

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

BETON PRECONTRAIT

Support de cours

Gilles CAUSSE – Emmanuel BOUCHON – Pascal CHARLES

Décembre 2007

Notes préliminaires

Ce document a été établi sur la base du polycopié du cours de Béton Précontraint de l'École Nationale des Ponts en Chaussées, professé par Robert Chaussin jusqu'en 2001.

La mise à jour a été effectuée en 2006-2007 par Pascal Charles et Florent Imbert (Sétra), notamment pour tout ce qui concerne l'utilisation des normes européennes (Eurocodes).

Le cours est orienté « ouvrages d'art » compte tenu de la profession de ses différents auteurs. Les principes exposés ici sont toutefois valables pour l'ensemble des structures en béton précontraint.

SOMMAIRE

Chapitre I - Généralités	7
1. Intérêt de la précontrainte	7
2. Principe du béton précontraint	8
3. Conventions de signes	9
4. Notations	10
Chapitre II - Modalités d'introduction de la précontrainte dans une structure	13
1. Pré-tension	13
2. Post-tension	13
3. Précontrainte par déplacements extérieurs imposés	14
Chapitre III - Effets de la précontrainte dans une structure	17
1. Équilibre d'un câble de précontrainte dans le béton	17
2. Effet de la précontrainte sur une structure	17
3. Structures isostatiques	17
4. Structures hyperstatiques	19
Chapitre IV - Matériaux	21
1. Généralités	21
1.1. Acier pour câbles de précontrainte	21
1.2. Béton	21
2. Béton	22
2.1. Résistance en compression	22
2.2. Résistance en traction	23
2.3. Ciments	23
2.4. Déformations du béton	23
3. Armatures de précontrainte	28
3.1. Formes	28
3.2. Diagramme contraintes-déformations	29
3.3. Relaxation de l'acier	29
3.4. Corrosion sous tension	30
3.5. Résistance à la fatigue	31
3.6. Élaboration	31
3.7. Homologation	32
4. Matériel de précontrainte par post-tension	33
4.1. Généralités	33
4.2. Armatures	33
4.3. Conduits	34
4.4. Vérins	35

4.5.	Ancrages	35
4.6.	Injection et cachetage	42
Chapitre V - Calcul de la force de précontrainte		45
1.	Présentation des pertes	45
2.	Tension à l'origine	45
3.	Pertes instantanées	46
3.1.	Pertes par frottement	46
3.2.	Pertes à la mise en charge de l'ancrage (rentrée d'ancrage)	49
3.3.	Pertes par déformation instantanée du béton	50
4.	Tension initiale	53
5.	Pertes différées	53
5.1.	Pertes par retrait	53
5.2.	Pertes par fluage	53
5.3.	Pertes par relaxation	54
5.4.	Pertes différées totales	54
6.	Tension à un instant quelconque	55
7.	Calcul manuels de pertes	55
Chapitre VI - Contexte réglementaire		57
1.	Généralités	57
2.	États-limites	58
3.	Actions et valeurs représentatives	58
3.1.	Actions permanentes	58
3.2.	Actions variables	59
4.	Sollicitations de calcul	59
4.1.	Vis-à-vis des ELU	59
4.2.	Vis-à-vis des ELS	60
5.	Situations	60
6.	Justifications vis-à-vis des états-limites de service	61
6.1.	Justifications à la flexion	62
6.2.	Justifications vis-à-vis de l'effort tranchant	67
7.	Justifications vis-à-vis des états-limites ultimes	67
7.1.	Justifications à la flexion	67
7.2.	Justifications à l'effort tranchant	67
Chapitre VII - Flexion ELS des poutres isostatiques non fissurées		69
1.	Généralités	69
2.	Notations	69
2.1.	Section droite	70
2.2.	Sollicitations appliquées à la section	70
2.3.	Contraintes normales dans le béton	71
Centre et ligne de pression		71
3.	Contraintes normales du béton	73
3.1.	Expression générale	73

3.2.	Respect des contraintes limites	74
4.	Valeur minimale de la précontrainte dans une section	75
4.1.	Section sous-critique	76
4.2.	Section sur-critique	76
4.3.	Caractère d'une section	78
4.4.	Expressions développées de P	78
4.5.	Cas particulier important $\bar{\sigma}'_1 = 0$ et $\bar{\sigma}'_2 = 0$	79
4.6.	Remarques diverses	80
5.	Section minimale de béton	80
5.1.	Cas d'une section sous-critique	81
5.2.	Cas d'une section sur-critique soumise à des moments positifs	81
5.3.	Cas d'une section sur-critique soumise à des moments négatifs	82
5.4.	Remarque	82
6.	Récapitulation	83
6.1.	Hypothèse d'une section sous-critique	83
6.2.	Hypothèse d'une section sur-critique	83
7.	Cas où plusieurs valeurs de P interviennent dans le dimensionnement	84
Chapitre VIII - Flexion ELU des poutres isostatiques		89
1.	Généralités	89
2.	Équilibre d'une section à rupture	89
3.	Caractérisation d'un état-limite ultime	91
4.	Comportement des matériaux	91
5.	Principe des justifications	93
5.1.	Sollicitations de calcul	93
5.2.	Résistance de la section	95
5.3.	Conduite des justifications	95
5.4.	Mise en équations du problème	96
Chapitre IX - Comportement sous effort tranchant		99
1.	Généralités	99
1.1.	Valeur de l'effort tranchant à considérer	99
1.2.	Tolérances réglementaires	100
2.	Résistance du béton avant fissuration	100
2.1.	Expression des contraintes de cisaillement	100
2.2.	État des contraintes dans une âme (ou dans une membrure)	100
2.3.	Représentation de l'état des contraintes par le cercle de Mohr	101
2.4.	Convenance de l'état des contraintes	103
3.	Comportement après fissuration	106
3.1.	Approche qualitative	106
3.2.	Méthode réglementaire de l'EC2	107

Chapitre I - Généralités

1. Intérêt de la précontrainte

Dans une poutre fléchie en béton armé, la partie tendue du béton ne participe pas à la résistance de la poutre ; le béton en zone tendue sert essentiellement à protéger les aciers passifs.

Une première solution pour élargir le champ d'application du béton armé consiste travailler les coffrages pour minimiser la quantité de béton en zone tendue (par exemple, remplacement d'une section rectangulaire par une section en té). Une quantité minimale de béton reste toutefois nécessaire pour assurer l'enrobage et l'ancrage des aciers passifs.

Si elle est tout à fait acceptable pour les petites portées (bâtiments et ouvrages d'art courants), cette solution n'est pas suffisante pour franchir de grandes portées. La présence d'une quantité importante de matériau ne participant pas à la résistance est en effet un handicap majeur pour les grandes structures, où le poids propre est une composante essentielle.

Deux solutions sont alors couramment envisagées : les structures mixtes acier-béton, dans lesquelles on remplace le béton en zone tendue par des aciers de charpente qui travaillent bien en traction, et on connecte les deux matériaux de façon adéquate ; et les structures en béton précontraint, objet de ce cours.

Nous ne détaillerons pas ici les avantages et inconvénients de chacune des deux solutions précédentes. La réflexion et la comparaison sont menées projet par projet, notamment pour les grandes structures. Le choix est généralement conditionné in fine par des considérations économiques.

En France, le béton armé et précontraint a été très largement majoritaire jusqu'à la fin des années 1980. Sa part de marché dans le domaine des ouvrages d'art s'est progressivement réduite au profit des structures mixtes, notamment dans les gammes de portées intermédiaires (50 – 100m). Il reste toutefois très largement utilisé en France dans le bâtiment et les ouvrages d'art de petites portées (15 – 50m), ainsi que pour la gamme de portée située entre 80 et 200m. Au-delà, ce sont les structures à câbles qui s'imposent ; leur tablier peut être en béton précontraint ou mixte jusqu'à 500m de portée, et entièrement métallique au-delà.

L'emploi du béton précontraint reste très répandu dans les pays en voie de développement qui ne disposent pas des infrastructures nécessaires pour construire, acheminer et assembler des poutres métalliques dans des conditions économiques.

Enfin, la connaissance du béton précontraint est indispensable pour tous les gestionnaires d'infrastructure, car le parc d'ouvrages d'art existants en France comporte un grand nombre d'ouvrages en béton précontraint, en nombre et surtout en surface. Au 31 décembre 2004, le réseau routier national français comportait 20% de ponts en béton précontraint en nombre, ce chiffre étant porté à 50% si l'on raisonne en terme de surface de tablier.

2. Principe du béton précontraint

Le béton est un matériau qui résiste bien à la compression, mais peu, et surtout aléatoirement, à la traction. Il est donc intéressant de construire en béton, mais en évitant que ce matériau soit trop tendu, et risque de se fissurer. Et pour cela, il faut le comprimer de façon artificielle et en permanence, dans des zones où les charges extérieures développent des tractions de façon qu'au total le béton reste comprimé (ou assez peu tendu pour ne pas risquer de fissurer) et donc résistant à tout cas de charge. L'effort de compression volontairement développé à cet effet est appelé l'effort de précontrainte (ou la précontrainte).

Le remède ne doit pas pêcher par excès : la compression totale du béton doit rester inférieure à une valeur raisonnable de façon à éviter tout risque de fissuration longitudinale des éléments précontraints par excès de compression (alors que les tractions y développent généralement des fissures transversales).

Au total, un ouvrage en béton est dit en béton précontraint quand il est soumis à un système d'efforts créés artificiellement pour engendrer des contraintes permanentes, qui, composées avec les contraintes dues aux charges extérieures, donnent des contraintes totales comprises entre les limites que le béton peut supporter indéfiniment, en toute sécurité.

La philosophie ainsi exposée est celle de la précontrainte totale. Bien entendu, la précontrainte d'un ouvrage ne peut être réalisée que pour des charges appartenant à un domaine limité, supposé connu à l'avance.

Si ce domaine inclut des charges rarement atteintes dans la réalité, les principes précédents peuvent entraîner un surdimensionnement de la précontrainte, conduisant à faire travailler la matière dans des conditions peu rationnelles sous l'effet de charges effectivement appliquées pendant la majeure partie de la vie de l'ouvrage.

C'est pourquoi s'est développé progressivement la notion de précontrainte partielle : la décompression du béton n'y est interdite que sous l'effet des charges permanentes ou quasi-permanentes.

Sous l'effet de charges plus agressives, on admet que des fissures puissent se former (comme en béton armé) à condition que leur ouverture demeure suffisamment limitée pour :

- qu'elles soient réversibles et se referment donc sous charges permanentes ou quasi-permanentes
- que les risques de corrosion et de fatigue des armatures soient négligeables

Dans tous les cas, la valeur minimale de la précontrainte résulte de la valeur plancher imposée à la contrainte normale du béton (comptée algébriquement positive lorsqu'elle est de compression) :

- sous l'effet des cas de charge les plus agressifs lorsqu'on est en précontrainte totale.
- sous l'effet des seules charges permanentes ou quasi-permanentes lorsque l'on est en précontrainte partielle.

3. Conventions de signes

Les conventions de signe adoptées sont celles de la résistance des matériaux, qui diffèrent de celles de la mécanique des milieux continus. Ces conventions ont pour but de donner des grandeurs qui restent en général positives dans un fonctionnement courant des matériaux et des structures.

- Charges appliquées à une poutre :

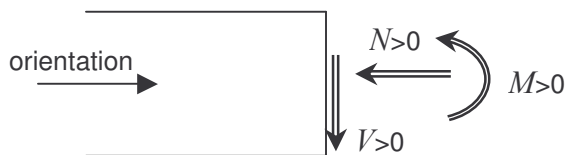
On compte généralement les charges positivement lorsqu'elles sont dirigées vers le bas (gravité = action dominante !)

- Sollicitations dans une poutre :

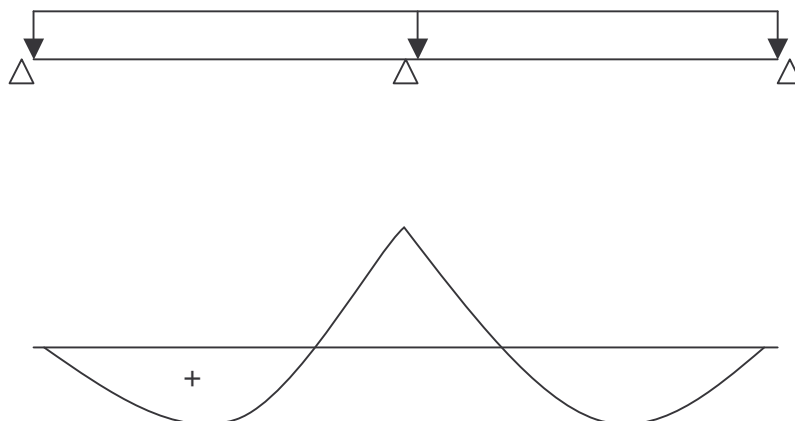
Un effort normal de compression est compté positivement (fonctionnement naturel des poutres précontraintes et des poteaux).

Pour une poutre horizontale orientée de gauche à droite, un moment positif comprime la fibre supérieure (fonctionnement normal d'une poutre isostatique sous charges de pesanteur).

La convention pour l'effort tranchant est variable selon les auteurs, nous adoptons celle représentée sur la figure ci-dessous.



Les moments de flexion sont représentés positivement vers le bas. La figure suivante montre les moments de flexion d'une poutre continue à 2 travées identiques sous charge uniformément répartie.



- Contraintes et déformations du béton :
 $\sigma_c > 0$ en compression, $\varepsilon_c > 0$ en raccourcissement
- Contraintes et déformations des aciers passifs :
 $\sigma_s > 0$ en traction, $\varepsilon_s > 0$ en allongement
- Contraintes et déformations des aciers de précontrainte :
 $\sigma_p > 0$ en traction, $\varepsilon_p > 0$ en allongement, $\Delta\sigma_p > 0$ en surtension

Ces conventions ont été retenues au niveau européen dans l'Eurocode 2.

4. Notations

Les notations utilisées dans ce document sont systématiquement celles des normes européennes, et plus particulièrement celle de l'Eurocode 2 qui traite du calcul des structures en béton.

Rappelons en effet qu'un des objectifs premiers de la normalisation européenne est de fournir un langage commun à toute la communauté, afin de faciliter les libres échanges entre pays. Les Eurocodes ont été traduits dans les différentes langues des pays membres du Comité Européen de Normalisation (CEN), mais les notations ont été laissées inchangées afin de faciliter la compréhension d'un état à l'autre.

Les lettres utilisées sont basées principalement sur la langue anglaise. Une même lettre peut avoir plusieurs significations selon le contexte dans lequel elle est employée. Voici quelques symboles d'origine anglo-saxonne couramment rencontrés dans l'Eurocode 2 :

c	concrete (béton)
s	steel (acier)
m	mean (moyenne)
k	characteristic (caractéristique)
t	tension (traction)
c	compression (compression)
A	area (section, surface)
E	elastic modulus (module élastique)
d	design (valeur de calcul)
E	effect of actions (solllicitations)
F	force (force)
R	resistance

On forme ensuite des expressions formées de lettres et d'un ou plusieurs indices. Voici les plus courantes :

A_c	surface de la section transversale du béton
A_p	surface des aciers de précontrainte
A_s	surface des aciers de type béton armé
E_c	module d'élasticité du béton
E_p	module d'élasticité de la précontrainte
G	action permanente
M	moment fléchissant
P	force de précontrainte
Q	action variable
V	effort tranchant
F_{Ed}	valeur de calcul de la sollicitation
V_{Ed}	valeur de calcul de l'effort tranchant
V_{Rd}	effort tranchant résistant
e	excentricité de la précontrainte
f_c	résistance à la compression du béton

f_{ck}	résistance caractéristique du béton en compression
f_{cm}	résistance moyenne du béton en compression
f_p	résistance à la traction des aciers de précontrainte
f_{ctm}	résistance moyenne à la traction du béton
$f_{ctk,0,95}$	fractile 95% de la résistance caractéristique en traction du béton (95% des échantillons ont une résistance en traction inférieure à cette valeur)
$f_{ctk,0,05}$	fractile 5% de la résistance caractéristique en traction du béton (5% des échantillons ont une résistance en traction inférieure à cette valeur)
γ	coefficient partiel de sécurité
σ_c	contrainte de compression dans le béton
σ_p	contrainte de traction dans l'acier de précontrainte

Les notations seront introduites au fur et à mesure dans le texte.

Chapitre II - Modalités d'introduction de la précontrainte dans une structure

Avant d'entrer dans le détail des justifications de structures en béton précontraint, il est essentiel d'en connaître la technologie. C'est en effet le développement d'aciers à haute limite d'élasticité et de matériels adaptés qui a permis l'essor du béton précontraint.

Il existe deux méthodes de mise en tension des câbles dans une structure. A chacune de ces méthodes sont associées des technologies de précontrainte spécifiques.

1. Pré-tension

C'est une méthode utilisée en usine, pour préfabriquer des poutres précontraintes destinées à être incorporées dans des constructions en tant que « produits ».

Les câbles sont tendus préalablement au coulage de la poutre, sur un banc de préfabrication capable de reprendre les efforts engendrés (ce qui nécessite des installations spécifiques, qui ne sont généralement pas disponibles sur chantier). Ils sont généralement rectilignes d'un bout à l'autre du banc de préfabrication.

On coule ensuite des éléments directement au contact avec les câbles.

Après prise du béton, les câbles sont relâchés à leurs extrémités, et coupés à la sortie des poutres, entraînant la mise en précontrainte de la poutre grâce à un transfert par adhérence de l'effort entre les câbles et le béton.

Les câbles ne sont pas gainés en partie courante, puisqu'ils doivent permettre une parfaite adhérence avec le béton. Il est toutefois possible de gainer certains câbles à leurs extrémités, pour diminuer la précontrainte aux abouts (elle peut en effet avoir des effets défavorables près des abouts).

La précontrainte par pré-tension est réalisée à l'aide de fils crantés à haute limite d'élasticité (HLE), ou de torons constitués de 3 ou 7 fils élémentaires.

La pré-tension s'accompagne des autres techniques liées à la préfabrication : formulation adaptée des bétons, étuvage des poutres pour accélérer la prise du béton et permettre un décintrement et une mise en précontrainte rapide.

Les conditions d'emploi de la pré-tension sont conditionnées par plusieurs facteurs :

- possibilités de manutention et transport des poutres (liées à leur poids et à leur encombrement),
- dimensions des bancs de préfabrication en usine

La précontrainte par pré-tension est très utilisée dans le domaine du bâtiment. Toutefois, il est difficile en France de dépasser des longueurs de poutres supérieures à 30m.

2. Post-tension

La technique de post-tension consiste à prendre appui sur le béton déjà durci pour tendre le câble de précontrainte.

L'élément en béton est donc coulé au préalable, avec des réservations pour le passage ultérieur de la précontrainte. Lorsque le béton atteint une résistance suffisante, la précontrainte est enfilée et tendue à l'aide de vérins.

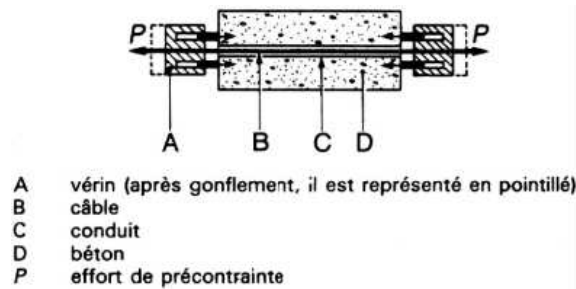


Figure 1 - Mise en tension d'un câble (post-tension)

La post-tension permet de mettre en œuvre des forces de précontrainte beaucoup plus importantes que la pré-tension, puisque la résistance du banc de préfabrication n'est plus un facteur limitant. La post-tension est très utilisée en ouvrages d'art pour les grandes portées.

Les matériaux utilisés pour la précontrainte par post-tension peuvent être :

- des câbles constitués de torons
- des câbles préfabriqués constitués de fils boutonnés
- des barres de précontrainte

La précontrainte peut être :

- intérieure au béton : les câbles sont entièrement noyés dans la structure ; une fois tendus ils sont injectés au coulis de ciment et ne sont plus inspectables.
- extérieure au béton : en partie courante, les câbles restent visibles, ils ne sont noyés dans la structure qu'au niveau des extrémités et en des points singuliers permettant de les dévier. Ils sont généralement injectés à la cire. Par le passé, ces câbles ont souvent été injectés au coulis de ciment.

3. Précontrainte par déplacements extérieurs imposés

Les deux méthodes de précontrainte décrites précédemment sont les plus courantes et les plus efficaces. Il existe une troisième famille de solutions, consistant à précontraindre la structure par des déplacements imposés. Deux méthodes sont utilisées en pratique :

- des vérins appliqués entre la structure et des butées fixes. Les déplacements sont ensuite bloqués par bétonnage.
- des « dénivellations d'appuis » de structures continues (voir ponts mixtes notamment, où cette technique permet de précontraindre la dalle en béton au niveau des appuis intermédiaires)

On peut noter que dans les Eurocodes le terme générique de précontrainte recouvre toutes les notions précédentes (précontrainte par câbles, par vérinage ou par dénivellation d'appuis). Toutefois dans l'Eurocode 2 le terme précontrainte désigne exclusivement la précontrainte par câbles.

Pour comparer les méthodes précédentes, considérons un tirant en béton de section $A_c = 1\text{m}^2$, de module $E_{cm} = 30\,000\text{ MPa}$, de longueur $L = 10\text{m}$, précontraint à $\sigma = 3\text{ MPa}$.

L'effort nécessaire pour précontraindre le tirant est $F = A_c \cdot \sigma = 3\text{ MN}$

Le raccourcissement élastique du béton sous l'effet de cette précontrainte est

$$\delta_c = \varepsilon_c \cdot L = \sigma_c / E_{cm} \cdot L = 3 / 30\,000 \cdot 10 = 1\text{ mm}$$

Si l'effort a été réalisé à l'aide de vérins directement appliqués au béton, le travail accompli pour précontraindre la structure est égal à

$$W = F \cdot \delta_c = 3 \text{ kNm}$$

Si l'effort a été réalisé à l'aide de câbles de précontrainte, tendus à 1200 MPa, l'allongement des câbles pendant la mise en tension est égal à :

$$\delta_p = \varepsilon_p \cdot L = \sigma_p / E_p \cdot L = 1200 / 200\,000 \cdot 10 = 60 \text{ mm}$$

Le travail accompli pour précontraindre la structure est donc égal à

$$W = F \cdot (\delta_c + \delta_p) = 183 \text{ kNm}$$

La précontrainte par câble permet ainsi d'emmagasiner dans la structure une quantité d'énergie beaucoup plus grande que dans le cas d'une précontrainte directe par déplacements extérieurs imposés. La précontrainte par câbles permet donc de s'accommoder beaucoup plus facilement des pertes d'énergie qui surviennent au cours de la vie de l'ouvrage (notamment retrait, fluage et relaxation).

En pratique, la précontrainte directe par vérins est utilisée uniquement dans les cas où on souhaite imposer un déplacement entre deux points de la structure. C'est le cas par exemple pour le clavage des ponts en arc.

Par la suite, seule la précontrainte par câbles sera évoquée.

Chapitre III - Effets de la précontrainte dans une structure

1. Équilibre d'un câble de précontrainte dans le béton

La mise en tension d'un câble crée un ensemble de forces $\{F\}$ exercées par le câble sur le béton.

Dans le cas de la post-tension, $\{F\}$ est composé :

- des efforts concentrés à l'ancrage
- des forces de frottement réparties le long du câble, créées par le déplacement relatif entre le câble et le béton lors de la mise en tension du câble
- des forces de pression dans les zones de courbure du câble

Dans le cas de la pré-tension, $\{F\}$ est composé :

- des efforts de cisaillement aux extrémités du câble, sur la longueur de transmission
- des forces de pression dans les zones de courbure éventuelles

On note $\{\Phi\}$ les forces exercées par le béton sur le câble. On a bien sûr par réciprocité $\{\Phi\} = \{-F\}$.

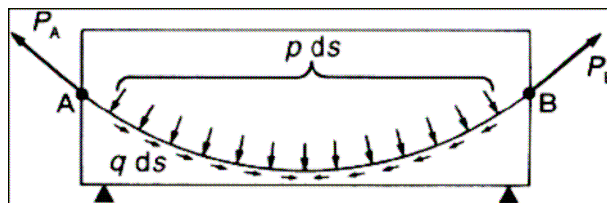


Figure 2 - Équilibre d'ensemble d'un câble. Forces $\{\Phi\}$ exercées par le béton sur le câble

Le câble n'est en contact qu'avec le béton (par l'intermédiaire de sa gaine en partie courante et de ses ancrages aux extrémités dans le cas de la post-tension). Le câble est donc en équilibre sous l'action des forces $\{\Phi\}$, ce qui implique $\{\Phi\} = \{0\}$.

D'où $\{F\} = \{0\}$: **le câble exerce sur la structure en béton un système de forces auto-équilibrées.**

2. Effet de la précontrainte sur une structure

Sous l'action de la précontrainte, le béton est également en équilibre. Le béton est soumis au système de forces $\{F\}$, ainsi qu'aux réactions d'appui $\{R\}$.

$$\text{Donc } \{F\} + \{R\} = \{0\}$$

$$\text{Donc } \{R\} = \{0\}$$

Les réactions d'appui dues à la précontrainte constituent un système de forces auto-équilibrées.

3. Structures isostatiques

Pour une structure isostatique, par définition, $\{R\} = \{0\}$ implique que **toutes les réactions d'appui sont nulles.**

On peut alors démontrer le résultat fondamental suivant :

Dans une structure isostatique, le torseur des sollicitations $\{S_P\}$ dues à un câble de précontrainte dans une section donnée est égal et opposé au torseur résultant de l'application d'un effort $P\vec{t}$ au niveau câble, où

P est la tension du câble dans cette section

\vec{t} est le vecteur tangent au câble dans cette section

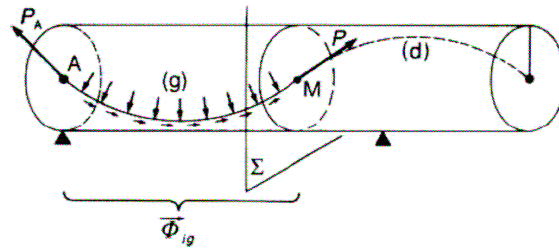


Figure 3 - Sollicitations développées par le câble dans la section droite Σ

Ce résultat est remarquable : l'effet de la précontrainte dans une section donnée ne dépend que de la position du câble et de sa tension dans cette section, indépendamment de son tracé dans le reste de la structure.

Démonstration :

On considère une section (Σ), qui coupe le câble en deux tronçons (P_g) et (P_d), et qui coupe le béton en deux parties (B_g) et (B_d). On note (S_P) les sollicitations dans la section (Σ), action de la partie B_d sur la partie B_g .

Comme précédemment, on note $\{\Phi_g\}$ l'action du béton (B_g) sur le câble.

Le tronçon de câble (P_g) est en équilibre. Il est soumis aux efforts $\{\Phi_g\}$ et $\{P\vec{t}\}$:

$$\{\Phi_g\} + \{P\vec{t}\} = \{0\}$$

Le béton (B_g) est en équilibre. Il est soumis aux efforts $-\{\Phi_g\}$, $\{S\}$ et aux réactions d'appui $\{R_g\}$.

$$-\{\Phi_g\} + \{S\} + \{R_g\} = \{0\}$$

Or pour les structures isostatiques on sait que les réactions d'appui dues à la précontrainte sont toutes identiquement nulles. Donc $\{R_g\} = \{0\}$ et

$$\{S\} = -\{P\vec{t}\}$$

Application à une poutre isostatique plane :

Le système des sollicitations dans la section droite se réduit à la force de tension du câble au point M :

$$N_p = P \cos(\alpha) \approx P$$

$$V_p = P \sin(\alpha)$$

$$M_p = P e_0 \cos(\alpha) \approx P e_0$$

(En général, les angles du câble par rapport à la fibre moyenne de la poutre sont faibles, d'où $\cos(\alpha) \approx 1,0$)

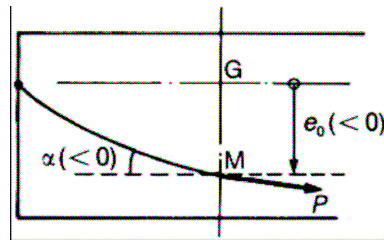


Figure 4 - Effet de la précontrainte dans une poutre isostatique

4. Structures hyperstatiques

Deux méthodes sont couramment utilisées pour déterminer les effets de la précontrainte dans une structure hyperstatique : méthode externe et méthode interne.

La méthode externe (appelée également méthode directe) est la plus générale, et est souvent utilisée par les logiciels de calcul de structure. Elle consiste à modéliser l'action du câble par l'ensemble des forces $\{F\}$. Ces efforts sont calculés à partir de la géométrie du câble et du mode de mise en tension (voir chapitre sur le calcul des pertes). Une fois ces efforts connus, on est ramené au problème général de détermination des sollicitations dans une structure soumise à un ensemble d'efforts quelconques, et la résolution peut se faire par les méthodes usuelles de résistance des matériaux : méthode des forces, méthode des déplacements, éléments finis...

La méthode interne est applicable uniquement aux systèmes composés de poutres ; elle est basée sur la méthode des forces : on choisit un système isostatique associé sur lequel on détermine les effets de la précontrainte, et on détermine ensuite les inconnues hyperstatiques. En utilisant les résultats démontrés au paragraphe précédent, on sait déterminer de façon immédiate les effets de la précontrainte dans une structure isostatique, sans avoir à déterminer précisément l'ensemble des forces $\{F\}$. Il ne reste alors qu'à déterminer les réactions hyperstatiques développées par la précontrainte en utilisant les théorèmes classiques de la méthode des forces.

Pour les calculs manuels, le choix entre les deux méthodes est fait au cas par cas.

Chapitre IV - Matériaux

Ce chapitre donne les indications essentielles au calcul des structures en béton précontraint.

On renvoie aux cours de béton armé et aux normes pour le détail des caractéristiques des matériaux.

1. Généralités

Le béton précontraint exige l'emploi de matériaux de haute qualité, mis en oeuvre avec soin. Il permet de les utiliser sous des contraintes élevées, notamment à la construction (c'est-à-dire au moment de la mise en tension des câbles).

1.1. Acier pour câbles de précontrainte

L'acier pour câbles de précontrainte doit être de haute résistance, pour pouvoir être tendu à un taux initial très élevé (couramment compris entre 1 200 et 1 500 MPa, sauf pour les barres). Cette tension initiale, pas très éloignée de la contrainte de rupture, n'est pas dangereuse car elle diminue progressivement par suite des pertes de précontrainte. Par ailleurs, la tension utile finale est d'autant plus élevée que le sont davantage la tension initiale et donc la résistance de l'acier.

1.2. Béton

Le béton doit également être de très bonne qualité. En effet, tant qu'il n'est pas précontraint, il risque de se fissurer sous l'effet de la gêne qu'apportent les coffrages à son retrait ; pour éviter cela, il faut mettre ce béton en précontrainte très tôt alors que, jeune encore, il présente une résistance limitée. Le béton doit donc être de haute résistance et acquérir celle-ci très vite. Il est en effet très sollicité, au moment des mises en tension :

— en section courante, car la précontrainte a sa valeur maximale (les pertes n'étant pas encore effectuées) ; de plus, les charges extérieures (dont l'effet est opposé à celui de la précontrainte) sont souvent incomplètes (par exemple, si des superstructures ne sont pas encore mises en place) ;

— localement, sous ancrages, zones où s'exerce un effort très concentré.

Pour limiter la sollicitation du béton jeune, on tend fréquemment les câbles en plusieurs phases successives : du tiers à la moitié des câbles à 7 j environ après coulage du béton (pour pouvoir décintre la poutre, qui peut alors porter son poids), et le reste à une date généralement comprise entre 15 et 30 j après coulage. De plus, on dispose souvent les ancrages dans une pièce d'about préfabriquée en béton fretté et suffisamment âgé pour pouvoir résister aux efforts localisés sous ancrages. De toute façon, la mise en précontrainte constitue pour le béton une épreuve préalable déterminante (car en vraie grandeur) qui ne lui pardonnerait pas une éventuelle médiocrité.

2. Béton

2.1. Résistance en compression

Le béton est caractérisé par sa résistance en compression à 28 jours.

La mesure de cette résistance se fait selon la norme NF EN 12390. Elle peut se faire sur cylindre ou sur cube. En France, elle se fait habituellement par écrasement d'éprouvettes cylindriques de 200cm² de section (diamètre $\Phi = 160\text{mm}$) et de 320mm de hauteur (éprouvette dite « 16/32 »).

On note

f_{cm} la résistance moyenne à 28 jours

f_{ck} la résistance caractéristique à 28 jours (fractile 5%) mesurée sur cylindre

$f_{ck,cube}$ la résistance caractéristique à 28 jours (fractile 5%) mesurée sur cube

La norme NF EN 206-1 indique comment, à partir des résultats d'essais sur un nombre fini d'éprouvettes, on détermine f_{cm} et f_{ck} par une analyse statistique.

Pour les pays qui utiliseraient des mesures sur cubes, l'Eurocode 2 donne les relations entre f_{ck} et $f_{ck,cube}$. Toutes les formules de l'Eurocode 2 sont ensuite exprimées en fonction de f_{ck} .

On obtient couramment $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ (par exemple, pour des ouvrages coulés en place) et, avec un peu plus de soin, 35 ou 40 MPa. À l'heure actuelle, l'utilisation de fluidifiants permet d'atteindre $f_{ck} = 60 \text{ MPa}$ et même, moyennant l'adjonction de fumées de silice, 80 à 100 MPa.

La dénomination des bétons est de la forme « C 35 / 45 » où C désigne le béton (Concrete), le premier nombre est la résistance caractéristique à 28j sur éprouvette cylindrique, le second est la résistance à 28j sur éprouvette cubique (avec le même béton).

Pour les bétons traditionnels, l'allure de la croissance de la résistance du béton en fonction de son âge ($t =$ nombre de jours) est donnée par la formule de l'EC2 :

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) f_{cm}$$

$$\text{avec } \beta_{cc}(t) = \exp\left(s\left(1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right)\right)$$

s est un coefficient qui dépend du type de ciment :

= 0,20 pour les ciments de classe de résistance CEM 42,5 R, CEM 52,5 N et CEM 52,5 R (Classe R)

= 0,25 pour les ciments de classe de résistance CEM 32,5 R, CEM 42,5 N (Classe N)

= 0,38 pour les ciments de classe de résistance CEM 32,5 N (Classe S)

La résistance caractéristique s'en déduit par la relation

$$f_{ck}(t) = f_{cm}(t) - 8 \text{ MPa}$$

Les valeurs résultant de cette formule, considérées comme normalement respectées par tous les bétons sans prescription particulière, sont généralement pessimistes.

Par ailleurs, on admet, pour les calculs, qu'au-delà de 28 j, la résistance plafonne à sa valeur f_{ck} , bien qu'en pratique elle continue à augmenter.

2.2. Résistance en traction

La résistance moyenne en traction f_{ctm} se déduit de f_{ck} par :

$$f_{ctm} = 0,30 f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad \text{pour des bétons de classe inférieure ou égale à C50/60}$$

$$f_{ctm} = 2,12 \ln \left(1 + \left(\frac{f_{cm}}{10} \right) \right) \quad \text{pour des bétons de classe supérieure}$$

La loi de variation de la résistance à la traction du béton en fonction du temps est :

$$f_{ctm}(t) = (\beta_{cc}(t))^{\alpha} f_{ctm} \quad \text{avec } \alpha=1 \text{ pour } t < 28j \text{ et } \alpha=2/3 \text{ pour } t > 28j.$$

2.3. Ciments

Le béton doit être rapidement résistant. Le ciment doit, par ailleurs, être dépourvu de tout produit risquant de corroder l'acier des câbles et, particulièrement, de chlorures (l'emploi de CaCl_2 doit notamment être proscrit). On emploie donc de préférence le ciment Portland artificiel (obligatoire dans le cas de la pré-tension, les armatures de précontrainte étant alors en contact direct avec le béton) de classe 45, 55 ou HP, et éventuellement de sous-classe rapide lorsqu'une haute résistance initiale est nécessaire. Le ciment influe sur la montée en résistance du béton (voir ci-dessus).

2.4. Déformations du béton

2.4.1. Déformation sous chargement instantané

Soumettons un prisme de béton à une déformation croissante, et traçons le diagramme représentant le raccourcissement relatif $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ en fonction de σ (Figure 5).

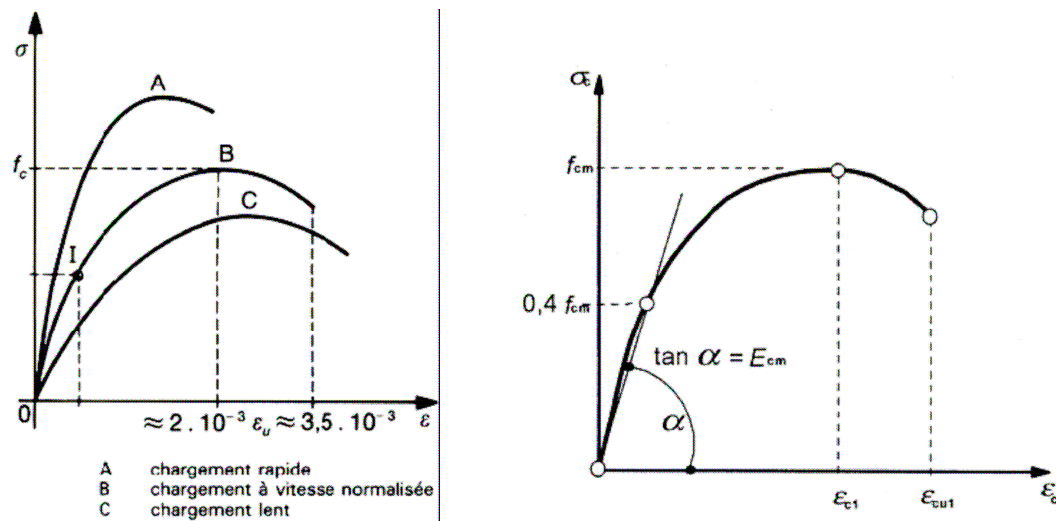


Figure 5 - Déformation du béton sous chargement instantané

Le diagramme obtenu est sensible à la vitesse de montée en déformation. C'est pourquoi il est indispensable d'opérer à vitesse normalisée. Le fonctionnement est tout d'abord élastique (OI) :

On peut définir un module élastique moyen E_{cm} qui est égal au module sécant pour $\sigma = 0,4 f_{cm}$

La courbe $\sigma(\varepsilon)$ passe par un maximum, dit *pic de contrainte*, pour une déformation ε_{c1} de l'ordre de $2 \cdot 10^{-3}$, la rupture du béton ne survenant que pour un raccourcissement estimé, en général, à $\varepsilon_{cu} = 3,5 \cdot 10^{-3}$. L'hypothèse classique du comportement élastique n'est valable que pour $\sigma \leq 0,3 f_{ck}$, mais reste pourtant acceptable jusqu'à $0,6 f_{ck}$. Au-delà, il faut recourir à d'autres modèles représentant correctement le comportement du béton jusqu'à rupture. En traction, le béton est fragile et ne présente pratiquement pas d'allongement plastique.

2.4.2. Retrait du béton

Formulation

Le retrait est le raccourcissement spontané du béton au cours de son durcissement en l'absence de toute contrainte. Le retrait a plusieurs origines, mais les deux effets principaux sont le retrait d'origine chimique, dit « retrait endogène » et le retrait de dessiccation ou retrait de séchage.

Le retrait endogène est dû à une diminution du volume de béton du fait de la réaction chimique de prise du béton. Les molécules avant réaction chimique occupent en effet un volume plus élevé que les molécules après réaction, ce qui engendre donc une diminution de volume.

Le retrait de dessiccation provient de l'évaporation des molécules d'eau non consommées par la réaction chimique. Ceci entraîne également un raccourcissement du béton.

Ce raccourcissement total peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon_{cs}(t) = \varepsilon_{cd}(t) + \varepsilon_{ca}(t) \text{ (retrait de dessiccation et retrait endogène)}$$

Le retrait de dessiccation est donné par :

$$\varepsilon_{cd}(t) = \beta_{ds}(t, t_s) k_h \varepsilon_{cd,0}$$

$$\text{avec } \beta_{ds}(t, t_s) = \frac{t - t_s}{t - t_s + 0,04 \sqrt{h_0^3}}$$

et $h_0 = \frac{2A_c}{u}$ où u est le périmètre de la section et A_c la section de béton.

Tableau 3.3 : Valeurs de k_h dans l'expression (3.9)

h_0	k_h
100	1,0
200	0,85
300	0,75
≥ 500	0,70

Tableau 3.2 : Valeurs nominales du retrait de dessiccation non gêné $\varepsilon_{cd,0}$ (en ‰) pour le béton avec des ciments CEM de classe N

$f_{ck}/f_{ck,cube}$ (MPa)	Humidité Relative (en %)					
	20	40	60	80	90	100
20/25	0,62	0,58	0,49	0,30	0,17	0,00
40/50	0,48	0,46	0,38	0,24	0,13	0,00
60/75	0,38	0,36	0,30	0,19	0,10	0,00
80/95	0,30	0,28	0,24	0,15	0,08	0,00
90/105	0,27	0,25	0,21	0,13	0,07	0,00

Le retrait endogène est donné par :

$$\varepsilon_{ca}(t) = \beta_{as}(t) \varepsilon_{ca}(\infty) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ca}(\infty) = 2,5 \cdot 10^{-6} (f_{ck} - 10) \quad \text{et} \quad \beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0,2\sqrt{t})$$

Conséquences du retrait

Si le béton est empêché d'effectuer son retrait, il se met en traction. Il faut donc éviter d'entraver ce retrait (notamment en libérant dès que possible le béton de ses coffrages, et donc en le précontrainant rapidement) ; il faut aussi empêcher que les diverses parties d'une même pièce aient des vitesses de retrait trop variables (ce qui se produit si leurs épaisseurs sont très différentes, ou si elles sont bétonnées à des époques différentes) ; il faut alors soigner la cure du béton en l'humidifiant en permanence durant plusieurs jours.

Enfin, le raccourcissement de retrait provoque une diminution progressive de la tension dans les armatures de précontrainte.

2.4.3. Fluage du béton

Formulation

Par définition, c'est le raccourcissement progressif du béton sous contrainte constante, retrait déduit. Ce phénomène est, lui aussi, lié à la migration de l'eau à l'intérieur du béton.

À la déformation instantanée $\varepsilon_i = \frac{\sigma_c}{E_c}$ vient se superposer une déformation de fluage

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \phi(t, t_0) \frac{\sigma_c}{E_c} \text{ qui tend vers une limite finie lorsque } t \text{ tend vers l'infini.}$$

Au temps infini, la déformation totale vaut donc : $\varepsilon = (1 + \phi(\infty, t_0)) \frac{\sigma_c}{E_c}$

Le modèle de visco-élasticité linéaire utilisé ici est basé sur les deux hypothèses fondamentales suivantes.

- Hypothèse de proportionnalité : dans une expérience de fluage pur (contrainte σ_0 maintenue constante depuis t_0), la réponse $\varepsilon(t)$ est proportionnelle à σ_0 :
 $\varepsilon(t) = \sigma_0 F(t_0, t)$
- Hypothèse de superposition (principe de Boltzmann) qui peut s'énoncer ainsi : l'effet d'une somme est égal à la somme des effets. Si donc, après avoir chargé une éprouvette par σ_0 à partir de t_0 , on lui applique une variation de contrainte $\Delta\sigma_1$ à partir de t_1 , on a, pour $t > t_1$:

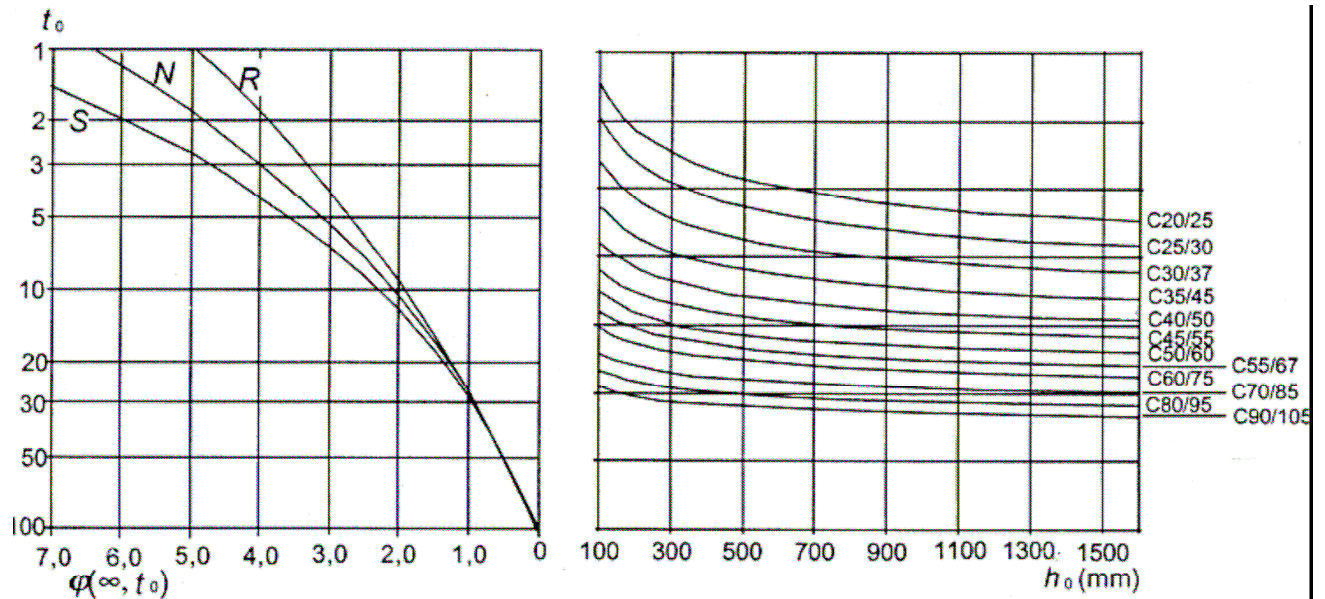
$$\varepsilon(t) = \sigma_0 F(t_0, t) + \Delta\sigma_1 F(t_1, t)$$

Dès lors, la réponse à une histoire de chargement : $\sigma(t) = \sigma(t_0) + \int_{t_0}^t \sigma'(\tau) d\tau$

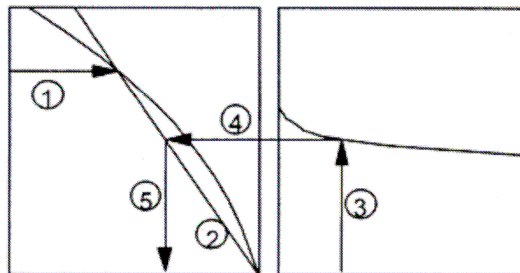
peut s'écrire : $\varepsilon(t) = \sigma(t_0) F(t_0, t) + \int_{t_0}^t \sigma'(\tau) F(\tau, t) d\tau$

Cette modélisation présente l'avantage considérable d'être compatible avec l'hypothèse classique, dans la théorie des poutres, de la linéarité des distributions, sur les sections droites, tant des contraintes que des déformations. Elle se prête donc bien au calcul des effets structuraux du fluage bien qu'elle soit en contradiction sensible avec l'expérience lorsque le chargement est tel que la déformation $\varepsilon(t)$ subisse des diminutions importantes avec le temps.

L'Eurocode 2 donne une méthode simple pour déterminer le coefficient de fluage à l'infini, en fonction du temps de chargement t_0 , du type de béton et de h_0 . Pour des cas plus complexes, la formule complète est donnée en annexe.



a) Environnement intérieur — RH = 50 %



Conséquences du fluage

Comme le retrait, le fluage du béton entraîne tout d'abord une diminution progressive de la tension dans les armatures de précontrainte. Il provoque ensuite des déformations différées dans les structures. Ainsi, une poutre indépendante est davantage comprimée en service, à vide (c'est-à-dire la majorité du temps), sur sa fibre inférieure que sur sa fibre supérieure. La poutre se cambre donc peu à peu vers le haut (Figure 6). Il faut en tenir compte en donnant au fond du coffrage de la poutre une contreflèche négative (dirigée vers le bas). Enfin, une poutre réalisée en plusieurs phases, selon des schémas statiques évolutifs de plus en plus hyperstatiques, voit graduellement se modifier les efforts qui la sollicitent, les déformations par fluage se trouvant entravées de plus en plus fortement par la création de nouvelles liaisons (c'est la redistribution par fluage). Considérons, par exemple, une poutre réalisée en deux phases (Figure 7) :

- deux consoles encastrées sur culées ;
- elles sont ensuite rendues continues à la clé.

Si les deux consoles étaient restées libres, leurs extrémités se seraient peu à peu abaissées sous l'action du fluage de leur béton. La réalisation de la continuité empêche cette déformation de s'effectuer librement.

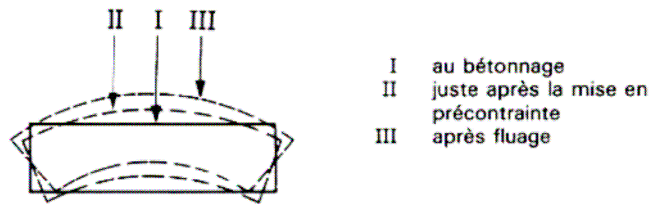


Figure 6 - Déformation d'une poutre dans le temps

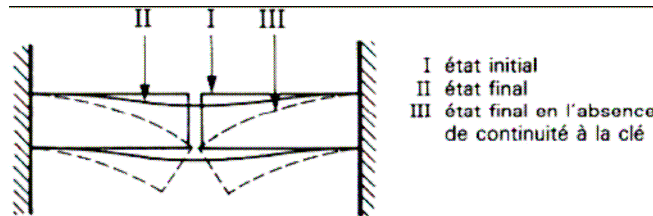


Figure 7 - Déformation par fluage d'une poutre réalisée en plusieurs phases

Un moment fléchissant positif se crée donc progressivement à la clé, de façon à s'opposer à la différence des rotations des sections extrêmes en regard des deux consoles.

3. Armatures de précontrainte

3.1. Formes

On trouve les armatures de précontrainte sous trois formes :

- les fils ;
- les barres ;
- les torons.

3.1.1. Fils

Par convention, les fils ont un diamètre inférieur ou égal à 12,2 mm, ce qui permet de les livrer en couronnes. Ils peuvent être soit ronds et lisses (pour la post-tension) soit au contraire nervurés, ou crantés, ou ondulés afin d'améliorer leur adhérence au béton (pré-tension). Les fils les plus couramment utilisés ont des diamètres de 5 mm, 7 mm ou 8 mm.

3.1.2. Barres

De diamètre supérieur ou égal à 12,5 mm, elles ne sont livrées que rectilignes (et sous longueur maximale de l'ordre de 12 m). Elles peuvent être soit lisses, soit nervurées, les nervurations faisant alors office de filetage grossier (cas des barres *Dywidag*). Les diamètres les plus courants sont 26 mm, 32 mm et 36 mm. Mais il existe des barres plus grosses (*Macalloy* $\phi 40$, 50 et même 75 mm). De telles armatures ne sont employées qu'en post-tension.

3.1.3. Torons

Ce sont des ensembles de fils enroulés hélicoïdalement les uns sur les autres (cas des torsades à trois fils) ou autour d'un fil central en une ou plusieurs couches. Les torons les plus courants sont à 7 fils et sont désignés par leur diamètre nominal (diamètre du cercle circonscrit aux fils dans une section droite). Les diamètres les plus utilisés sont les suivants : 12,5 mm (fréquemment désigné par T13) 12,9 mm (T13S)

15,2 mm (T15) 15,7 mm (T15S) Ces armatures sont employées aussi bien en pré-tension (dans les pièces importantes) qu'en post-tension.

Enfin, par le passé, certains procédés de précontrainte (PCB notamment) ont utilisé des torons à plusieurs couches de fils périphériques (torons à 37 ou 61 fils).

3.2. Diagramme contraintes-déformations

Il est d'abord linéaire (phase élastique OI, la pente de la droite OI étant le module d'élasticité E_p de l'armature), puis il s'incurve, pour aboutir à un quasi-palier plastique (Figure 8). Enfin, la rupture survient pour une contrainte f_{pk} et un allongement relatif ε_{uk} . On attache une importance fondamentale à ce qu'elle ne se produise que moyennant une striction importante (caractérisée par le coefficient de striction ζ , réduction relative de l'aire de la section droite au niveau de la rupture).

Généralement, on exige : $\zeta \geq 20\%$, $\varepsilon_{uk} \geq 3,5\%$

Le diagramme contraintes-déformations permet de définir une autre caractéristique importante de l'armature de précontrainte : sa limite conventionnelle d'élasticité $f_{p0,1k}$. C'est l'ordonnée du point d'intersection du diagramme avec la droite de pente 200 000 MPa passant par le point d'ordonnée nulle et d'abscisse 10^{-3} . Pour les fils et les torons, $f_{p0,1k}$ est compris entre 0,85 et 0,90 f_{pk} .

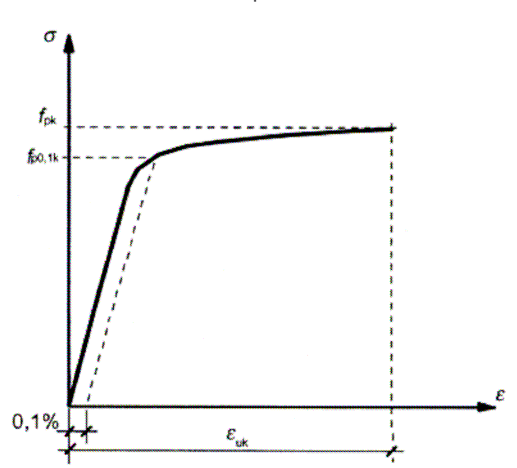


Figure 8 - Diagramme contraintes-déformations d'une armature de précontrainte

3.3. Relaxation de l'acier

L'acier fortement tendu sous longueur constante voit sa tension décroître progressivement. Ce phénomène, appelé relaxation, est corrélatif du fluage (variation de longueur sous contrainte constante).

Son importance dépend très sensiblement de la température. La perte relative de tension d'une armature tendue initialement à σ_0 est, à température constante, fonction et du temps t et de σ_0 .

3.3.1. Loi des temps

En exploitant les résultats d'essais, on trouve qu'en coordonnées bilogarithmiques les points expérimentaux s'alignent sur des droites. Cela est vérifié, même sur les essais les plus longs dont on dispose (plusieurs dizaines d'années). Il est bien évident, toutefois, qu'à partir d'un certain moment les diagrammes doivent s'infléchir et présenter une asymptote horizontale, faute de quoi une armature initialement tendue

et maintenue à longueur constante non seulement perdrait toute sa tension, mais se retrouverait en compression. Certains experts estiment que cette inflexion ne se manifeste qu'après quelques dizaines de milliers d'années, ce qui est d'un ordre de grandeur bien supérieur à celui de la durée de vie escomptée pour les ouvrages. C'est pourquoi, dans la pratique, afin d'évaluer la perte finale par relaxation, il est nécessaire de se fixer un temps infini conventionnel. C'est la valeur 500 000 h (soit environ 57 ans) qui a été retenue par l'EC2.

3.3.2. Loi des tensions initiales

Là encore, on trouve expérimentalement que la perte relative de tension varie exponentiellement avec la tension initiale. Toutefois, dans le domaine utile des tensions comprises entre $0,6 f_{pk}$ et $0,8 f_{pk}$, on peut linéariser l'exponentielle.

3.3.3. Influence de la température

La plupart des experts estiment, à l'heure actuelle, que la température accélère la relaxation sans modifier sa valeur finale réelle. Quoi qu'il en soit, compte tenu de l'importance de ce facteur, il convient, pour caractériser un acier, d'opérer dans des conditions bien définies de température. En pratique, on mesure la relaxation isotherme à 20°C d'une éprouvette tendue initialement à $0,7f_{pk}$. La perte relative de tension observée dans ces conditions à 1 000 h et notée ρ_{1000} sert de base aux calculs de relaxation.

3.3.4. Formule pratique d'évaluation de la tension finale

Compte tenu des indications précédentes, la perte de tension finale d'une armature soumise à une température proche de la température climatique est donnée par :

$$\text{Classe 1 : } \frac{\Delta\sigma_{pr}}{\sigma_{pr}} = 5,39\rho_{1000} e^{6,7\mu} \left(\frac{t}{1000}\right)^{0,75(1-\mu)} 10^{-5} \text{ (fil ou toron — relaxation normale)}$$

$$\text{Classe 2 : } \frac{\Delta\sigma_{pr}}{\sigma_{pr}} = 0,66\rho_{1000} e^{9,1\mu} \left(\frac{t}{1000}\right)^{0,75(1-\mu)} 10^{-5} \text{ (fil ou toron — basse relaxation)}$$

$$\text{Classe 3 : } \frac{\Delta\sigma_{pr}}{\sigma_{pr}} = 1,98\rho_{1000} e^{8\mu} \left(\frac{t}{1000}\right)^{0,75(1-\mu)} 10^{-5} \text{ (barres laminées à chaud, ayant subi un traitement complémentaire)}$$

On a $\mu = \frac{\sigma_{pi}}{f_{pk}}$ (σ_{pi} est la contrainte dans le béton après les pertes instantanées).

Le coefficient ρ_{1000} vaut 8% pour la classe 1, 2.5% pour la classe 2, et 4% pour la classe 3.

3.4. Corrosion sous tension

En plus du phénomène habituel de corrosion par oxydation (la formation continue de rouille réduisant progressivement la section résistante, ce qui accroît la contrainte de traction jusqu'à ce que se produise la rupture), l'acier des câbles de précontrainte, très fortement tendu, est exposé, s'il n'est pas bien protégé (notamment par une injection de mortier de ciment fortement basique), à un autre phénomène : la corrosion sous tension, qui provoque une rupture fragile, brutale (sans que rien ne l'ait laissé prévoir). Cette corrosion semble être due à la destruction des liaisons intercrystallines par

certaines agents dilatants (l'hydrogène naissant, par exemple) ou corrosifs. L'essentiel à retenir pour le constructeur est qu'un câble de précontrainte, fortement tendu, et non protégé, se rompt inéluctablement. En revanche, on ne connaît pas de cas de rupture de câbles bien protégés (par une bonne injection).

3.5. Résistance à la fatigue

Une armature tendue en moyenne à σ_m résiste à un nombre de cycles de variations de tension $\pm \frac{\delta\sigma}{2}$ d'autant plus faible que σ_m et $\delta\sigma$ sont plus élevés. Pour assurer la pérennité des constructions en béton précontraint, on doit donc limiter les variations de tension $\delta\sigma$ dans les armatures. Celles-ci ne peuvent devenir importantes qu'en cas de fissuration du béton. C'est donc en précontrainte partielle qu'il faut se montrer vigilant et procéder, pour les structures exposées à la fatigue, à des vérifications spécifiques. L'Eurocode béton impose ainsi un calcul à la fatigue dès que le béton de la zone d'enrobage se décomprime en combinaisons fréquentes.

3.6. Élaboration

On part du fil machine, produit sidérurgique obtenu par laminage à chaud de lingots, dont les caractéristiques mécaniques insuffisantes pour un emploi en précontrainte sont améliorées par une succession de traitements thermiques et mécaniques.

Nature	Classe (MPa)	ϕ (mm)	A (mm ²)	f_{pk} (kN)
T13	1860	12,5	93	154
T13S	1860	12,9	100	166
T15	1770	15,2	139	220
T15S	1770	15,7	150	236
T15S	1860 (*)	15,7	150	279
Fil ϕ 7mm	1670	7	38,5	57

Caractéristiques de certains fils et torons

(*) Le T15S 1860 MPa est le plus utilisé à l'heure actuelle en post-tension.

Les traitements mécaniques utilisés sont :

— le laminage généralement suivi d'une trempe soit au plomb, soit à l'huile. Dans ce dernier cas, un revenu (réchauffage à 400°C) est indispensable pour redonner à l'acier une ductilité suffisante ;

— le tréfilage, étirage à froid à travers une succession de filières de diamètres décroissants. Ce traitement modifie la texture de l'acier en orientant ses fibres dans le sens longitudinal. Il conduit à un état de surface très lisse, favorable à la résistance à la corrosion sous tension. Autrefois, le tréfilage était précédé d'un patentage (réchauffage à 850°C suivi d'une trempe isotherme aux alentours de 450°C). Cette opération, qui donnait à l'acier une structure très fine, est malheureusement abandonnée de nos jours, pour des raisons d'économie, au détriment de la ductilité. Après tréfilage, différents traitements thermomécaniques permettent d'améliorer les performances des armatures (vieillessement artificiel pour augmenter $f_{p0,1k}$; *stress-relieving* ou bleuissement pour accroître $f_{p0,1k}$ et f_{pk} ; stabilisation, étirage à chaud qui permet de diminuer la relaxation).

3.7. Homologation

Les agréments techniques européens relatifs aux kits de précontrainte sont délivrés par des organismes d'agrément (ex : Sétra en France, DIBT en Allemagne, OIB en Autriche) sur la base d'un guide d'agrément technique européen (ETAG 013). L'agrément est délivré après un certain nombre de tests pour vérifier l'aptitude à l'usage du produit.

Ces kits font ensuite l'objet d'une attestation de conformité pour vérifier la cohérence du produit mis sur le marché avec celui testé dans le cadre de la délivrance de l'agrément technique européen. Cette deuxième étape aboutit au marquage CE délivré par un organisme de certification (ex : ASQPE en France ...). Doté du marquage CE le produit est présumé conforme aux exigences essentielles et peut être mis sur le marché, commercialisé et utilisé sans avoir à subir de vérification de conformité à une réglementation nationale.

Les informations contenues dans l'ATE sont les suivantes :

- Usages possibles du système (précontrainte extérieure, câble remplaçable, usage cryogénique, ...)
- Gamme d'ancrage (de 3 à 37T15 par exemple)
- Description des composants et dimensions
- Rayons de courbure minimums autorisés suivant le type de gaine
- Longueur libre à respecter derrière l'ancrage ou encombrement des vérins
- Longueur droite à respecter à la sortie de l'ancrage
- Coefficient de frottement k et μ .
- Espacement des supports de gaine
- Rentrée d'ancrage lors de la mise en tension
- Frettage à placer derrière l'ancrage et adaptation possible
- Type d'injection
- Recommandations sur le transport, le stockage et la manutention

Les forces de mise en tension sont généralement données à titre indicatif ou de recommandation dans l'ATE (sauf prescription contraire) car les systèmes sont testés pour résister en statique, en fatigue et en transfert de charge sur la base des forces caractéristiques des câbles et non des forces indiquées dans l'ATE. Celles-ci doivent donc être déduites de la norme sur les armatures de précontrainte (EN10138) donnant f_{pk} et $f_{p0,1k}$ et de l'annexe nationale de l'Eurocode 2 donnant les coefficients k_1 et k_2 à placer devant f_{pk} et $f_{p0,1k}$.

En France, les forces de mises en tension sont limitées à (valeur EC2 + Annexe nationale française) :

$$P_{\max} = A_p \cdot \sigma_{p,\max}$$

$$\sigma_{p,\max} = \min \{ 0,8 \cdot f_{pk} ; 0,9 \cdot f_{p0,1k} \} \text{ (avec possibilité de monter à } 0,95 f_{p0,1k} \text{ si mesure précise)}$$

La force maximale dans le câble après pertes instantanées est limitée à (valeur EC2 + Annexe nationale française) :

$$P_{m0}(x) = A_p \cdot \sigma_{pm0}(x)$$

$$\sigma_{pm0} = \min \{ 0,8 f_{pk} ; 0,9 f_{p0,1k} \}$$

En pratique, et en France, cette limitation n'est pas dimensionnante par rapport à la précédente (le texte européen est lui plus sévère et rend cette limitation dimensionnante dans certains cas).

4. Matériel de précontrainte par post-tension

4.1. Généralités

En post-tension, les câbles sont, le plus souvent, logés dans des évidements tubulaires ménagés à l'intérieur du béton par le moyen de conduits. Même quand elles sont placées à l'extérieur du béton, comme cela se pratique depuis quelques années pour certaines structures, les armatures de précontrainte sont, quasi systématiquement, isolées du milieu ambiant par un conduit. Lorsque le durcissement est suffisant, les câbles sont mis en tension à l'aide de vérins prenant appui sur le béton qu'ils compriment. Grâce à des organes d'ancrage, on effectue alors un transfert d'appui et l'on bloque les déformations relatives entre aciers et béton, ce qui permet de récupérer les vérins. Dans le vide qui subsiste entre le câble et son conduit on injecte un coulis de ciment (ou éventuellement un produit souple : cire ou graisse).

4.2. Armatures

4.2.1. Nature

Les câbles sont généralement constitués, à l'heure actuelle, de torons parallèles. En France, le seul procédé utilisant encore des fils parallèles est le procédé *BBR* (unités $n \phi 7$, n représentant le nombre de fils de diamètre 7 mm). Dans certains cas, enfin, on emploie des barres qui peuvent être lisses en partie courante (et filetées à leurs extrémités : barres *Dywidag* et *Macalloy*), ou filetées sur toute leur longueur (barres *Macalloy*) ou encore nervurées au laminage, les nervurations faisant office de filetage grossier (barres *Dywidag*). Compte tenu de leur rigidité qui leur interdit toute courbure trop prononcée, les barres ne sont guère utilisées, aujourd'hui, que sous forme droite pour réaliser des unités de faible longueur (clouage, étriers actifs, etc.).

4.2.2. Mise en place

Deux grands modes de mises en place sont envisageables : pose d'unités prêtes à l'emploi ; enfilage sur chantier, avant ou après bétonnage, dans des conduits préalablement positionnés dans les coffrages et fixés aux carcasses de ferrailage.

Unités prêtes à l'emploi

Les armatures sont enfilées en usine dans des gaines souples et éventuellement munies de leurs ancrages. Les unités ainsi réalisées sont livrées sur le chantier enroulées sur tourets (câbles à fils ou à torons). Cette méthode, très souvent utilisée autrefois, est pratiquement abandonnée aujourd'hui, sauf dans le cas du procédé *BBR*.

Enfilage sur chantier

Les conduits une fois mis en place dans les coffrages et solidement arrimés aux carcasses de ferrailage, l'enfilage peut être réalisé soit avant soit après le bétonnage. Deux variantes sont alors possibles :

— préfaçonnage du câble (assemblage des armatures coupées à longueur) dans un atelier forain contigu au chantier, puis mise en place par traction à l'aide d'un treuil par

l'intermédiaire d'un tire-câble (*chaussette*) ou d'un anneau soudé sur l'extrémité des armatures ;

— poussage des armatures une à une dans le conduit au moyen d'un poussoir à galets métalliques.

4.3. Conduits

4.3.1. Précontrainte intérieure au béton

Il s'agit le plus souvent de conduits métalliques. Lorsque les armatures sont enfilées sur chantier, ce sont :

— soit des tubes en acier laminé dont l'épaisseur est couramment comprise entre 1 et 2 mm ; ces tubes sont cintrables sur machines ; l'assemblage entre éléments successifs se fait par emboîture ;

— soit des gaines rigides cintrables à la main ; elles sont en feuillard à enroulement hélicoïdal ou cylindrique ; leur épaisseur est comprise entre 0,4 et 0,6 mm ; la nervuration, qui augmente la rigidité et l'adhérence au béton, fait office de filetage grossier et permet le raccordement entre tronçons par vissage d'un manchon de gaine de diamètre immédiatement supérieur. Dans le cas d'unités prêtes à l'emploi, on utilise des gaines enroulables, en feuillard plus mince (dont l'épaisseur est comprise entre 0,2 et 0,4 mm). Pour les unités les plus courantes constituées de fils ou de torons, les caractéristiques minimales des conduits sont précisées dans le tableau 3.

Type d'armatures	Nombre d'armatures constituant l'unité	Gainés enroulables		Gainés rigides cintrables à la main		Tubes rigides (acier)	
		\varnothing_i (mm)	e (mm)	\varnothing_i (mm)	e (mm)	\varnothing_e (mm)	e (mm)
Fils 7 mm	$n = 9$	35	0,3	40	0,4		
	$n = 14$	45	0,3	46	0,4		
	$n = 18$	50	0,4	50	0,4		
	$n = 22$	55	0,4	60	0,4		
	$n = 30$	60	0,4	65	0,4	76	2
	$n = 54$	80	0,4	90	0,6	89	2
	$n = 84$	100	0,4	110	0,6	108	2
Fils 8 mm	$n = 12$	45	0,3	50	0,4		
Torons T12,5 (T13) ou T12,9 (T13S)	$n = 7$	45	0,3	50	0,4	55	2
	$n = 12$	60	0,4	65	0,4	76	2
	$n = 19$	75	0,4	80	0,6	84	2
	$n = 31$			105	0,6	108	2
	$n = 55$			140	0,6	139,7	2
Torons T15,2 (T15) ou T15,7 (T15S)	$n = 4$	50	0,4	50	0,4	55	2
	$n = 7$	60	0,4	65	0,4	76	2
	$n = 12$	75	0,4	80	0,6	80	2
	$n = 19$			95	0,6	101,6	2
	$n = 37$			130	0,6	139,7	2

\varnothing_e diamètre extérieur
 \varnothing_i diamètre intérieur
 e épaisseur

Il arrive enfin que l'on ait recours à des conduits en matière plastique. C'est rare pour des câbles constitués de plusieurs armatures (multitorons ou multifils), mais par contre fréquent dans le cas des monotorons : on les utilise alors sous la forme de torons *gainés protégés*. Le toron sort d'usine muni de sa gaine, généralement en polyéthylène, remplie de son produit de protection, graisse ou cire. Ce type d'armature, qui fait l'objet d'une fabrication industrielle et qui permet de s'affranchir des servitudes d'une injection au coulis de ciment sur chantier, est parfaitement

adapté à la réalisation de la précontrainte des dalles de bâtiment, de certains réservoirs ou des hourdis de pont.

4.3.2. Précontrainte extérieure au béton

Les conduits doivent alors être parfaitement étanches pour assurer le confinement du produit de protection, qu'il s'agisse d'un coulis de ciment, d'une cire ou d'une graisse. Les gaines en feuillard ne peuvent donner satisfaction à cet égard. On utilise parfois des tubes métalliques raccordés par emboîtement (l'étanchéité aux joints étant assurée par des manchons thermorétractables), ou bien par soudure ou encore par sertissage, mais ces deux derniers types d'opérations sont délicats à réaliser correctement à proximité d'une paroi.

Le plus souvent, on emploie des gaines en polyéthylène à haute densité (PEhd) dont les tronçons sont assemblés par thermofusion (soudure au miroir ou colliers électrosoudables). Si l'on veut se réserver la possibilité de remplacer ultérieurement un câble tout en l'injectant au coulis de ciment, le conduit, prolongé à ses extrémités par des cônes d'épanouissement, est isolé de la structure par des tubes de réservation au niveau des déviateurs et par des trompettes ou *tromplaques* coffrantes dans les massifs d'ancrage.

4.4. Vérins

Le vérin est un mécanisme constitué d'un cylindre et d'un piston, délimitant une chambre à l'intérieur de laquelle on peut injecter de l'huile, ce qui fait coulisser les deux pièces l'une par rapport à l'autre. Le cylindre prend appui sur le béton, alors que le câble est fixé au piston dont le mouvement assure la mise en tension de l'unité (Figure 9).

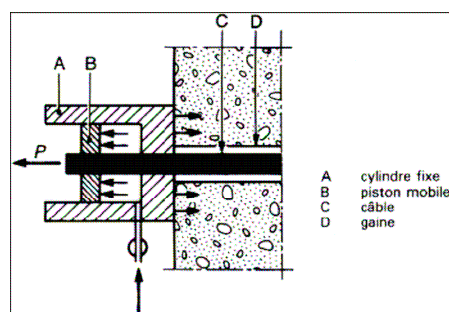


Figure 9 - Schéma de principe d'un vérin

Le piston peut tirer :

- soit directement sur les armatures qui sont fixées sur lui, à titre provisoire, par coincement ou par vissage ;
- soit sur une tête mobile elle-même solidaire du câble et faisant office, ultérieurement, de tête d'ancrage (cas du procédé BBR).

4.5. Ancrages

Selon leur fonction, on distingue plusieurs catégories d'ancrages :

- a) les **ancrages actifs**, qui permettent de bloquer le câble à l'extrémité par laquelle on effectue la mise en tension ; une fois ce blocage réalisé, on peut dégonfler le vérin et le récupérer ; toute unité de précontrainte comporte au moins un ancrage actif ;

b) les **ancrages fixes**, qui interdisent tout mouvement significatif, par rapport au béton, de l'extrémité du câble opposée à celle par laquelle se fait la mise en tension ; deux variétés d'ancrages fixes sont à distinguer :

- les ancrages extérieurs, qui demeurent accessibles après bétonnage,
- les ancrages incorporés au béton de la structure, qui se subdivisent eux-mêmes en ancrages fonctionnant par butée et en ancrages par adhérence ;

c) les **coupleurs**, qui permettent, dans le cas d'ouvrages construits en plusieurs phases, de réaliser la continuité de deux tronçons de câbles, le premier tendu au cours de la phase n , le second au cours de la phase $n + 1$;

d) les **dispositifs de raboutage**, qui assurent le raccordement de deux tronçons distincts d'armatures mis en tension simultanément par l'une ou /et l'autre de leurs extrémités libres. Dans certains cas particuliers, on peut avoir recours à d'autres types d'ancrages :

- des **ancrages intermédiaires** pour ancrer provisoirement une armature en partie courante, dans le cas des dalles de bâtiment ;
- des **ancrages de jonction**, encore appelés **ancrages par le milieu**, pour réaliser la mise en tension simultanée de deux tronçons de câble par leurs extrémités en regard.

4.5.1. Ancrages actifs

Ils se regroupent en deux familles : les ancrages le long du fil et les ancrages préfabriqués

Ancrages le long du fil

Ils sont indépendants du câble et ne sont solidarisés aux armatures qu'après mise en tension de ces dernières. Appartiennent à cette famille les ancrages par coincement que l'on retrouve dans la plupart des grands procédés modernes utilisant des câbles constitués de n torons parallèles ; après mise en tension, les torons sont bloqués dans une tête d'ancrage percée de n trous tronconiques au moyen de mors métalliques (Figure 10) constitués de deux ou trois éléments appelés clavettes [procédés *Freyssinet K et Monogroupe* ; *VSL* ; *CCL* ; *SEEE-FUC* (Figure 11) ; *LH* ; *PAC* ; *CONA*]. Se rattachent également à cette famille les ancrages par vissage des procédés à barres.

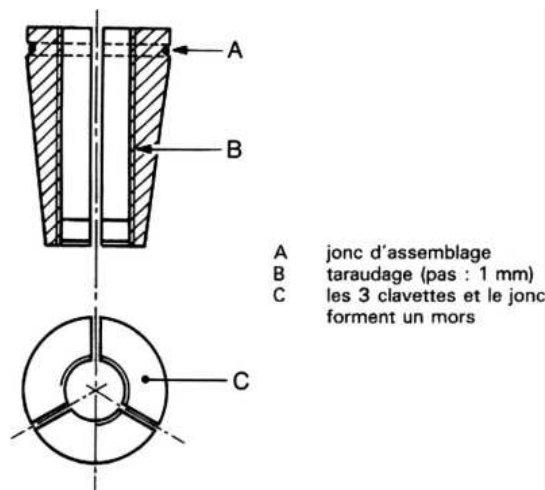


Figure 10 - Mors d'ancrage : principe

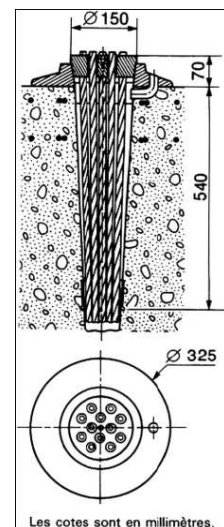


Figure 11 - Ancrage actif 12 T15 SEEE- FUC

Ancrages préfabriqués

Ils sont fixés à l'extrémité du câble (soit en usine, soit plus rarement sur chantier) avant sa mise en tension et l'on vient les bloquer par des cales sur le béton.

Les ancrages les plus typiques de cette catégorie sont ceux du système *BBR-B* (Figure 12) : les câbles sont, dans ce cas, constitués de n fils parallèles (généralement de 7 mm de diamètre) ; à leur extrémité, les fils s'appuient, par l'intermédiaire de boutons forgés à froid, sur une tête d'ancrage métallique percée de n trous. Cette tête est filetée extérieurement, ce qui permet de visser sur elle la tige de traction du vérin et ainsi de tendre le câble. Des cales en acier, en forme de demi-coquilles, sont alors introduites entre la tête d'ancrage et la plaque d'appui pour assurer la permanence de la déformation imposée aux armatures, donc de leur tension. Avec ces ancrages préfabriqués, la pièce à précontraindre voit son encombrement augmenter d'une surlongueur égale à l'allongement que subit le câble lors de sa mise en tension (de l'ordre de 7 mm par m). On peut tourner cette difficulté en partant de câbles de longueur réduite, plus courts au départ que la pièce à précontraindre, les têtes d'ancrage étant logées, avant la mise en tension, à l'intérieur d'une trompette de diamètre adéquat. C'est ce qui se pratique avec les procédés *BBR-V* et *SEEE-FU* (Figure 13). Ce dernier est, pour les torons, l'équivalent du procédé *BBR* pour les fils, les boutons d'extrémité étant remplacés par des manchons filés obtenus en forçant à froid, à travers une filière, un tube épais en acier qui vient se mouler sur le toron par déformation plastique. Dans un cas comme dans l'autre, c'est le vissage d'un écrou sur la tête d'ancrage filetée extérieurement qui en assure le blocage. Signalons enfin que les unités à ancrages préfabriqués sont difficilement enfilables, sauf si l'on effectue sur chantier le boutonnage des fils ou le filage des manchons, mais alors la précision sur la longueur des armatures individuelles est moins bonne.

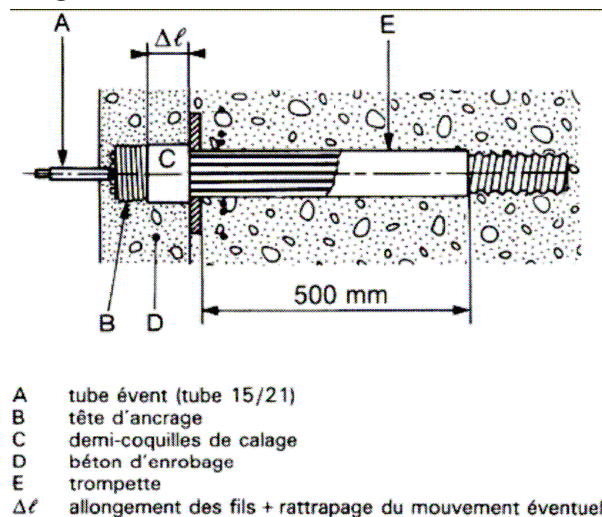


Figure 12 - Ancrage actif BBR-B

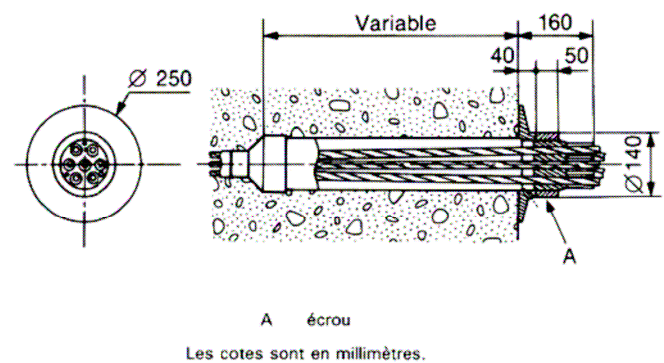


Figure 13 - Ancrage actif 7 T15 SEEE-FU

4.5.2. Ancrages fixes

Ancrages extérieurs fixes

Le plus souvent, ils sont constitués des mêmes éléments que les ancrages actifs. En ce qui concerne les ancrages à clavettes, il suffit de bloquer ces dernières dans leur

logement conique, au contact du toron, à l'aide d'un tube pousse-clavettes et d'un marteau.

Ancrages fixes intérieurs au béton

Pour des ancrages fixes incorporés au béton, la solution précédemment décrite d'auto-blocage des clavettes doit être rigoureusement proscrite. En effet, la laitance vient s'infiltrer entre les clavettes constitutives du mors et leur interdit le mouvement de quelques millimètres vers l'avant, indispensable pour assurer le blocage définitif du toron lorsqu'on le met en tension par son extrémité opposée. Différentes solutions sont alors utilisées faisant appel :

- soit à la butée sur une tête d'ancrage ou sur une plaque métallique par l'intermédiaire de boutons pour les fils ou de manchons filés pour les torons (Figure 14). On peut également boucler les armatures, en contact direct avec le béton sur une certaine longueur, autour d'une plaque galbée (Figure 15) ;
- soit essentiellement à l'adhérence, dans le cas des torons. Les torons sont alors épanouis hors de leur conduit sur une longueur suffisante, et détournés à leur extrémité pour former un bulbe (Figure 16). Le bon fonctionnement de ce type d'ancrage suppose un dégraissage efficace des torons sur leur longueur de scellement ainsi qu'un bétonnage soigné de la zone en question.

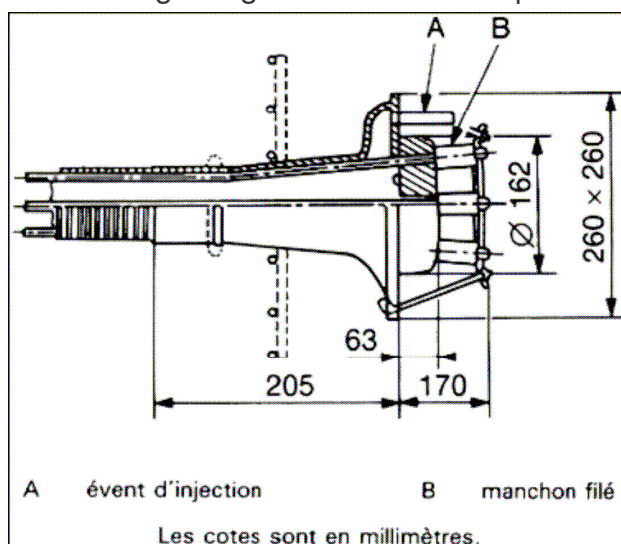


Figure 14 - Ancrage fixe, noyé dans le béton Freyssinet système K (12 T 15)

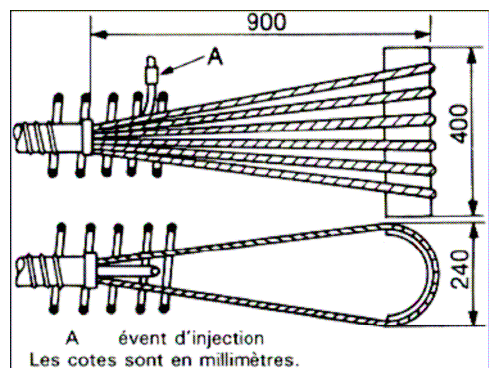


Figure 15 - Ancrage VSL à boucle (12 T 15)

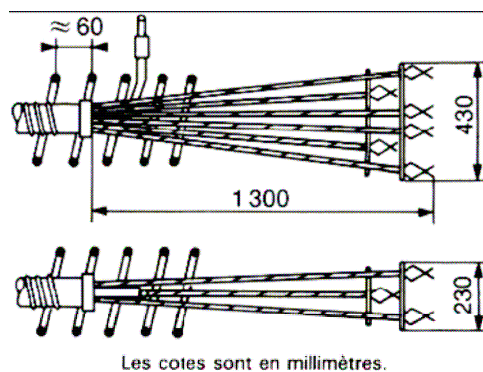


Figure 16 - Ancrage VSL par adhérence (12 T 15)

4.5.3. Coupleurs

Fonctionnement

Ce type de dispositif, parfois utilisé dans les ouvrages construits à l'avancement (Figure 17), permet d'accrocher un nouveau câble, dit *secondaire*, mis en tension au cours d'une phase de travaux ($n + 1$), à l'extrémité d'un câble, dit *primaire*, déjà tendu au cours de la phase de travaux n . Le coupleur doit donc remplir une double fonction : — assurer l'ancrage actif du câble primaire ; — transmettre jusqu'à l'extrémité en cause du câble primaire l'effort de tension appliqué ultérieurement au câble secondaire. Pour que cette deuxième fonction soit assurée, il convient d'éviter toute possibilité de butée directe du coupleur sur le béton secondaire, coulé au cours de la phase $n + 1$, donc de l'en isoler par un capot (Figure 18).

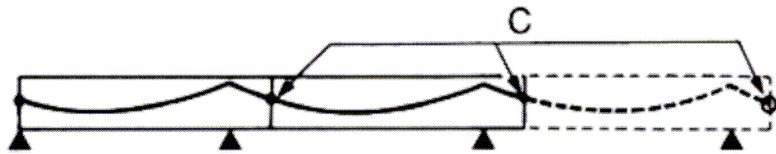


Figure 17 - Exemple d'utilisation de coupleurs C dans une construction à l'avancement

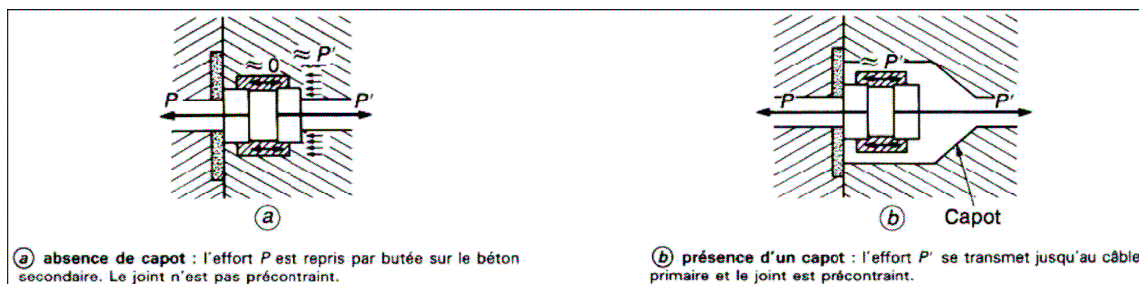


Figure 18 - Nécessité d'isoler le coupleur du béton secondaire

Morphologie des coupleurs

Les coupleurs actuellement utilisés se regroupent en deux grandes familles : les coupleurs *multi-armatures* et les coupleurs *monoarmatures*.

Coupleurs multi

Ils assurent globalement le couplage des n fils ou torons parallèles constitutifs du câble. Schématiquement ils comportent :

- pour le câble primaire, une tête d'ancrage actif prenant appui sur le béton par l'intermédiaire d'une plaque métallique ;
- pour le câble secondaire, une tête d'ancrage fixe ;
- un dispositif de connexion pour solidariser ces deux têtes d'ancrage.

Le dispositif de connexion en question peut consister en un manchon fileté intérieurement se vissant sur les deux têtes d'ancrage en regard filetés extérieurement [procédés *BBR-B* (Figure 19) ; *SEEE-FU*].

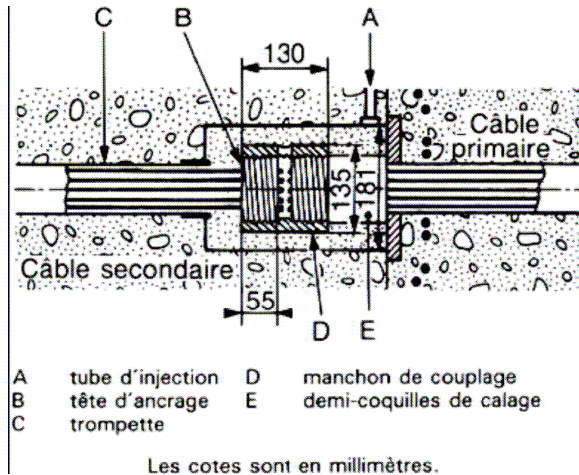


Figure 19 - Coupleur 30_7 BBR-B

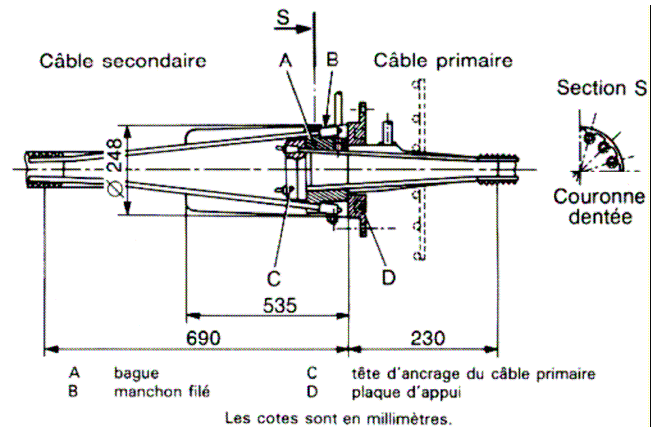


Figure 20 - Coupleur Freyssinet K 12 T15

Pour les systèmes à torons, il s'agit souvent d'une bague de couplage interposée entre l'ancrage actif du câble primaire et sa plaque d'appui sur le béton. Cette bague est munie, sur sa périphérie, d'une couronne dentée. Les torons du câble secondaire s'enclenchent entre les dents de la couronne et s'appuient sur elles par l'intermédiaire de manchons filés [procédés *Freyssinet K* (Figure 20) ; *CCL*]. Dans le cas du système *VSL*, la couronne dentée constitue, avec la tête d'ancrage du câble primaire, une pièce unique.

Coupleurs mono

Utilisés par beaucoup de procédés à torons [*Freyssinet K* ; *CCL* ; *PAC* ; *LH*], ils sont constitués (Figure 21) :

- d'une tête d'ancrage actif pour le câble primaire ;
- d'autant de petits manchons de raccordement individuels (Figure 22) que l'unité comporte de torons.

Ces manchons, qui contiennent un double jeu de clavettes, assurent le raboutage de chacun des torons du câble secondaire avec son homologue du câble primaire. Une fois le câble secondaire mis en tension, la tête d'ancrage actif du câble primaire ne joue pratiquement plus aucun rôle mécanique.

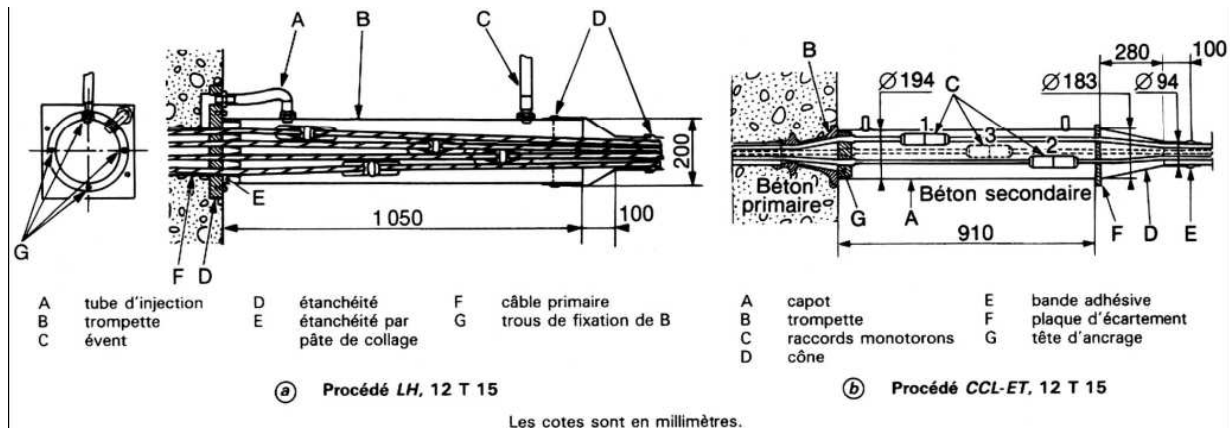


Figure 21 - Coupleurs mono

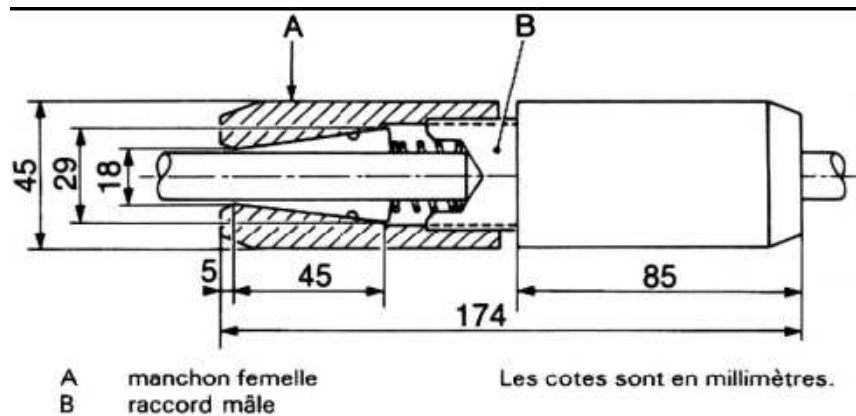


Figure 22 - Raccord monotoron T15 du procédé PA

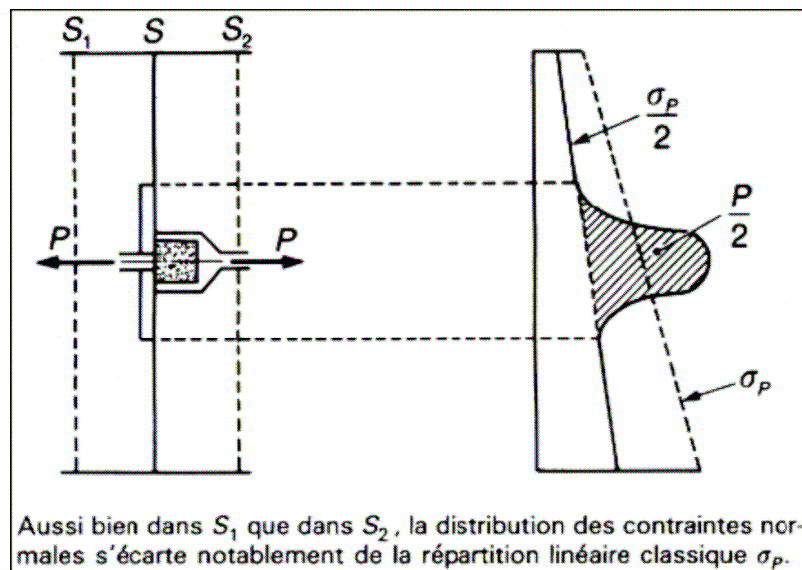


Figure 23 - Distribution des contraintes

Problèmes posés par l'utilisation des coupleurs

Ces problèmes sont de différentes natures.

- Problèmes mécaniques

La distribution des contraintes au voisinage d'une section de couplage s'écarte notablement des distributions traditionnelles de la résistance des matériaux. En effet, la mise en tension du câble primaire provoque un gauchissement de la section de joint, alors section d'extrémité. Lorsqu'on tend le câble secondaire, en supposant même qu'il transmette au droit du coupleur une force P' rigoureusement égale à la force ancrée P du câble primaire, la section de joint ne peut retrouver sa forme plane initiale car elle en est empêchée par le béton secondaire coulé à son contact. En ce qui concerne les contraintes normales isostatiques développées par le couplage, on peut montrer, en élasticité, que si l'on désigne par σ_p la distribution linéaire de contraintes équilibrant l'effort isostatique de précontrainte P , elles valent $\sigma_p/2$ sur la hauteur des sections proches du joint, sauf à l'aplomb de la plaque d'appui du câble primaire sur le béton. Au droit de cette plaque, elles présentent un pic dont le volume équilibre, bien évidemment, la force $P/2$ (Figure 23).

Par ailleurs, d'importantes contraintes de cisaillement se manifestent dans la zone en question. Il est donc prudent de prévoir un ferrailage passif longitudinal confortable dans les sections de couplage.

- **Limites d'emploi**

Les coupleurs, et tout particulièrement les coupleurs *multi*, ne sont pas conçus pour tolérer un décollement de l'ancrage actif primaire de sa plaque d'appui sur le béton, un tel décollement ne pouvant survenir que si, à la mise en tension du câble secondaire, la force P' qu'il transmet au droit du coupleur est supérieure à la force ancrée P du câble primaire. En effet, les tensions individuelles des différentes armatures constitutives du câble présentent une certaine dispersion. En cas de décollement, le coupleur trouve donc une position d'équilibre qui ne respecte pas strictement l'alignement avec l'axe commun aux deux tronçons de câble couplés. Il apparaît ainsi dans les armatures, à proximité immédiate de leurs points d'ancrage, des cassures angulaires qui, si elles sont trop importantes, peuvent entraîner des ruptures prématurées. Avec des couplages mono, le risque de rupture est plus faible qu'avec des couplages multi du fait que, dans la tête d'ancrage décollée, les clavettes sont à la limite du déclavetage et n'exercent plus l'effet aggravant d'étreinte latérale qui subsiste intégralement dans les coupleurs multi. Le phénomène de décollement est rare dans le cas d'une précontrainte intérieure au béton, dans la mesure où les tronçons de câbles raccordés sont suffisamment longs et présentent un tracé ondulé, les frottements relativement importants empêchant alors la force secondaire de dépasser la force primaire. En revanche, ce phénomène est fréquent avec des câbles extérieurs au béton, surtout lorsqu'ils sont rectilignes ; les frottements pratiquement nuls le long du câble secondaire ne peuvent plus compenser les pertes par rentrée d'ancrage et par relaxation du câble primaire. Le risque corrélatif de rupture peut se trouver sensiblement augmenté si les tracés théoriques des deux tronçons à coupler ne sont pas rigoureusement coaxiaux mais présentent une cassure angulaire, même légère, au droit du coupleur.

- **Problème pratiques**

Les organes de couplage supportent généralement assez mal d'être sollicités par des efforts de traction excentrés. Il est donc indispensable d'assurer un alignement aussi parfait que possible entre les deux tronçons de câbles couplés et, pour ce faire, de ménager des portions de tracés strictement rectilignes de part et d'autre des coupleurs. Dans cette zone, les armatures de maintien des gaines doivent être rapprochées pour que l'alignement ne soit pas détruit pendant le bétonnage. surtout lorsqu'on veut la réaliser à l'avancement, tronçon par tronçon, en suivant la progression du chantier de construction. Généralement, il vaut mieux injecter le tronçon n avant de tendre le tronçon $n + 1$. On peut alors limiter efficacement la pénétration du coulis au seul tronçon n concerné et éviter la contamination du tronçon $n + 1$, qui rendrait problématique son injection ultérieure.

4.6. Injection et cachetage

Le plus souvent, la protection définitive des câbles est assurée par injection d'un coulis de ciment. Cette injection doit être réalisée dès que possible après la mise en tension des armatures. Il est souhaitable que le délai entre ces deux opérations ne dépasse pas un mois, ce qui correspond au temps pendant lequel la protection

provisoire par huile soluble, appliquée en usine, puis renouvelée périodiquement sur chantier, demeure efficace.

4.6.1. Coulis d'injection

Il s'agit d'un mélange de ciment (généralement du CPA), d'eau et éventuellement de certains adjuvants. Les caractéristiques d'un coulis sont :

- la fluidité, mesurée par le temps d'écoulement au cône de Marsh ; cette fluidité doit être suffisante pour éviter que ne se forment des bouchons en cours d'injection ;
- l'exsudation ; la quantité d'eau exsudée à la surface d'une éprouvette de coulis au repos durant 3h doit être au plus égale à 2 % du volume total ; cette eau doit être complètement réabsorbée 24 h après
- le temps pendant lequel le coulis demeure injectable (dans des conditions normales de température, il peut être de plusieurs heures avec certaines formulations bien étudiées).

4.6.2. Opération d'injection

Le câble, muni d'évents en ses points hauts et bas, ainsi qu'à ses extrémités préalablement obturées, soit par un cachetage, soit par un capot (provisoire ou définitif), subit, le plus souvent, un lavage et, moyennant une légère montée en pression, de détecter d'éventuels défauts d'étanchéité. Cette eau est ensuite éliminée par soufflage à l'air comprimé, déshuilé. Le coulis est alors injecté par le ou les points bas, les évents successifs n'étant fermés que lorsque la consistance du produit qui en sort est comparable à celle du produit injecté. En général, la pression d'injection est limitée à 1,5 MPa. Après obturation du dernier évent, une pression résiduelle de 0,5 MPa est maintenue pendant une minute au moins.

4.6.3. Cachetage

C'est l'opération qui assure la protection et l'étanchéité au niveau des ancrages. Elle est au moins aussi importante que l'injection : on a constaté, sur des ouvrages anciens, que des câbles même mal injectés pouvaient se comporter parfaitement si l'on interdisait la pénétration de l'eau par leurs extrémités. En revanche, toute circulation d'eau à l'intérieur des conduits est catastrophique pour la conservation des armatures de précontrainte. Plusieurs solutions sont utilisées :

- réalisation d'un cachetage en béton, armé par des aciers laissés en attente ; il peut être mis en place avant l'injection (et doit alors présenter une résistance suffisante pour tenir la pression d'injection) ou, au contraire, après l'injection, le confinement du coulis pendant cette opération étant alors assuré par un capot provisoire ;
- utilisation d'un capot métallique étanche définitif, injecté de coulis en même temps que le conduit ; ce capot doit lui-même recevoir une protection anti-corrosion efficace.

Chapitre V - Calcul de la force de précontrainte

Le présent chapitre détaille le calcul de la force de précontrainte dans le cas d'une précontrainte adhérente par post-tension.

1. Présentation des pertes

La force de précontrainte dans un câble varie à la fois dans l'espace (le long de l'abscisse du câble) et dans le temps.

La tension en un point du câble dans la structure diffère de la force du vérin avec lequel le câble a été tendu, du fait d'un certain nombre de pertes qui font baisser significativement la tension du câble. C'est d'ailleurs à cause de ces pertes qu'on est obligé d'utiliser des câbles à très haute limite d'élasticité.

On regroupe habituellement les pertes en deux familles :

- pertes instantanées :

Il s'agit des pertes qui se produisent à la mise en tension du câble :

- pertes dues au frottement
- pertes aux ancrages

Par abus de langage, on classe également dans les pertes instantanées l'ensemble des pertes qui se produisent « à court terme » durant le processus de construction de l'ouvrage :

- pertes par non simultanément des mises en tensions des différents câbles
- pertes par application de charges permanentes postérieurement à la tension

- pertes différées :

On appelle pertes différées les pertes qui se développent dans le temps :

- pertes dues au retrait du béton
- pertes dues au fluage du béton
- pertes dues à la relaxation des câbles

2. Tension à l'origine

C'est celle qu'on impose aux armatures devant un ancrage actif et le dispositif d'épanouissement associé (trompette ou *tromplaque*), côté béton, au moment de la mise en tension, avant le transfert de l'effort à l'ancrage (Figure 24). Il s'agit donc de la tension en O, σ_{p0} , inférieure à la tension en A, σ_{pA} (à l'entrée de la tête d'ancrage) du fait des frottements entre les armatures et :

- la tête d'ancrage, de A à B, d'une part ;
- la trompette d'épanouissement, de B à O, d'autre part.

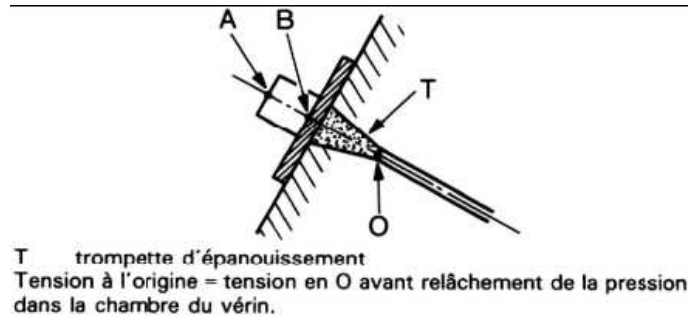


Figure 24 - Définition de l'origine des tensions

La perte de tension entre A et O, définie dans la notice technique du procédé considéré, est couramment de l'ordre de 2 %, de sorte que

$$\sigma_{p0} = 0,98 \sigma_{pA}$$

ou, si l'on raisonne en forces ($P = A_P \sigma_P$, A_P représentant la section nominale du câble) :

$$P_0 = 0,98 P_A$$

Notons que la force P_A , elle-même, est inférieure au produit de la section du piston par la pression dans la chambre à cause des frottements internes du vérin. Une courbe de correspondance entre pression et force appliquée P_A par le vérin permet de tenir compte de ce dernier phénomène. Il n'en demeure pas moins que, sur le chantier, pour obtenir $P_0 = A_P \sigma_{p0}$ en O, il faut appliquer en A une force P_A supérieure d'environ 2 %. Pour le projeteur, P_0 constitue la valeur de référence puisque c'est elle qui fait l'objet de limitations réglementaires. La contrainte à l'origine correspondante est plafonnée à la plus faible des valeurs suivantes :

- 0,80 f_{pk} pour les fils et torons, 0,70 f_{pk} pour les barres ;
- 0,90 $f_{p0,1k}$;
- ce qu'indique la notice technique du procédé de précontrainte utilisé.

Sauf cas très particulier, les câbles sont toujours tendus au maximum autorisé, pour des raisons évidentes d'économie.

Signalons que la force exercée par le vérin est légèrement supérieure, pour tenir compte des pertes à l'intérieur du vérin. Les procédures de mise en tension des câbles permettent généralement de corréliser directement la pression dans le vérin et la tension souhaitée dans le câble en sortie du vérin.

3. Pertes instantanées

3.1. Pertes par frottement

3.1.1. Courbure du tracé

Considérons un tronçon élémentaire de câble courbe, de rayon de courbure R , compris entre les abscisses s et $s+ds$ (Figure 25).

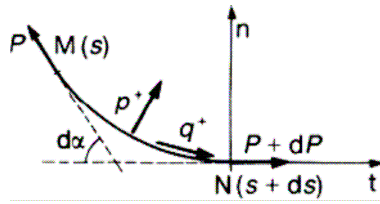


Figure 25 - Équilibre d'un tronçon de câble

Le tronçon de câble MN est en équilibre sous l'effet :

- de la force de tension $P(s)$ en M, tangente en M au tracé ;
- de la force de tension $P(s) + dP$ en N, tangente en N au tracé ;
- des forces de contact que le béton exerce sur lui entre M et N (par l'intermédiaire du conduit). Ces forces réparties ont une composante normale $p ds$ et une composante tangente $q ds$ (comptées algébriquement dans les sens indiqués par les flèches p^+ et q^+ de la Figure 25).

Écrivons cet équilibre en projection sur la normale n en N. Si l'on néglige les termes du 2^{ème} ordre : $P d\alpha + p ds = 0$ d'où $p = -P \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{P}{R}$ (1)

De même, en projection sur la tangente en N :

$$dP + q ds = 0 \quad \text{d'où} \quad q = -\frac{dP}{ds} \quad (2)$$

Le signe $-$ de l'expression (1) montre que la composante p est centrifuge, le signe $-$ de l'expression (2) que q est orienté dans le sens où P va en décroissant. q représente physiquement la force tangente de frottement que le conduit exerce sur le câble au moment de la mise en tension.

Si l'on admet qu'entre q et p existe la relation fondamentale du frottement solide : $|q| = \mu |p|$ avec μ coefficient de frottement du câble sur son conduit, l'équation (2) s'écrit :

$$dP = \pm \mu P d\alpha \quad (3)$$

$$\text{soit} \quad \frac{dP}{P} = \pm \mu d\alpha \quad (4)$$

Convenons ici que $d\alpha$ représente la déviation angulaire arithmétique (essentiellement positive) entre les deux extrémités du tronçon MN et supposons que le câble complet, orienté de la gauche vers la droite, soit mis en tension par son extrémité gauche O (que l'on confond géométriquement, dans la pratique, avec le point A, Figure 26).

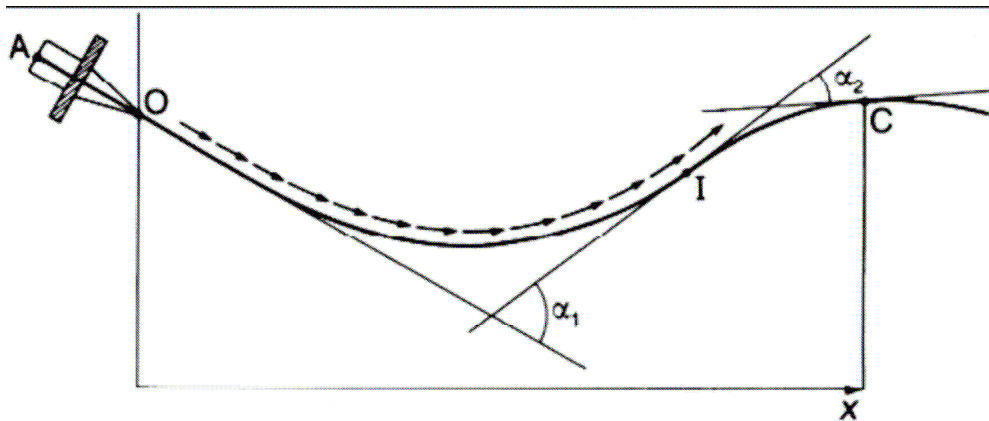


Figure 26 - Frottements le long du câble lors de la mise en tension

Il est alors évident que, lors de la mise en tension, le déplacement du câble par rapport au béton s'effectue de la droite vers la gauche et que l'action tangentielle de contact du conduit sur les armatures, s'opposant à ce mouvement, s'exerce de la gauche vers la droite ; la tension diminue donc entre le point O et le point courant C d'abscisse x du tracé et le signe à retenir dans l'équation (4) est le signe $-$. D'où, par intégration de (4) :

$$P(x) = P_0 \exp(-\mu\alpha) \quad (5)$$

α fonction de x désignant la somme des déviations angulaires arithmétiques entre le point O et le point C d'abscisse x .

Dans cette expression, la quantité α est égale à la somme des variations angulaires absolues comptées depuis le point de mise en tension du câble :

$$\alpha(s) = \int_0^s |d\alpha|$$

Remarquons qu'en général α n'est pas l'angle entre les tangentes en O et en C du tracé. Ce n'est cet angle que lorsque la courbure conserve un signe constant entre O et C. Ainsi sur la Figure 26 : $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

3.1.2. Déviations parasites

Un conduit ne suit jamais parfaitement son tracé théorique ; il *festonne* entre ses points de fixation sous l'effet de son poids, de la poussée du béton, des incertitudes de positionnement des attaches. À la déviation angulaire théorique α entre O et C vient donc se superposer une déviation parasite sensiblement proportionnelle à la distance entre O et C, donc de la forme kx . k est le coefficient de perte en ligne. Compte tenu de ce phénomène, la formule (5) se généralise donc ainsi :

$$P(x) = P_0 \exp(-\mu(\alpha(x) + kx)) \quad (6)$$

ou, si l'on raisonne sur les contraintes :

$$\sigma_p(x) = \sigma_{p0} \exp(-\mu(\alpha(x) + kx)) \quad (7)$$

Dans la section d'abscisse x , la perte de tension par frottement vaut donc :

$$\Delta\sigma_p(x) = \sigma_{p0} [1 - \exp(-\mu(\alpha(x) + kx))] \quad (8)$$

soit, si l'exposant est faible : $\Delta\sigma_p(x) = \sigma_{p0} \mu(\alpha(x) + kx)$ (9)

3.1.3. Valeurs des coefficients de frottement

Cas de la précontrainte intérieure au béton

Pour les câbles constitués de fils ou de torons, on peut, lorsque les armatures sont huilées et que les conduits (gainés ou tubes métalliques) sont en bon état, utiliser les valeurs moyennes des coefficients μ et k données dans le tableau suivant :

Tableau 5.1 : Coefficients de frottement μ pour les armatures de précontrainte par post-tension — Armatures intérieures et armatures extérieures non-adhérentes

	Armatures intérieures ¹⁾	Armatures extérieures (non-adhérentes)			
		Gaine en acier / non graissé	Gaine en PEHD / non graissé	Gaine en acier / graissé	Gaine en PEHD / graissé
Fil tréfilé à froid	0,17	0,25	0,14	0,18	0,12
Toron	0,19	0,24	0,12	0,16	0,10
Barre non lisse	0,65	—	—	—	—
Barre lisse	0,33	—	—	—	—

1) Dans le cas d'armatures remplissant environ la moitié de la gaine.

NOTE PEHD — polyéthylène haute densité.

À défaut de données fournies par un Agrément Technique Européen, les valeurs des déviations angulaires parasites pour les armatures intérieures seront généralement telles que $0,005 < k < 0,01$ par mètre.

Pour les tracés de câbles complexes il conviendra de retenir la valeur haute de la fourchette. Pour les câbles traversant de nombreux joints (comme par exemple les câbles intérieurs des ponts construits par encorbellements successifs) il y a lieu de majorer encore les valeurs de k pour tenir compte des variations angulaires parasites concentrées à chaque surface de reprise.

Cas de la précontrainte extérieure au béton

À l'extérieur du béton, il n'y a pas de déviations angulaires parasites et l'on admet $k = 0$. Les valeurs du coefficient de frottement sont fonction du type de gaine et données dans le tableau précédent.

3.2. Pertes à la mise en charge de l'ancrage (rentrée d'ancrage)

Lors du report de l'effort du vérin à l'ancrage, le câble subit toujours un léger raccourcissement g :

— faible dans le cas des ancrages par calage ou vissage ; g , de l'ordre de 2 mm, est alors la conséquence de la déformation du corps d'ancrage et du tassement des cales ou des filets ;

— plus important dans le cas des ancrages par coincement : les torons et les clavettes subissent un déplacement vers l'intérieur de la pièce qui peut atteindre 6 mm et même davantage lorsque le vérin n'est pas muni d'un système de clavetage hydraulique (permettant d'enfoncer de force les mors dans leur logement conique avant relâchement de la pression dans la chambre du vérin). Les notices techniques des procédés de précontrainte définissent, pour chaque type d'ancrage, la valeur probable de g . Le mouvement de rentrée vers l'intérieur du béton est contrarié par le frottement du câble sur sa gaine, comme à la mise en tension, mais en sens inverse.

Son influence diminue donc à partir de l'ancrage jusqu'à s'annuler à une distance d de celui-ci (Figure 27) à partir duquel la tension demeure inchangée.

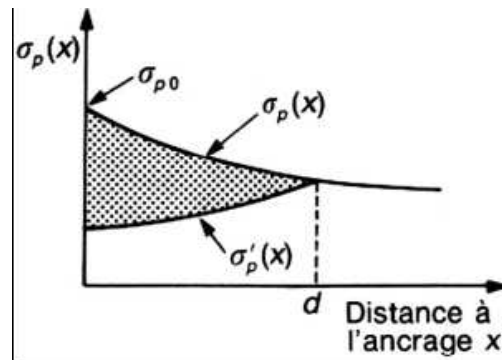


Figure 27 – Tension le long du câble, avant et après relâchement de la pression dans le vérin

Avant rentrée d'ancrage, la tension à l'abscisse x était donnée par la formule (7) : $\sigma_p(x) = \sigma_{p0} \exp(-\mu(\alpha(x) + kx))$ qui s'écrit encore : $\sigma_p(x) = \sigma_{p0} \exp(-K(x))$ (10) avec $K(x)$ fonction croissante de x .

L'allongement relatif de l'armature, à l'abscisse x , valait : $\varepsilon_p(x) = \frac{\sigma_p(x)}{E_p}$ (11)

Après rentrée d'ancrage, la tension à l'abscisse $x (< d)$ n'est plus que :

$$\sigma'_p(x) = \sigma_p(d) \exp(-K(d) + K(x)) \quad (12)$$

$$\text{soit } \sigma'_p(x) = \sigma_{p0} \exp(-2K(d) + K(x)) \quad (13)$$

$$\text{et l'allongement : } \varepsilon'_p(x) = \frac{\sigma'_p(x)}{E_p} \quad (14)$$

On peut écrire que g est la somme des pertes d'allongement $[\varepsilon_p(x) - \varepsilon'_p(x)]dx$ des tronçons dx entre O et D, soit :

$$g = \int_0^d [\varepsilon_p(x) - \varepsilon'_p(x)] dx \quad (15)$$

$$\text{ou } g = \frac{1}{E_p} \int_0^d [\sigma_p(x) - \sigma'_p(x)] dx \quad (16)$$

L'intégrale figurant dans (16) représente l'aire tramée sur la Figure 27. L'équation (16), compte tenu de (10) et (13), permet de calculer d , donc $\sigma'_p(x)$ ou, ce qui revient au même, la perte par rentrée d'ancrage :

$$\Delta\sigma_g(x) = \sigma_p(x) - \sigma'_p(x) \quad (17)$$

3.3. Pertes par déformation instantanée du béton

3.3.1. Principe général

Toute action permanente j appliquée à une date t_j postérieurement à la mise en tension et à l'ancrage d'un câble de précontrainte provoque dans le béton adjacent

une variation de contrainte $\Delta\sigma_c(t)$, donc une variation de raccourcissement

$\Delta\varepsilon_{cj}(t_j) = \frac{\Delta\sigma_{cj}(t_j)}{E_{cm}(t_j)}$. Le câble considéré subit la même variation de déformation, d'où

une perte de tension (ou un gain si $\Delta\sigma_{cj}(t_j) < 0$) : $E_p \frac{\Delta\sigma_{cj}(t_j)}{E_{cm}(t_j)}$ (18)

Les actions permanentes j précédemment évoquées peuvent résulter de :

- la mise en tension d'un nouveau câble ;
- l'application d'un supplément de poids propre dans le cas d'une construction par phases ;
- la mise en place de superstructures.

Sauf dans les cas rares où plusieurs câbles seraient tendus de façon rigoureusement simultanée, il faudrait donc faire, en principe, le calcul de ces pertes câble par câble, ce qui serait très laborieux. On se contente, en pratique, d'une évaluation plus sommaire qui se justifie par la faible importance relative des pertes en question. Pour ce faire, on regroupe les câbles en familles homogènes. Sont considérés comme appartenant à une même famille tous les câbles de tracé comparable tendus au cours d'une même phase de construction. Les câbles d'une famille donnée sont tous affectés d'une même perte moyenne par déformation élastique du béton résultant :

- de l'application de charges permanentes additionnelles ou de la mise en tension d'autres familles postérieurement à la réalisation de l'ancrage des câbles ; les pertes partielles correspondantes se calculent par la formule (18) ;
- de l'échelonnement des mises en tension des différents câbles de la famille en question.

3.3.2. Pertes par échelonnement des mises en tension des câbles d'une même famille

Supposons que la famille en question comporte N câbles de même puissance passant sensiblement au même niveau dans une section donnée. La mise en tension de ces N câbles provoque, dans le béton adjacent, une variation de contrainte normale $\Delta\sigma_c$. Chaque câble apporte à cette variation de contrainte une contribution

$\frac{\Delta\sigma_c}{N}$, la variation correspondante de déformation du béton étant $\frac{\Delta\sigma_c}{NE_{cm}}$, où

E_{cm} représente le module instantané du béton. Du fait que les N câbles ne sont pas tendus en même temps (il faudrait pour cela disposer d'au moins N vérins sur le chantier), le $n^{\text{ème}}$ câble mis en tension subit le raccourcissement dû aux $(N - n)$

câbles tendus après lui : $\frac{(N - n)}{N} \frac{\Delta\sigma_c}{E_{cm}}$. Sa perte de tension vaut donc :

$E_p \frac{(N - n)}{N} \frac{\Delta\sigma_c}{E_{cm}}$ et sa perte de force : $A_p E_p \frac{(N - n)}{N} \frac{\Delta\sigma_c}{E_{cm}}$ avec A_p section du câble en

question. La perte globale de force pour les N câbles est :

$$\sum_{n=1}^N A_p E_p \frac{(N - n)}{N} \frac{\Delta\sigma_c}{E_{cm}} = A_p E_p \frac{N(N - 1)}{2N} \frac{\Delta\sigma_c}{E_{cm}}$$

D'où, pour la famille considérée, une perte moyenne de tension (que l'on obtient en divisant la perte de force par la section NA_p des N câbles) :

$$\frac{1}{2} \frac{E_p}{E_{cm}} \frac{(N-1)}{N} \Delta\sigma_c \quad (19)$$

Cette expression tend vers : $\frac{1}{2} \frac{E_p}{E_{cm}} \Delta\sigma_c$ (20) lorsque N augmente indéfiniment.

En fait, c'est la formule (20), majorante de la formule (19) que l'on applique dans la pratique pour estimer les pertes par échelonnement des mises en tension au sein d'une famille de câbles.

3.3.3. **Récapitulation et simplification des formules de calcul**

Les formules (18) et (20) peuvent se résumer sous la forme suivante :

$$\Delta\sigma_e = E_p \sum \left[k_j \frac{\Delta\sigma_{cj}(t_j)}{E_{cm}(t_j)} \right] \quad (21)$$

avec

$\Delta\sigma_{cj}(t_j)$ variation de contrainte du béton adjacent à la famille j de câbles étudiée, dans la section considérée, sous l'effet des actions permanentes appliquées au jour t_j ;

k_j coefficient multiplicateur égal à : 1/2 pour $\Delta\sigma_{cj}(t_j)$ dû à la mise en tension des câbles mêmes de la famille et aux charges permanentes mobilisées simultanément, 1 pour les variations $\Delta\sigma_{cj}(t_j)$ générées par les actions permanentes appliquées postérieurement à la mise en tension de la famille.

Assez fréquemment, on peut considérer que l'on n'a qu'une famille de câbles et que le seul $\Delta\sigma_{cj}(t_j)$ intéressant la structure est celui qui résulte de la mise en tension des câbles en question et de la mobilisation simultanée du poids propre de la structure. Alors $\Delta\sigma_{cj}(t_j)$ se confond avec $\sigma_{cj}(t_j)$, contrainte initiale du béton adjacent et la formule (21) se réduit à :

$$\Delta\sigma_e = \frac{1}{2} \frac{E_p}{E_{cm}} \Delta\sigma_c \quad (22)$$

Si l'on se contente d'une évaluation sommaire de $\Delta\sigma_e$ (très souvent suffisante compte tenu de la petitesse de ce terme), on confond $\Delta\sigma_c$ avec σ_c , contrainte finale (après stabilisation des pertes) du béton au niveau des câbles dans l'ouvrage soumis à ses seules charges permanentes. Comme E_p/E_{cm} est, en pratique, voisin de 6, l'ordre de grandeur de la perte par déformation instantanée du béton est donné par :

$$\Delta\sigma_e = \frac{1}{2} \frac{E_p}{E_{cm}} \Delta\sigma_c = 3\sigma_c \quad (23)$$

4. Tension initiale

C'est celle qui subsiste dans le câble une fois effectuées toutes les pertes instantanées analysées :

$$\sigma_i(x) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_\phi(x) - \Delta\sigma_g(x) - \Delta\sigma_e(x)$$

5. Pertes différées

5.1. Pertes par retrait

Les câbles, liés au béton à leurs extrémités par les ancrages, et tout au long de leur tracé par le coulis d'injection, sont astreints à subir les mêmes variations de déformations que le béton adjacent. Si t_0 est l'âge du béton au moment de la mise en tension d'un câble, la partie non encore effectuée du retrait vaut :

$$[\varepsilon_{ca}(t) - \varepsilon_{ca}(t_0)] + [\varepsilon_{cd}(t) - \varepsilon_{cd}(t_0)] = \varepsilon_{cs}(t) - \varepsilon_{cs}(t_0)$$

La perte finale de tension par retrait est donc, pour le câble considéré :

$$\Delta\sigma_s = E_p [\varepsilon_{ca}(\infty) - \varepsilon_{ca}(t_0)] + E_p [\varepsilon_{cd}(\infty) - \varepsilon_{cd}(t_0)] \quad (25)$$

5.2. Pertes par fluage

La contrainte du béton au niveau des armatures de précontrainte n'est pas constante dans le temps, même si l'on fait abstraction des charges variables appliquées à la structure pendant des durées trop brèves pour avoir une influence significative sur le fluage. Cette contrainte $\sigma_c(t)$ varie à cause (Figure 28) :

- des différentes phases de construction qui se traduisent par l'application de nouvelles charges permanentes ;
- des pertes différées de toute nature qui entraînent une évolution progressive de la tension dans les câbles.

Si l'on désigne par σ_{\max} et σ_{\min} les valeurs extrêmes qu'elle présente, il est facile de montrer, dans le cadre des hypothèses de la viscoélasticité linéaire que la déformation totale du béton satisfait, à tout instant à :

$$\frac{\sigma_{\min}}{E_{cm}} (1 + \phi(t, t_0)) \leq \varepsilon(t) \leq \frac{\sigma_{\max}}{E_{cm}} (1 + \phi(t, t_0))$$

avec t_0 âge du béton au moment de la mise en tension des armatures considérées.

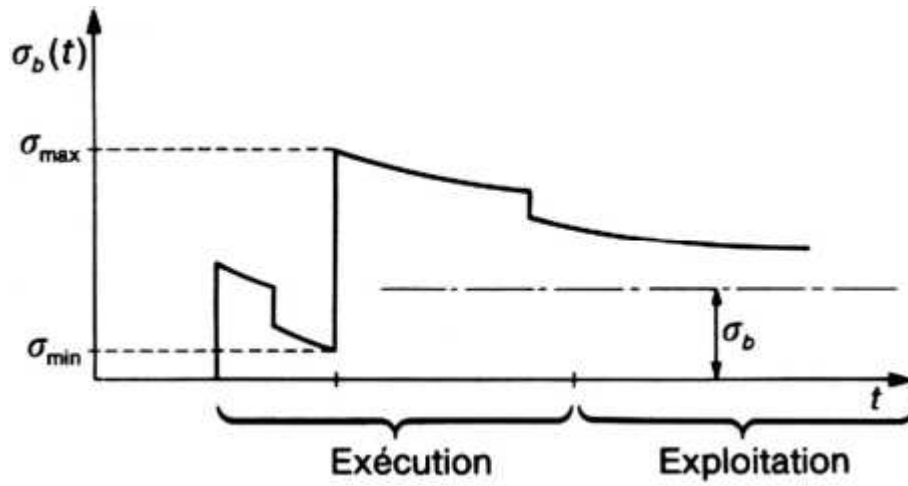


Figure 28 - Variation de la contrainte du béton au niveau d'un câble

Pour simplifier, on peut se contenter de la formule simplifiée suivante, obtenue en faisant la moyenne des contraintes maximales et minimales :

$$\varepsilon_{fl}(t) = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \frac{1}{E_{cm}} \phi(t, t_0)$$

De ce fait, la perte finale par fluage vaut :

$$\sigma_{fl}(t) = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \frac{E_p}{E_{cm}} \frac{\phi(t, t_0)}{2}$$

Si l'on poursuit la simplification en admettant que σ_{\min} est dû aux charges permanentes ($= \sigma_{c,QP}$), que σ_{\max} est inférieur à 1,5 fois σ_{\min} et que le coefficient de fluage vaut à peu près 2, alors :

$$\sigma_{fl}(t) = 2,5 \sigma_{c,QP} \frac{E_p}{E_{cm}} \text{ soit environ } \sigma_{fl}(t) = 15 \sigma_{c,QP}$$

5.3. Pertes par relaxation

Comme on l'a vu précédemment, la perte de tension finale due à la relaxation peut être estimée par la formule (valable pour la classe 2 – très basse relaxation) :

$$\frac{\Delta \sigma_{pr}}{\sigma_{pr}} = 0,66 \rho_{1000} e^{9,1\mu} \left(\frac{t}{1000} \right)^{0,75(1-\mu)} 10^{-5}$$

5.4. Pertes différées totales

Pour tenir compte de l'interaction du retrait et du fluage avec la relaxation des armatures, les pertes différées finales sont évaluées par la formule :

$$\Delta \sigma_{c+s+r} = \varepsilon_{cs} E_p + 0,8 \Delta \sigma_{pr} + \frac{E_p}{E_{cm}} \phi(t, t_0) \sigma_{c,QP} \quad (26)$$

Le coefficient 0,8 traduit la réduction de relaxation du fait des pertes par retrait et fluage.

L'Eurocode 2 introduit une formule plus compliquée tenant compte de l'excentricité z_{cp} de la précontrainte par rapport au centre de gravité du béton :

$$\Delta\sigma_{c+s+r} = \frac{\varepsilon_{cs} E_p + 0,8\Delta\sigma_{pr} + \frac{E_p}{E_{cm}} \varphi(t, t_0) \sigma_{c,QP}}{1 + \frac{E_p}{E_{cm}} \frac{A_p}{A_c} \left(1 + \frac{A_c}{I_c} z_{cp}^2\right) [1 + 0,8\varphi(t, t_0)]} \quad (27)$$

Le dénominateur est cependant généralement peu différent de 1. On pourra généralement se contenter de la formule (26) qui est sécuritaire.

6. Tension à un instant quelconque

En valeur probable, elle s'établit ainsi : $\sigma_p(x, t) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_i(x) - \Delta\sigma_{c+s+r}(x, t)$

Les valeurs caractéristiques de la tension sont données par :

$$\sigma_{\text{sup}} = r_{\text{sup}} \sigma_p(x, t) \text{ et } \sigma_{\text{inf}} = r_{\text{inf}} \sigma_p(x, t)$$

7. Calcul manuels de pertes

Les calculs de pertes sont aujourd'hui intégrés dans la plupart des logiciels de calcul de structure qui permettent de traiter de façon exacte le problème. Dans les calculs manuels, on effectue couramment les approximations suivantes :

- l'abscisse de la poutre et l'abscisse curviligne du câble sont confondues (les câbles étant généralement peu inclinés par rapport à l'axe de la poutre)
- les exponentielles décroissantes sont linéarisées
- les pertes différées par fluage sont évaluées forfaitairement à partir des contraintes extrêmes subies par le béton (voir précédemment)
- l'interaction entre pertes différées est traitée à l'aide de règles de cumul simplifiées (26)

Chapitre VI - Contexte réglementaire

Avant de décrire dans les chapitres suivants le comportement des structures en béton précontraint, ce chapitre rassemble un certain nombre de données et prescriptions d'origine réglementaire nécessaires au calcul d'une structure en béton précontraint. Nous nous efforcerons pas la suite de ne pas faire appel au règlement pour décrire le comportement physique de la précontrainte.

1. Généralités

Le béton précontraint est actuellement régi par les règles BPEL qui sont progressivement remplacées par les normes Eurocodes, en particulier l'Eurocode 2 (béton) partie 1.1 (règles générales et bâtiment) et partie 2 (Ponts). Les charges sont définies dans l'Eurocode 1. L'Eurocode 1 et 2 sont des normes semi probabilistes basées sur la notion d'états limites. Les données de base (valeurs des actions à prendre en compte, performances mécaniques des matériaux mis en oeuvre, etc.) de la justification d'une structure étant des grandeurs aléatoires, une sécurité absolue ne peut être assurée. Partant de cette remarque, les normes proposent la démarche suivante :

- recherche des phénomènes à éviter (par exemple : fissuration, déformations excessives, vibrations, plastification locale des matériaux, ruine) ;
- analyse des conséquences de chacun de ces phénomènes (par exemple : inconfort, diminution de la durée de vie escomptée des ouvrages, risques pour les usagers) ;
- définition de critères de sécurité réduisant d'autant plus la probabilité d'occurrence de ces phénomènes que les conséquences de leur apparition sont plus graves.

En pratique, à chaque phénomène à éviter correspond un état limite. Selon la gravité des risques qui leurs sont associés, ces états limites se rangent en deux grandes catégories : les états limites de service (ELS) et les états limites ultimes (ELU).

Vis-à-vis des ELS, on souhaite que les matériaux se comportent de façon réversible (élastique la plupart du temps).

Vis-à-vis des ELU, au contraire, on accepte généralement qu'ils entrent dans leur domaine de fonctionnement plastique.

Par ailleurs, les actions aussi bien que les caractères mécaniques des matériaux sont définis par différentes valeurs représentatives, en particulier par des valeurs dites caractéristiques. À partir des valeurs représentatives des actions, on forme alors des combinaisons d'actions (ensemble d'actions à considérer simultanément pour le dimensionnement) dans lesquelles les valeurs caractéristiques F_i sont affectées de coefficients de prise en compte γ_{Fi} d'autant plus importants qu'on souhaite réduire la probabilité d'atteinte des effets des combinaisons en cause (ces coefficients γ_{Fi} sont donc plus grands dans les combinaisons aux ELU que dans les combinaisons aux ELS).

Ces effets de calcul doivent être comparés aux capacités de résistance de la structure, elles-mêmes estimées à partir, non pas des valeurs caractéristiques des caractères mécaniques des matériaux

f_{jk} , mais à partir de leurs valeurs de calcul, obtenues en divisant les premières par des coefficients de sécurité γ_{mj} d'autant plus importants qu'on vise une fiabilité plus grande.

2. États-limites

Un état-limite est celui dans lequel une condition requise d'une construction est strictement satisfaite. Comme déjà vu, on distingue, selon la gravité des conséquences de leur atteinte, deux grandes catégories d'états-limites : les ELS et les ELU. Les justifications aux ELS ont pour objet de s'assurer de la durabilité des structures et de leur aptitude à remplir la fonction pour laquelle elles ont été conçues. Les justifications aux ELU permettent de vérifier leur résistance. En pratique interviennent, dans les constructions précontraintes, les états-limites suivants :

ELS :

- déformation
- décompression
- formation de fissures (par excès de traction, mais aussi de compression)
- ouverture de fissures

ELU :

- stabilité statique
- résistance
- stabilité de forme (flambement, déversement, etc.)

3. Actions et valeurs représentatives

Selon leur nature, les actions sont classées en :

— actions permanentes (poids propre, poids des équipements fixes, précontrainte, etc.) ;

— actions variables (qui peuvent être cycliques comme la température climatique, ou intermittentes comme les charges d'exploitation ou les charges d'origine naturelle telles que la neige et le vent).

Hormis les actions accidentelles qui ne peuvent être définies que par une valeur nominale, ces actions sont toutes affectées, en principe, de deux valeurs caractéristiques, l'une maximale, l'autre minimale, selon le côté de la distribution que l'on considère. Chaque valeur caractéristique d'une action est celle qui présente probabilité faible, mais non nulle, acceptée a priori, d'être atteinte ou dépassée dans le sens défavorable au cours d'une certaine durée, dite durée de référence, dont l'ordre de grandeur est celui de la durée de vie escomptée pour l'ouvrage.

3.1. Actions permanentes

La charge probable de poids propre g est évaluée à partir des dessins de coffrage et d'une masse volumique habituellement estimée à 2,5 t/m³ pour le matériau béton précontraint, tout au moins lorsque l'on fait usage d'agrégats traditionnels. Il y aurait lieu, en principe, de considérer pour la charge de poids propre deux valeurs caractéristiques g_1 et g_2 encadrant la valeur probable g mais, sauf circonstances spéciales (notamment pièces minces pour lesquelles les imprécisions d'exécution possibles sont élevées en valeur relative), on se contente de la définir par sa valeur probable g qui a alors le caractère de charge nominale. De la même façon, les charges permanentes additionnelles sont définies soit par leur valeur probable g'

soit, si les incertitudes sont importantes ou si des modifications ultérieures sont envisageables, par des valeurs caractéristiques.

La précontrainte enfin est représentée, pour les justifications aux ELS, par deux valeurs caractéristiques $P_{k,inf}$ et $P_{k,sup}$ encadrant la valeur probable P_m avec :

$$P_{k,inf} = r_{inf} P_m \quad \text{et} \quad P_{k,sup} = r_{sup} P_m$$

Les valeurs de r_{inf} et r_{sup} sont de 0,95 et 1,05 ou bien 0,90 et 1,10 suivant le type de précontrainte (post-tension, prétension etc...)

Pour les justifications vis-à-vis des ELU, au contraire, seule la valeur probable P_m de la précontrainte est à considérer, d'éventuels écarts par rapport à cette valeur ayant peu d'incidence sur la sécurité à rupture.

3.2. Actions variables

Pour tenir compte de différentes probabilités d'occurrence ainsi que de l'application simultanée de plusieurs actions variables, on introduit pour elles, outre des valeurs caractéristiques Q_k , diverses valeurs représentatives dites :

- valeurs caractéristiques ;
- valeurs fréquentes;
- valeurs quasi permanentes.

Chacune de ces valeurs représentatives se dédouble, en fait, en une valeur maximale et une valeur minimale, cette dernière étant nulle pour les actions intermittentes, ce qui justifie que, pour ces actions intermittentes, seule soit explicitée leur valeur maximale.

4. Sollicitations de calcul

Elles résultent de combinaisons d'actions, ensemble d'actions qu'il y a lieu de considérer simultanément. Les coefficients des combinaisons permettent de couvrir les possibilités de dépassement des valeurs caractéristiques. Les sollicitations de calcul sont les suivantes :

4.1. Vis-à-vis des ELU

Combinaisons fondamentales

En désignant par $G_{kj,sup}$ l'ensemble des actions permanentes défavorables et par $G_{kj,inf}$ l'ensemble des actions permanentes favorables, elles s'écrivent :

$$\left\{ \sum_{j \geq 1} (1,35G_{kj,sup} + 1,00G_{kj,inf}) \right\} + \gamma_P P + \begin{cases} 1,35(TS + UDL + q_{fk}^*) + 1,5 \text{Min}(F_W^* ; 0,6F_{wk}) \\ 1,35gr_{i=1b,2,3,4,5} \\ 1,5T_k + 1,35(0,75TS + 0,4UDL + 0,4q_{fk}^*) \\ 1,5F_{wk} \\ 1,5Q_{Sn,k} \end{cases}$$

TS charge routière de type tandem et UDL charge routière de type répartie uniforme, ces deux charges forment le modèle de charge principal LM1 [EC1-2]

q_{fk} charge uniforme de trottoir

gr_i groupe de charge i , cette notion permet de définir clairement les combinaisons des différents modèles de charge à prévoir en vue de leur application simultanée sur les structures.

F_w action du vent. On distingue F_w^* l'action du vent en présence de trafic et F_{wk} l'action du vent sans trafic

T_k action de la température.

$Q_{Sn,k}$ action de la neige

Les combinaisons accidentelles prennent la forme générale suivante :

$$\sum_{j \geq 1} G_{k,j} \text{ "+" } P \text{ "+" } A_d \text{ "+" } (\psi_{1,1} \text{ ou } \psi_{2,1}) Q_{k,1} \text{ "+" } \sum_{i > 1} \psi_{2,i} Q_{k,i}$$

4.2. Vis-à-vis des ELS

Combinaisons caractéristiques :

$$\left\{ \sum_{j \geq 1} (G_{kj,\text{sup}} \text{ "+" } G_{kj,\text{inf}}) \right\} \text{ "+" } P_k \text{ "+" } \begin{cases} (TS + UDL + q_{fk}^*) \text{ "+" } \text{Min}(F_w^* ; 0,6F_{wk}) \\ gr_{i=1a,2,3,4,5} \text{ "+" } 0,6T_k \\ gr1b \\ T_k + (0,75TS + 0,4UDL + 0,4q_{fk}^*) \\ F_{wk} \\ Q_{Sn,k} \end{cases}$$

Combinaisons fréquentes :

$$\left\{ \sum_{j \geq 1} (G_{kj,\text{sup}} \text{ "+" } G_{kj,\text{inf}}) \right\} \text{ "+" } P_k \text{ "+" } \begin{cases} (0,75TS + 0,4UDL) \text{ "+" } 0,5T_k \\ 0,75gr1b \\ 0,75gr4 \text{ "+" } 0,5T_k \\ 0,6T_k \\ 0,2F_{wk} \\ 0,5Q_{Sn,k} \end{cases}$$

Combinaison quasi permanente :

$$\sum_{j \geq 1} (G_{kj,\text{sup}} \text{ "+" } G_{kj,\text{inf}}) \text{ "+" } P_k \text{ "+" } 0,5T_k$$

Ainsi rangées par ordre d'agressivité décroissante, toutes ces combinaisons sont à considérer dans la mesure où leur sont associés des critères de vérification différents, ce qui est le cas pour la flexion.

5. Situations

Une structure connaît toujours plusieurs situations, caractérisées chacune par l'intervalle de temps pendant lequel peuvent être considérés comme constants les distributions ou les processus aléatoires de toutes les données de la sécurité. Le plus souvent, on a à considérer :

— une ou plusieurs situations transitoires : la phase de construction notamment, mais également des phases de travaux par exemple ;

— une situation durable : la situation d'exploitation (dans certains cas, on peut en envisager plusieurs si l'on prévoit des changements dans les conditions d'exploitation) ;

— éventuellement, une ou plusieurs situations accidentelles.

En principe, les actions et leurs valeurs représentatives changent quand on passe d'une situation à une autre et, dans chaque situation, il convient d'apporter les justifications nécessaires vis-à-vis des sollicitations de calcul précédemment définies, étant bien entendu qu'à chaque combinaison correspondent deux états extrêmes de sollicitations associés à des cas de charge différents.

La notion de situation est particulièrement importante en béton précontraint, où la période d'exécution doit faire l'objet de vérifications spécifiques. En effet, les conditions auxquelles est alors soumise la structure sont souvent très différentes de celles que l'on rencontre en situation d'exploitation :

— la précontrainte, immédiatement après mise en tension des câbles, est nettement plus élevée qu'en période d'exploitation, puisqu'une partie des pertes différées (par retrait en fluage du béton et par relaxation des armatures) s'effectue entre-temps ;

— le béton, encore jeune, n'a pas atteint sa pleine résistance ;

— enfin, les charges extérieures appliquées à la structure ne sont pas les mêmes (du fait notamment que certaines charges réputées permanentes n'interviennent qu'à partir du moment où on les a mises en place). Compte tenu du caractère passager de ces conditions singulières, les exigences réglementaires (sur les contraintes limites en particulier) sont alors réduites.

6. Justifications vis-à-vis des états-limites de service

Ces justifications sont extrêmement simples dans leur principe. Les matériaux étant censés se comporter élastiquement, il suffit de calculer les contraintes qu'engendrent, dans les sections, les sollicitations de calcul et de s'assurer qu'elles respectent bien les contraintes limites définies réglementairement. Les limites que l'on fixe dépendent des conditions environnantes à l'ouvrage.

Ces conditions d'environnement sont définies dans la norme EN206-1 et sont reprises par l'Eurocode. La norme prévoit plusieurs classes d'exposition. Elles sont classées par type d'agression (par les chlorures, la carbonatation, le gel dégel) et par un degré de sévérité.

Tableau 4.1 : Classes d'exposition en fonction des conditions d'environnement, conformément à l'EN 206-1

Désignation de la classe	Description de l'environnement :	Exemples informatifs illustrant le choix des classes d'exposition
1 Aucun risque de corrosion ni d'attaque		
X0	Béton non armé et sans pièces métalliques noyées : toutes expositions sauf en cas de gel/dégel, d'abrasion et d'attaque chimique Béton armé ou avec des pièces métalliques noyées : très sec	Béton à l'intérieur de bâtiments où le taux d'humidité de l'air ambiant est très faible
2 Corrosion induite par carbonatation		
XC1	Sec ou humide en permanence	Béton à l'intérieur de bâtiments où le taux d'humidité de l'air ambiant est faible Béton submergé en permanence dans de l'eau
XC2	Humide, rarement sec	Surfaces de béton soumises au contact à long terme de l'eau Un grand nombre de fondations
XC3	Humidité modérée	Béton à l'intérieur de bâtiments où le taux d'humidité de l'air ambiant est moyen ou élevé Béton extérieur abrité de la pluie
XC4	Alternativement humide et sec	Surfaces de béton soumises au contact de l'eau, mais n'entrant pas dans la classe d'exposition XC2
3 Corrosion induite par les chlorures		
XD1	Humidité modérée	Surfaces de béton exposées à des chlorures transportés par voie aérienne
XD2	Humide, rarement sec	Piscines Éléments en béton exposés à des eaux industrielles contenant des chlorures
XD3	Alternativement humide et sec	Éléments de ponts exposés à des projections contenant des chlorures Chaussées Dalles de parcs de stationnement de véhicules
4 Corrosion induite par les chlorures présents dans l'eau de mer		
XS1	Exposé à l'air véhiculant du sel marin mais pas en contact direct avec l'eau de mer	Structures sur ou à proximité d'une côte
XS2	Immergé en permanence	Éléments de structures marines
XS3	Zones de marnage, zones soumises à des projections ou à des embruns	Éléments de structures marines
5 Attaque gel/dégel		
XF1	Saturation modérée en eau, sans agent de déverglaçage	Surfaces verticales de béton exposées à la pluie et au gel
XF2	Saturation modérée en eau, avec agents de déverglaçage	Surfaces verticales de béton des ouvrages routiers exposés au gel et à l'air véhiculant des agents de déverglaçage
XF3	Forte saturation en eau, sans agents de déverglaçage	Surfaces horizontales de béton exposées à la pluie et au gel
XF4	Forte saturation en eau, avec agents de déverglaçage ou eau de mer	Routes et tabliers de pont exposés aux agents de déverglaçage. Surfaces de béton verticales directement exposées aux projections d'agents de déverglaçage et au gel. Zones des structures marines soumises aux projections et exposées au gel
6 Attaques chimiques		
XA1	Environnement à faible agressivité chimique selon l'EN 206-1, Tableau 2	Sols naturels et eau dans le sol
XA2	Environnement d'agressivité chimique modérée selon l'EN 206-1, Tableau 2	Sols naturels et eau dans le sol
XA3	Environnement à forte agressivité chimique selon l'EN 206-1, Tableau 2	Sols naturels et eau dans le sol

6.1. Justifications à la flexion

Vis-à-vis des limites de traction, les zones les plus sensibles sont celles qui entourent les câbles. C'est pourquoi est présente la notion de section d'enrobage. La section d'enrobage est la partie de la section droite qui est délimitée par deux parallèles à l'axe de flexion encadrant l'ensemble des armatures longitudinales de précontrainte à une distance de celles-ci égale à la distance minimale admise entre une armature et le parement le plus proche. La limitation des tractions est

évidemment plus stricte à l'intérieur de la section d'enrobage que sur le reste de la section droite.

6.1.1. Contraintes limites de compression

Il est recommandé de limiter la contrainte de compression dans le béton à $0,45 f_{ck}$ sous combinaison quasi-permanente des charges afin de pouvoir utiliser les modèles de fluage linéaire. Dans le cas contraire, il convient de considérer un fluage non-linéaire. En l'absence de confinement, la contrainte de compression dans le béton doit être limitée à $0,6 f_{ck}$ sous combinaison caractéristique dans les parties exposées à des environnements de classe XD, XF et XS.

En construction, la contrainte de compression dans le béton doit être limitée à $0,45 f_{ck}(t)$ en phase de construction afin de pouvoir utiliser les modèles de fluage linéaire. La contrainte de compression dans le béton doit être limitée à $0,6 f_{ck}(t)$. Pour la prétension, on peut admettre de monter à $0,7 f_{ck}(t)$ sous réserve de justification.

6.1.2. Contraintes limites de traction

Il n'y a plus dans les eurocodes de limites de traction systématiques comme il en existait dans le règlement français antérieur (BPEL). Néanmoins, il existe des limites qui portent sur l'ouverture des fissures et sont définies dans le tableau suivant :

Classe d'exposition	Éléments en béton armé et éléments en béton précontraint sans armatures adhérentes	Éléments en béton précontraint à armatures adhérentes
X0, XC1	$w_{max} = 0,3\text{mm}$ sous ELS fréquent pas de limite si pas d'exigence d'aspect	$w_{max} = 0,2\text{mm}$ sous ELS fréquent
XC2 à XC4	$w_{max} = 0,3\text{mm}$ sous ELS fréquent	$w_{max} = 0,2\text{mm}$ sous ELS fréquent et $\sigma_c > 0$ sous ELS QP en zone d'enrobage
XD1 à XD3 XS1 à XS3	$w_{max} = 0,2\text{mm}$ sous ELS fréquent	$\sigma_c > 0$ sous ELS fréquent en zone d'enrobage $w_{max} = 0,2\text{mm}$ sous ELS fréquent ailleurs

Pour le béton précontraint à armatures adhérentes, on doit s'assurer pour les classes XC2-XC3-XC4 de la non décompression du béton ($\sigma_c \geq 0$) sous combinaison quasi permanente, et de la limitation de l'ouverture des fissures à $0,2\text{mm}$ sous combinaison fréquente.

Pour les classes plus sévères XD_i ou XS_i, on doit assurer la non décompression du béton sous combinaison fréquente des charges.

En plus de ces limites à ne pas dépasser, il existe d'autres limites de traction qui si elles sont dépassées, nécessitent des vérifications complémentaires :

- Si la limite de traction du béton est dépassée sous combinaison caractéristique des charges ($\sigma_c \leq -f_{ctm}$) il est nécessaire de faire un calcul en section fissurée (pas de résistance à la traction du béton, ou encore béton tendu négligé). Sinon, on peut réaliser les calculs en prenant en compte le béton tendu.
- Si on doit négliger le béton tendu (cas précédent) et qu'en plus la zone d'enrobage des câbles se décomprime sous combinaison fréquente des charges, on doit vérifier le comportement en fatigue des câbles.

On peut ainsi se donner des limites complémentaires ($\sigma_c \geq -f_{ctm}$ sous combinaison caractéristique et/ou $\sigma_c \geq 0$ sous combinaison fréquente) afin de limiter les justifications, au prix cependant d'une augmentation de quantité de précontrainte.

Quoiqu'il en soit, il n'est pas toujours économiquement intéressant d'avoir une précontrainte minimale dans des environnements peu sévères, car cela peut nécessiter une quantité importante d'armatures passives en complément.

6.1.3. Armatures passives longitudinales

Trois conditions définissent le ferrailage longitudinal minimum à mettre en place vis-à-vis de la flexion aux états-limites de service : ferrailage de peau, ferrailage minimal de non-fragilité, ferrailage de maîtrise de la fissuration. Il convient également de vérifier que les aciers mis en place restent dans le domaine élastique sous combinaison ELS caractéristique.

Ferrailage de peau

Sur toute la périphérie des sections, il convient de mettre en place au moins 3 cm² par mètre de parement, même dans les zones systématiquement comprimées.

Ferrailage minimal de non-fragilité

Il convient de prévoir dans toutes les sections susceptibles d'être tendues sous combinaison ELS caractéristique le ferrailage longitudinal minimum suivant :

$$A_{s,min} = k_c f_{ctm} A_{ct} / f_{yk} \quad \text{où :}$$

A_{ct} est l'aire de béton tendu juste avant la formation de la première fissure ; pour une poutre travaillant en flexion, on la détermine en fixant la valeur de l'effort normal à sa valeur caractéristique minimale (en général $P_{k,inf}$) et en augmentant le moment jusqu'à atteindre la contrainte de traction $\sigma_c = -f_{ctm}$ sur une des fibres extrêmes de la section.

f_{yk} est la limite élastique de l'armature passive (valeur courante 500 MPa).

k_c est un coefficient qui tient compte de la répartition des contraintes dans la section immédiatement avant la fissuration, ainsi que de la redistribution d'efforts qui se produit entre béton tendu et aciers passifs au moment de la fissuration :

- En traction pure : $k_c = 1,0$
- Pour une poutre de section rectangulaire en flexion simple : $k_c = 0,4$
- Pour une poutre de section rectangulaire $b \times h$ en flexion composée, soumise à un effort normal de compression $N_{Ed} = \sigma_c \cdot b \cdot h$:

$$k_c = 0,4 \left(1 - \frac{\sigma_c}{1,5 f_{ctm}} \right) \quad \text{si } h < 1,0 \text{ m}$$

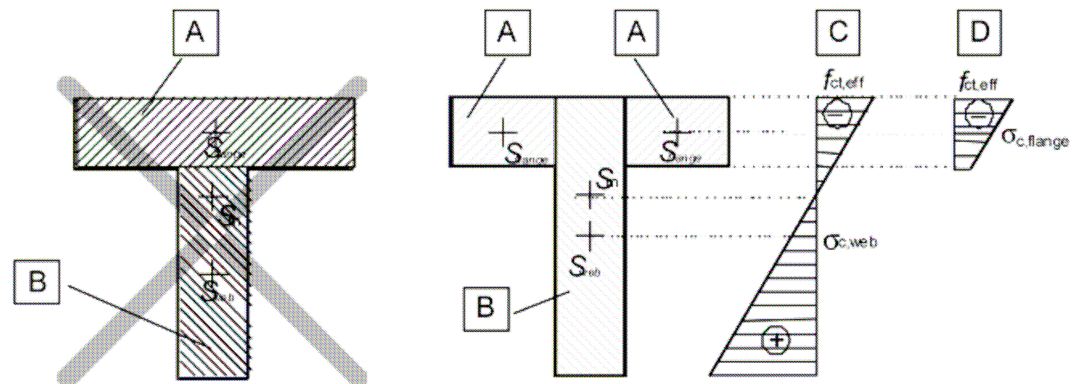
$$k_c = 0,4 \left(1 - \frac{\sigma_c}{1,5 h \cdot f_{ctm}} \right) \quad \text{si } h \geq 1,0 \text{ m}$$

- Pour une poutre de section rectangulaire $b \times h$ en flexion composée, soumise à un effort normal de traction $N_{Ed} = \sigma_c \cdot b \cdot h$ ($\sigma_c < 0$)

$$k_c = 0,4 \left(1 - \frac{\sigma_c}{2/3 f_{ctm}} \right) \leq 1,0$$

Pour des sections rectangulaires par morceaux (sections en caisson ou en Té), on utilisera les formules suivantes :

- Pour l'âme : même formule que pour les poutres rectangulaires, en raisonnant sur l'âme pour le calcul de A_{ct} , σ_c . Le découpage se fait selon la Figure 29



Légende

- | | | | |
|---|-------------------------------|---|------------|
| A | Élément de section «membrure» | C | «Âme» |
| B | Élément de section «âme» | D | «Membrure» |

Figure 29 - Exemple de découpage d'une section à membrures pour l'analyse de la fissuration

- Pour les membrures : $A_{s,min} = 0,9F_{cr} / f_{yk} \geq 0,5f_{ctm} A_{ct} / f_{yk}$

où F_{cr} est la valeur absolue de l'effort de traction dans la membrure juste avant la fissuration.

Pour des sections de forme quelconque, l'Eurocode ne donne pas de règle générale. On peut de façon sécuritaire prévoir le ferrailage suivant :

$$A_{s,min} = F_{cr} / f_{yk}$$

où F_{cr} est la valeur absolue de l'effort de traction dans la section juste avant la fissuration.

Ferrailage de maîtrise de la fissuration

Il existe deux méthodes permettant de définir ce ferrailage. La méthode simplifiée permet d'éviter le calcul direct de l'ouverture des fissures, mais est plus contraignante et utilisable dans des cas spécifiés. La méthode directe est valable dans (presque) tous les cas.

Méthode simplifiée : On détermine la limite de traction admissible dans les armatures passives en lisant cette limite dans l'un des deux tableaux ci-dessous, obtenus en limitant soit le diamètre de l'armature, soit l'espacement entre armatures :

**Tableau 7.2N : Diamètre maximal ϕ_s^* des barres
pour la maîtrise de la fissuration ¹**

Contrainte de l'acier ² [MPa]	Diamètre maximal des barres [mm]		
	$w_k = 0,4$ mm	$w_k = 0,3$ mm	$w_k = 0,2$ mm
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	5
400	8	6	4
450	6	5	—

**Tableau 7.3N : Espacement maximal des barres
pour la maîtrise de la fissuration ¹**

Contrainte de l'acier ² [MPa]	Espacement maximal des barres [mm]		
	$w_k = 0,4$ mm	$w_k = 0,3$ mm	$w_k = 0,2$ mm
160	300	300	200
200	300	250	150
240	250	200	100
280	200	150	50
320	150	100	—
360	100	50	—

On applique alors la formule du ferrailage minimal « à l'envers » avec la limite ainsi déterminée, ce qui permet de garantir la maîtrise de la fissuration, en fonction de l'ouverture des fissures autorisée.

Méthode directe : On calcule le ferrailage minimal avec la limite f_{yk} et on calcule de manière directe l'ouverture des fissures. Si besoin est, on augmente le ferrailage où on le dispose différemment.

Ces calculs d'ouvertures ne sont pas développés dans le cadre de ce cours. Le chapitre VIII montre comment calculer la contrainte dans les armatures passives. On se reportera ensuite au cours de béton armé pour en déduire les ouvertures de fissures.

Ferrailage de reprise des efforts à l'ELS en section fissurée.

Lorsque l'on dépasse la contrainte limite de traction du béton sous combinaison caractéristique, il est nécessaire de réaliser un calcul en section fissurée et de disposer d'armatures passives pour équilibrer les efforts. Dans ce cas, on limite la traction des armatures passives à $0,8 f_{yk}$.

6.2. Justifications vis-à-vis de l'effort tranchant

La partie 1.1 de l'EC2 (règles générales et bâtiment) n'impose aucune vérification vis-à-vis de l'effort tranchant aux états-limites de service – contrairement au règlement français antérieur. On trouve toutefois un critère à respecter dans la partie ponts de l'EC2 : l'annexe informative QQ propose une méthode pour garantir la non fissuration des sections vis-à-vis de l'effort tranchant. Ce critère est décrit dans le chapitre X.

7. Justifications vis-à-vis des états-limites ultimes**7.1. Justifications à la flexion**

Les matériaux pouvant alors sortir de leur domaine de comportement élastique, il convient de montrer que les sollicitations de calcul n'entraînent pas dans la section l'apparition d'un état-limite ultime caractérisé par l'atteinte d'une déformation limite (et non plus d'une contrainte limite) de l'un quelconque de ses matériaux constitutifs (béton, aciers passifs ou aciers de précontrainte).

Le principe de ces calculs est exposé au chapitre IX. En béton précontraint, ces justifications ne sont jamais déterminantes pour les aciers de précontrainte ; elles le sont rarement pour les aciers passifs. Par contre, elles peuvent conduire à un renforcement sérieux de membrures en béton qui auraient été dimensionnées de façon trop étreinte sur la seule considération des ELS.

7.2. Justifications à l'effort tranchant

On admet que, sous l'effet des sollicitations de calcul aux ELU, les âmes se fissurent et résistent selon un fonctionnement en bielles et tirants. Ce fonctionnement permet à la fois de dimensionner les armatures transversales et de contrôler l'état de compression des bielles de béton. Le principe des calculs est exposé au chapitre X.

Chapitre VII - Flexion ELS des poutres isostatiques non fissurées

1. Généralités

Comme vis-à-vis de toute sollicitation, il y a lieu de procéder, en ce qui concerne les sollicitations normales, à deux catégories de justifications :

- aux ELU pour s'assurer de la résistance de la structure ;
- aux ELS pour vérifier le respect des conditions d'exploitation et de durabilité.

Alors qu'aux ELS on se limite au domaine de fonctionnement élastique des matériaux, on admet, aux ELU, la plastification des sections. Dans le présent paragraphe, nous nous bornerons à l'étude vis-à-vis des ELS, les ELU étant traités au chapitre suivant. Les matériaux étant alors censés se comporter élastiquement, le principe des justifications est extrêmement simple : il suffit de calculer les contraintes qui apparaissent dans les sections sous l'effet des sollicitations de calcul et de vérifier qu'elles ne dépassent pas les contraintes limites réglementaires.

Tant que les contraintes de traction dans le béton restent modérées (ce que nous supposons ici), le calcul s'effectue à partir des caractéristiques des sections non fissurées :

- sections nettes en ce qui concerne les contraintes développées par les charges permanentes et par la précontrainte ;
- sections homogénéisées pour les contraintes dues aux charges variables.

Les sections nettes s'obtiennent en soustrayant des sections brutes les vides tels que trous, encoches et conduits ménagés pour le passage ou l'ancrage des armatures de précontrainte. Les sections homogénéisées se déduisent des sections nettes, précédemment définies, en leur ajoutant la section des armatures de précontrainte multipliée par le coefficient d'équivalence instantané.

L'introduction de ces sections homogénéisées permet de prendre en compte les variations de tension qui affectent les armatures de précontrainte lorsque des charges variables sont appliquées à la structure. En pratique, les caractéristiques des sections brutes, nettes et homogénéisées sont souvent très voisines et l'on peut les confondre au stade du prédimensionnement. C'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

2. Notations

Considérons une poutre de fibre moyenne G_x (supposée horizontale) et de plan moyen G_{xy} , fléchie et précontrainte dans ce plan. G_y (axe vertical de symétrie de la section droite) et G_z sont les axes principaux d'inertie de la section (Figure 30).

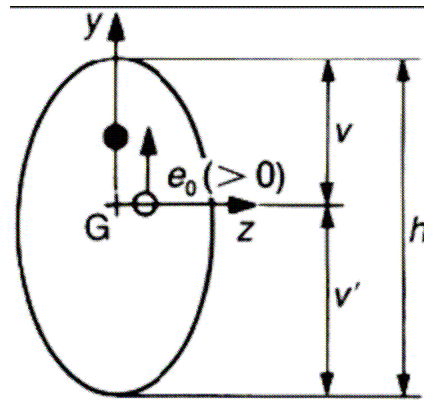


Figure 30 - Caractéristiques d'une section droite

2.1. Section droite

Nous désignons par :

A_c son aire ;

v et v' les distances de son centre de gravité aux fibres extrêmes ($v + v' = h$) ;

I_c son moment d'inertie par rapport à Gz ;

$\rho = \frac{I_c}{A_c v v'}$ son rendement géométrique.

2.2. Sollicitations appliquées à la section

2.2.1. Sollicitations développées par les actions extérieures

Les actions extérieures (autres que la précontrainte) développent dans la section un moment fléchissant M , compté algébriquement positif s'il comprime la fibre supérieure. M est la somme de :

M_g moment de poids propre ;

$M_{g'}$ moment dû aux charges permanentes additionnelles ;

M_q moment généré par les actions variables de toutes natures.

Selon le cas de charge considéré, M varie entre :

— une valeur minimale : $M_m = M_g + M_{g'} + M_{mq}$;

— et une valeur maximale : $M_M = M_g + M_{g'} + M_{Mq}$.

Posons : $\Delta M = M_M - M_m = M_{Mq} - M_{mq}$

Cette quantité est toujours positive ou nulle.

2.2.2. Sollicitations développées par la précontrainte

La précontrainte est exercée par le câble tendu à P et excentré de e_0 par rapport à G . e_0 est compté algébriquement sur l'axe Gy. Il est donc positif lorsque le câble est au-dessus du centre de gravité. Les sollicitations normales développées par la précontrainte sont alors :

$$\begin{cases} N_p = P \cos(\alpha) \approx P \\ M_p = P e_0 \cos(\alpha) \approx P e_0 \end{cases}$$

S'il y a, en réalité, plusieurs câbles distincts (tendus à P_i et excentrés de e_{0i}), le câble représente le câble unique fictif qui exercerait le même effort résultant. Dans ce qui suit, $\cos(\alpha)$ est toujours assimilé à 1. P est par ailleurs supposé constant dans une section donnée, c'est-à-dire indépendant du cas de charge appliqué, ce qui n'est pas rigoureusement exact, mais s'avère suffisant au niveau d'un prédimensionnement.

2.3. Contraintes normales dans le béton

Toutes les contraintes et contraintes limites définies ci-après sont comptées algébriquement positives s'il s'agit de compressions. Sous un cas de charge donné, elles varient linéairement avec y entre σ sur la fibre supérieure et σ' sur la fibre inférieure (Figure 31). Elles sont notées :

σ_1 et σ'_1 lorsque le moment extérieur est M_m ;

σ_2 et σ'_2 lorsque le moment extérieur est M_M .

Compte tenu des conventions adoptées pour le signe des moments :
$$\begin{cases} \sigma_2 \geq \sigma_1 \\ \sigma'_2 \leq \sigma'_1 \end{cases}$$

Le problème du dimensionnement consiste généralement à faire en sorte que les contraintes sur les fibres extrêmes respectent des contraintes limites :

- $\bar{\sigma}_1$ et $\bar{\sigma}'_1$ pour celles qui interviennent lorsque le moment appliqué est M_m
- $\bar{\sigma}_2$ et $\bar{\sigma}'_2$ pour celles qui interviennent lorsque le moment appliqué est M_M

Les limites $\bar{\sigma}_1$ et $\bar{\sigma}'_2$ au-dessous desquelles on ne doit pas descendre sont en pratique assez voisines de 0 et dites contraintes limites de traction ; elles sont soit données par le règlement, soit fixées par le concepteur afin d'obtenir le dimensionnement le plus économique.

Les limites $\bar{\sigma}_2$ et $\bar{\sigma}'_1$ sont des contraintes limites de compression qu'il s'agit de ne pas dépasser. Elles sont fixées par le règlement.

Centre et ligne de pression

Sous un cas de charge réel quelconque, une section est soumise aux sollicitations suivantes :

- un effort normal $n = P$ dû à la seule précontrainte ;
- un moment fléchissant $m = Pe_0 + M$ somme du moment de précontrainte Pe_0 et du moment fléchissant extérieur M .

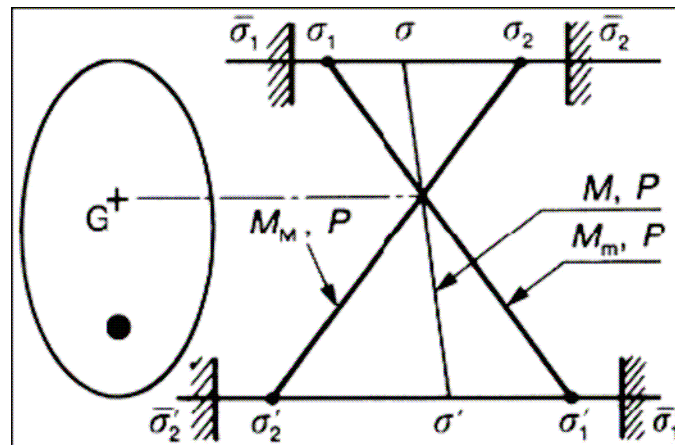


Figure 31 - Contraintes et contraintes limites dans une section

Cela équivaut à l'effet d'une force normale de compression P , appliquée en un point de Gy appelé centre de pression et d'ordonnée : $e = \frac{m}{n} = e_0 + \frac{M}{P}$

Le lieu de ces points lorsque la section décrit la poutre est **la ligne de pression**.

Si l'on suppose que, partout, $M = 0$, ce qui revient à ne considérer que l'effet de la précontrainte sur la poutre, la ligne de pression est dite **ligne de précontrainte** et se confond (pour une poutre isostatique) avec le tracé du câble ($e = e_0$).

L'effet d'un moment fléchissant extérieur M est donc de déplacer le centre de pression sur Gy , à partir du câble, de la quantité algébrique $\frac{M}{P}$ (Figure 32).

L'expression du moment fléchissant dans une section ($m = Pe_0 + M$) montre qu'au stade du projet il est possible de compenser une modification permanente δM du moment fléchissant extérieur par simple déplacement du câble de la quantité

$$\delta e_0 = -\frac{\delta M}{P}$$

À la limite, supposons que le projeteur ait « oublié » dans son dimensionnement l'effet des charges permanentes (g et g'). Pour rattraper cette omission, il lui suffit, en gardant la même section et le même câble, de décaler l'excentricité de ce dernier de

$$\delta e_0 = -\frac{(\delta M_g + \delta M_{g'})}{P}$$

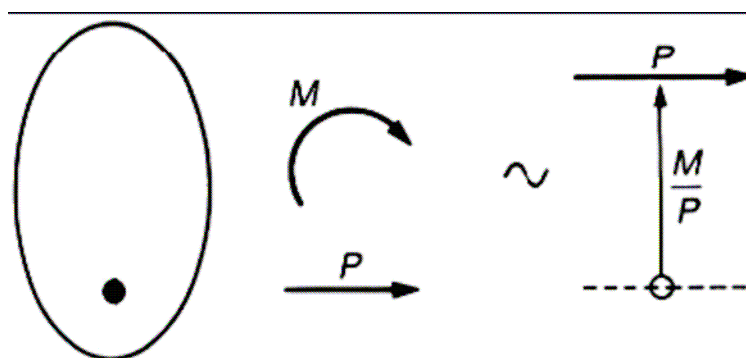


Figure 32 – Centre de pression

Cette opération lui permet de compenser la charge permanente, c'est-à-dire d'annuler son effet. Autrement dit, la charge permanente ne coûte rien, ni en acier, ni en béton, ce qui montre bien le caractère actif de la précontrainte.

Cette faculté de compensation des charges permanentes a néanmoins ses limites : les effets desdites charges doivent être suffisamment faibles pour que la variation d'excentricité à donner au câble ne fasse pas sortir ce dernier hors du béton ! Il faut en fait garantir un enrobage de béton suffisant :

$$\text{Il faut donc : } -(v'-d') \leq e_0 \leq (v-d) \quad (41)$$

avec d et d' distances minimales entre le barycentre des câbles réels et les fibres extrêmes, supérieure et inférieure.

d et d' dépendent :

- du nombre de câbles nécessaire pour réaliser la force de précontrainte P ;
- des règles de groupement et d'enrobage imposées aux câbles.

À cet égard, pour les unités de précontrainte les plus courantes (de force utile, toutes pertes faites, comprise entre 0,6 MN et 3 MN) logées dans des conduits de diamètre ϕ compris entre 5 cm et 10 cm, on admet :

- des groupements en paquets de deux dans le sens vertical ;
- des distances libres entre paquets ou conduits isolés au moins égales à ϕ tant verticalement qu'horizontalement ;
- des enrobages au moins égaux à ϕ .

La Figure 33 donne, pour quelques configurations, des valeurs de d et d' .

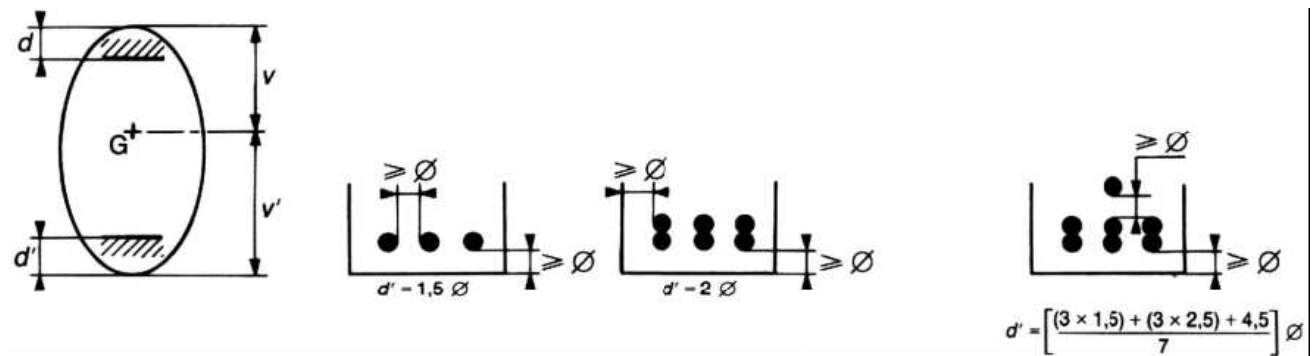


Figure 33 - Définition de d et d'

3. Contraintes normales du béton

3.1. Expression générale

À l'ordonnée y s'exerce la contrainte normale :

$$\sigma(y) = \frac{P}{A_c} + (Pe_0 + M) \frac{y}{I_c} = \frac{P}{A_c} + Pe \frac{y}{I_c} = \frac{P}{A_c} \left(1 + \frac{ey}{\rho v v'} \right) \quad (42)$$

Au niveau de G ($y = 0$), quel que soit le cas de charge appliqué, on a : $\sigma_G = \frac{P}{A_c}$

Le fait que tout diagramme de contraintes (σ, σ') passe par $\sigma_G = \frac{P}{A_c}$ s'exprime par :

$$\sigma_G = \frac{P}{A_c} = \frac{\sigma v' + \sigma' v}{h} \quad (43)$$

3.2. Respect des contraintes limites

Compte tenu de l'expression (42) des contraintes, le critère de respect des contraintes limites s'exprime, dans une section droite, par les conditions suivantes :

$$\text{— sur la fibre supérieure } (y = +v) : \bar{\sigma}_1 \leq \frac{P}{A_c} \left(1 + \frac{e}{\rho v'} \right) \leq \bar{\sigma}_2 \quad (44)$$

$$\text{— sur la fibre inférieure } (y = -v') : \bar{\sigma}'_2 \leq \frac{P}{A_c} \left(1 - \frac{e}{\rho v} \right) \leq \bar{\sigma}'_1 \quad (45)$$

Les relations (44) et (45) peuvent se mettre sous la forme :

$$-c' = -\rho v' \left(1 - \frac{A_c \bar{\sigma}'_1}{P} \right) \leq e \leq \rho v' \left(\frac{A_c \bar{\sigma}_2}{P} - 1 \right) = \gamma \quad (46)$$

$$-\gamma' = -\rho v \left(\frac{A_c \bar{\sigma}'_1}{P} - 1 \right) \leq e \leq \rho v \left(1 - \frac{A_c \bar{\sigma}'_2}{P} \right) = c \quad (47)$$

Le segment $[-c' ; +c]$ de Gy (Figure 34) est le noyau limite de traction (car c et c' sont définis à partir des contraintes limites de traction).

De même, le segment $[-\gamma' ; +\gamma]$ de Gy est le noyau limite de compression.

Les doubles inégalités (46) et (47) expriment que le centre de pression doit appartenir à l'intersection $[-\Gamma' ; +\Gamma]$ de ces deux segments :

$$[-\Gamma' ; +\Gamma] = [-c' ; +c] \cap [-\gamma' ; +\gamma]$$

$[-\Gamma' ; +\Gamma]$ est dit **noyau limite** au sens strict. Ces différents noyaux limites engendrent, lorsque la section décrit la poutre, des fuseaux limites de traction, de compression, au sens strict (intersection des deux précédents). En tout cas de charge, la ligne de pression doit demeurer à l'intérieur du fuseau limite au sens strict : $-\Gamma' \leq e \leq \Gamma$

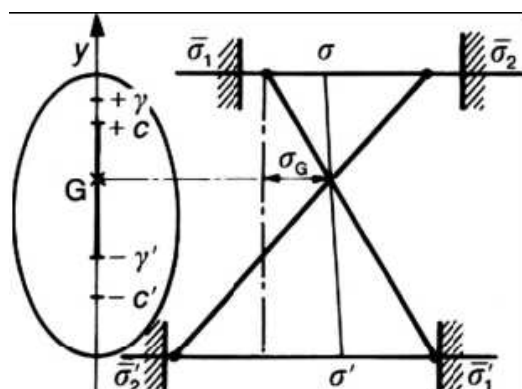


Figure 34 – Contraintes et noyaux limites

Dans une section donnée, l'excentricité du centre de pression vaut $e = e_0 + \frac{M}{P}$, M étant susceptible de varier, selon le cas de charge, entre M_m et M_M . On doit donc avoir :

$$-\Gamma' \leq e_0 + \frac{M_m}{P} \leq e \leq e_0 + \frac{M_M}{P} \leq \Gamma$$

soit $-\Gamma' - \frac{M_m}{P} \leq e_0 \leq \Gamma - \frac{M_M}{P}$ (49)

Le segment $\left[-\Gamma' - \frac{M_m}{P}, \Gamma - \frac{M_M}{P}\right]$ de Gy est le **noyau de passage** au sens strict, intersection du noyau de passage de traction $\left[-c' - \frac{M_m}{P}, c - \frac{M_M}{P}\right]$ et du noyau de passage de compression $\left[-\gamma' - \frac{M_m}{P}, \gamma - \frac{M_M}{P}\right]$. Ces différents noyaux de passage définissent, pour l'ensemble de la poutre, des fuseaux de passage de traction, de compression, au sens strict.

L'équation (49) exprime que, pour que les contraintes limites soient respectées partout et sous tout cas de charge, il faut que le câble soit à l'intérieur du fuseau de passage au sens strict.

Dans la pratique, le concept de noyau (ou fuseau) au sens strict est lourd à manier. Au niveau du prédimensionnement, seule est facilement exploitable la notion de noyau (ou fuseau) de traction qui permet de définir la précontrainte P et son excentricité e_0 . Le noyau (ou fuseau) de compression conditionne, pour sa part, les caractéristiques à donner aux sections droites (I/v , I/v'), mais pour effectuer leur dimensionnement, il est beaucoup plus simple d'écrire directement, dans les zones déterminantes, le respect des contraintes limites de compression. C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous ne conserverons que les **notions de noyaux (ou fuseaux) de traction**. Nous les désignons simplement par :

- noyau (ou fuseau) limite ;
 - noyau (ou fuseau) de passage ;
- sans préciser qu'ils sont de traction, puisque aucune ambiguïté n'est possible.

4. Valeur minimale de la précontrainte dans une section

Nous supposons ici que la géométrie de la section est donnée et que ses modules d'inertie (I/v et I/v') sont suffisants, voire surabondants, de telle sorte qu'aucun problème ne se pose du côté des compressions.

Il s'agit simplement, dans ces conditions, de satisfaire à

$$e_2 = -c' - \frac{M_m}{P} \leq e_0 \leq c - \frac{M_M}{P} = e_1 \quad (50)$$

Pour que la double inégalité (50) soit possible, il faut que $e_2 \leq e_1$, autrement dit, que le fuseau de passage soit ouvert, ce qui s'écrit encore : $P \geq \frac{M_M - M_m}{c + c'} = \frac{\Delta M}{c + c'}$ (51)

La valeur minimale absolue possible pour P est donc $P_I = \frac{\Delta M}{c + c'}$.

Si l'on adopte $P = P_I$, le fuseau de passage, au niveau de la section considérée, se referme en un point ($e_1 = e_2$) par lequel doit passer obligatoirement le câble ($e_0 = e_1 = e_2$). En d'autres termes, l'excentricité du câble est imposée :

$$e_0 = c - \frac{M_M}{P_I} = -c' - \frac{M_m}{P_I} \quad (53)$$

Il reste à vérifier qu'elle satisfait aux conditions pratiques définies par (41). C'est presque toujours le cas lorsque les moments extrêmes sont de signes contraires ($M_M \geq 0$ et $M_m \leq 0$). La double expression de e_0 donnée par (53) nous montre en effet qu'alors : $-c' \leq e_0 \leq c$. Comme le plus souvent : $c \leq v - d$ et $c' \leq v' - d'$, la double inégalité (41) est bien respectée.

4.1. Section sous-critique

C'est une section où la solution $P = P_I$ est possible du fait que l'excentricité e_0 donnée par (53) satisfait à (41). La double expression (53) de l'excentricité nous montre que (Figure 35) :

- le centre de pression est à l'ordonnée $+c$ lorsqu'on applique à la section le moment extérieur M_M , ce qui signifie que, sous cette sollicitation, la contrainte limite de traction $\bar{\sigma}'_2$ est atteinte sur la fibre inférieure ;
- le centre de pression se retrouve à l'ordonnée sous l'effet de M_m (atteinte de la contrainte limite de traction $\bar{\sigma}_1$ sur la fibre supérieure).

Dans une section sous-critique, on atteint donc les contraintes limites de traction sous les deux cas de charge extrêmes.

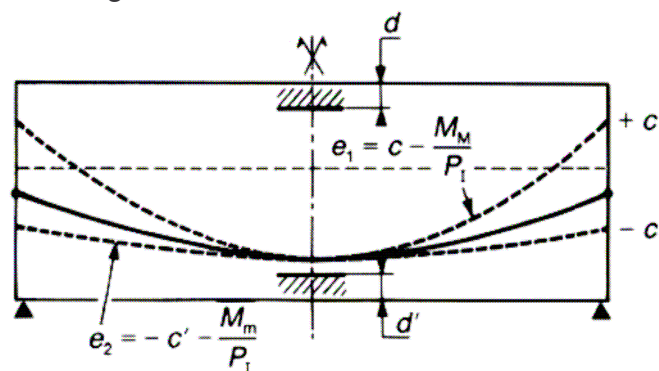


Figure 35 - Fuseau de passage dans le cas où la section la plus sollicitée est sous-critique

4.2. Section sur-critique

Lorsque l'excentricité associée à P_I ne respecte pas les conditions pratiques (41), la solution $P = P_I$ est à rejeter, car elle conduirait à un câble mal enrobé. La section est alors dite sur-critique. Cette situation peut se rencontrer lorsque les moments extrêmes M_M et M_m ont tous deux le même signe.

4.2.1. Section sur-critique soumise à des moments extérieurs positifs

Supposons les conditions (41) non satisfaites. L'expression $e_0 = -c' - \frac{M_m}{P_I}$ montre que $e_0 < 0$ et que c'est donc la valeur plancher : $-(v'-d')$ qui n'est pas respectée par e_0 , ce qui s'écrit encore : $e_0 = c - \frac{M_M}{P_I} \leq -(v'-d')$ ou $P_I \leq \frac{M_M}{v'+c-d'}$ (54)

Le fuseau de passage sort de la zone autorisée vers le bas (Figure 36).

Pour l'y faire remonter, il suffit d'augmenter P .

Le fuseau s'ouvre ($e_1 > e_2$ pour $P > P_I$) et la valeur P_{II} à retenir est celle qui amène la ligne e_1 à tangenter la ligne d'enrobage minimal, soit :

$$c - \frac{M_M}{P_{II}} = -(v'-d') \text{ ou } P_{II} = \frac{M_M}{v'+c-d'} \quad (55)$$

La valeur associée de l'excentricité est : $e_0 = -(v'-d')$ (56)

Dans la section considérée, on a $e_2 = -c' - \frac{M_m}{P_{II}} < e_0$

Quand agit le moment extérieur M_M , le centre de pression remonte depuis le câble de la quantité M_M / P_{II} et se retrouve à l'ordonnée $+c$; on atteint donc la contrainte limite de traction. Par contre, lorsqu'on applique M_m , l'ordonnée du centre de pression $e_0 + M_m / P_{II}$ est supérieure à $-c'$ et la contrainte σ_1 qui apparaît sur la fibre supérieure est plus grande que $\bar{\sigma}_1$. Ainsi, dans une telle section sur-critique, on ne peut obtenir qu'une contrainte limite de traction : la contrainte limite de traction sur la fibre inférieure (fibre vers laquelle le câble est excentré).

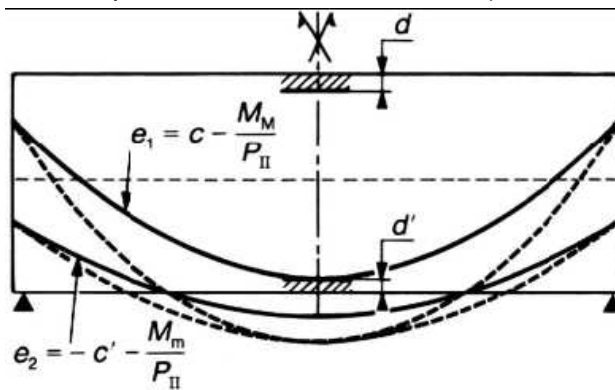


Figure 36 - Détermination de la précontrainte pour une section surcritique soumise à des moments positifs

4.2.2. Section sur-critique soumise à des moments extérieurs négatifs

Si cette fois-ci les conditions (41) ne sont pas satisfaites, c'est que le câble associé à P_I sort de la poutre vers le haut (Figure 37). On a : $e_0 = -c' - \frac{M_m}{P_I} \geq (v-d)$ soit

$P_I \leq \frac{-M_m}{v + c' - d}$ (57) On démontre, comme précédemment, qu'il faut augmenter P

jusqu'à la valeur : $P'_{II} = \frac{-M_m}{v + c' - d}$ (58)

Le câble correspondant étant excentré au maximum vers le haut dans la section considérée :

$$e_0 = v - d \quad (59)$$

La seule contrainte limite de traction que l'on atteint, dans ce cas, est la contrainte sur la fibre supérieure $\bar{\sigma}_1$ (fibre vers laquelle le câble est excentré) sous l'effet du moment extérieur M_m .

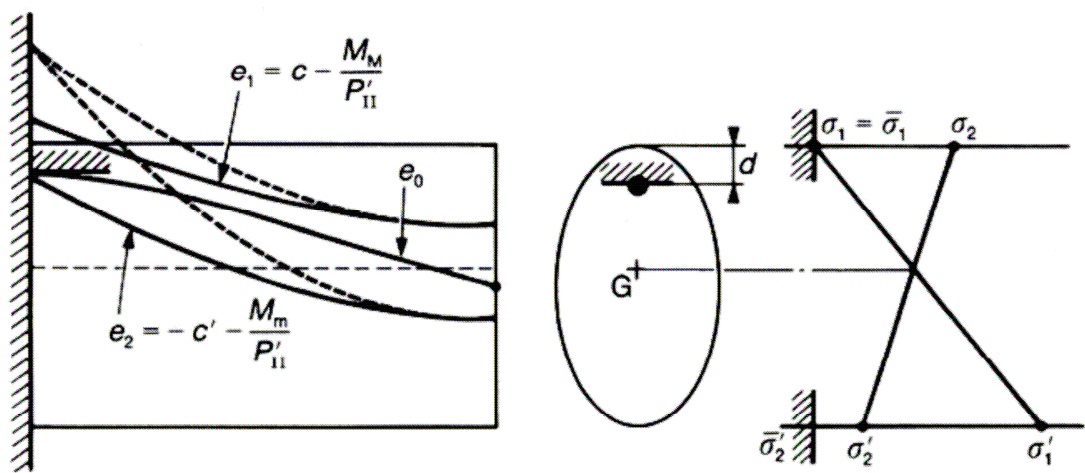


Figure 37 - Section sur-critique soumise à des moments négatifs.
Contrainte limite de traction associée

4.3. Caractère d'une section

Pour déterminer le caractère d'une section, autrement dit pour savoir si elle est sous-critique ou sur-critique, on peut opérer de deux façons différentes.

— On calcule P_I par l'équation (52) et l'excentricité associée e_0 par (53). Si cette excentricité satisfait aux conditions pratiques (41), c'est que la section est sous-critique et l'on prend $P = P_I$. Sinon, elle est sur-critique, et, selon le signe des moments, on adopte soit $P = P_{II}$, soit $P = P'_{II}$, le câble correspondant étant excentré au maximum vers le bas ou vers le haut.

— On calcule P_I puis, soit P_{II} soit P'_{II} selon le signe des moments extérieurs appliqués. Comme le montrent (54) et (55) d'une part, (57) et (58) d'autre part, la section est sous-critique si P_I est la plus grande de ces forces. Dans le cas contraire, elle est sur-critique.

4.4. Expressions développées de P

Les formules (52), (55) et (58) ne sont guère pratiques à utiliser du fait que leurs seconds membres contiennent implicitement P par l'intermédiaire de c et c' . En effet, comme le montrent (46) et (47) :

$$\begin{cases} c = \rho v \left(1 - \frac{A_c \bar{\sigma}'_2}{P} \right) \\ c' = \rho v' \left(1 - \frac{A_c \bar{\sigma}_1}{P} \right) \end{cases} \quad (60)$$

Mais il est très facile, dans tous les cas, d'expliciter P .

4.4.1. Section sous-critique

En remplaçant, dans (52), c et c' par leurs expressions (60) on obtient :

$$P = \frac{\Delta M}{c + c'} = \frac{\Delta M}{\rho h - \frac{\rho v A_c \bar{\sigma}'_2}{P} - \frac{\rho v' A_c \bar{\sigma}_1}{P}}$$

$$\text{D'où l'on tire : } P = \frac{\Delta M}{\rho h} + \frac{A_c (v \bar{\sigma}'_2 + v' \bar{\sigma}_1)}{h}$$

$$\text{ou encore, puisque } A_c = \frac{I_c}{\rho v v'} : P = \frac{\Delta M + \frac{I_c}{v'} \bar{\sigma}'_2 + \frac{I_c}{v} \bar{\sigma}_1}{\rho h}$$

D'où les trois expressions équivalentes de la force sous-critique ($P = P_I$) :

$$\begin{cases} P = \frac{\Delta M}{c + c'} \\ P = \frac{\Delta M}{\rho h} + \frac{A_c (v \bar{\sigma}'_2 + v' \bar{\sigma}_1)}{h} \\ P = \frac{\Delta M + \frac{I_c}{v'} \bar{\sigma}'_2 + \frac{I_c}{v} \bar{\sigma}_1}{\rho h} \end{cases}$$

4.4.2. Section sur-critique

En opérant comme précédemment, on obtient :

— pour une section sur-critique soumise à des moments positifs ($P = P_{II}$) :

$$P_{II} = \frac{M_M}{v' + c - d'} \quad (64) \quad P_{II} = \frac{M_M + \frac{I_c}{v'} \bar{\sigma}'_2}{v' + \rho v - d'} \quad (65)$$

— pour une section sur-critique soumise à des moments négatifs :

$$P'_{II} = \frac{-M_m}{v + c' - d} \quad (66) \quad P'_{II} = \frac{-M_m + \frac{I_c}{v} \bar{\sigma}_1}{v + \rho v' - d} \quad (67)$$

4.5. Cas particulier important $\bar{\sigma}_1 = 0$ et $\bar{\sigma}'_2 = 0$

Si l'on suppose $\bar{\sigma}_1 = 0$ et $\bar{\sigma}'_2 = 0$, les formules (60) donnent : $c = \rho v$ et $c' = \rho v'$

Le noyau limite se réduit au noyau central (dit tiers central dans le cas d'une section rectangulaire puisque ρ vaut $1/3$ pour une telle section). Alors, dans l'hypothèse sous-critique, P vaut, d'après (61), (62) ou (63) : $P = P_I = \frac{\Delta M}{\rho h}$ (68)

Si la section est sur-critique, on obtient :

$$P_{II} = \frac{M_M}{v' + \rho v - d'} \quad (69) \text{ si les moments sont positifs ;}$$

$$P'_{II} = \frac{-M_m}{v + \rho v' - d'} \quad (70) \text{ si les moments sont négatifs. Par comparaison avec les}$$

formules (62), (65) et (67), on peut apprécier les économies que l'on fait sur P lorsqu'on tolère des contraintes de traction dans le béton.

4.6. Remarques diverses

4.6.1. Tendances à la sur-criticité

On a vu (§ 5.5.3) que la condition de sur-criticité d'une section soumise à des moments positifs pouvait s'écrire : $P_{II} - P_I \geq 0$

Explicitons donc cette quantité $P_{II} - P_I$ à partir des expressions (63) et (65) :

$$P_{II} - P_I = \frac{M_M + \frac{I_c}{v'} \bar{\sigma}'_2}{v' + \rho v - d'} - \frac{\Delta M + \frac{I_c}{v'} \bar{\sigma}'_2 + \frac{I_c}{v} \bar{\sigma}_1}{\rho h}$$

$$P_{II} - P_I = \frac{M_M + \frac{I_c}{v'} \bar{\sigma}'_2}{v' + \rho v - d'} - \frac{\left(M_M + \frac{I_c}{v'} \bar{\sigma}'_2 \right) - \left(M_m - \frac{I_c}{v} \bar{\sigma}_1 \right)}{\rho h}$$

$$P_{II} - P_I = \frac{- \left(M_M + \frac{I_c}{v'} \bar{\sigma}'_2 \right) (v' - \rho v' - d') + \left(M_m - \frac{I_c}{v} \bar{\sigma}_1 \right) (v' + \rho v' - d')}{(v' + \rho v' - d') \rho h}$$

En pratique : $(v' - \rho v' - d') \geq 0$ et $(v' + \rho v' - d') \geq 0$. $P_{II} - P_I$ apparaît comme une fonction linéaire de $\bar{\sigma}_1$ et $\bar{\sigma}'_2$, les coefficients affectant ces deux variables étant négatifs. Autrement dit, $P_{II} - P_I$ est une fonction décroissante de $\bar{\sigma}_1$ et $\bar{\sigma}'_2$.

Plus ces contraintes limites $\bar{\sigma}_1$ et $\bar{\sigma}'_2$ sont négatives, plus il est probable que l'on ait $P_{II} - P_I > 0$. En d'autres termes, plus on admet des contraintes de traction importantes (en valeur absolue), plus on risque d'avoir affaire à des sections déterminantes sur-critiques.

5. Section minimale de béton

On obtient la section minimale de béton lorsqu'on atteint les contraintes limites de compression $\bar{\sigma}_2$ et $\bar{\sigma}'_1$. Dans ce qui suit, on suppose que l'on s'astreint, de façon systématique, à adopter les valeurs minimales précédemment trouvées pour la précontrainte (P_I , P_{II} ou P'_{II}).

5.1. Cas d'une section sous-critique

On prend alors $P = P_I$ et l'on atteint les deux contraintes limites de traction $\bar{\sigma}_1$ et $\bar{\sigma}'_2$. Pour obtenir les deux contraintes limites de compression, il faut et il suffit que les variations de contrainte sur la fibre supérieure $\left(\Delta\sigma = \Delta M \frac{v}{I_c}\right)$ et sur la fibre inférieure $\left(\Delta\sigma' = \Delta M \frac{v'}{I_c}\right)$, quand on passe de l'un des moments extrêmes à l'autre, soient respectivement égales à (Figure 38) :

$$\Delta\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 \text{ et } \Delta\bar{\sigma}' = \bar{\sigma}'_1 - \bar{\sigma}'_2$$

$$\text{D'où : } \Delta\bar{\sigma} = \Delta M \frac{v}{I_c}, \Delta\bar{\sigma}' = \Delta M \frac{v'}{I_c} \text{ et } \frac{I_c}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta\bar{\sigma}} \text{ (71) et } \frac{I_c}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta\bar{\sigma}'} \text{ (72)}$$

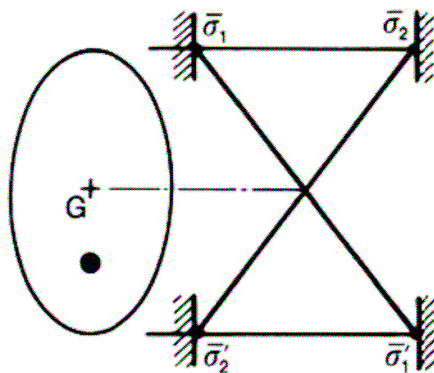


Figure 38 - Possibilité d'atteindre les 4 contraintes limites dans le cas d'une section sous-critique

5.2. Cas d'une section sur-critique soumise à des moments positifs

On prend $P = P_{II}$ et l'on atteint $\bar{\sigma}'_2$ (mais pas $\bar{\sigma}_1$, comme on l'a vu précédemment). Pour obtenir $\bar{\sigma}'_1$ en fibre inférieure (Figure 39), il faut et il suffit que l'on ait

$$\Delta\sigma' = \Delta M \frac{v'}{I_c} = \Delta\bar{\sigma}', \text{ soit, comme dans le cas sous-critique : } \frac{I_c}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta\bar{\sigma}'}$$

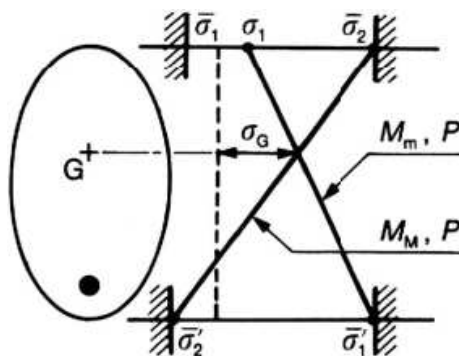


Figure 39 - Possibilité d'atteindre 3 contraintes

Par contre, du fait que $\sigma_1 > \bar{\sigma}_1$, la relation (71) n'est pas suffisante pour la membrure supérieure. Pour qu'on atteigne $\bar{\sigma}_2$ en fibre supérieure sous l'effet de M_M , il faut et il suffit que $\bar{\sigma}_2$ soit aligné avec et $\sigma_G = P / A_c$, ce qui s'écrit: $\frac{P}{A_c} = \frac{\bar{\sigma}_2 v' + \bar{\sigma}_2' v}{h}$ (73)

Si l'on veut faire apparaître le module d'inertie I / v , on peut remplacer, dans cette expression, A_c par $\frac{I_c}{\rho v v'}$, soit: $\frac{P \rho v v'}{I_c} = \frac{\bar{\sigma}_2 v' + \bar{\sigma}_2' v}{h}$

$$\text{D'où } \frac{I_c}{v} = \frac{\rho P h}{\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_2' \frac{v}{v'}} \quad (74)$$

5.3. Cas d'une section sur-critique soumise à des moments négatifs

Elle est représentée sur la Figure 40.

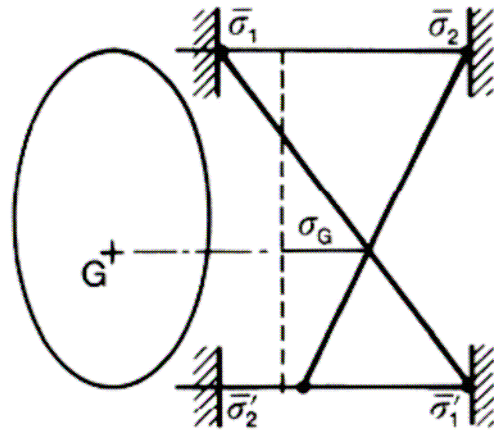


Figure 40 - Cas d'une section sur-critique avec $M < 0$

On verrait, de la même façon, que les conditions nécessaires et suffisantes pour atteindre les deux contraintes limites de compression $\bar{\sigma}_2$ et $\bar{\sigma}_1$ s'écrivent :

$$\frac{I_c}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}} \quad \text{et} \quad \frac{P}{A_c} = \frac{\bar{\sigma}_1' v + \bar{\sigma}_1 v'}{h} \quad (75)$$

$$\text{ou : } \frac{I_c}{v'} = \frac{\rho P h}{\bar{\sigma}_1' + \bar{\sigma}_1 \frac{v'}{v}} \quad (76)$$

5.4. Remarque

D'après ce qui précède, on peut atteindre :

- les quatre contraintes limites dans une section sous-critique ;
- trois contraintes limites seulement dans une section sur-critique.

Mais l'atteinte des contraintes limites de compression n'est nullement obligatoire. En fait, il arrive très souvent, dans la pratique, qu'une des membrures au moins de la poutre soit surabondante. C'est presque toujours le cas pour les tabliers de ponts routiers : la membrure supérieure joue également le rôle de dalle et doit, à cet égard, résister aux sollicitations locales transversales qu'y développent les charges

roulantes. C'est cette fonction qui, la plupart du temps, conditionne ses dimensions et la rend surabondante vis-à-vis de la flexion générale. L'essentiel, en fait, est que les modules d'inertie soient supérieurs ou égaux aux valeurs minimales données par les formules (71) à (76). S'ils sont strictement supérieurs à ces valeurs minimales, on demeure au-dessous des contraintes limites de compression, ce qui n'altère en rien le caractère sous-critique ou sur-critique des sections droites, ces qualificatifs impliquant simplement l'atteinte des deux contraintes limites de traction dans le premier cas et d'une seule contrainte limite de traction dans le second.

6. Récapitulation

Pour effectuer complètement le dimensionnement d'une section (coffrage et précontrainte), dans la mesure où l'on dispose d'au moins un degré de liberté géométrique pour chacune des membrures, et où l'on souhaite atteindre les limites de compression, on peut écrire quatre équations.

6.1. Hypothèse d'une section sous-critique

$$P = \frac{\Delta M + \frac{I_c}{v'} \bar{\sigma}'_2 + \frac{I_c}{v} \bar{\sigma}'_1}{\rho h} \quad (77)$$

$$e_0 = \rho v' \left(\frac{A_c \bar{\sigma}'_2}{P} - 1 \right) - \frac{M_M}{P} = -\rho v' \left(1 - \frac{A_c \bar{\sigma}'_1}{P} \right) - \frac{M_m}{P} \quad (78)$$

$$\frac{I_c}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}} \quad (79) \quad \text{et} \quad \frac{I_c}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}'} \quad (80)$$

(79) et (80) sont des équations de coffrage (elles ne font pas intervenir la précontrainte) qui permettent de fixer la géométrie de la section. Cela fait, (77) donne la valeur de la précontrainte et (78) celle de son excentricité.

6.2. Hypothèse d'une section sur-critique

En se limitant au cas d'une section soumise à des moments positifs, les équations sont :

$$P_H = \frac{M_M + \frac{I_c}{v'} \bar{\sigma}'_2}{v' + \rho v - d'} \quad (81)$$

$$e_0 = -(v' - d') \quad (82)$$

$$\frac{I_c}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}'} \quad (83) \quad \text{et} \quad \frac{I_c}{v} = \frac{\rho P h}{\bar{\sigma}'_2 + \bar{\sigma}'_2' \frac{v}{v'}} \quad (84)$$

Comme dans le cas précédent, (83) et (84) définissent le coffrage ; (81) donne P , (82) l'excentricité e_0 .

En se limitant au cas d'une section soumise à des moments négatifs, les équations sont :

$$P'_{II} = \frac{-M_m + \frac{I_c}{v} \bar{\sigma}_1}{v + \rho v' - d} \quad (81)$$

$$e_0 = (v - d) \quad (82)$$

$$\frac{I_c}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}} \quad (83)$$

et

$$\frac{I_c}{v'} = \frac{\rho P h}{\bar{\sigma}'_1 + \bar{\sigma}_1} \frac{v'}{v} \quad (84)$$

7. Cas où plusieurs valeurs de P interviennent dans le dimensionnement

Il arrive que plusieurs valeurs de la précontrainte (en général deux) interviennent dans le dimensionnement d'une section. Cette circonstance se présente lorsque :

- les cas de charge déterminants sont appliqués dans deux situations distinctes se caractérisant par des valeurs différentes de la force de précontrainte (évolution de la tension des câbles entre situation d'exécution et situation d'exploitation notamment) ;
- la réglementation impose de prendre en compte deux valeurs caractéristiques pour la précontrainte.

Les formules précédemment établies ne s'appliquent plus telles quelles, puisqu'elles supposent une valeur unique de la précontrainte sous les cas de charges extrêmes. Mais il est facile de les généraliser, à partir de la remarque suivante.

Supposons que, dans une section, sous l'effet d'un moment fléchissant extérieur M et de la précontrainte P (excentrée de e_0), on ait un diagramme de contraintes σ, σ' (Figure 41) ; dans cette même section, sous l'effet du moment $\theta \cdot M$ et de la précontrainte $\theta \cdot P$ (toujours excentrée de e_0), on observera le diagramme de contraintes $\theta \cdot \sigma, \theta \cdot \sigma'$ (θ désignant un scalaire quelconque).

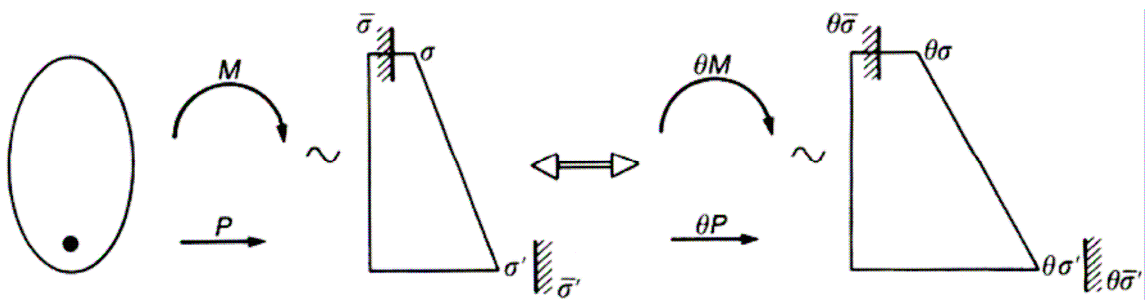


Figure 41 - Invariance des conditions de dimensionnement dans une multiplication scalaire

Respecter des contraintes limites sous l'effet de M et P est ainsi équivalent à respecter les contraintes limites sous l'effet de $\theta \cdot M$ et $\theta \cdot P$.

Si, donc, les conditions de dimensionnement d'une section sont celles du tableau 7, on peut les remplacer par des conditions équivalentes (tableau 7) en multipliant la première ligne du tableau 7 par $\theta_1 = 1/\alpha_1$ et la deuxième ligne par $\theta_2 = 1/\alpha_2$.

Tableau 7 – Conditions de dimensionnement d'une section

Moments	Précontrainte	Contraintes limites	
M_m	$\alpha_1 P$	$\bar{\sigma}_1$	$\bar{\sigma}'_1$
M_M	$\alpha_2 P$	$\bar{\sigma}_2$	$\bar{\sigma}'_2$

Par la considération des moments fictifs (M_{mf} , M_{Mf}) et des contraintes limites fictives ($\bar{\sigma}_{1f}$, $\bar{\sigma}'_{1f}$, $\bar{\sigma}_{2f}$, $\bar{\sigma}'_{2f}$) définis dans le tableau 8 et connus quand le sont α_1 et α_2 (pour lesquels on dispose toujours, dans la pratique, d'une estimation raisonnable dès le départ), on est ainsi ramené au cas précédemment étudié d'une force unique de précontrainte.

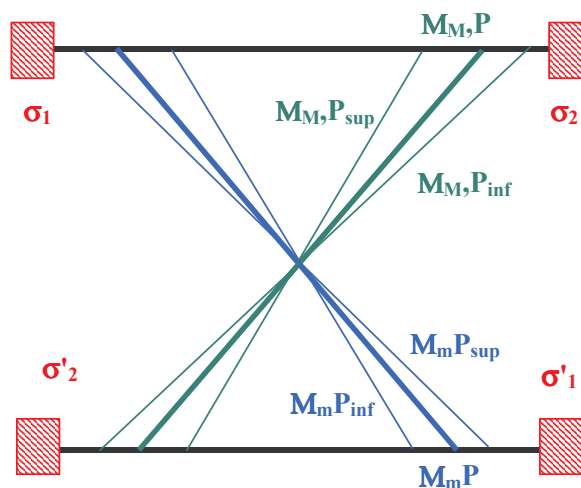
Tableau 8 – Conditions équivalentes de dimensionnement d'une section

Moments	Précontrainte	Contraintes limites	
$M_{mf} = \frac{M_m}{\alpha_1}$	P	$\bar{\sigma}_{1f} = \frac{\bar{\sigma}_1}{\alpha_1}$	$\bar{\sigma}'_{1f} = \frac{\bar{\sigma}'_1}{\alpha_1}$
$M_{Mf} = \frac{M_M}{\alpha_2}$	P	$\bar{\sigma}_{2f} = \frac{\bar{\sigma}_2}{\alpha_2}$	$\bar{\sigma}'_{2f} = \frac{\bar{\sigma}'_2}{\alpha_2}$

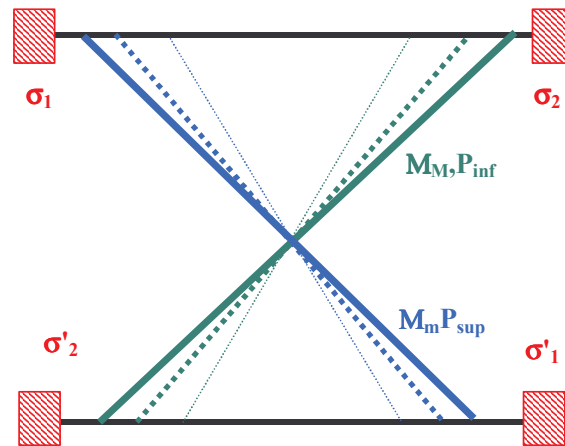
Les formules (77), (78), (79), (80) ou (81), (82), (83), (84) s'appliquent donc à condition d'y substituer aux contraintes et moments réels leurs homologues fictifs.

Par exemple, supposons que la précontrainte varie entre deux valeurs $r_{inf} P_m$ et $r_{sup} P_m$.

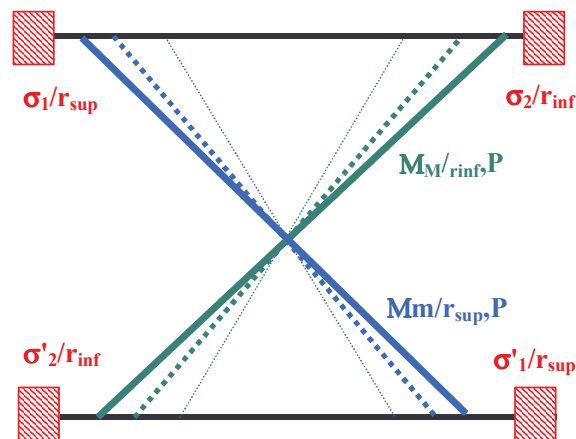
On a à vérifier le diagramme suivant (pour e_0 négatif), avec les mêmes valeurs de contraintes limites en traction et en compression :



On voit bien sur ce schéma que la situation dimensionnante est celle qui apparaît en trait gras :



Comme on l'a vu précédemment, ceci est équivalent à :



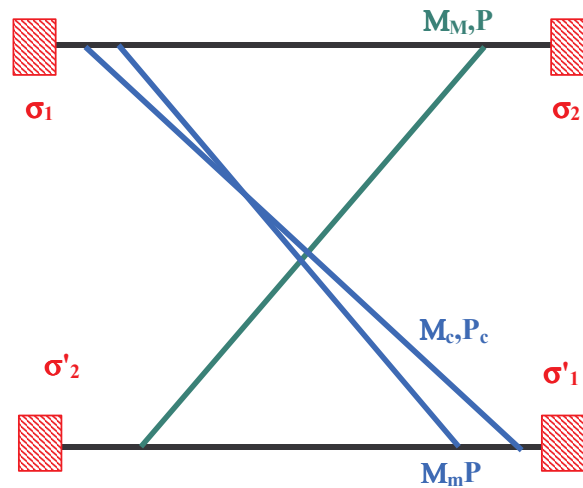
ce qui nous donne à vérifier une seule situation au lieu de quatre :

$$\frac{M_M}{r_{\text{inf}}}, \frac{M_m}{r_{\text{sup}}}, P, \frac{\sigma_2}{r_{\text{inf}}}, \frac{\sigma'_2}{r_{\text{inf}}}, \frac{\sigma_1}{r_{\text{sup}}}, \frac{\sigma'_1}{r_{\text{sup}}}$$

Autre exemple, supposons que l'on ait à vérifier :

$P_m, M_m, M_M, \bar{\sigma}_{\text{service}}$ en phase de service et $\alpha P_m, M_c, \bar{\sigma}_c$ en phase de construction (avec $\alpha = 1,15$ par exemple).

On a dans ce cas la situation suivante :



Le moment de construction est en général toujours inférieur au moment minimal en service, et la précontrainte toujours supérieure. De même, la contrainte limite maximale est toujours inférieure en situation de construction ($0,6 f_{ck}(t)$ au lieu de $0,6 f_{ck}$ à 28 jours). Par conséquent, la situation déterminante est le moment maximum avec les contraintes limites de service et le moment de construction avec les contraintes limites de construction, ces deux grandeurs étant divisées par α .

Chapitre VIII - Flexion ELU des poutres isostatiques

1. Généralités

Les justifications vis-à-vis des ELU, complémentaires des vérifications vis-à-vis des ELS, s'avèrent indispensables pour les raisons suivantes :

- un dépassement des charges caractéristiques (prises en compte dans les calculs aux ELS) est toujours possible, bien que peu probable ;
- il faut donc examiner le comportement des structures sous charges majorées.

Pour ce faire, il n'est pas envisageable de procéder par extrapolation. En effet, pour des raisons d'économie évidentes, on tolère que, sous ces charges majorées, des phénomènes irréversibles se manifestent (fissuration, plastification des matériaux), l'essentiel étant d'éviter l'effondrement des ouvrages. D'où la nécessité d'effectuer des vérifications spécifiques.

2. Équilibre d'une section à rupture

Dans la mesure où la précontrainte est adhérente au béton, l'expérience montre que l'on peut appréhender correctement le comportement d'une section à l'épuisement de sa résistance en tablant sur les hypothèses suivantes :

- conservation de la planéité des sections droites ;
- non-intervention du béton tendu ;
- non-glissement des matériaux.

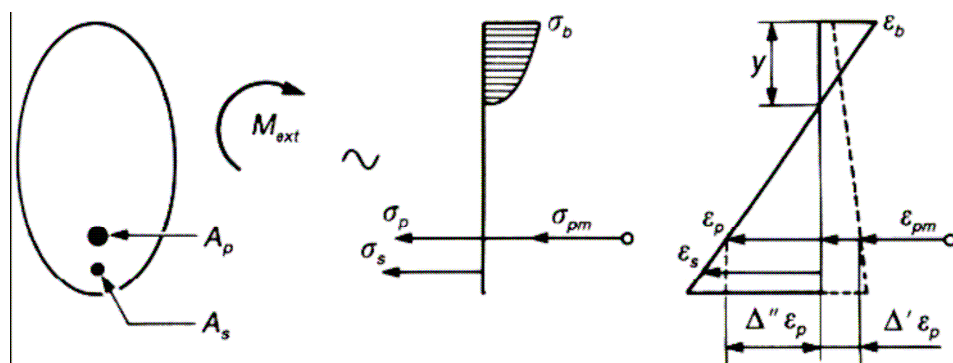


Figure 42 - Contraintes et déformations dans une section, au voisinage de sa rupture

Si l'on prend l'exemple d'une section soumise, de la part des actions extérieures, à une sollicitation de flexion simple (section médiane d'une travée indépendante, pour se fixer les idées), cette section résiste par son béton comprimé sur une hauteur y et par ses aciers tendus à (Figure 42) :

- σ_p en ce qui concerne les armatures de précontrainte ;
- σ_s en ce qui concerne les armatures passives.

σ_p se décompose en trois termes :

σ_{pm} contrainte probable à vide ,

$\Delta'\sigma_p$ premier complément de contrainte accompagnant le retour à 0 de la déformation du béton adjacent et

$\Delta''\sigma_p$ deuxième complément de contrainte jusqu'à l'épuisement de la résistance de la section.

Ces contraintes σ_p , σ_s et σ_c équilibrent le moment M_{ext} développé par les charges extérieures.

$$Sys\{M_{ext}\} \approx Sys\{\sigma_c dA_s, -A_p (\sigma_{pm} + \Delta'\sigma_p + \Delta''\sigma_p), A_s \sigma_s\} \quad (96)$$

La relation d'équivalence précédente s'écrit encore :

$$Sys\{M_{ext}, A_p \sigma_{pm}\} \approx Sys\{\sigma_c dA_s, -A_p (\Delta'\sigma_p + \Delta''\sigma_p), A_s \sigma_s\} \quad \text{soit}$$

$$Sys\{M_{ext}, P_m\} \approx Sys\{\sigma_c dA_s, -A_p (\Delta'\sigma_p + \Delta''\sigma_p), A_s \sigma_s\} \quad (97)$$

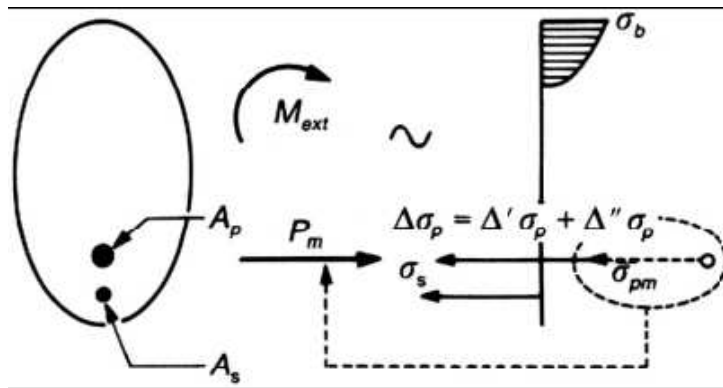


Figure 43 - Équilibre d'une section

Dans la formulation (97), la précontrainte P_m est passée du côté sollicitant (Figure 43), les aciers de précontrainte n'intervenant plus que par leur surtension $\Delta\sigma_p = \Delta'\sigma_p + \Delta''\sigma_p$ dans la résistance de la section. C'est cette formulation (97) qui sert de base aux justifications réglementaires du fait que la précontrainte P_m , considérée comme une action, est affectée d'un coefficient γ_p dont la formulation (96) ne peut rendre compte de façon simple.

Par la suite, nous nous appuyerons donc sur cette formulation (97), bien que γ_p prenne systématiquement la valeur 1,0 lorsque les armatures de précontrainte participent par leur surtension $\Delta''\sigma_p$ à la résistance vis-à-vis des sollicitations normales et qu'alors les relations (96) et (97) soient strictement équivalentes. En ce qui concerne les allongements des armatures de précontrainte ou leurs variations (ε_{pm} , $\Delta'\varepsilon_p$, $\Delta''\varepsilon_p$) corrélatifs des tensions (ou variations de tension) σ_{pm} , $\Delta'\sigma_p$, $\Delta''\sigma_p$, on peut remarquer que, dans la pratique, ε_{pm} et $\Delta'\varepsilon_p$, se situent dans le domaine de comportement élastique des aciers et qu'en conséquence :

$$\varepsilon_{pm} = \frac{\sigma_{pm}}{E_p} \quad (98) \quad \Delta'\varepsilon_p = \frac{\Delta'\sigma_p}{E_p} \left(= \varepsilon_{c,pm} = \frac{\sigma_{c,pm}}{E_{cm}} \right) \quad (99)$$

avec $\sigma_{c,pm}$ contrainte du béton en service, à vide, au niveau des armatures de précontrainte (calculée en prenant en compte la valeur probable de la précontrainte),

$\varepsilon_{c,pm}$ raccourcissement correspondant du béton. D'où $\Delta'\sigma_p = \frac{E_p}{E_{cm}} \sigma_{c,pm} \approx 5\sigma_{c,pm}$

En revanche $\Delta \varepsilon_p$ déborde presque toujours du domaine de comportement élastique des armatures.

3. Caractérisation d'un état-limite ultime

Physiquement, un état-limite ultime se caractérise par le fait que l'un au moins des matériaux constitutifs de la section atteint sa déformation ultime. Réglementairement, on admet, de façon conventionnelle, qu'un ELU est atteint lorsque le diagramme des déformations est un diagramme limite passant par un des pivots A, B, C (ou encore A', B' ou C') (Figure 44). Les pivots A et B correspondent :

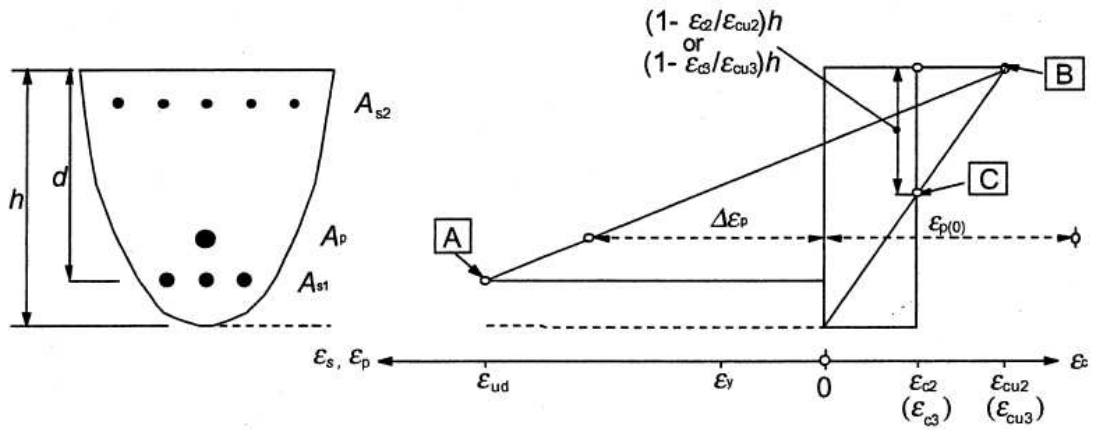
- pour les aciers, à des allongements ou à des variations d'allongements ultimes. Il est à noter que suivant la loi de comportement choisie pour l'acier, cette limite n'existe pas toujours (voir ci-après). Cette limite était fixée à 10^{-2} dans les anciennes règles en France. L'Eurocode a remonté fortement la valeur (2,5 ou 5,0 ou $7,5 \cdot 10^{-2}$)
- pour le béton, à un raccourcissement ultime assez bien représentatif de ce que l'on peut observer expérimentalement : $\varepsilon_{cu} = 3,5 \cdot 10^{-3}$

Le pivot C, quant à lui, permet de tenir compte du fait que, lorsqu'une pièce périt tout en étant partout comprimée, les raccourcissements qu'on y mesure sont sensiblement plus faibles que sur la fibre comprimée la plus déformée d'une pièce partiellement tendue à rupture.

4. Comportement des matériaux

À toute distribution linéaire des déformations sur la hauteur de la section correspond une répartition de contraintes facile à appréhender par l'intermédiaire des diagrammes contraintes-déformations des matériaux. Pour des bétons de résistance caractéristique f_{ck} inférieure à 40 MPa, le diagramme parabole-rectangle de la Figure 45 donne une précision suffisante. Le comportement des aciers passifs est quant à lui bien représenté par un diagramme élastoplastique avec palier d'écoulement à f_{yk} (Figure 46). Lorsqu'on ne dispose pas d'outils de calculs élaborés, différentes simplifications s'avèrent légitimes :

- si le diagramme des déformations de la section est un diagramme limite appartenant à l'un des domaines (1) ou (2) (ou encore (1') ou (2')), Figure 44), il est possible de remplacer la distribution réelle des contraintes de compression sur la hauteur x par une distribution rectangulaire simplifiée sur la hauteur $0,8 x$ (Figure 48)
- on peut utiliser les diagrammes élastoplastiques linéaires simplifiés pour les aciers passifs et aciers de précontrainte, à palier horizontal



- A** - limite de déformation relative en traction des armatures de béton armé
- B** - limite de déformation relative du béton en compression
- C** - limite de déformation relative du béton en compression pure

Figure 44 - Définition des pivots

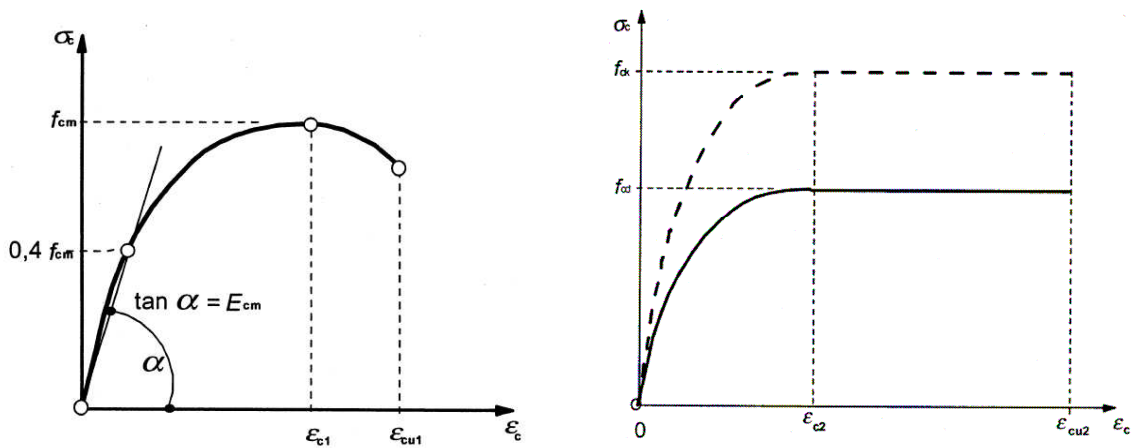


Figure 45 - Diagrammes contraintes-déformations du béton (réel / pour le calcul)

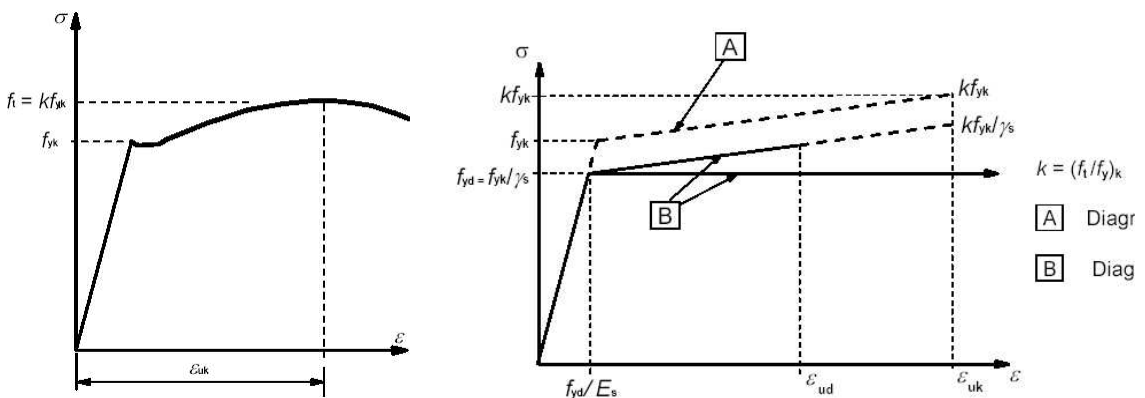


Figure 46 - Diagrammes contraintes-déformations des aciers passifs (réel / pour le calcul)

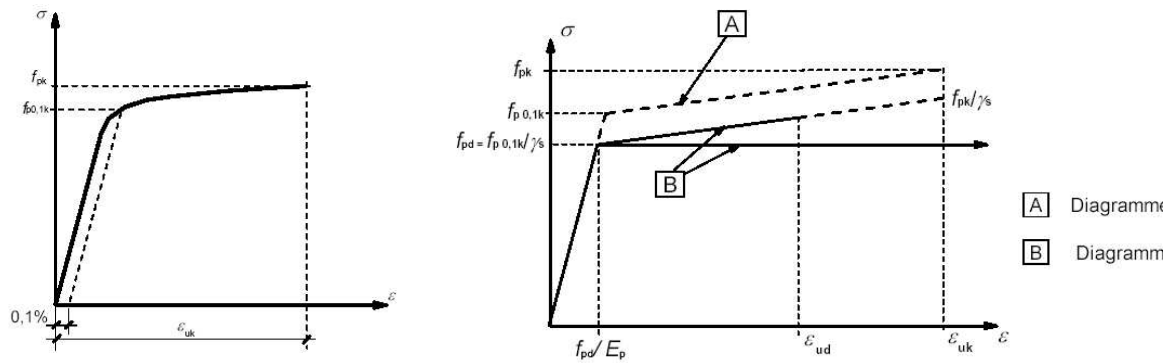


Figure 47 - Diagrammes contraintes-déformations des aciers de précontrainte (réel / pour le calcul)

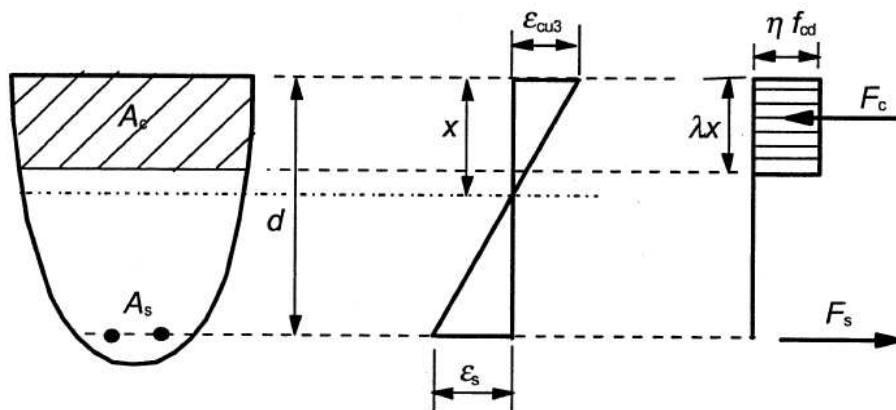


Figure 48 - Distribution rectangulaire simplifiée

5. Principe des justifications

Il s'agit de s'assurer que les sollicitations réglementaires de calcul, que nous désignerons par S^* , n'entraînent pas l'apparition d'un état-limite ultime dans la section.

5.1. Sollicitations de calcul

Elles sont définies par :

$$S^* = S \left(1,35 G_{k,\text{sup}} + G_{k,\text{inf}} + \gamma_P P_m + \sum_{i>1} \gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i} \right)$$

ce qui peut encore s'écrire : $S^* = S(\gamma_P P_m) + S^*_{\text{ext}}$

Même lorsque les charges extérieures n'engendrent que la flexion simple, ce sont donc, du fait qu'on y a incorporé P_m , des sollicitations de flexion composée se caractérisant par deux paramètres, dans la mesure où l'on ne s'intéresse qu'aux composantes donnant des contraintes normales et où l'on a affaire à de la flexion non déviée.

Ces paramètres sont généralement la composante normale de la résultante et le moment résultant en un point.

Si ce point est le centre de gravité G (Figure 49), S^* est donc défini par :

$$S^* \left\{ \begin{array}{l} N^* = N_{ext}^* + \gamma_p P_m \\ M^* = M_{ext}^* + \gamma_p P_m e_0 \end{array} \right\} \text{ éléments de réduction en } G$$

Le plus souvent $N_{ext}^* = 0$. Alors :

$$S^* \left\{ \begin{array}{l} N^* = \gamma_p P_m \\ M^* = M_{ext}^* + \gamma_p P_m e_0 \end{array} \right\} \text{ éléments de réduction en } G$$

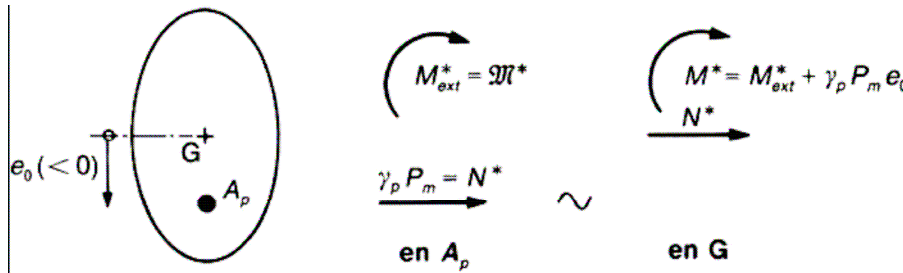


Figure 49 - Éléments de réduction de S^*

Lorsque, dans une section, les armatures de précontrainte peuvent être considérées comme concentrées en un point, il est souvent commode de prendre les éléments de réduction de S^* par rapport à ce point. En supposant encore $N_{ext}^* = 0$, on a, dans ce cas :

$$S^* \left\{ \begin{array}{l} N^* = \gamma_p P_m \\ M^* = M_{ext}^* \end{array} \right\} \text{ éléments de réduction en } A_p$$

Il convient de remarquer, par ailleurs, qu'en règle générale il y a deux sollicitations S^* à prendre en compte :

- S_{max}^* qui correspond à l'épuisement de la section par *moments positifs* ;
- S_{min}^* qui correspond à l'épuisement de la section par *moments négatifs*.

À titre d'exemple simple, prenons le cas de la section médiane de la poutre représentée à la Figure 50.

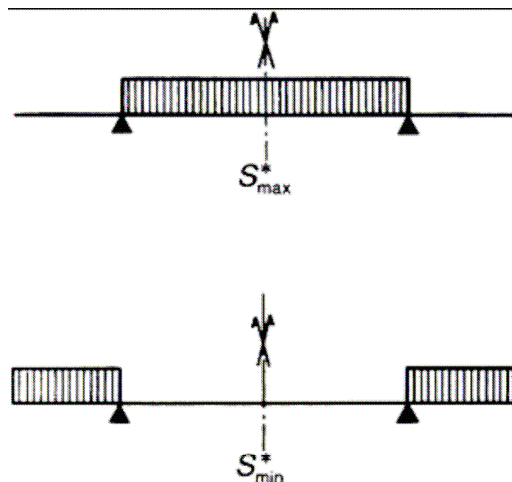


Figure 50 - Exemple simple de cas de charge donnant les S^* extrêmes

Supposons que cette poutre soit soumise :

- à une charge permanente uniforme (poids propre g , charge de superstructure g') donnant un moment positif dans la section médiane ;
- à une charge variable d'exploitation assimilable à une charge uniformément répartie de valeur caractéristique q .

La Figure 50 définit les deux cas de charges extrêmes à considérer pour la justification de la section médiane. Les sollicitations de calcul correspondantes s'écrivent (en prenant leurs éléments de réduction par rapport à A_p) :

$$S_{\max}^* \left\{ \begin{array}{l} N^* = \gamma_p P_m \\ \mathcal{M}_{\max}^* = 1,35(M_g + M_{g'}) + \gamma_{Q1} M_{q\max} \end{array} \right\} \text{ avec } M_{q\max} > 0$$

$$S_{\min}^* \left\{ \begin{array}{l} N^* = \gamma_p P_m \\ \mathcal{M}_{\min}^* = (M_g + M_{g'}) + \gamma_{Q1} M_{q\max} \end{array} \right\} \text{ avec } M_{q\max} < 0$$

5.2. Résistance de la section

Elle est évaluée non pas à partir des diagrammes caractéristiques contraintes-déformations des matériaux, mais à partir de leurs diagrammes de calcul (Figure 45, Figure 46, Figure 47, courbes de droite) obtenus en faisant subir aux premiers des affinités de rapports $1/\gamma_m$ parallèlement :

- à l'axe des contraintes pour le béton (avec, en général, $\gamma_c = 1,5$) ;
- à la droite de Hooke pour les aciers, qu'ils soient passifs ou de précontrainte (et avec $\gamma_p = \gamma_s = 1,15$).

En outre, pour le béton, la résistance caractéristique f_{ck} est affectée du coefficient réducteur α_{cc} mais qui en France vaut 1,0 systématiquement.

5.3. Conduite des justifications

Pour mener à bien la justification d'une section aux ELU, il n'est guère envisageable, tout au moins lorsqu'on opère manuellement, de calculer directement les déformations et les contraintes qui apparaissent dans la section sous l'effet de S^* , car ce calcul devient très complexe dès qu'on s'écarte, comme ici, du comportement élastique des matériaux (par contre, certains programmes procèdent à ce calcul direct).

En revanche, il n'y a aucune difficulté à calculer autant de sollicitations limites \bar{S}_u qu'on le désire. Pour obtenir une telle sollicitation de flexion composée qui entraîne l'apparition d'un état-limite ultime dans la section, il suffit de partir d'un diagramme de déformation limite de la section (diagramme passant par l'un des pivots A, B, C, A', B' ou C'), de remonter aux contraintes par l'intermédiaire des diagrammes contraintes-déformations de calcul et de déterminer la sollicitation qu'équilibrent ces contraintes.

Si l'on définit les sollicitations par leurs éléments de réduction en G et si l'on se place dans un plan (N, M) , l'ensemble des sollicitations $\bar{S}_u(\bar{N}_u, \bar{M}_u)$, dont chacune peut être représentée par un point de ce plan, définit une courbe fermée dite courbe d'interaction effort normal-moment fléchissant (Figure 51).

Cette courbe délimite le domaine de résistance à la section, et il suffit de s'assurer que le point représentatif de S^* (N^* , M^*) est bien à l'intérieur de ce domaine.

En pratique, il n'est pas utile de construire la courbe d'interaction point par point. Compte tenu de la convexité du domaine, il suffit de déterminer les deux points d'intersection de cette courbe avec la verticale ou l'horizontale passant par S^* et de vérifier que S^* est bien entre ces deux points. Ainsi, sur la Figure 51, a-t-on défini les deux états-limites équilibrant $N = N^*$.

Les moments correspondants sont $\bar{M}_{u \min}$ et $\bar{M}_{u \max}$ et l'on doit avoir :

$$\bar{M}_{u \min} \leq M^* \leq \bar{M}_{u \max}$$

En fait, comme on l'a vu auparavant, deux sollicitations de calcul sont, en général, à considérer :

$$S_{\max}^* \left\{ \begin{array}{l} N^* = \gamma_p P_m \\ M_{\max}^* \end{array} \right\} \text{ et } S_{\min}^* \left\{ \begin{array}{l} N^* = \gamma_p P_m \\ M_{\min}^* \end{array} \right\}$$

Il y a lieu, dans ces conditions, de vérifier :
$$\begin{cases} M_{\max}^* \leq \bar{M}_{u \max} \\ M_{\min}^* \geq \bar{M}_{u \min} \end{cases}$$

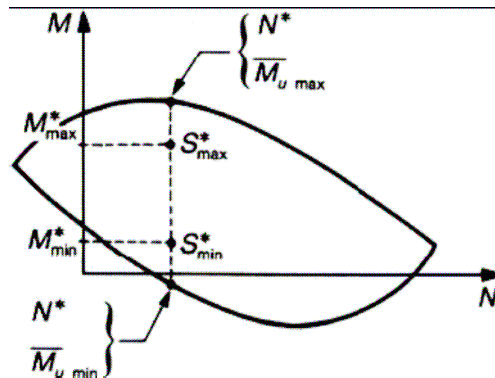


Figure 51 - Courbe d'interaction effort normal, moment fléchissant

5.4. Mise en équations du problème

Prenons l'exemple simple de la section médiane d'une travée indépendante que l'on voudrait justifier sous l'effet de S_{\max}^* (N^* , M_{\max}^*). Comme nous l'avons vu auparavant, on va chercher la sollicitation limite (N^* , $\bar{M}_{u \max}$), point d'intersection le plus haut de la courbe d'interaction avec la verticale $N = N^*$.

Nous admettons, *a priori*, que le diagramme limite de déformation de la section correspondant à ce point appartient à l'un des domaines (1) ou (2) précédemment définis (Figure 44), auquel cas il est légitime d'utiliser, pour le béton, le diagramme rectangulaire simplifié.

Si l'on définit les sollicitations par leurs éléments de réduction au niveau du centre de gravité G de la section, les équations définissant un état-limite appartenant à l'un des domaines (1) ou (2) s'écrivent :

$$\bar{N}_u = A_c(0,8x)f_{cd} - \sum_j A_{p_j}(\sigma_{p_j} - \sigma_{pm_j}) - \sum_{j'} A_{s_j'}\sigma_{s_j'} \quad (100)$$

$$\bar{M}_u = e_{A_c}(0,8x)A_c(0,8x)f_{cd} - \sum_j A_{p_j}(\sigma_{p_j} - \sigma_{pm_j})e_{p_j} - \sum_{j'} A_{s_{j'}}\sigma_{s_{j'}}e_{s_{j'}} \quad (101)$$

$$\frac{\Delta''\varepsilon_{p_j}}{\varepsilon_c} = \frac{d_{p_j} - x}{x} \quad (102)$$

$$\frac{\varepsilon_{s_{j'}}}{\varepsilon_c} = \frac{d_{s_{j'}} - x}{x} \quad (103)$$

$$\sigma_{p_j} = \bar{f}(\varepsilon_{pm_j} + \Delta'\varepsilon_{p_j} + \Delta''\varepsilon_{p_j}) \quad (104)$$

$$\sigma_{s_{j'}} = \bar{g}(\varepsilon_{s_{j'}}) \quad (105)$$

$$\begin{cases} \text{soit } \varepsilon_c = \varepsilon_{cu} \\ \text{soit } \Delta''\varepsilon_{p_j} = \Delta''\varepsilon_{pu} \text{ ou } \varepsilon_{s_{j'}} = \varepsilon_{su} \text{ pour l'acier le plus bas} \end{cases} \quad (106)$$

avec $A_c(0,8x)$ aire de la surface de béton comprimé (sur $0,8x$ dans le cas du diagramme rectangulaire simplifié), $e_{A_c}(x)$ excentricité de son centre de gravité par rapport à G , e_{p_j} et $e_{s_{j'}}$ excentricité des différentes armatures par rapport à G . Si l'on fait, dans l'équation (100), $N_u = N^*$ (connu), on obtient ainsi un système comportant autant d'équations que d'inconnues. Dans le cas le plus général, on résout ce système par approximations successives ; d'où $\bar{M}_{u\max}$, et la justification consiste à s'assurer que $M_{\max}^* \leq \bar{M}_{u\max}$

Chapitre IX - Comportement sous effort tranchant

1. Généralités

Alors que la résistance à la flexion conditionne les membrures d'une poutre, c'est la résistance à l'effort tranchant qui permet de dimensionner les âmes et de préciser le tracé à donner aux câbles dans les zones où la flexion n'est pas prépondérante. Tout comme vis-à-vis de la flexion, une double vérification est de règle :

- aux ELS, des critères d'intégrité permettent de limiter la probabilité de fissuration du béton ;
- aux ELU, le schéma classique du treillis conduit au dimensionnement des armatures transversales et au contrôle de la contrainte de compression dans les bielles.

1.1. Valeur de l'effort tranchant à considérer

Dans la section droite Σ d'une poutre, l'effort tranchant est la composante *verticale* (en réalité selon Gy), comptée positivement vers le haut, de la somme des forces appliquées à gauche de Σ . Ces forces comprennent :

- les charges extérieures (et leurs réactions d'appui) donnant l'effort tranchant extérieur V_{ext} ;
- les forces \vec{F}_{ig} que le câble exerce sur le béton à gauche de Σ et qui génèrent l'effort tranchant isostatique de précontrainte $P \cdot \sin \alpha$ (ou $\Sigma P_j \sin \alpha_j$ si plusieurs câbles traversent la section) (Figure 52) ;
- enfin, si la poutre est hyperstatique, les réactions hyperstatiques de précontrainte \vec{R}_{ig} (à gauche de Σ) produisant un effort tranchant hyperstatique de précontrainte \mathcal{V} .

Au total, donc : $V = V_{ext} + P \sin(\alpha) + \mathcal{V}$

La précontrainte permet donc de modifier l'origine des efforts tranchants grâce à l'inclinaison α du câble, comme celle des moments fléchissants (grâce à l'excentricité e_0 du câble). Il convient de remarquer que, selon le cas de charge, V_{ext} peut varier entre $V_{ext,min}$ et $V_{ext,max}$ et qu'en conséquence V peut varier entre V_{min} et V_{max} . Les vérifications à l'effort tranchant doivent donc se faire en considérant deux cas de charges extrêmes (comme les vérifications à la flexion).

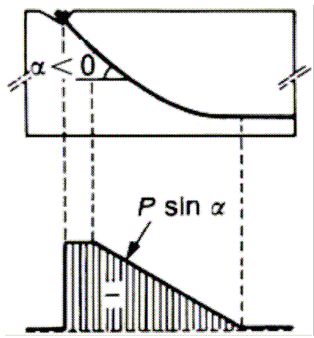


Figure 52 - Effort tranchant isostatique de précontrainte

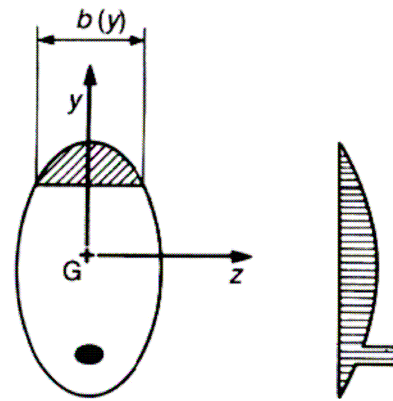


Figure 53 - Contraintes de cisaillement

1.2. Tolérances réglementaires

On peut constater expérimentalement que, pour une valeur donnée de l'effort tranchant, le comportement d'une poutre est d'autant meilleur que les charges qui génèrent cet effort tranchant sont plus proches de l'appui (elles se transmettent *directement* à cet appui lorsqu'elles en sont voisines). Pour tenir compte de ce phénomène, il est admis réglementairement, pour évaluer V d'utiliser les remarques ci-après issues de l'EC2 :

Lorsque des charges sont appliquées sur la face supérieure de l'élément, à une distance a_v du nu de l'appui telle que $0,5d \leq a_v < 2d$ (ou au centre de l'appareil d'appui s'il est souple), la contribution de cette charge à l'effort tranchant agissant peut être multipliée par $\beta = a_v / 2d$ (variant donc entre $1/4$ et 1). Pour $a_v \leq 0,5d$, il convient de prendre la valeur $a_v = 0,5d$ ($\beta = 1/4$).

2. Résistance du béton avant fissuration

2.1. Expression des contraintes de cisaillement

Dans une section quelconque, au niveau y , la contrainte moyenne de cisaillement vaut :

$$\tau(y) = \frac{V S(y)}{I_c b(y)} \quad (107)$$

avec I_c moment d'inertie de la section par rapport à Gz , $S(y)$ moment statique par rapport à Gz de la surface hachurée (sur la Figure 53) délimitée par l'horizontale d'ordonnée y , $b(y)$ largeur nette au niveau y obtenue en soustrayant de l'épaisseur brute tous les évidements se trouvant au niveau considéré, exception faite des conduits injectés au coulis de ciment qui ne sont comptés que pour leur demi-diamètre d'encombrement (on trouve en effet, expérimentalement, qu'un conduit normalement injecté participe à la résistance de la poutre).

2.2. État des contraintes dans une âme (ou dans une membrure)

On considère que, dans une âme, on a un état de contraintes plan, défini par σ et τ , dont il s'agit d'apprécier la convenance en tout point. Dans le cas d'une poutre en double té (Figure 54), τ varie peu sur la hauteur de l'âme (sauf au droit d'une gaine) mais σ varie beaucoup. Les conditions les plus défavorables se rencontrent donc :

- soit aux enracinements sur les membrures ;
- soit au niveau d'un câble.

L'expérience montre toutefois qu'on peut, le plus souvent, se contenter de la règle simple suivante. Lorsque l'âme est d'épaisseur constante, on ne fait la vérification qu'en G , sous réserve d'introduire, dans le calcul de τ , la longueur nette minimale que présente l'âme sur toute sa hauteur : $b = \min [b(y)]$ et non pas sa largeur nette au niveau de G : $b(0)$.

La contrainte conventionnelle ainsi obtenue a pour expression :

$$\tau_G = \frac{V}{bZ} \text{ avec } Z = \frac{I_c}{S(0)} \quad (108)$$

Le bras de levier du couple élastique Z vaut $2/3 h$ pour une section rectangulaire et environ $0,8 h$ pour une section en double té. L'énorme avantage de cette règle simple réside en ce que la contrainte normale associée $\sigma_G = P/B$ est immédiatement connue (sans que l'on ait besoin de calculer le moment fléchissant concomitant à l'effort tranchant qu'on a pris en compte dans le calcul de τ).

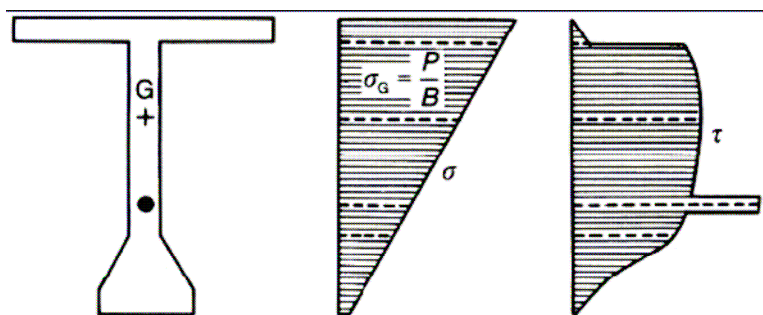


Figure 54 - État des contraintes dans l'âme d'une poutre

2.3. Représentation de l'état des contraintes par le cercle de Mohr

Plaçons-nous en un point O quelconque d'une âme ou d'une membrure. À une facette Q passant par O on associe un système d'axes On, Ot qui lui est lié (Figure 55). Lorsque Q tourne autour de O , l'extrémité q du vecteur contrainte décrit, par rapport aux axes mobiles On, Ot , un cercle, le cercle de Mohr, de centre Ω . Le vecteur q tourne deux fois plus vite autour de Ω que Q autour de O , et en sens inverse. Les points a et b où le cercle de Mohr coupe On (Figure 56) représentent les contraintes sur deux facettes A et B perpendiculaires qui ne subissent aucune contrainte de cisaillement. Sur A s'exerce la contrainte principale de traction σ_3 , sur B la contrainte principale de compression σ_1 . On admet généralement que les fissures ont tendance à se produire suivant A , autrement dit qu'elles sont parallèles aux isostatiques de compression. Le cercle de Mohr est facile à construire.

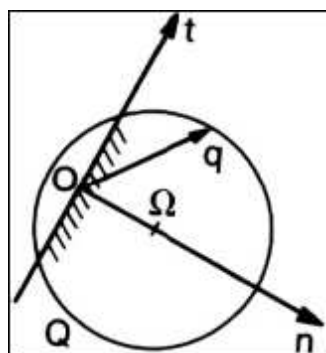


Figure 55 - Axes de Mohr

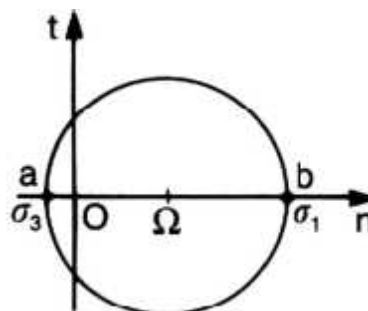


Figure 56 - Cercle de Mohr

2.3.1. Poutre sans étriers actifs

En O , sur la facette W contenue dans le plan de la section droite s'exerce une contrainte de composantes normale σ et tangente τ . Sur la facette perpendiculaire H , on retrouve la contrainte de cisaillement τ (en vertu du théorème de Cauchy).

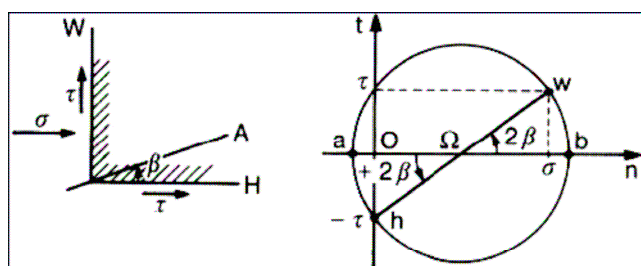
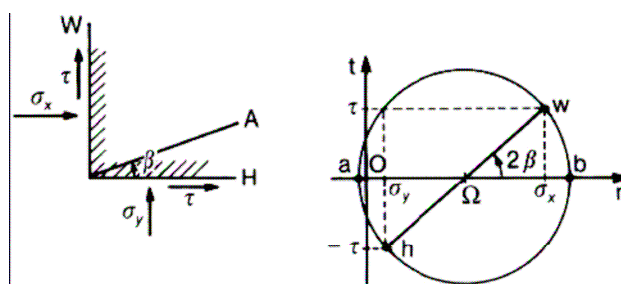
Dans le plan n, t , les points représentatifs de ces contraintes sur les facettes W et H , $w(\sigma, \tau)$ et $h(O, -\tau)$ sont diamétralement opposés sur le cercle de Mohr (Figure 57). Le centre du cercle a pour abscisse :

$$p = \overline{O\Omega} = \frac{\sigma}{2} \quad (109)$$

$$\text{et son rayon vaut : } r = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \quad (110)$$

Enfin, l'angle β que fait la contrainte principale de compression avec la fibre moyenne est donné par : $\beta = (\vec{H}, \vec{A}) = -\frac{1}{2}(\overline{\Omega h}, \overline{\Omega a}) = \frac{1}{2}(\overline{\Omega b}, \overline{\Omega w})$ avec $\tan(\beta) = \frac{2\tau}{\sigma}$ (111).

Au niveau de G , σ est positif et τ inférieur à 45° (valeur que l'on obtiendrait en béton armé sur la fibre neutre où $\sigma = 0$).

Figure 57 - Cercle de Mohr
(sans étriers actifs)Figure 58 - Cercle de Mohr
(avec étriers actifs verticaux)

2.3.2. Poutre avec étriers actifs

Ces étriers actifs, généralement verticaux (perpendiculaires à la fibre moyenne), sont des unités de précontrainte de faible puissance (souvent des monotrons ou des barres) que l'on place dans les âmes pour y créer une contrainte de compression sur les facettes H . Ils doivent être assez serrés pour que les efforts concentrés sous

leurs ancrages soient diffusés dans les âmes sans y laisser de zones non précontraintes. Leur utilisation n'est intéressante économiquement que lorsque la poutre est de grande hauteur et qu'il est particulièrement rentable de l'alléger (très grandes travées construites par encorbellement par exemple).

De tels étriers actifs verticaux ne modifient pas la contrainte sur la facette W , non plus que la composante tangente de la contrainte sur la facette H . Par contre, ils créent une composante normale σ_y sur cette facette H (Figure 58).

Si, pour éviter toute ambiguïté, nous désignons par σ_x la composante normale de la contrainte sur la facette W (égale au σ du paragraphe précédent), le point $w(\sigma_x, \tau)$ est inchangé, mais $h(\sigma_y, -\tau)$ se déplace du côté des compressions. On a cette fois-ci :

$$p = \overline{O\Omega} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (112)$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (113) \quad \text{et} \quad \beta = (\vec{H}, \vec{A}) = \frac{1}{2}(\vec{\Omega b}, \vec{\Omega w}) \quad \text{avec} \quad \tan(\beta) = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (114)$$

La précontrainte verticale par étriers actifs permet donc de décaler le cercle de Mohr du côté des compressions et de diminuer son rayon. On peut même faire disparaître toute contrainte de traction. Il suffit pour cela que $p \geq r$ soit

$$\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 \quad \text{ou} \quad \sigma_y \geq \frac{\tau^2}{\sigma_x} \quad (115)$$

En fait, il ne sert à rien de faire passer le point a à droite du point O , car alors le cercle de Mohr n'est plus le cercle de diamètre ab , mais le cercle de diamètre Ob (intervention de la 3^{ème} contrainte principale $\sigma_2 = 0$ agissant sur les facettes parallèles au plan de l'âme).

2.4. Convenance de l'état des contraintes

2.4.1. Courbe intrinsèque du béton

La courbe intrinsèque du béton Γ_r est l'enveloppe des cercles de Mohr de rupture. C'est une courbe étroitement fermée du côté des tractions et largement ouverte du côté des compressions (Figure 59). En fait, compte tenu de la 3^{ème} contrainte principale $\sigma_2 = 0$, elle est, dans la pratique, limitée du côté des compressions, par le cercle de Mohr de compression simple.

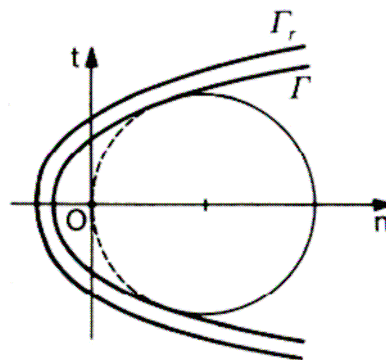


Figure 59 - Courbe intrinsèque du béton

Si l'on veut avoir une certaine sécurité sur les contraintes, il convient de raisonner, non pas sur Γ_r , mais sur une courbe intrinsèque de sécurité Γ , intérieure à Γ_r (s'en déduisant, par exemple, par une homothétie de centre O et de rapport $1/\gamma$).

2.4.2. Définition pratique du domaine de sécurité

La courbe intrinsèque est malcommode à exploiter dans la pratique courante ; il faudrait, en effet, pour s'assurer de la convenance d'un état de contraintes, construire le cercle de Mohr correspondant et vérifier qu'il est bien tout entier à l'intérieur de Γ .

Il est beaucoup plus facile de raisonner sur la condition que doivent respecter p et r pour que le cercle de Mohr défini par ces deux paramètres soit intérieur à Γ .

Voyons en effet quelle forme revêt cette condition.

Pour ce faire, supposons donné Ω , à l'intérieur de Γ , donc $p = \overline{O\Omega}$ (Figure 60). Si, partant de $r = 0$, on dilate progressivement le rayon du cercle de centre Ω , il est clair que pour une certaine valeur r_0 (fonction de p) on obtiendra le contact avec Γ et que l'état de contraintes défini par p et r ne sera acceptable que si : $r \leq r_0(p)$ (116) ce qui

$$\text{s'écrit encore : } r^2 - p^2 \leq [r_0(p)]^2 - p^2 \quad (117)$$

Compte tenu des équations (112) et (113), on a : $r^2 - p^2 = \tau^2 - \sigma_x \sigma_y$ et $2p = \sigma_x + \sigma_y$ et l'inégalité (117) se ramène à : $\tau^2 - \sigma_x \sigma_y \leq f(\sigma_x + \sigma_y)$ (118)

Cette condition (118) entre les deux invariants ($\sigma_x + \sigma_y$) et ($\tau^2 - \sigma_x \sigma_y$) du tenseur des contraintes est d'emploi très pratique puisqu'elle ramène la vérification d'un état de contraintes à celle d'une inégalité. Dans le cas particulier (très fréquent) où l'on n'a pas d'étriers actifs ($\sigma_x = \sigma$; $\sigma_y = 0$), l'inéquation (118) devient : $\tau^2 \leq f(\sigma)$ (119)

Cette relation entre σ et τ définit le domaine de stabilité du béton délimité par la courbe limite au cisaillement d'équation : $\tau^2 = f(\sigma)$ (120)

Il ne faut pas confondre cette courbe limite au cisaillement (à l'intérieur de laquelle doit se trouver le point σ, τ) avec la courbe intrinsèque Γ (à l'intérieur de laquelle doit se trouver le cercle de Mohr) (Figure 61).

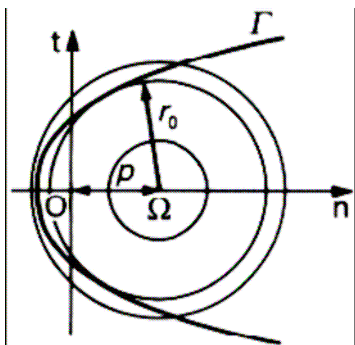


Figure 60 - Cercle de Mohr limite de rayon

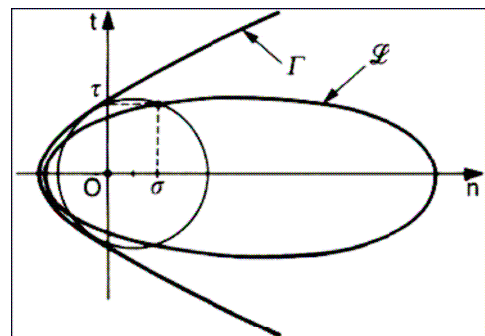


Figure 61 - Courbe intrinsèque Γ et courbe limite au cisaillement \mathcal{L}

Si l'on connaît l'expression analytique de cette courbe, il est facile d'établir l'équation de Γ . Γ est, en effet, l'enveloppe des cercles de Mohr limites :

$$\begin{cases} (n-p)^2 + t^2 - r^2 = 0 \\ \text{avec } r^2 - p^2 = f(2p) \end{cases} \text{ donc de la famille de cercles : } n^2 + t^2 - 2pn - f(2p) = 0 \quad (121)$$

Pour obtenir cette enveloppe, il suffit d'associer à (121) l'équation dérivée par rapport à p :

$$n + f'(2p) = 0 \quad (122)$$

En éliminant p entre (121) et (122), on trouve l'équation de Γ .

2.4.3. Prescriptions réglementaires (justifications aux ELS)

Les conditions réglementaires de sécurité proviennent de l'annexe QQ (informative) de la partie 2 (Ponts) de l'EC2.

Lorsqu'il est jugé nécessaire de vérifier la fissuration par cisaillement, notamment pour les éléments précontraints, les armatures requises pour la maîtrise des fissures peuvent être déterminées comme suit :

1. Il convient de calculer la résistance à la traction du béton f_{ctb} au niveau des âmes, et qui dépend de la direction, à l'aide de l'expression : $f_{ctb} = \left(1 - 0,8 \frac{\sigma_3}{f_{ck}}\right) f_{ctk;0,05}$ où :

f_{ctb} est la résistance à la traction du béton préalablement à la fissuration dans un état de contrainte biaxial

σ_3 est la plus grande contrainte principale de compression qui doit vérifier $\sigma_3 < 0,6 f_{ck}$

2. La plus grande contrainte principale de traction σ_1 qui s'exerce sur l'âme est comparée à la résistance correspondante f_{ctb} obtenue avec l'expression précédente.

Si $\sigma_1 < f_{ctb}$, il convient de mettre en place, dans la direction longitudinale, le ferrailage minimal.

Si $\sigma_1 \geq f_{ctb}$, il convient de maîtriser la largeur de fissure.

Il est cependant dans ce cas préférable de mettre en place une section suffisante de béton pour éviter la fissuration.

σ_3 et σ_1 se déduisent des contraintes σ_x , σ_y et τ . Si les deux premières contraintes sont connues, le cisaillement limite est :

$$\tau_{\text{lim}} = \sqrt{\sigma_x \times \sigma_y - \frac{5f_{ck} \times f_{ctk;0,05} \times (\sigma_x + \sigma_y + f_{ctk;0,05}) \times (4\sigma_x + 4\sigma_y - 5f_{ck})}{(5f_{ck} + 4f_{ctk;0,05})^2}}$$

La Figure 62 donne (en rouge) la courbe de cisaillement limite en fonction de la contrainte normale longitudinale (sans étriers actifs) et la compare avec des courbes issues des anciens règlements de béton précontraint français.

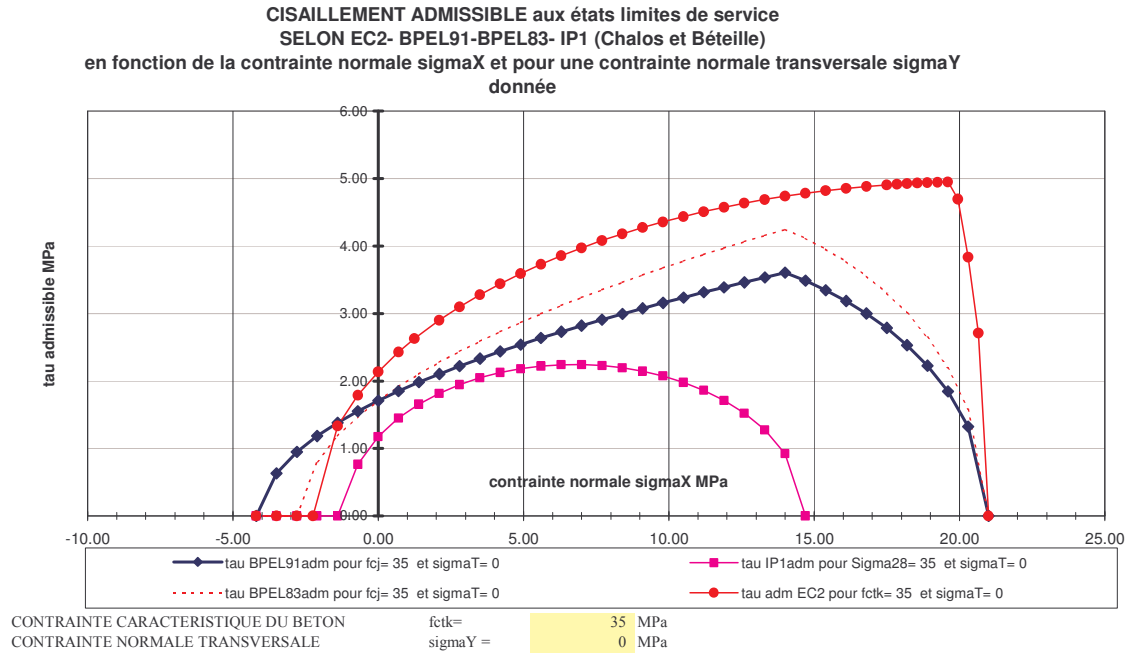


Figure 62 - Courbe des cisaillements limite

3. Comportement après fissuration

3.1. Approche qualitative

Les fissures se développent sensiblement selon les isostatiques de compression. Or, l'inclinaison de la contrainte principale de compression est, en l'absence d'étriers actifs, définie par : $\tan(\beta) = \frac{2\tau}{\sigma}$

Quand on se rapproche des fibres extrêmes d'une poutre, $\tau \rightarrow 0$ et $\tan 2\beta \rightarrow 0$. Selon le signe de σ , $\beta \rightarrow 0$ ($\sigma > 0$) ou $\beta \rightarrow \pi/2$ ($\sigma < 0$) comme le montre la Figure 63.

Considérons donc une poutre indépendante précontrainte, soumise à une charge progressivement croissante.

En général, la fissuration ne s'amorce qu'après apparition d'une zone tendue, en partie médiane, au voisinage de la fibre inférieure. Immédiatement avant fissuration, les lignes isostatiques ont alors l'allure de la Figure 64. Ce schéma explique bien les deux familles de fissures que l'on peut observer sur une telle poutre :

- fissures verticales de flexion en zone médiane ;
- fissures inclinées d'effort tranchant affectant l'âme, à proximité des appuis.

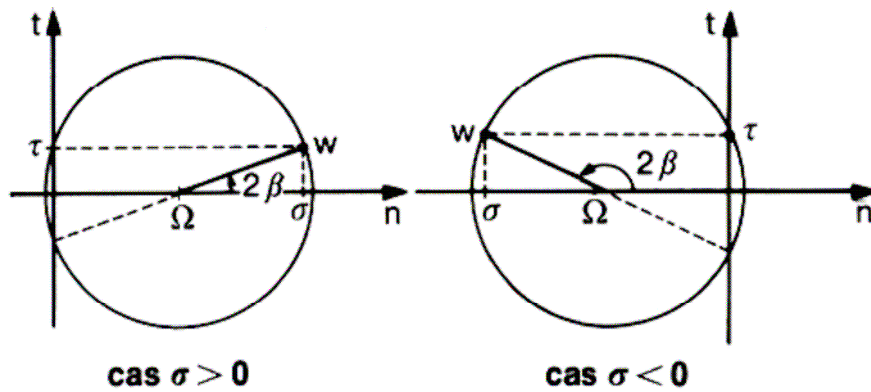
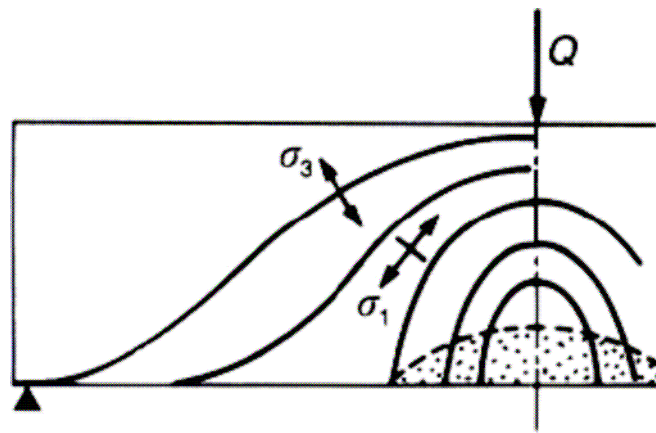
Figure 63 – Valeurs de β selon le signe de σ 

Figure 64 - Isostatiques de compression

Les charges se transmettent aux appuis par l'intermédiaire de bielles, en forme de S allongé. Les contraintes de compression σ_1 de ces bielles développent, du fait de leur courbure, des poussées au vide et donc des contraintes de traction σ_3 . Ces contraintes, d'abord équilibrées par la résistance à la traction du béton, font apparaître des fissures et, en l'absence d'étriers, la poutre se rompt brutalement. Si, au contraire, on a pris la précaution de disposer des étriers dans les âmes, ces armatures se mettent en traction dès que la fissuration s'amorce et elles remontent les efforts de compression des bielles jusqu'à la membrure comprimée de la poutre. L'âme résiste selon un schéma de treillis multiple dont :

- les diagonales comprimées sont matérialisées par les bielles de béton ;
- les montants tendus sont représentés par les armatures d'âme.

3.2. Méthode réglementaire de l'EC2

La fissuration due à l'effort tranchant étant à éviter à l'ELS, ou au moins à contrôler, l'Eurocode 2 prévoit des vérifications à l'ELU basées sur la méthode des bielles et tirants après fissuration du béton.

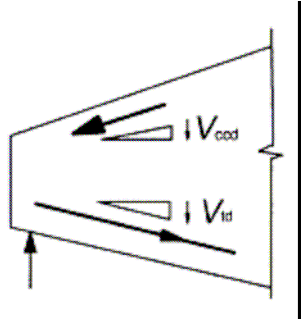
Pour la vérification de la résistance à l'effort tranchant, l'EC2 définit :

- $V_{Rd,c}$ l'effort tranchant résistant de calcul de l'élément en l'absence d'armatures d'effort tranchant
- $V_{Rd,s}$ l'effort tranchant de calcul pouvant être repris par les armatures d'effort tranchant travaillant à la limite d'élasticité

- $V_{Rd,max}$ la valeur de calcul de l'effort tranchant maximal pouvant être repris par l'élément, avant écrasement des bielles de compression.

Dans les éléments de hauteur variable, on définit également:

- V_{ccd} la valeur de calcul de la composante d'effort tranchant de la force de compression, dans le cas d'une membrure comprimée inclinée
- V_{td} la valeur de calcul de la composante d'effort tranchant de la force dans l'armature tendue, dans le cas d'une membrure tendue inclinée.



Composantes d'effort tranchant dans le cas d'éléments de hauteur variable

La résistance à l'effort tranchant d'un élément comportant des armatures d'effort tranchant est égale à : $V_{Rd} = V_{Rd,s} + V_{ccd} + V_{td}$

Dans les zones de l'élément où $V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$, aucune armature d'effort tranchant n'est requise par le calcul. V_{Ed} est l'effort tranchant agissant de calcul dans la section considérée, résultant des charges extérieures appliquées et de la précontrainte (armatures adhérentes ou non).

Même lorsque aucune armature d'effort tranchant n'est requise, il convient de prévoir un ferrailage transversal minimal. Ce ferrailage minimal peut être omis dans les éléments tels que les dalles (pleines, nervurées ou alvéolées) lorsqu'une redistribution transversale des charges est possible.

Dans les régions où $V_{Ed} > V_{Rd,c}$, il convient de prévoir des armatures d'effort tranchant en quantité suffisante de telle sorte que $V_{Ed} \leq V_{Rd,s}$

Il convient qu'en tout point de l'élément, l'effort tranchant agissant de calcul V_{Ed} soit inférieur ou égale à la valeur maximale admise $V_{Rd,max}$. Il convient également que les armatures longitudinales tendues soient capables de résister à l'effort de traction supplémentaire généré par l'effort tranchant.

3.2.1. Cas où les armatures d'effort tranchant ne sont pas nécessaires.

Les armatures d'effort tranchant ne sont pas nécessaires dans les régions où $V_{Ed} < V_{Rd,c}$. La valeur de l'effort tranchant $V_{Rd,c}$ dépend de l'état de fissuration ou non des sections :

- si les sections sont non fissurées en flexion, alors on considère qu'il n'y a pas besoin d'armatures d'effort tranchant si elles ne sont pas non plus fissurées à l'effort tranchant. Dans ce cas, c'est le béton en traction qui assure la résistance de la section. La valeur de $V_{Rd,c}$ correspond alors à l'effort tranchant résistant avant fissuration du béton.

- si les sections sont fissurées en flexion, alors on ne peut plus compter sur la résistance en traction du béton, même si l'effort tranchant est faible. Néanmoins, on peut tenir compte des armatures longitudinales qui peuvent couvrir la fissuration engendrée.

Effort tranchant résistant si les sections sont fissurées en flexion :

L'effort tranchant résistant de calcul $V_{Rd,c}$ est donné par :

$$V_{Rd,c} = [C_{Rd,c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} + k_1 \sigma_{cp}] b_w d$$

avec une valeur minimale $V_{Rd,c} = (v_{min} + k_1 \sigma_{cp}) b_w d$

expressions dans lesquelles :

$$f_{ck} \text{ est en MPa ; } k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2 \text{ avec } d \text{ en mm ; } \rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w d} \leq 0,02$$

A_{sl} est l'aire de la section des armatures tendues, prolongées sur une longueur supérieure à $(l_{bd} + d)$ au-delà de la section considérée

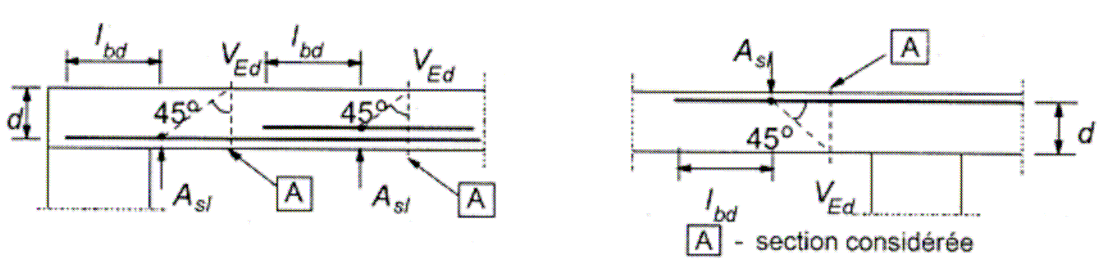
b_w est la plus petite largeur de la section droite dans la zone tendue, en mm

$\sigma_{cp} = N_{Ed}/A_c < 0,2 f_{cd}$ en MPa

N_{Ed} est l'effort normal agissant dans la section droite, dû aux charges extérieures appliquées et/ou à la précontrainte, en newtons ($N_{Ed} > 0$ pour la compression). L'influence des déformations imposées sur N_{Ed} peut être négligée.

A_c est l'aire de la section droite du béton, en mm^2

$$C_{Rd,c} = 0,18/\gamma_c ; k_1 = 0,15 ; v_{min} = 0,035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2}$$



Effort tranchant résistant si les sections sont non fissurées en flexion :

Dans les régions non fissurées en flexion (où la contrainte de traction en flexion est inférieure à $f_{ctk,0,05}/\gamma_c$), il convient de limiter la résistance à l'effort tranchant par la résistance en traction du béton. Dans ces régions, l'effort tranchant résistant est

donné par : $V_{Rd,c} = \frac{I_c b_w}{S} \sqrt{(f_{ctd})^2 + \alpha_l \sigma_{cp} f_{ctd}}$ où :

S est le moment statique de la surface située au-dessus de l'axe passant par le centre de gravité, par rapport à cet axe

$\alpha_l = 1,0$ pour les types d'armatures de précontrainte autres que la prétension.

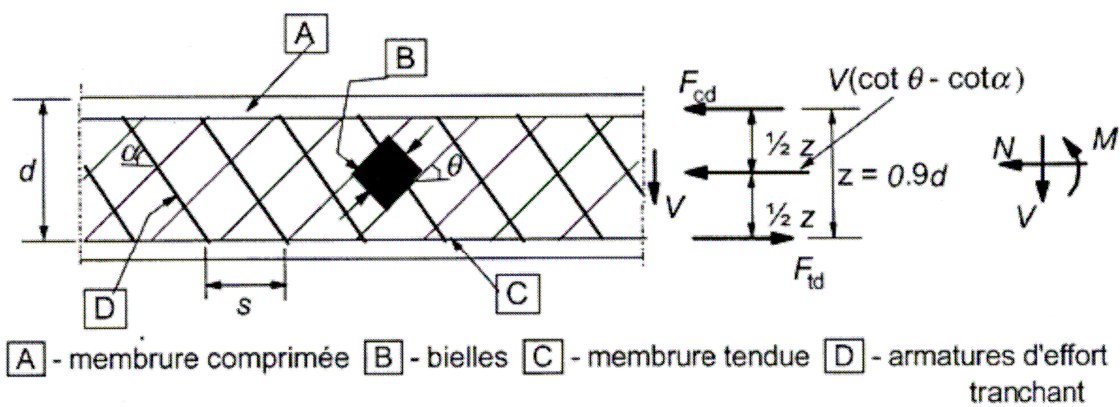
Pour les sections droites dans lesquelles la largeur varie en fonction de la hauteur, la contrainte principale peut être maximale ailleurs qu'au niveau du centre de gravité.

Dans ce cas, il convient de déterminer la valeur minimale de l'effort tranchant résistant en calculant $V_{Rd,c}$ par rapport à différents axes de la section.

Pour le calcul des armatures longitudinales, dans la région fissurée en flexion, il convient de décaler la courbe enveloppe des moments de $\alpha = d$ dans la direction défavorable.

3.2.2. Cas où des armatures d'effort tranchant sont nécessaires

Lorsque des armatures d'effort tranchant sont nécessaires ($V_{Ed} > V_{Rd,c}$) le béton est nécessairement fissuré. On réalise une modélisation de type bielles et tirants de la structure. Cette modélisation consiste à trouver un fonctionnement limite à l'aide de barres comprimées (les « bielles ») et de barres tendues (les « tirants »). Ce modèle à barre se substitue au fonctionnement de « milieu continu » que l'on a lorsque le béton n'est pas fissuré. Le choix du modèle bielle et tirant est libre, sous réserve que les bielles ne soient pas trop inclinées (voir plus loin). Il faut ensuite vérifier que les bielles ne sont pas trop comprimées (vérification $V_{Ed} < V_{Rd,max}$), et que les tirants ne sont pas trop tendus (vérification $V_{Ed} < V_{Rd,s}$). Le modèle bielle et tirant choisi est illustré sur la figure ci-après :



α est l'angle entre les armatures d'effort tranchant et la fibre moyenne de l'élément (mesuré positivement comme indiqué sur la figure)

θ est l'angle entre la bielle de compression et la fibre moyenne de l'élément.

F_{td} est la valeur de calcul de l'effort de traction dans les armatures longitudinales

F_{cd} est la valeur de calcul de l'effort de compression dans le béton dans la direction de l'axe longitudinal de l'élément

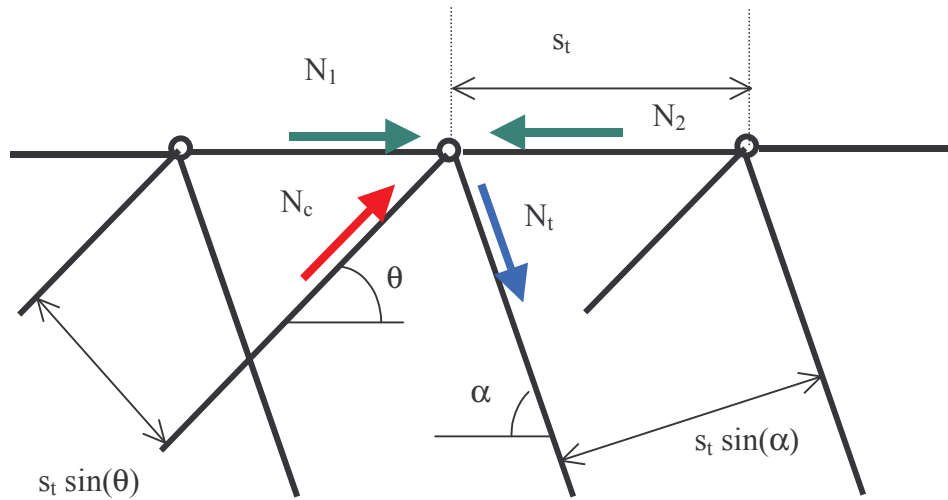
b_w est la plus petite largeur de la section comprise entre la membrure tendue et la membrure comprimée

z est le bras de levier des forces internes, pour un élément de hauteur constante, correspondant au moment fléchissant dans l'élément considéré. Pour les calculs à l'effort tranchant d'une section de béton armé sans effort normal, on peut normalement adopter la valeur approchée $z = 0,9d$

L'inclinaison des bielles doit être limitée. L'angle θ est tel que : $1 \leq \cot \theta \leq 2,5$

Pour déterminer l'effort dans les bielles et les tirants, on écrit l'équilibre du nœud intersection entre une bielle, un tirant et une membrure (supérieure ou inférieure au

choix). Si les armatures d'effort sont espacées de s_t on écrit l'équilibre du nœud de la figure suivante :



L'équilibre en projection horizontale et en projection verticale donne :

$$\begin{cases} N_1 - N_2 + N_c \cos(\theta) + N_t \cos(\alpha) = 0 \\ N_c \sin(\theta) - N_t \sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Or } N_2 - N_1 = \Delta N = \Delta M / z$$

De plus, $\Delta M / \Delta x = V$ (du fait de l'équation $\frac{dM}{dx}(x) = V(x)$) avec $\Delta x = s_t$

$$\text{Donc } N_2 - N_1 = V \cdot s_t / z$$

La résolution du système précédent donne :

$$N_c [\cos(\theta) \sin(\alpha) + \sin(\theta) \cos(\alpha)] = \Delta N \sin(\alpha) \quad \text{donc :}$$

$$N_c = \frac{V}{[\cos(\theta) \sin(\alpha) + \sin(\theta) \cos(\alpha)]} \frac{s_t}{z} \sin(\alpha)$$

$$N_t [\sin(\theta) \cos(\alpha) + \cos(\theta) \sin(\alpha)] = \Delta N \sin(\theta) \quad \text{donc :}$$

$$N_t = \frac{V}{[\sin(\theta) \cos(\alpha) + \cos(\theta) \sin(\alpha)]} \frac{s_t}{z} \sin(\theta)$$

On a $N_t \leq A_{st} f_{ywd}$ où f_{ywd} est la résistance de dimensionnement des aciers passifs pour l'effort tranchant ($f_{ywd} = 0,8 f_{ywk}$).

Ceci conduit à $\frac{V}{[\sin(\theta) \cos(\alpha) + \cos(\theta) \sin(\alpha)]} \sin(\theta) \frac{s_t}{z} \leq A_{st} f_{ywd}$ qui peut aussi s'écrire :

$$V \leq V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s_t} z f_{ywd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin(\alpha)$$

De même, on doit vérifier que la contrainte de compression du béton $\frac{N_c}{b_w s_t \sin(\theta)}$ est

inférieure à la limite $\alpha_{cw} \nu_1 f_{cd}$. Ceci peut s'écrire :

$$V \leq V_{Rd,max} = \alpha_{cw} b_w z v_1 f_{cd} \frac{(\cot \theta + \cot \alpha)}{1 + \cot^2 \theta}$$

v_1 est un coefficient de réduction de la résistance du béton fissuré à l'effort tranchant
 α_{cw} est un coefficient tenant compte de l'état de contrainte dans la membrure comprimée.

Pour les éléments en béton armé ou en béton précontraint, si la contrainte de calcul des armatures d'effort tranchant est inférieure à 80 % de la limite caractéristique d'élasticité f_{yk} , on peut adopter pour v_1 :

$$v_1 = 0,6 \text{ pour } f_{ck} \leq 60 \text{ MPa}$$

$$v_1 = 0,9 - f_{ck}/200 > 0,5 \text{ pour } f_{ck} > 60 \text{ MPa}$$

$$\alpha_{cw} = \begin{cases} 1 & \text{pour les structures non précontraintes} \\ (1 + \sigma_{cp}/f_{cd}) & \text{pour } 0 < \sigma_{cp} \leq 0,25 f_{cd} \\ 1,25 & \text{pour } 0,25 f_{cd} < \sigma_{cp} \leq 0,5 f_{cd} \\ 2,5 (1 - \sigma_{cp}/f_{cd}) & \text{pour } 0,5 f_{cd} < \sigma_{cp} < 1,0 f_{cd} \end{cases}$$

où :

σ_{cp} est la contrainte de compression moyenne dans le béton due à l'effort normal de calcul, mesurée positivement. Il convient de la déterminer en faisant la moyenne sur toute la section de béton, en tenant compte des armatures. Il n'y a pas lieu de calculer σ_{cp} à une distance inférieure à $0,5d \cot \theta$ du nu de l'appui.

3.2.3. Vérifications supplémentaires et compléments

Lorsque l'âme comporte des gaines injectées d'un diamètre supérieur à $b_w/8$, il convient de calculer l'effort tranchant résistant $V_{Rd,max}$ en adoptant une largeur nominale de l'âme :

$b_{w,nom} = b_w - 0,5 \sum \phi$, où ϕ est le diamètre extérieur de la gaine et $\sum \phi$ est déterminé au niveau le plus défavorable.

Dans le cas des gaines non injectées, des gaines en plastique injectées et des armatures de précontrainte non adhérentes, la largeur d'âme nominale est prise égale à :

$b_{w,nom} = b_w - 1,2 \sum \phi$. La valeur 1,2 dans l'expression précédente est introduite pour tenir compte du fendage des bielles dû à la traction transversale. Si des armatures transversales adaptées sont prévues, cette valeur peut être réduite à 1,0.

L'effort de traction supplémentaire ΔF_{td} dans les armatures longitudinales, dû à l'effort tranchant V_{Ed} , peut être calculé au moyen de l'expression :

$$\Delta F_{td} = 0,5 V_{Ed} (\cot \theta - \cot \alpha)$$

Il convient que $(M_{Ed}/z + \Delta F_{td})$ ne soit pas supérieur à $M_{Ed,max}/z$, où $M_{Ed,max}$ est le moment maximal le long de la poutre. Ceci revient donc à décaler la courbe enveloppe des moments.

