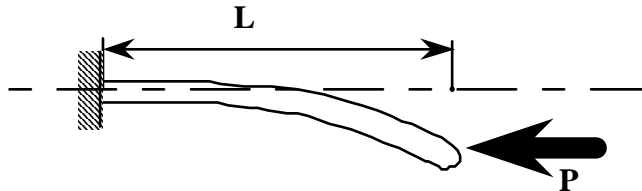
\* Pour  $P = \frac{4\pi^2 EI_3}{L^2}$  la poutre flambe 

\* ... etc ...



## II-2 Colonne Encastrée-Libre

Nous considérons une poutre rectiligne encastrée à l'une de ses extrémités. Nous recherchons alors la charge critique de flambement que peut supporter cette poutre.



À l'encastrement, le déplacement latéral est nul, ainsi que la pente et l'effort tranchant. À l'extrémité, la poutre est libre de tout moment. Donc, si on élimine la solution triviale  $u_2^f = 0$ , l'équilibre se traduit par une déformée de type (7) avec pour conditions aux limites:

$$\begin{cases} u_2^f(0) = c_1 + c_4 = 0 \\ u_{2,1}^f(0) = c_2 + nc_3 = 0 \\ T_2 / EI_3 = -n^2 c_2 = 0 \\ M_3(L) / EI_3 = -n^2 c_3 \sin(nL) - n^2 c_4 \cos(nL) = 0 \end{cases}$$

soit,

$$\begin{cases} c_1 = -c_4 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 \cos(nL) = 0 \end{cases}$$

si on élimine la solution triviale, on obtient un équilibre pour  $nL = (2N - 1) \frac{\pi}{2}$ .

La charge critique est donc atteinte pour:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_3}{(2L)^2} \quad (12)$$

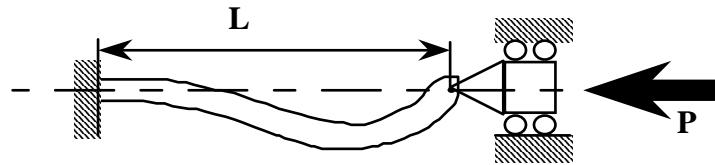
et la déformée est telle que:

$$u_2^f(x) = c_1 \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \right) \quad (13)$$

## II-3 Colonne Encastrée-Rotule

Nous considérons une poutre rectiligne encastrée à l'une de ses extrémités, dont l'autre extrémité est astreinte à rester dans l'axe. Nous recherchons alors la charge critique de

flambement que peut supporter cette poutre.



A l'encastrement, le déplacement latéral et la pente sont nuls. A l'extrémité, la poutre est libre de tout moment et ne peut se déplacer latéralement. Donc, si on élimine la solution triviale  $u_2^f = 0$ , l'équilibre se traduit par une déformée de type (7) avec pour conditions aux limites:

$$\begin{cases} u_2^f(0) = c_1 + c_4 = 0 \\ u_{2,1}^f(0) = c_2 + nc_3 = 0 \\ u_2^f(L) = c_1 + c_2L + c_3 \sin(nL) + c_4 \cos(nL) \\ M_3(L)/EI_3 = -n^2c_3 \sin(nL) - n^2c_4 \cos(nL) = 0 \end{cases}$$

soit,

$$\begin{cases} c_1 = c_3 \operatorname{tg}(nL) \\ c_2 = -c_3 n \\ c_3 (\operatorname{tg}(nL) - nL) = 0 \\ c_4 = -c_3 \operatorname{tg}(nL) \end{cases}$$

si on élimine la solution triviale, on obtient un équilibre pour  $nL=1,43\pi$ .

La charge critique est donc atteinte pour:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_3}{(0,7L)^2} \quad (14)$$

et la déformée est telle que:

$$u_2^f(x) = c_4 \left( \cos\left(\frac{1,43\pi x}{L}\right) - 0,223 \sin\left(\frac{1,43\pi x}{L}\right) + \frac{x}{L} - 1 \right) \quad (15)$$

### III - Généralisation: Formule d'Euler

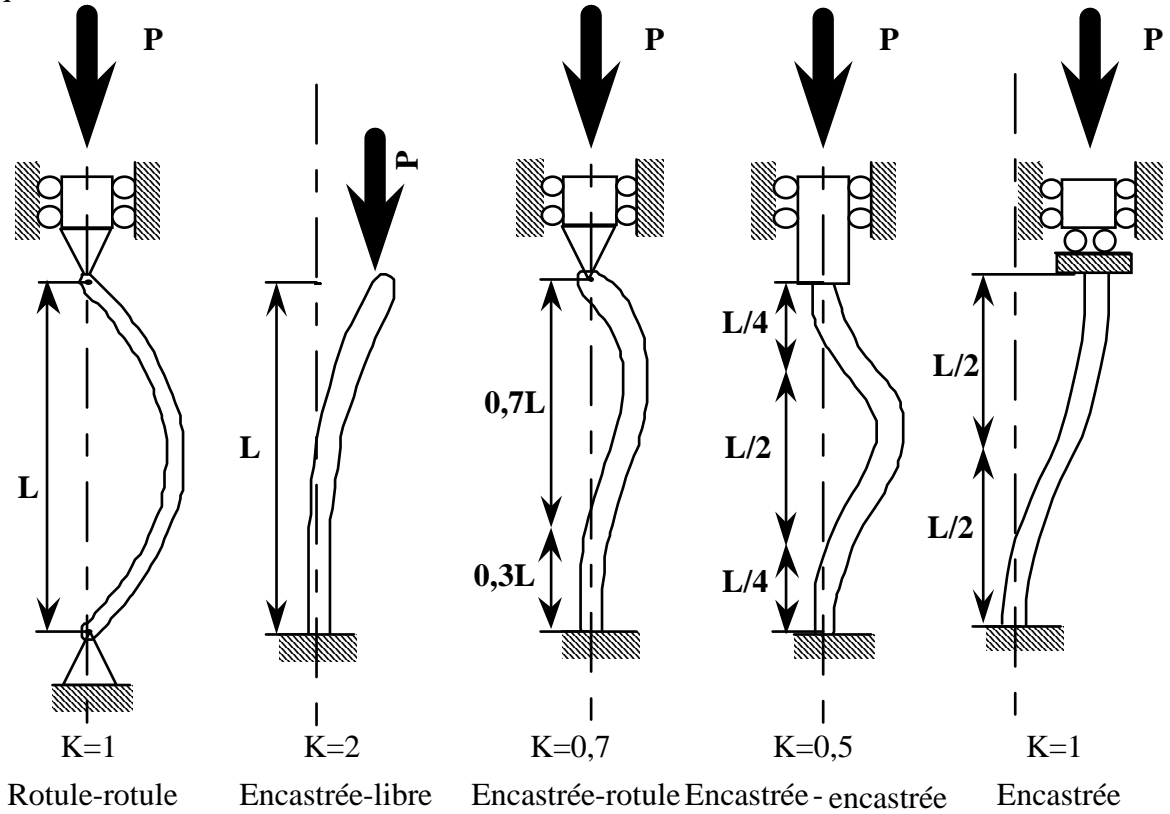
Historiquement, on appelle "formule d'Euler" la charge critique d'une poutre Rotule-Rotule.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_3}{L^2}$$

Pour l'appliquer aux différentes combinaisons possibles d'appuis, on définit la charge critique comme étant:

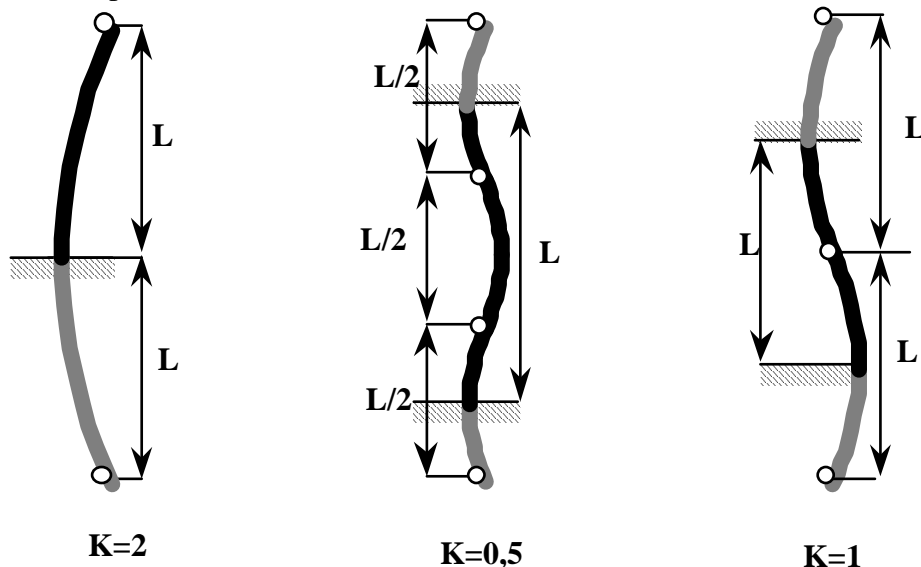
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_3}{(KL)^2}$$

où L représente la longueur de la poutre et KL la longueur d'une colonne Rotule-Rotule équivalente.



Pour déterminer le facteur K on peut effectuer les développements mathématiques, ou bien utiliser des arguments de symétrie.

Par exemple, dans le schéma ci-après on représente en noir la poutre étudiée, et en gris la symétrie utilisée pour retrouver la colonne rotule-rotule.



**Autre écriture:**

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_3}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 ES}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} \tag{16}$$

où S est la section et  $r = \sqrt{\frac{I_3}{S}}$  est le rayon de giration de la section.

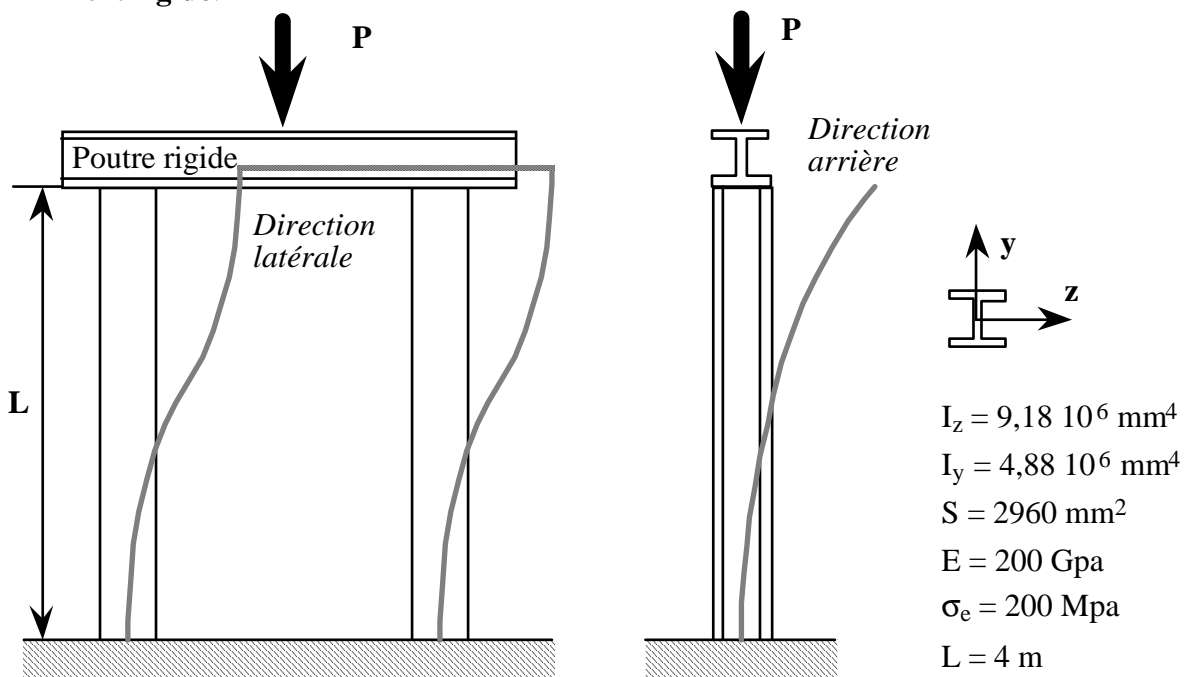
$\frac{KL}{r}$  est appelé le coefficient d'élanement de la colonne.

La contrainte critique correspondante est alors

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{S} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} \tag{17}$$

### IV - Exemple

On cherche la charge maximale que peut supporter la structure ci-après. Ce système est constitué de deux colonnes (poutre en I) encastree à leur base, supportant une poutre supposée infiniment **rigide**.



Comme l'indiquent les courbes pointillées, on peut identifier deux mécanismes de flambement, l'un dans la direction latérale et l'autre dans la direction arrière.

**\* Flambement vers l'arrière**

On se trouve dans la configuration d'une poutre encastree-libre, donc  $K=2$  et le coefficient d'élancement de la colonne dans la direction arrière est

$$\frac{KL}{r_z} = \frac{KL}{\sqrt{\frac{I_z}{S}}} = \frac{2 \times 4 \times 10^3}{\sqrt{\frac{9,18 \times 10^6}{2960}}} = 143,6$$

**\* Flambement latéral**

On se trouve dans la configuration d'une poutre encastree, donc  $K=1$  et le coefficient d'élancement de la colonne dans la direction latérale est

$$\frac{KL}{r_y} = \frac{KL}{\sqrt{\frac{I_y}{S}}} = \frac{4 \times 10^3}{\sqrt{\frac{4,88 \times 10^6}{2960}}} = 98,5$$

**\* Charge maximale**

Le coefficient d'élancement ayant une valeur maximale pour le flambement vers l'avant, il s'agit du cas le plus défavorable. On peut alors déterminer la charge critique supportée par une colonne:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 ES}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times 2960 \times 10^{-6}}{143,6^2} = 283343 \text{ N}$$

Comme chaque colonne supporte la moitié de la charge totale appliquée, on peut conclure que

$$P_{\max} = 566,5 \text{ kN}$$

# COMPORTEMENT AU DELA DU DOMAINE ELASTIQUE CHARGES LIMITES

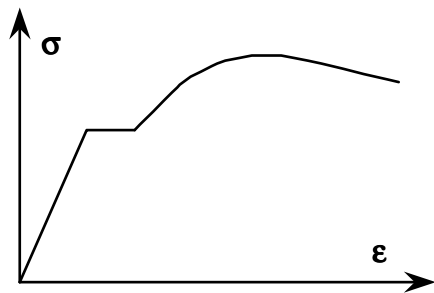
(Chapitre en cours de rédaction .... Approche de l'analyse limite par l'exemple)

## I - Introduction

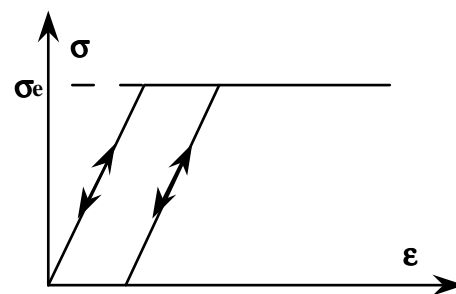
### I-1 Critères de défaillance

- Critères cinématiques : Définis par le cahier des charges
- Critères de résistance :
  - \* Rupture statique brusque (comportement élastique fragile)
  - \* Excès de déformation plastique
  - \* Rupture par fatigue
  - \* Fluage
  - \* Ecroulement
  - \* ... etc ...

### I-2 Comportement du matériau



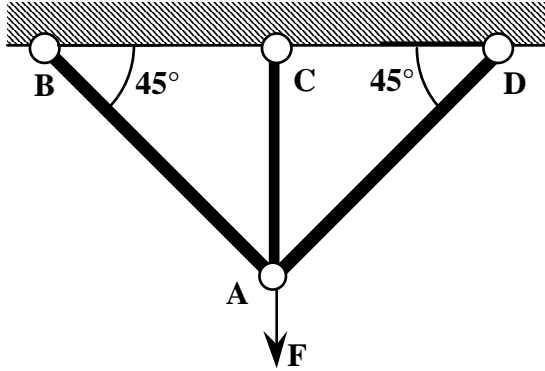
Comportement réel



Comportement élastique-plastique parfait

## II - Analyse limite en traction

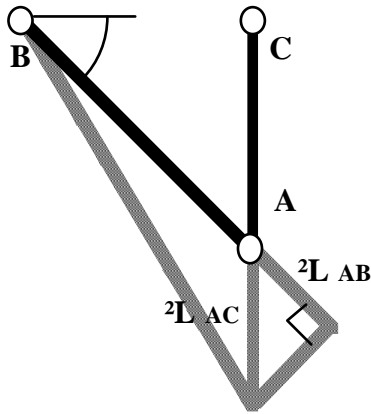
### II-1 Analyse élastique



Ce système est hyperstatique de degré 1.

En appliquant le Principe Fondamental de la Statique pour traduire l'équilibre du point A, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{T_{AB}}{\sqrt{2}} + T_{AC} + \frac{T_{AD}}{\sqrt{2}} - F = 0 \\ -\frac{T_{AB}}{\sqrt{2}} + \frac{T_{AD}}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$



Pour résoudre ce système hyperstatique, on écrit la compatibilité des déplacements en A.

$$\Delta L_{AB} = \frac{\Delta L_{AC}}{\sqrt{2}}$$

avec

$$\Delta L_{AB} = \frac{T_{AB}L\sqrt{2}}{ES} \quad \text{et} \quad \Delta L_{AC} = \frac{T_{AC}L}{ES}$$

soit en définitive:

$$\begin{cases} T_{AB} = \frac{F}{2 + \sqrt{2}} \\ T_{AC} = \frac{2F}{2 + \sqrt{2}} \end{cases}$$

La contrainte normale dans chaque barre est constante (état de traction pure). Le premier barreau qui atteindra la limite d'élasticité est le barreau AC. On peut alors déterminer la charge limite d'élasticité  $F_e$ , ou encore la charge pour laquelle apparaît de la plasticité:

$$\frac{T_{AC}}{S} = \sigma_e$$

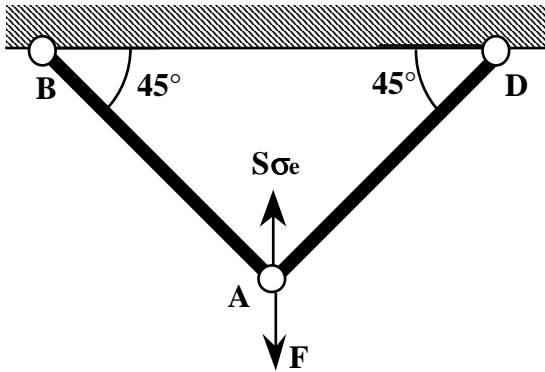
soit

$$F_e = S\sigma_e \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \tag{2}$$

et le déplacement correspondant

$$\Delta L_{AC_e} = \frac{\sigma_e L}{E} \tag{3}$$

## II-2 Analyse élastique-plastique



Pour une charge  $F > F_e$  le barreau AC est entièrement plastifié et ne peut supporter de charge supplémentaire. L'effort normal dans le barreau AC est donc constant et égal à  $S\sigma_e$ .

En appliquant le Principe Fondamental de la Statique pour traduire l'équilibre du point A (isostatique), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{T_{AB}}{\sqrt{2}} + S\sigma_e + \frac{T_{AD}}{\sqrt{2}} - F = 0 \\ -\frac{T_{AB}}{\sqrt{2}} + \frac{T_{AD}}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$

soit,

$$T_{AB} = T_{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(F - S\sigma_e) \tag{4}$$

Lorsque le barreau AB (ou AD) atteint la limite d'élasticité, alors les trois barreaux sont plastifiés et la structure n'est plus en état de déformation limitée (mécanisme de ruine).

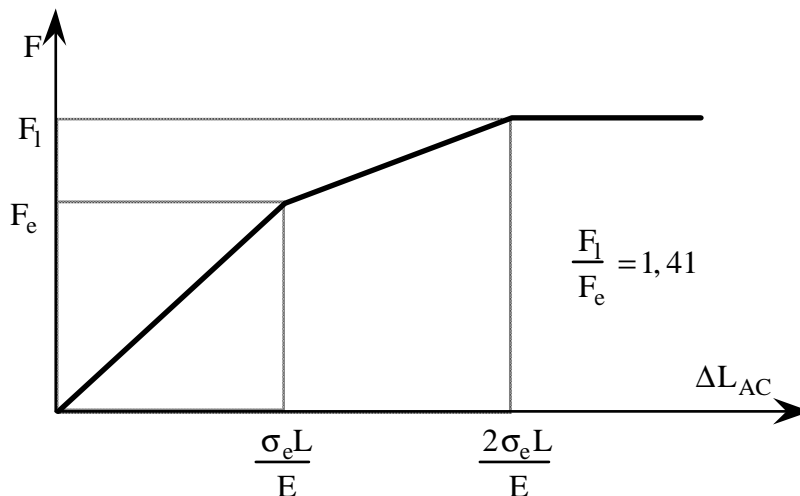
On peut déterminer la force limite pour laquelle on atteint ce mécanisme de ruine:

On cherche la force  $F_1$  telle que  $\frac{T_{AB}}{S} = \sigma_e$ . Soit:

$$F_1 = S\sigma_e(1 + \sqrt{2}) \tag{5}$$

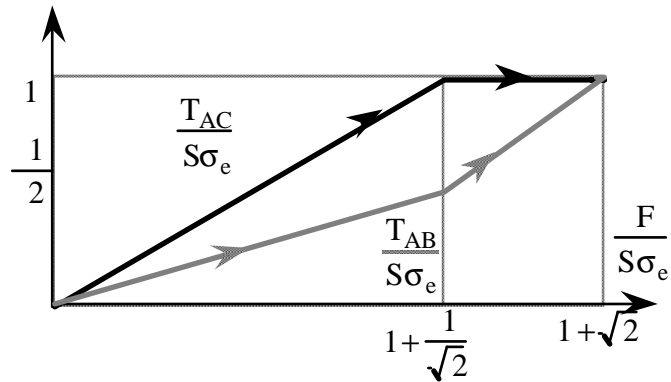
et le déplacement correspondant

$$\Delta L_{AC_1} = \sqrt{2}\Delta L_{AB} = \frac{2\sigma_e L}{E} \tag{6}$$



Au-delà du comportement élastique, la structure dispose d'une "réserve" de **41%** avant de rompre !





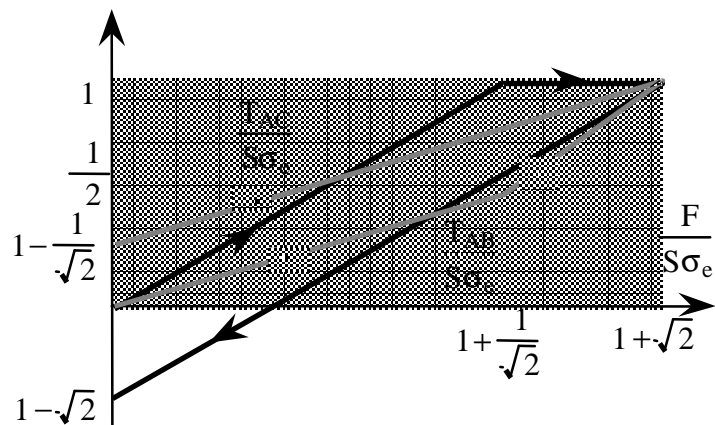
Attention: Le déplacement n'est plus proportionnel à la charge appliquée. Le principe de superposition des contraintes ne peut plus être utilisé.

### II-3 Décharge

On se place juste avant la charge ultime. Les barreaux AB et AD sont élastiques. Le barreau AC, par contre, est plastifié et a subi un **allongement permanent**. A la décharge, le comportement des trois barreaux est élastique. La barre AC sera comprimée et les barres AB et AD tendues.

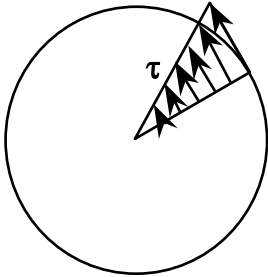
Pour trouver les efforts normaux résiduels, on remplace F par  $-F_1$  dans (1) pour obtenir le retour élastique, puis on superpose avec (4)

$$\begin{cases} T_{AB_r} = S\sigma_e - S\sigma_e \frac{(1 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} = S\sigma_e \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ T_{AC_r} = S\sigma_e - 2S\sigma_e \frac{(1 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} = S\sigma_e (1 - \sqrt{2}) \end{cases} \quad (7)$$



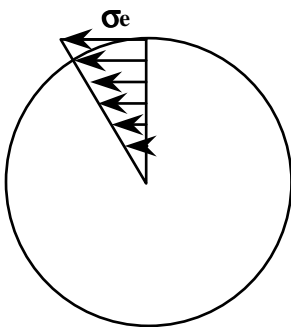
### III - Analyse limite à la torsion

#### III-1 Généralités



On a vu que pour un cylindre soumis à de la torsion pure :

$$\tau = Gr\chi_1 = \frac{M_1}{I_1} r$$



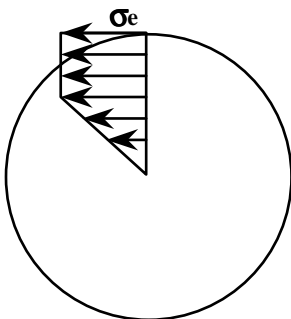
**Cas1:** On augmente le couple de torsion de telle sorte que les fibres extérieures atteignent la limite d'élasticité  $\sigma_e$ .

Comme  $I_1 = \frac{\pi R^4}{2}$ , nous obtenons donc le moment limite élastique

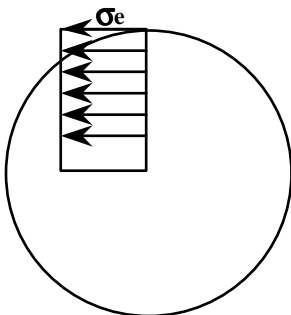
$$M_{1e} = \frac{\pi R^3}{2} \sigma_e \quad (8)$$

et

$$\theta_e = \int \frac{M_1}{GI_1} dX_1 = \frac{L\sigma_e}{GR} \quad (9)$$



**Cas2:** On augmente le couple de torsion. La déformation augmente, donc l'angle de torsion augmente, mais la contrainte ne peut dépasser la valeur limite  $\sigma_e$ .

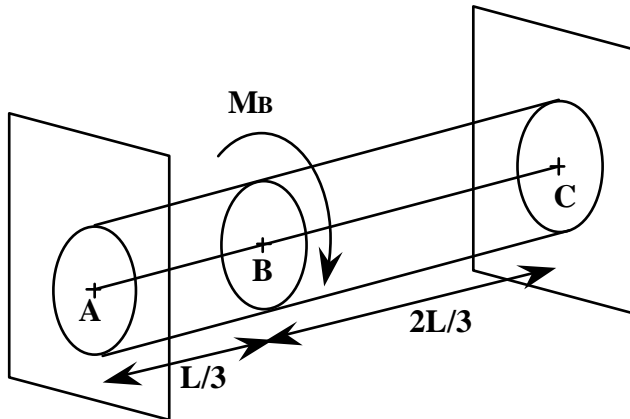


**Cas3:** La limite d'élasticité est atteinte dans toute la section du cylindre. Toutes les fibres supportent donc une contrainte  $\sigma_e$  et rien ne s'oppose à la rotation de la section. Le couple limite est alors:

$$\begin{aligned} M_{1L} &= \iint (X_2\sigma_{13} - X_3\sigma_{21}) dX_2 dX_3 \\ &= \iint (r \cos \theta \sigma_e \cos \theta - r \sin \theta (-\sin \theta)) r d\theta dr \\ &= 2\pi\sigma_e \int_0^R r^2 dr \\ M_{1L} &= \frac{2}{3} \pi\sigma_e R^3 = \frac{4}{3} M_{1e} \end{aligned} \quad (10)$$

Il existe donc une réserve de **33%** avant l'écoulement de la section ne soit complet.

### III-2 Exemple



Soit un cylindre plein de longueur L encastré aux deux extrémités. on lui applique, à un tiers de sa longueur, un couple de torsion  $M_B$ .

#### \* Analyse élastique

$$M_A + M_C = M_B$$

et

$$\theta_{AC} = \theta_{AB} + \theta_{BC} = 0$$

Soit 
$$\begin{cases} M_A = \frac{2}{3} M_B \\ M_C = \frac{1}{3} M_B \end{cases}$$

A la limite du comportement élastique, la section A commence à plastifier. Soit  $M_A = M_{1e}$

et

$$M_{Be} = \frac{3}{2} M_{1e} = \frac{3\pi R^3}{4} \sigma_e$$

#### \* Analyse limite

Le seul mécanisme de ruine possible est lorsque les deux sections en A et C on atteint la valeur limite. Soit:

$$M_A = M_C = M_{IL} = \frac{4}{3} M_{1e}$$

et

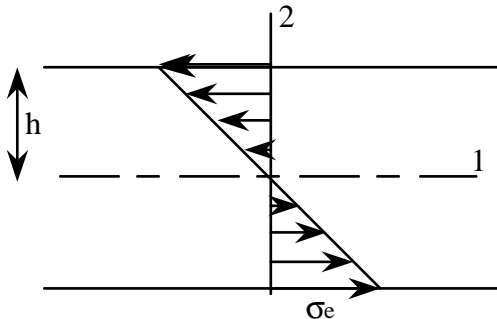
$$M_{BL} = \frac{8}{3} M_{1e}$$

$$M_{BL}/M_{Be} = 1,78$$

Donc, à partir de l'apparition de la plasticité, on dispose encore d'une réserve de **78%** avant la ruine complète de la structure.

## IV - Analyse limite à la flexion

### IV-1 Généralités



Dans le cas de la flexion plane, la contrainte varie linéairement avec l'épaisseur,

$$\sigma_{11} = -\frac{M_3}{I_3} X_2$$

ainsi, bien sur, que la déformation axiale

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} = -\chi_3 X_2$$

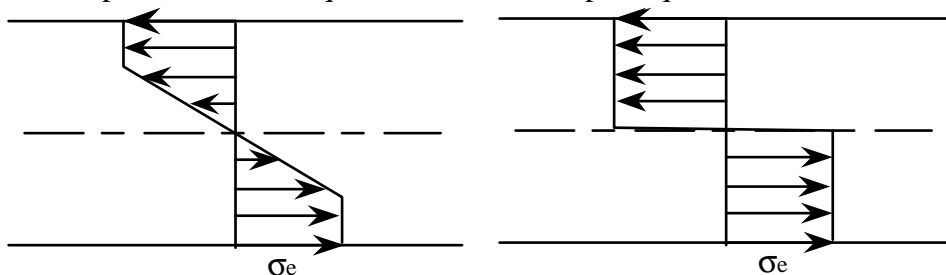
Le moment maximum est atteint lorsque les fibres extrémales subissent une contrainte  $\sigma_e$ .

Soit:

$$M_{3e} = \pm \sigma_e \frac{I_3}{h} \tag{11}$$

$w=I_3/h$  est appelé le module de flexion.

Si on dépasse le moment  $M_{3e}$  alors les fibres inférieures et supérieures plastifient. Lorsque toute la section est plastifiée, on dit que l'on a une rotule plastique.



Dans ce cas:

$$M_{3L} = -\iint_S X_2 \sigma_{11} dX_2 dX_3 = -\sigma_e \iint_S X_2 dX_2 dX_3$$

soit

$$M_{3L} = 2\sigma_e S_X \tag{12}$$

où  $S_X$  est le moment statique de la moitié de la section droite par rapport à l'axe  $X_3$ .

Plus généralement, on peut écrire

$$M_{3L} = KM_{3e}$$

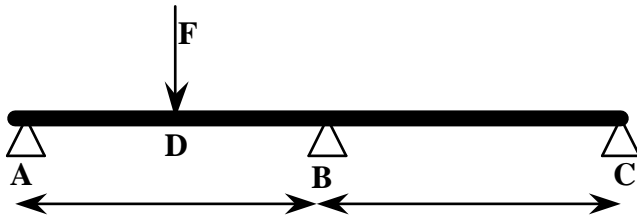
où  $K$  est le facteur de forme de la section (dépendant uniquement de la géométrie).

Section rectangulaire pleine  $K=1,5$

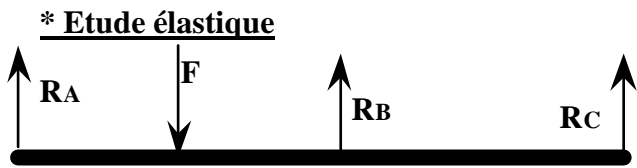
Section circulaire pleine  $K=1,7$

Section en I  $K=1,1$  à  $1,2$

**IV-2 Exemple: Méthode "pas à pas"**



On étudie une poutre sur trois appuis supportant une charge F et on cherche le mécanisme de ruine et la charge limite.



$$\begin{cases} R_A - F + R_B + R_C = 0 \\ -\frac{L}{2}F + LR_B + 2LR_C = 0 \end{cases}$$

$$q(x) = R_A \langle x \rangle^{-1} - F \langle x - L/2 \rangle^{-1} + R_B \langle x - L \rangle^{-1}$$

$$M_3(x) = R_A \langle x \rangle^1 - F \langle x - L/2 \rangle^1 + R_B \langle x - L \rangle^1$$

$$EI_3 u_{2,1}^f(x) = \frac{1}{2} \left[ R_A \langle x \rangle^2 - F \langle x - L/2 \rangle^2 + R_B \langle x - L \rangle^2 + C_1 \right]$$

$$EI_3 u_2^f(x) = \frac{1}{6} \left[ R_A \langle x \rangle^3 - F \langle x - L/2 \rangle^3 + R_B \langle x - L \rangle^3 + 3C_1 x + C_2 \right]$$

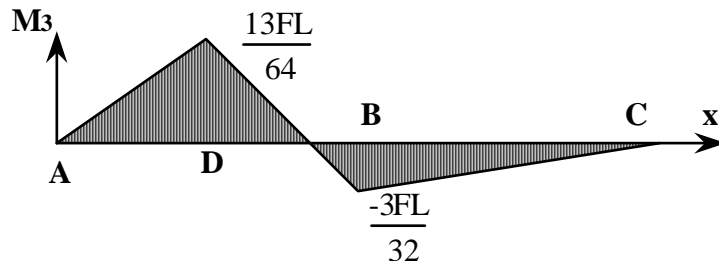
Pour déterminer les constantes et l'inconnue hyperstatique, on utilise les conditions aux limites:

$$u_2^f(0) = u_2^f(L) = u_2^f(2L) = 0$$

et on obtient

$$R_A = \frac{13F}{32}, \quad R_B = \frac{22F}{32}, \quad R_C = -\frac{3F}{32}, \quad C_1 = -\frac{3FL^2}{32}, \quad C_2 = 0$$

En observant le graphe du moment fléchissant ci-après, on constate que le maximum est atteint dans la section D.



**\* Premier Pas:**

On augmente la charge F jusqu'à ce que la section D plastifie entièrement. Dans ce cas on a:

$$M_L = \frac{13}{64} F_1 L$$

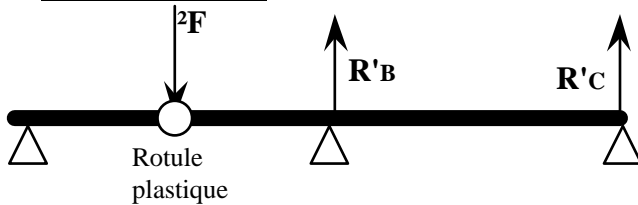
soit la charge

$$F_1 = \frac{64}{13} \frac{M_L}{L}$$

Pour cette charge le moment fléchissant dans la section B est :

$$M_3(L) = -\frac{6}{13} M_L$$

**\* Deuxième Pas:**

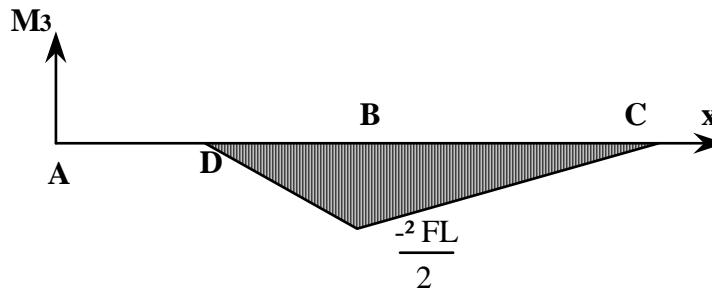


On augmente alors la charge F<sub>1</sub> de ΔF. En décomposant le problème, on se trouve maintenant dans le cas d'une étude élastique avec une rotule dans la section D.

Les équations d'équilibre nous donnent les réactions isostatiques;

$$R'_B = -\frac{3}{2} \Delta F, \quad R'_C = \frac{1}{2} \Delta F$$

et le diagramme des moments fléchissants



Donc, par superposition avec le problème précédent, on constate que la section B plastifie ensuite lorsque  $M_3(L) = -M_L$ , c'est-à-dire:

$$-\frac{6}{13} M_L - \frac{1}{2} \Delta F L = -M_L$$

ou encore pour un accroissement de charge

$$\Delta F = \frac{14}{13} \frac{M_L}{L}$$

Lorsque les section D et B sont plastifiées, la structure s'effondre. On a atteint alors la charge limite

$$F_L = F_1 + \Delta F = 6 \frac{M_L}{L}$$

La flèche dans la section D est

$$u_2^f(L/2) = \frac{23}{1536} \frac{F_1 L^3}{EI_3} + \frac{\Delta F L^3}{8EI_3} = \frac{5}{24} \frac{M_L L^2}{EI_3}$$

### IV-3 Théorème énergétique

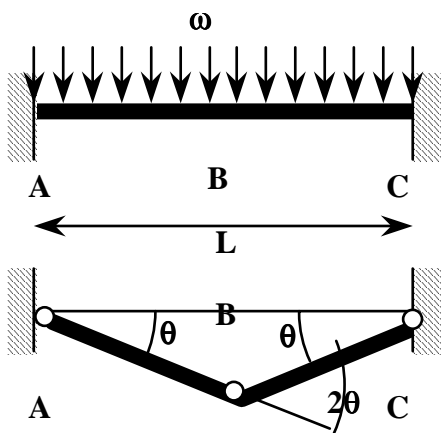
D'après le principe des travaux virtuels, la somme du travail des efforts extérieurs et de l'énergie interne est nulle. Si on se place dans le cas d'une structure soumise en flexion à un état limite (mécanisme de ruine) alors seules les rotules plastiques contribuent à l'énergie élastique.

Soit une structure soumise à N forces d'intensité  $P_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) et présentant un mécanisme de ruine à M rotules plastiques. On note  $\theta_j$  ( $1 \leq j \leq M$ ) la rotation d'une rotule plastique et  $\delta_i$  le déplacement au point d'application d'une force.

On peut alors écrire:

$$\sum_{i=1}^N P_i \delta_i = \sum_{j=1}^M M_j \theta_j$$

#### Exemple d'application:



Le mécanisme de ruine apparaît lorsque les trois sections A, B et C plastifient entièrement. Dans ce cas la déformée est telle que:

Travail des forces extérieures

$$W_e = \int_0^L \omega u_2^f(x) dx = 2 \int_0^{L/2} \omega x t g \theta dx \approx 2 \int_0^{L/2} \omega x \theta dx = \theta \omega \frac{L^2}{4}$$

Travail des forces intérieures

$$-W_i = M_A \theta_A + M_B \theta_B + M_C \theta_C = -M_A \theta + 2M_B \theta + M_C \theta$$

Or à l'état limite on a

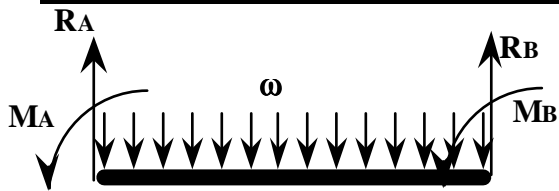
$$M_A = -M_L, \quad M_B = M_L, \quad M_C = M_L, \text{ donc}$$

$$\theta \omega \frac{L^2}{4} - 4M_L \theta = 0$$

et la charge limite est donc:

$$\omega_L = 16 \frac{M_L}{L^2}$$

**Vérification par la méthode pas à pas:**



Le système est hyperstatique. Par symétrie on a naturellement:

$$R_A = R_B = \frac{\omega L}{2}$$

$$M_A = -M_B$$

Afin de déterminer l'inconnue hyperstatique nous cherchons la déformée:

$$q(x) = -M_A \langle x \rangle^{-2} + R_A \langle x \rangle^{-1} - \omega \langle x \rangle^0$$

$$M_3(x) = -M_A \langle x \rangle^0 + R_A \langle x \rangle^1 - \frac{\omega}{2} \langle x \rangle^2$$

$$EI_3 u_{2,1}^f(x) = -M_A x + \frac{R_A}{2} x^2 - \frac{\omega}{6} x^3$$

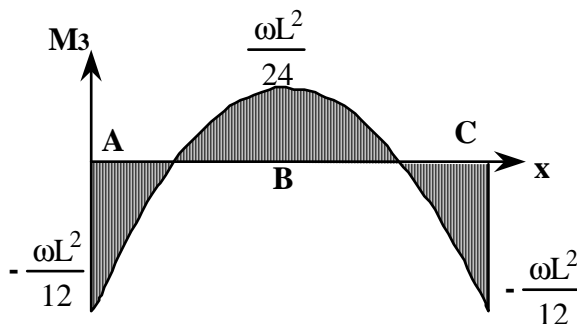
$$EI_3 u_2^f(x) = -\frac{M_A}{2} x^2 + \frac{R_A}{6} x^3 - \frac{\omega}{24} x^4$$

La condition de symétrie  $u_{2,1}^f(L/2) = 0$  nous amène à

$$M_A = \frac{\omega L^2}{12}$$

et

$$M_3(x) = -\frac{\omega}{2} \left( \left( x - \frac{L}{2} \right)^2 - \frac{L^2}{12} \right)$$



En considérant le comportement élastique jusqu'à la rotule plastique, les premières sections à plastifier sont les sections extrémités A et C, pour une charge  $\omega_e$  telle que :

$$|M_3(0)| = |M_3(L)| = M_L$$

soit

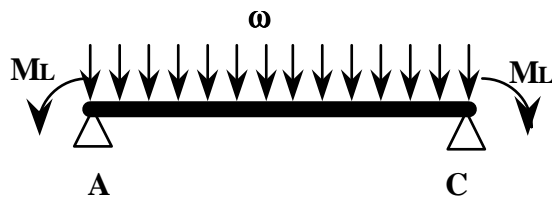
$$\omega_e = \frac{12M_L}{L^2}$$

La flèche maximale est

$$\delta_e = \frac{\omega_e L^4}{384EI_3} = \frac{M_L L^2}{32EI_3}$$

Dans une deuxième étape, on se place dans le cas où la poutre est soumise à une charge répartie, et du fait des rotules plastiques aux extrémités, soumise à 2 couples sur les sections extrêmes en appui simple.





Ce système est isostatique. Le moment fléchissant est:

$$M_3(x) = -M_L + \frac{\omega L}{2}x - \frac{\omega x^2}{2}$$

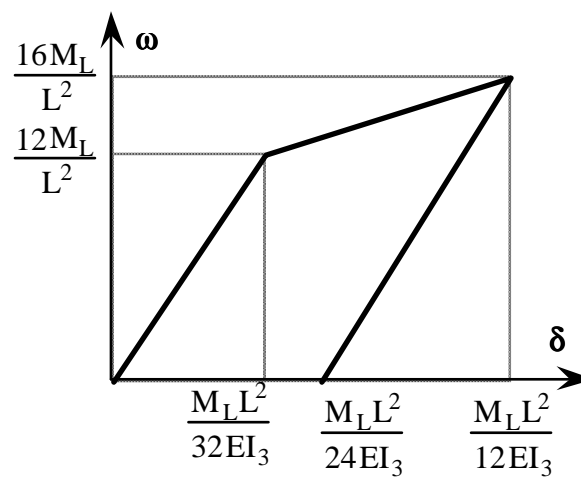
Le maximum est naturellement atteint dans la

section milieu B:

$$M_3(L/2) = -M_L + \frac{\omega L^2}{4} - \frac{\omega L^2}{8} = \frac{\omega L^2}{8} - M_L$$

On aura un mécanisme de ruine quand  $M_3(L/2) = M_L$ , soit

$$\omega_L = \frac{16M_L}{L^2}$$



## BIBLIOGRAPHIE

- \* **"Mécanique des solides avancée: Théorie des poutres"**  
Cours ESIM 1991, O. Débordes
- \* **"Rappels de résistance des matériaux"**  
Cours ESIM 1989, O. Débordes
- \* **"Mécanique des Milieux Continus"**  
Cours ESIM 1984, Equipe IMST Marseille
- \* **"Résistance des matériaux I II III"**  
Cours ESIM , C. Nouveau
- \* **"Mécanique des structure: Poutres"**  
Cours Sup'Aéro 1987, S. Laroze
- \* **"Mécanique des Milieux Continus"**  
ed. Masson 1990, G. Duvaut
- \* **"Introduction à la Mécanique des Milieux Continus"**  
ed. Masson 1995, P. Germain - P. Muller
- \* **"Mécanique des Milieux Continus"**  
ed. ellipse 1988, J. Salençon
- \* **"Résistance des matériaux"**  
ed. de l'école polytechnique de Montréal 1993, A. Bazergui, T. Bui-Quoc, A. Biron, G. McIntyre, C. Laberge
- \* **"Résistance des matériaux"** Tomes 1,2,3  
ed. Dunod 1976, A. Giet, L. Géminard
- \* **" Mécanique des Milieux Continus"**  
ed. Dunos 1997, J. Coirier



# ANNEXE

## FORMULES ESSENTIELLES EN MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

### 1. Coordonnées cartésiennes orthonormées

$$\overline{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

\* Soit  $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$  un vecteur, alors

$$\text{grad}(\vec{v}) = \overline{\nabla v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{Tr}(\text{grad}(\vec{v})) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\Delta \vec{v} = \text{div}(\text{grad}(\vec{v})) = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \vec{e}_i = \Delta v_x \vec{e}_x + \Delta v_y \vec{e}_y + \Delta v_z \vec{e}_z$$

\* Soit  $f$  une fonction scalaire, alors

$$\text{grad}(f) = \overline{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta f = \text{div}(\text{grad}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

\* Soit  $\overline{\overline{T}} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$  un tenseur symétrique du deuxième ordre, alors:

$$\text{div}(\overline{\overline{T}}) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \vec{e}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta \overline{\overline{T}} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \Delta T_{xx} & \Delta T_{xy} & \Delta T_{xz} \\ \Delta T_{yx} & \Delta T_{yy} & \Delta T_{yz} \\ \Delta T_{zx} & \Delta T_{zy} & \Delta T_{zz} \end{bmatrix}$$

## 2. Coordonnées cylindriques

$$\overline{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \text{ et } \frac{\partial \overline{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r, \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, \frac{\partial \overline{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

$$d(\overline{OM}) = \vec{e}_r dr + r d\theta \vec{e}_\theta + \vec{e}_z dz$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r, \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = 0$$

\* Soit  $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z$  un vecteur, alors

$$\text{grad}(\vec{v}) = \overline{\overline{\nabla v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\text{div} \vec{v} = \text{Tr}(\text{grad}(\vec{v})) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\Delta \vec{v} = \text{div}(\text{grad}(\vec{v})) = \left( \Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r^2} \right) \vec{e}_r + \left( \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \vec{e}_\theta + \Delta v_z \vec{e}_z$$

\* Soit f une fonction scalaire, alors

$$\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \text{ et } \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

\* Soit  $\overline{\overline{T}} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{bmatrix}$  un tenseur symétrique du deuxième ordre, alors:

$$\text{div}(\overline{\overline{T}}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \end{array} \right\}$$

## 3. Coordonnées sphériques

$$\overline{OM} = r\vec{e}_r \text{ et } \frac{\partial \overline{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r, \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi$$

$$d(\overline{OM}) = \vec{e}_r dr + r d\theta \vec{e}_\theta + \vec{e}_\varphi r \sin \theta d\varphi$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} &= \vec{e}_\theta, & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\vec{e}_r, & \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} &= \sin \theta \vec{e}_\varphi, & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} &= \cos \theta \vec{e}_\varphi, & \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= \sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

\* Soit  $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$  un vecteur, alors

$$\text{grad}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \cot \theta v_\varphi \right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \cot \theta v_\theta + v_r \right) \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\text{div} \vec{v} = \text{Tr}(\text{grad}(\vec{v})) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + 2 \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \cot \theta \frac{v_\theta}{r}$$

$$\Delta \vec{v} = \begin{cases} \Delta v_r - \frac{2}{r^2} \left( v_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \cot \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{2 \sin \theta} \right) \end{cases}$$

\* Soit f une fonction scalaire, alors

$$\text{grad}(f) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

\* Soit  $\overline{\overline{T}} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{r\varphi} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta\varphi} \\ T_{\varphi r} & T_{\varphi\theta} & T_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$  un tenseur symétrique du deuxième ordre, alors:

$$\text{div}(\overline{\overline{T}}) = \begin{cases} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + T_{r\theta} \cot \theta) \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [(T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}) \cot \theta + 3T_{r\theta}] \\ \frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [2T_{\theta\varphi} \cot \theta + 3T_{r\varphi}] \end{cases}$$

## 4. Comment retrouver les formules en coordonnées cylindriques

On note  $\vec{V} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z = v_i \vec{e}_i$  avec  $i=r, \theta, z$  et  $\cdot, i = \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}$

Donc, avec cette convention  $\vec{e}_{r,\theta} = \frac{\vec{e}_\theta}{r}$  et  $\vec{e}_{\theta,\theta} = -\frac{\vec{e}_r}{r}$

Chercher le gradient d'un tenseur consiste à augmenter l'ordre de ce tenseur, soit

$$\text{grad}(**) = (**)_{,j} \otimes \bar{e}_j$$

Si on applique cette remarque à un vecteur, on obtient:

$$\text{grad}(\vec{V}) = (v_i \bar{e}_i)_{,j} \otimes \bar{e}_j$$

En n'oubliant pas de dériver les vecteurs de base car nous sommes dans un système de coordonnées cylindrique,

$$\begin{aligned} \text{grad}(\vec{V}) &= (v_i \bar{e}_i)_{,j} \otimes \bar{e}_j = v_{i,j} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j + v_i \bar{e}_{i,j} \otimes \bar{e}_j = v_{i,j} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j + v_i \bar{e}_{i,\theta} \otimes \bar{e}_\theta \\ &= v_{i,j} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j + v_r \bar{e}_{r,\theta} \otimes \bar{e}_\theta + v_\theta \bar{e}_{\theta,\theta} \otimes \bar{e}_\theta \\ &= v_{i,j} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j + \frac{v_r}{r} \bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_\theta - \frac{v_\theta}{r} \bar{e}_r \otimes \bar{e}_\theta \end{aligned}$$

Pour obtenir l'opérateur divergence, il suffit de prendre la trace du gradient,

$$\text{div}(**) = \text{Tr}(\text{grad}(**))$$

soit dans le cas d'un vecteur:

$$\text{div}(\vec{V}) = \text{Tr}(\text{grad}(\vec{V})) = v_{i,i} + \frac{v_r}{r} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r}$$

Appliquons maintenant cette méthodologie à un tenseur d'ordre 2.

$$\begin{aligned} \text{grad}(\bar{\bar{T}}) &= (T_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j)_{,k} \otimes \bar{e}_k \\ &= T_{ij,k} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k + T_{ij} \bar{e}_{i,k} \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k + T_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_{j,k} \otimes \bar{e}_k \\ &= T_{ij,k} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k + T_{ij} \bar{e}_{i,\theta} \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_\theta + T_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_{j,\theta} \otimes \bar{e}_\theta \\ &= T_{ij,k} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k + \frac{T_{rj}}{r} \bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_\theta - \frac{T_{\theta j}}{r} \bar{e}_r \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_\theta \\ &\quad + \frac{T_{ir}}{r} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_\theta - \frac{T_{i\theta}}{r} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_r \otimes \bar{e}_\theta \end{aligned}$$

Pour obtenir la trace de ce tenseur d'ordre 3 on contracte les deux derniers indices:

$$\begin{aligned} \text{div}(\bar{\bar{T}}) &= \text{Tr}(\text{grad}(\bar{\bar{T}})) = T_{ij,j} \bar{e}_i + \frac{T_{r\theta}}{r} \bar{e}_\theta - \frac{T_{\theta\theta}}{r} \bar{e}_r + \frac{T_{ir}}{r} \bar{e}_i \\ &= \left( \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} - \frac{T_{\theta\theta}}{r} + \frac{T_{rr}}{r} \right) \bar{e}_r \\ &\quad + \left( \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{T_{r\theta}}{r} + \frac{T_{\theta r}}{r} \right) \bar{e}_\theta \\ &\quad + \left( \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \right) \bar{e}_z \end{aligned}$$

On peut donc maintenant retrouver l'opérateur Laplacien d'un vecteur :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v} &= \text{div}(\text{grad} \vec{v}) \\ &= v_{i,jj} \bar{e}_i + \frac{v_{r,\theta}}{r} \bar{e}_\theta - \frac{v_{\theta,\theta}}{r} \bar{e}_r + \left( \frac{v_{r,\theta}}{r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \bar{e}_\theta - \left( \frac{v_{\theta,\theta}}{r} + \frac{v_r}{r} \right) \bar{e}_r + \frac{v_{i,r}}{r} \bar{e}_i \\ &= \left( \Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) \bar{e}_r + \left( \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \bar{e}_\theta + (\Delta v_\theta) \bar{e}_z \end{aligned}$$