



École Hassania des Travaux Publics

Cours :

Calcul de Béton Armé I

Deuxième Année Génie Civil

A.U. : 2016/17

Pr. Mustapha RGUIG

EHTP

Table des matières

1	Généralités sur le béton armé	7
1.1	Définition et composition du béton armé	7
1.2	Historique du béton armé	8
1.3	Avantages et inconvénients du BA	9
1.3.1	Avantages	9
1.3.2	Inconvénients	10
1.4	Actions et sollicitations	11
1.5	États limites	12
1.5.1	Définition	12
1.5.2	État Limite Ultime (ELU)	12
1.5.3	État Limite de Service (ELS)	12
1.6	Domaine d'application du règlement BAEL	12
1.7	Constructions en béton armé et sécurité	13
1.7.1	Théorie déterministe de sécurité	13
1.7.2	Théorie probabiliste de sécurité	14
1.7.3	Théorie semi-probabiliste de sécurité	14
1.8	Combinaisons d'actions réglementaires	15
1.8.1	Principe des combinaisons de calcul	15
1.8.2	Combinaisons à considérer à l'ELU	15
1.8.2.1	Combinaisons fondamentales : Article A.3.3,21 du BAEL	15
1.8.2.2	Cas des ponts routes	17
1.8.2.3	Cas des bâtiments	18
1.8.2.4	Cas des ponts rails	18
1.8.2.5	Combinaisons accidentelles : Article A.3.3,22 du BAEL	19
1.8.2.6	Cas des ponts routes	19
1.8.2.7	Cas des bâtiments	20
1.8.2.8	Cas des ponts rails	20
1.8.3	Combinaisons à considérer à l'ELS	20

1.8.3.1	Cas des ponts routes	20
1.8.3.2	Cas des bâtiments	21
1.8.3.3	Cas des ponts rails	21
2	Caractéristiques des matériaux du béton armé	22
2.1	Introduction	22
2.2	Comportement expérimental du béton	23
2.2.1	Essai de compression	23
2.2.2	Essai de traction	24
2.2.3	Fluage du béton	25
2.2.4	Retrait du béton	25
2.2.5	Dilatation thermique	26
2.3	Calcul réglementaire du béton	26
2.3.1	Résistance caractéristique en compression	26
2.3.2	Résistance caractéristique en traction	27
2.3.3	Modules de déformation longitudinale	27
2.3.4	Coefficient de POISSON	27
2.3.5	Modèle de calcul à l'ELS	28
2.3.6	Modèle de calcul à l'ELU	28
2.4	Les aciers du béton armé (armatures)	29
2.4.1	Diamètres des armatures	29
2.4.2	Nuances des armatures	29
2.4.3	Module d'élasticité de l'acier	29
2.4.4	Diagramme contrainte-déformation	31
2.4.4.1	Calcul à l'ELU	31
2.4.4.2	Vérification à l'ELS	32
3	Hypothèses et données de calcul	34
3.1	Etat limite ultime de résistance (ELUR)	34
3.1.1	Hypothèses de calcul	34
3.1.2	Diagramme des déformations limites d'une section (règle des pivots)	35
3.1.3	Analyse du diagramme des déformations limites d'une section	36
3.1.3.1	Pivot A - Domaine ① :	36
3.1.3.2	Pivot B - Domaine ② :	38
3.1.3.3	Pivot C - Domaine ③ :	40
3.1.4	Diagramme des contraintes	41
3.1.5	Justification de l'utilisation du diagramme simplifié du béton	41
3.1.5.1	Cas du pivot B	41

3.1.5.2	Cas du pivot A	45
3.2	État limite de service de la durabilité de structure	48
3.3	État limite de service de compression du béton	50
3.4	État limite de service d'ouverture des fissures	50
3.5	Exercices	50
4	Calcul des sections en traction simple (Tirants)	52
4.1	Introduction	52
4.2	Calcul du ferrailage	53
4.2.1	Calcul à l'ELU	53
4.2.2	Calcul à l'ELS	53
4.2.3	Minimum réglementaire (non fragilité)	53
4.2.4	Ferrailage à disposer	54
4.2.5	Ferrailage transversal	54
4.3	Exercices	55
5	Calcul des sections en compression simple (Poteaux)	61
5.1	Introduction	61
5.2	Longueurs de flambement et élancement mécanique	62
5.3	Calcul d'un poteau (Méthode forfaitaire)	64
5.4	Calcul du ferrailage	66
5.4.1	Ferrailage longitudinal	66
5.4.2	Ferrailage Transversal	67
5.5	Prédimensionnement d'un poteau (Calcul du coffrage)	68
5.5.1	Section rectangulaire	68
5.5.2	Section circulaire	68
5.6	Exercices	69
6	Calcul des sections rectangulaires en flexion simple	79
6.1	Introduction	79
6.2	Calcul à l'état limite ultime de résistance - ELUR	80
6.2.1	Récapitulatif des résultats obtenus	80
6.2.2	Équations d'équilibre	81
6.2.3	Section sans armatures comprimées	81
6.2.3.1	Dimensionnement des armatures	82
6.2.3.2	Dimensionnement de la section du béton	87
6.2.4	Section avec armatures comprimées	88
6.2.4.1	Équations d'équilibre	89
6.2.4.2	Méthode de calcul	90
6.3	Récapitulatif du calcul à l'ELUR	92
6.4	Exercices	93

6.5	Calcul à l'état limite de service - ELS	100
6.5.1	Contraintes limites de calcul	101
6.5.1.1	Contrainte limite de compression du béton	101
6.5.1.2	Contrainte limite de traction des aciers (ouverture des fissures)	101
6.5.2	Vérification à l'ELS	102
6.5.2.1	Équations de base	102
6.5.2.2	Récapitulatif pour la vérification à l'ELS	104
6.5.3	Dimensionnement d'une section rectangulaire en flexion simple à l'ELS	105
6.5.3.1	Cas où $A'_s = 0$	105
6.5.3.2	Cas où $A'_s \neq 0$	107
6.5.4	Récapitulatif du calcul d'une section rectangulaire en flexion simple à l'ELS	109
6.6	Ferraillage minimal	111
6.7	Exercices	112
7	Calcul des sections en T en flexion simple	129
7.1	Géométrie et définitions	129
7.2	Dimensionnement à l'ELU	131
7.2.1	Calcul sans armatures comprimées	131
7.2.1.1	Moment de comparaison	131
7.2.1.2	Calcul pour le cas : $M_u \leq M_0$	131
7.2.1.3	Calcul pour le cas : $M_u \geq M_0$	131
7.2.2	Calcul avec armatures comprimées	133
7.3	Dimensionnement d'une section en T à l'ELS	134
7.3.1	Vérification à l'ELS	134
7.3.2	Calcul à l'ELS	136
7.3.2.1	Cas où $A'_s = 0$:	137
7.3.2.2	Cas où $A'_s \neq 0$:	137
7.3.3	Ferraillage minimal	138
7.4	Exercices	139
8	Calcul par rapport à l'effort tranchant	160
8.1	Introduction	160
8.2	Contrainte de cisaillement (tangente) conventionnelle	161
8.2.1	Contraintes de cisaillement dans la partie comprimée de la section	161
8.2.2	Contraintes de cisaillement dans la partie tendue de la section	163
8.2.3	Récapitulatif des deux cas	163

8.3	Effort tranchant à prendre en compte dans les calculs	164
8.3.1	Charges réparties	164
8.3.2	Charges concentrées	165
8.4	Contrainte tangente limite ultime	165
8.4.1	Armatures transversales droites ($\alpha = \frac{\pi}{2}$)	166
8.4.2	Armatures transversales inclinées à 45° ($\alpha = \frac{\pi}{4}$)	166
8.4.3	Pièces dont toutes les sections droites sont comprimées (poteaux)	166
8.5	Vérification du cisaillement du béton de l'âme	166
8.6	Calcul des armatures transversales d'une poutre	167
8.6.1	Comportement local de l'âme sous l'action de l'effort tranchant	167
8.6.2	Théorie de la poutre de RITTER-MORSH	168
8.7	Armatures transversales d'une poutre	171
8.8	Ferraillage transversal minimal	172
8.9	Règle d'ALBERT CAQUOT	172
8.9.1	Conditions d'application	172
8.9.2	Démarche à suivre	172
8.10	Dispositions constructives minimales	173
8.10.1	Espacement et diamètre des cours d'acier	173
8.11	Résistance du béton de la bielle	173
8.12	Justifications aux appuis : appui simple d'about	173
8.12.1	Profondeur minimale d'appui	173
8.12.2	Sections minimales d'armatures inférieures sur appui	175
8.13	Justifications aux appuis : Appui intermédiaire	175
8.13.1	Profondeur minimale d'appui	175
8.13.2	Contrainte moyenne de compression sur l'appui (poin- çonnement)	175
8.13.3	Section minimale d'armatures inférieures sur appui	175
8.14	Cas des dalles	176
8.15	Exercices	176
9	Calcul des sections en flexion composée	186
9.1	Introduction	186
9.2	Centre de pression et noyau central d'une section homogène	186
9.2.1	Effort normal équivalent et centre de pression	186
9.2.2	Noyau central	187
9.3	Calcul d'une section rectangulaire à l'ELU	190
9.3.1	Calcul d'une section entièrement tendue	190
9.3.2	Calcul d'une section partiellement comprimée	191
9.3.3	Calcul d'une section entièrement comprimée	193

9.4 Exercices 194

EHTP

Chapitre 1

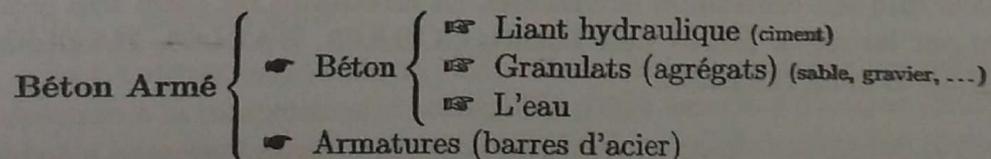
Généralités sur le béton armé

1.1 Définition et composition du béton armé

Le béton armé correspond à un mariage judicieux de matériaux aux caractéristiques complémentaires : l'acier pour sa capacité à résister aux contraintes de traction et le béton pour sa capacité à résister à la compression (voir figure 1.1). Le béton étant lui-même un mélange intelligent de granulats, de ciment et de l'eau. Le ciment et l'acier résultent quant à eux de processus de fabrication spécifiques.

Les méthodes de composition de béton permettant d'obtenir les performances voulues sont très élaborés. Néanmoins pour donner des ordres de grandeur disons que la "recette" pour obtenir $1 m^3$ de béton "courant" consiste à malaxer environ $1200 kg$ de graviers, $600 kg$ de sable, $400 kg$ de ciment et 200 litres d'eau. Cela permet d'espérer, à 28 jours d'âge du béton, une résistance à la compression de l'ordre de $30 MPa$. Actuellement les bétons courants contrôlés atteignent régulièrement 25 à $40 MPa$, les bétons à haute performance (BHP) 50 à $100 MPa$ voire plus. La résistance à la traction des bétons courants est de 8 à 12 fois plus faible et la rupture d'une pièce sollicitée est brutale. Le béton est un matériau fragile et peu résistant à la traction (comme la pierre).

La composition d'un béton armé est schématisée comme suit :



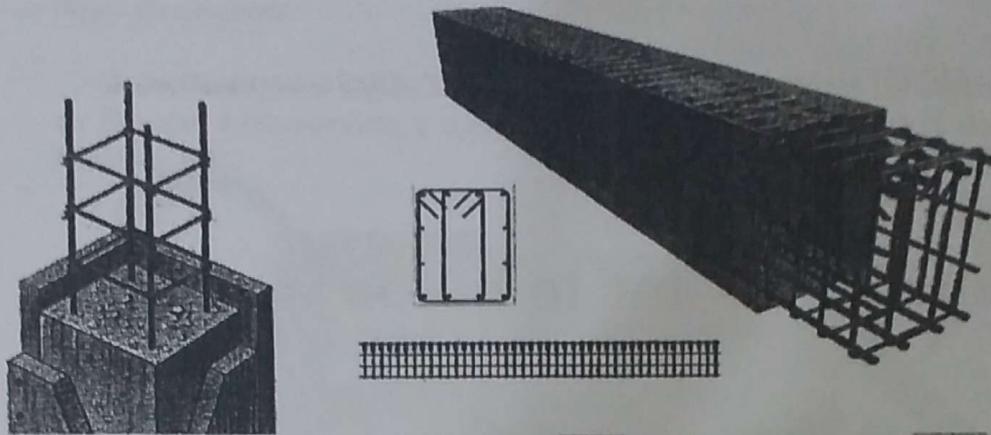


FIGURE 1.1 – Principe de poteau et poutre en BA

1.2 Historique du béton armé

C'est en 1848 que **Joseph Louis LAMBOT** (voir figure 1.2) a associé des barres d'acier et du béton de ciment pour réaliser une barque (exposition universelle de 1855).

Quelques années plus tard, **Joseph MONIER**, un jardinier de Versailles utilisera un procédé analogue pour fabriquer des caisses pour fleurs. On lui attribue l'invention du BA qui a ensuite été exploité en Allemagne par l'entreprise "MONIER BETON BRAU" (brevet déposé en 1868).

Ensuite **François HENNEBIQUE** met au point les bases de calcul pour son utilisation rationnelle mais il faudra attendre 1897 pour que **Charles RABUT** dispense le premier cours de BA à l'ENPC.

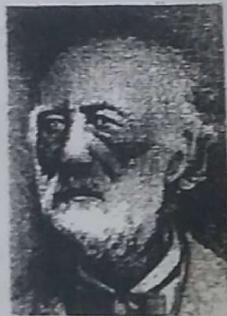
Auparavant, en 1891, **COIGNET** a utilisé des poutres en BA préfabriquées pour la construction d'un immeuble.

En 1906 parait la première réglementation s'appuyant sur une méthode de calcul dite aux contraintes admissibles. La circulaire de 1906 sera remplacée par les règles BA45 puis BA60, CCBA68, BAEL80, BAEL83, BAEL90 et enfin BAEL91.

Une modification a été apportée aux règles BAEL91 en 1999 et ça a donné

naissance aux règles BAEL91 modifiées 99 et c'est ce règlement qui fait objet de ce cours.

Actuellement les règles EUROCODES ont remplacées les règles BAEL en Europe. L'Eurocode 2 contient la partie consacrée au calcul des structures en BA.



Joseph Louis LAMBOT
1814-1887



Joseph MONIER
1823-1906



François HENNEBIQUE
1842-1921



Charles RABUT
1852-1925

FIGURE 1.2 – Personnalités historiques influençant le domaine du BA

1.3 Avantages et inconvénients du BA

1.3.1 Avantages

⇒ **L'intérêt économique** : Le béton est le moins coûteux des matériaux résistant à la compression et susceptible d'être associé à d'autres éléments. L'acier est actuellement le matériau utilisé dans la fabrication des armatures parce qu'il est le moins cher dans le marché parmi les matériaux résistants à

la traction et qui peuvent être associés au béton.

→ **La souplesse d'utilisation** : le béton étant mis en place (dans des moules : coffrage) à l'état pâteux. Il est possible de réaliser des constructions avec des formes très variées et les armatures peuvent être 'facilement' façonnées selon ces formes. Les assemblages entre différents éléments en béton se réalisent par simple contact.

Le béton armé se traite facilement à la pré-fabrication en usine.

→ **Économie d'entretien** : les constructions en béton armé ne nécessitent aucun entretien tandis que les constructions métalliques ont besoins d'être peintes régulièrement.

→ **Résistance au feu** : les constructions en béton armé se comportent beaucoup mieux en cas d'incendie que les constructions métallique ou en bois. Le béton, grâce à sa mauvaise conductibilité thermique retarde les effets de la chaleur sur les armatures, il est possible de remettre en service la construction après les réparations superficielles ce qui est impossible pour les constructions métalliques. Cette propriété a permis d'utiliser le béton armé dans certaines parties des fours.

→ **Résistance aux efforts accidentels** : le béton armé en raison de son poids important est moins sensible aux variations de surcharges que d'autres modes de constructions.

→ **Durabilité** : le béton armé résiste bien à l'action de l'eau et de l'air. La seule condition à observer est la protection des armatures essentiellement par la limitation d'ouverture des fissures.

1.3.2 Inconvénients

→ **Le poids** : les ouvrages en BA sont plus lourds que les autres modes de constructions.

→ **L'exécution** :

- Préparation du coffrage qui demande beaucoup de temps et de main d'œuvre. Ce coffrage doit rester en place jusqu'à ce que le béton atteigne une résistance suffisante ;
- Façonnage et placement des armatures ;

- Protection du béton pendant et après l'exécution contre le gel et l'évaporation de l'eau;
- Contrôle de la qualité du matériau perfectionné lors du gâchage.

→ La brutalité des accidents par ruptures fragiles : les accidents qui surviennent d'un ouvrage en béton armé sont en général soudains ou brutaux, en général ces accidents sont dus à des erreurs de calculs ou de réalisations.

→ Difficulté de modification d'un ouvrage déjà réalisé : il est difficile de modifier un élément déjà réalisé.

1.4 Actions et sollicitations

Par définition, une **action** représente toute cause produisant un état de contraintes dans la structure étudiée. On distingue trois types d'actions :

- Actions permanentes :
 - Poids propre de la structure,
 - Poids des superstructures (équipements),
 - Poussées des remblais,
 - ...
- Actions variables :
 - Charges d'exploitations de la structure,
 - charges appliquées en cours d'exécution,
 - Action de la température,
 - ...
- Actions accidentelles :
 - Chocs des véhicules contre les éléments des ponts,
 - Séismes,
 - ...

Les sollicitations représentent les forces et moments internes produits par les actions :

- Effort normal N ,
- Effort tranchant V ,
- Moment fléchissant M ,
- Moment de torsion T .

Il est à noter que, dans les règlements de calcul, les actions sont multipliées par des coefficients de sécurité, notés généralement γ , pour prendre en compte les incertitudes de connaissance des efforts, incertitudes de mesures, imprécision des calculs, les défauts de préparation des matériaux de

construction et de l'exécution de la structure.

1.5 États limites

1.5.1 Définition

Un État Limite est par définition un état particulier dans lequel une condition requise pour une construction, ou l'un de ses éléments, est strictement satisfaite et cesserait de l'être en cas de modification défavorable d'une action.

1.5.2 État Limite Ultime (ELU)

Ils mettent en jeu la sécurité des biens et des personnes.

Ils correspondent à l'atteinte du maximum de la capacité portante de l'ouvrage ou de l'un de ses éléments avant dépassement par :

- perte d'équilibre statique ;
- rupture de sections par déformations excessive ;
- instabilité de forme (flambement) ;
- ...

1.5.3 État Limite de Service (ELS)

Ils sont liés aux conditions normales d'exploitation et de durabilité et ils correspondent aux phénomènes suivants :

- ouvertures excessives des fissures ;
- compression excessive du béton ;
- déformations excessives des éléments porteurs ;
- vibrations excessives et/ou inconfortables ;
- perte d'étanchéité ;
- ...

1.6 Domaine d'application du règlement BAEL

Ce règlement est applicable à tous les ouvrages et constructions en béton armé, soumis à des ambiances s'écartant peu des seules influences clima-

tiques, et dont le béton est constitué de *granulats naturels normaux*, avec un dosage en ciment au moins égal à 300 kg/m^3 de béton mis en œuvre.

Sont considérées en béton armé les pièces qui sont encore aptes à jouer leur rôle dans la structure dont elle font partie, lorsque la résistance à la traction par flexion de leur béton constitutif est supposée nulle.

Restent en dehors du domaine des présentes règles :

- les constructions en béton non armé ;
- les constructions en béton constitué de *granulats légers* ;
- les constructions en béton caverneux ou cellulaire armé ;
- les constructions en béton de résistance caractéristique supérieure à 60 MPa ;
- les éléments armés de profilés laminés et les structures mixtes acier-béton ;
- les éléments soumis en service à des températures s'écartant sensiblement de celles qui résultent des seules influences climatiques.

Remarque : Le dosage indiqué de 300 kg/m^3 n'est valable que pour les ciments Portland habituels comportant peu de constituants secondaires.

1.7 Constructions en béton armé et sécurité

La sécurité est définie comme l'absence de risque et dans le domaine de construction, cela implique la stabilité et la durabilité et l'aptitude à l'emploi. La sécurité absolue n'existe pas "Le risque zéro n'existe pas" ; il faut accepter une probabilité non négligeable d'accident.

1.7.1 Théorie déterministe de sécurité

Il s'agit des anciens règlements du BA tel que le CCBA68. Ces règlements utilisent la méthode des contraintes admissibles qui consiste à vérifier que les contraintes calculées par la RDM en tout point d'une structure restent inférieures à une contrainte admissible obtenue en divisant la contrainte de

ruine du matériau par un coefficient de sécurité fixé à l'avance :

$$\sigma < \bar{\sigma} = \frac{\sigma_r}{\gamma} \quad (1.1)$$

Dans cette méthode, les paramètres de base (actions et sollicitations, propriétés des matériaux, géométrie de la structure, ...) sont considérés comme non aléatoires, ce qui est informé par la réalité des structures de génie civil. Les coefficients de sécurité sont déterminés empiriquement sans base scientifique satisfaisante.

1.7.2 Théorie probabiliste de sécurité

Les spécialistes ont défini la sécurité par un seuil de probabilité. Un ouvrage sera acceptable si la probabilité de ruine reste inférieure à une probabilité fixée à l'avance. Cette valeur varie en fonction de la durée de vie de la construction, du risque et du coup.

Cette méthode s'intègre dans le domaine du calcul de la fiabilité des structures qui est en plein essor actuellement en Europe et en Amérique mais elle reste une méthode difficile à appliquer dans le domaine de dimensionnement des structures et demande des compétences particulières et avancées.

Un manque de données statistiques sur les différents paramètres des structures et des matériaux rend cette méthode inutilisable avec efficacité.

1.7.3 Théorie semi-probabiliste de sécurité

Cette nouvelle théorie consiste à :

1. Définir les phénomènes que l'on veut éviter (l'état limite), ces phénomènes sont :
 - Ouverture des fissures soit par :
 - (a) Compression successive dans le béton ;
 - (b) Traction successive dans l'acier.
 - Déformation importante dans l'ensemble.
2. Estimer la gravité des risques liés à ces phénomènes (on distingue les états limites ultimes et les états limites de services).

3. Dimensionner les éléments de la construction de telle manière que la probabilité d'atteindre l'un de ces phénomènes reste faible.

1.8 Combinaisons d'actions réglementaires

Les sollicitations, éléments de réduction des forces extérieures et des couples appliqués aux éléments de structure, sont déterminées après combinaisons des actions.

1.8.1 Principe des combinaisons de calcul

En fonction des situations qu'une construction va connaître, nous allons être obligé de superposer les effets de plusieurs actions. Pour cela :

- Nous affecterons à chaque type d'actions, un coefficient de sécurité partiel;
- Nous combinerons les actions obtenues (principe de superposition des effets);
- Nous déterminerons la ou les combinaisons qui engendrent les sollicitations les plus défavorables dans les éléments de la construction.

Nous utiliserons les combinaisons avec les notations suivantes :

G_{max}	:	ensemble des actions permanentes défavorables;
G_{min}	:	ensemble des actions permanentes favorables;
Q_1	:	action variable dite de base;
Q_i	:	actions variables dites d'accompagnement.

Exemple de mur de soutènement :

La poussée \vec{Q} pousse vers un renversement du mur et agit donc dans un sens défavorable : elle intervient en G_{max} (voir figure 1.3) .

L'action des terres derrière le rideau \vec{R} agit dans un sens de stabilité donc favorable : elle intervient donc en G_{min} .

1.8.2 Combinaisons à considérer à l'ELU

1.8.2.1 Combinaisons fondamentales : Article A.3.3,21 du BAEL

Lors des situations durables ou les situations transitoires fréquentes aux cours desquelles il y'a l'action permanente, l'action variable principale et

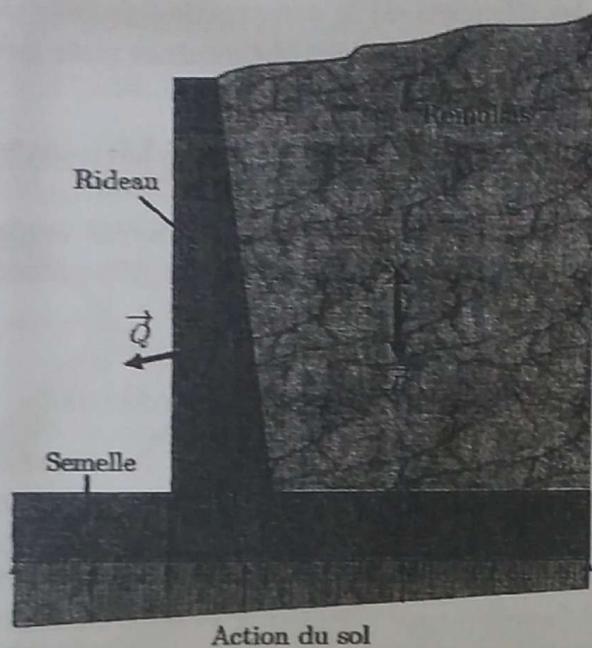


FIGURE 1.3 – Exemple d'actions favorable et défavorable

plusieurs actions d'accompagnement, nous considérons :

$$1,35G_{\max} + G_{\min} + \gamma_{Q_1} Q_1 + \sum_{i>1} 1,3\psi_{0_i} Q_i \quad (1.2)$$

$\gamma_{Q_1} = 1,5$ dans le cas général.

$\gamma_{Q_1} = 1,35$ pour la température, les charges d'exploitations étroitement bornées ou de caractères particuliers (convois militaires ou exceptionnels) et pour les bâtiments agricoles abritant des animaux et des produits sans présence humaine permanente.

ψ_{0_i} sont donnés en annexe D, articles D.1.1,3 et D.1.2,3, du BAEL.

1.8.2.2 Cas des ponts routes

Situation d'exécution :

$$1,35(G_{\max} + Q_{prc}) \text{ ou } (G_{\min} + Q_{prc}) + \begin{cases} 1,5 \left\{ \begin{array}{l} Q_{pra} \\ W \end{array} \right. \\ 1,35[T] \end{cases} \\ + 1,3 \begin{cases} 1,0 W \\ 1,0 Q_{pra} \\ \left[\frac{0,8}{1,3} T + \frac{0,65}{1,3} \Delta\theta \right] \end{cases} + 1,3 \left\{ \left[\frac{0,8}{1,3} T + \frac{0,65}{1,3} \Delta\theta \right] \right\} \quad (1.3)$$

où Q_{prc} représente les charges d'exécution connues (en grandeur et en position);

Q_{pra} représente les charges d'exécution aléatoires;

W représente l'action du vent définie par :

- par le Fascicule 61 titre II pour les ponts routes;
- par les règles NV 65 pour les autres constructions, les valeurs du vent normal étant multipliées par :
 - 1,20 à l'ELU;
 - 1,00 à l'ELS.

T variations uniformes de la température;

$\Delta\theta = \frac{\Delta\theta}{h}$ est le gradient thermique prescrit par le marché (rapport de la différence $\Delta\theta$ de la température entre les deux faces d'un élément à l'épaisseur h de celui-ci).

Dans ces combinaisons il faut :

- prendre en compte la combinaison la plus défavorable. Une même action n'intervient qu'une seule fois, au plus, dans la même combinaison;
- choisir une (ou aucune) action parmi celles se trouvant derrière une accolade {;
- les valeurs entre crochets [...] ne sont généralement pas à prendre en compte.

Situation d'exploitation :

$$1,35G_{\max} \text{ ou } G_{\min} + \begin{cases} 1,5 \left\{ \begin{array}{l} Q_r \\ W \end{array} \right. \\ 1,35 \left\{ \begin{array}{l} Q_{rp} \\ [T] \end{array} \right. \end{cases} + 1,3 \left\{ \left[\frac{0,8}{1,3} T + \frac{0,65}{1,3} \Delta\theta \right] \right\} \quad (1.4)$$

où Q_r représente les charges routières sans caractère particulier (systèmes A,B et leurs effets annexes, charges de trottoirs) obtenues par multiplication des charges figurant au Fascicule 61 titre II par :

- 1,07 à l'ELU ;
- 1,20 à l'ELS ;
- 1,00 à l'ELS pour les charges de trottoir.

Q_{rp} représente les charges routières de caractère particulier (convois militaires et exceptionnelles) définies au Fascicule 61 titre II.

1.8.2.3 Cas des bâtiments

Situation d'exécution :

combinaison identique à celle des ponts routes.

Situation d'exploitation :

$$1,35G_{\max} \text{ ou } G_{\min} + \left\{ \begin{array}{l} 1,5 \left\{ \begin{array}{l} Q_B \\ W \\ S_n \end{array} \right. \\ 1,35 [T] \end{array} \right. + 1,3 \left\{ \begin{array}{l} 0,77 W \\ 0,77 S_n \\ \psi_0 Q_B \\ 0,77 W + \psi_0 Q_B \\ 0,77 S_n + \psi_0 Q_B \\ 0,77 W + 0,77 S_n \end{array} \right. + 1,3 \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \\ 1,3 \end{array} \right. T \quad (1.5)$$

où Q_B représente les charges d'exploitation des bâtiments ;
 S_n est l'action de la neige pour les bâtiments ;
 ψ_0 est un coefficient défini dans la norme NFP 06-001.

1.8.2.4 Cas des ponts rails

Situation d'exécution :

$$1,35(G_{\max} + Q_{prc}) \text{ ou } (G_{\min} + Q_{prc}) + \left\{ \begin{array}{l} 1,35 Q_{ex} + 1,5 Q_{pra} \\ 1,5 \left\{ \begin{array}{l} W \\ Q_\theta \end{array} \right. \end{array} \right. + 1,3 \left\{ W + 1,3 \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \\ 1,3 \end{array} \right. Q_\theta \right. \quad (1.6)$$

où Q_{ex} représente les charges d'exploitation ferroviaires définies par le livret 2.01 du CPC de la SNCF ;

CPC : Cahier des Prescriptions communes applicables aux marchés de travaux d'ouvrages d'art ;

Q_{θ} effet des variations de température sur les ponts rails :

- dilatation des longs rails soudés ;
- gradient de température ;
- variation de température.

Situation d'exploitation :

$$1,35G_{\max} \text{ ou } G_{\min} + \begin{cases} 1,35 Q_{ex} \\ 1,5 \begin{cases} Q_{1v} \\ Q_{\theta} \end{cases} \end{cases} + 1,3 \{ Q_{1v} + 1,3 \begin{cases} 0,8 \\ 1,3 \end{cases} Q_{\theta} \quad (1.7)$$

où Q_{1v} représente l'action du vent sur les ponts rails à vide ;

1.8.2.5 Combinaisons accidentelles : Article A.3.3.22 du BAEL

Nous considérons pour les situations accidentelles qui ont une faible probabilité de se réaliser :

$$G_{\max} \text{ ou } G_{\min} + F_A + \psi_{1i} Q_{1i} + \sum_{i \geq 1} \psi_{2i} Q_{2i} \quad (1.8)$$

F_A représente la valeur nominale de l'action accidentelle ;

ψ_{1i} et ψ_{2i} donnés en annexe D, articles D.1.1,3 et D.1.2,3.

1.8.2.6 Cas des ponts routes

$$G_{\max} \text{ ou } G_{\min} + \begin{cases} 0,6 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{cases} Q_r \quad \text{pour} \quad \begin{cases} \text{ponts de 1}^{\text{ère}} \text{ classe} \\ \text{ponts de 2}^{\text{ème}} \text{ classe} \\ \text{ponts de 3}^{\text{ème}} \text{ classe} \end{cases} + \begin{cases} 0,2 W \\ 0,5 T \\ 0,5 \Delta \theta \end{cases} \quad (1.9)$$

1.8.2.7 Cas des bâtiments

$$G_{\max} \text{ ou } G_{\min} + F_A + \begin{cases} 0,75 Q_B \\ 0,20 W \\ 0,15 S_n \\ 0,50 T \end{cases} + \{0,65 Q_B + \{\psi_{2,1} T \quad (1.10)$$

le terme $\psi_{2,1} T$ est introduit si le CPS (Cahier des Prescriptions Spéciales du marché) le prescrit.

F_A représente l'action accidentelle.

1.8.2.8 Cas des ponts rails

$$G_{\max} \text{ ou } G_{\min} + F_A + \begin{cases} 0,8 \\ 0,6 \\ 0,4 \end{cases} Q_{er} \text{ POUR } \begin{cases} 1 \text{ voie} \\ 2 \text{ voies} \\ \geq 3 \text{ voies} \end{cases} + \{0,6 Q_B \quad (1.11)$$

1.8.3 Combinaisons à considérer à l'ELS

Elles résultent de la combinaison d'actions suivante dite combinaison rare :

$$G_{\max} + G_{\min} + Q_1 + \sum_{i>1} \psi_{0,i} Q_i \quad (1.12)$$

1.8.3.1 Cas des ponts routes

Situation d'exécution :

$$(G_{\max} + Q_{prc}) \text{ ou } (G_{\min} + Q_{prc}) + \begin{cases} Q_{pra} \\ W \\ T \\ \Delta\theta \end{cases} + \begin{cases} Q_{pra} \\ W \end{cases} + \begin{cases} 0,6 T \\ 0,5 \Delta\theta \\ 0,6 T + 0,5 \Delta\theta \end{cases} \quad (1.13)$$

Situation d'exploitation :

$$G_{\max} \text{ ou } G_{\min} + \begin{cases} Q_r \\ Q_{rp} \\ \Delta\theta \\ T \\ W \end{cases} + \{0,6T + 0,5\Delta\theta\} \quad (1.14)$$

1.8.3.2 Cas des bâtiments

Situation d'exécution :

Combinaison identique à celle des ponts routes.

Situation d'exploitation :

$$G_{\max} \text{ ou } G_{\min} + \begin{cases} Q_B \\ W \\ S_n \\ T \end{cases} + \begin{cases} Q_B \\ 0,77W \\ 0,77S_n \\ 0,77W + 0,77S_n \\ Q_B + 0,77W \\ Q_B + 0,77S_n \\ Q_B + 0,77W + 0,77S_n \end{cases} + \{0,6T\} \quad (1.15)$$

1.8.3.3 Cas des ponts rails

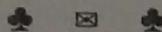
Situation d'exécution :

$$(G_{\max} + Q_{pre}) \text{ ou } (G_{\min} + Q_{pre}) + \begin{cases} Q_{ex} + Q_{pra} \\ W \\ Q_{\theta} \end{cases} + \{W + 0,6Q_{\theta}\} \quad (1.16)$$

Situation d'exploitation :

$$G_{\max} \text{ ou } G_{\min} + \begin{cases} Q_{ex} \\ Q_{1v} \\ Q_{\theta} \end{cases} + \{Q_{iv} + 0,6Q_{\theta}\} \quad (1.17)$$

où Q_{1v} est l'action du vent sur les ponts rails en exploitation.



Chapitre 2

Caractéristiques des matériaux du béton armé

2.1 Introduction

Le béton présente des résistances à la compression assez élevées, de l'ordre de 25 à 40 MPa (pour les bétons courants), mais sa résistance à la traction est faible, de l'ordre de 1/10 de sa résistance en compression. De plus, le béton a un comportement fragile.

L'acier présente une très bonne résistance à la traction (et aussi à la compression pour des élancements faibles), de l'ordre de 500 MPa (selon les nuances d'acier commercialisées), mais si aucun traitement n'est réalisé, il subit les effets de la corrosion. De plus, son comportement est ductile, avec des déformations très importantes avant rupture (de l'ordre de la 10%).

Pour pallier à la faible résistance du béton en traction et à sa fragilité, on lui associe des armatures en acier : c'est le béton armé.

On se limitera ici aux aspects relatifs au comportement mécanique du béton. Les aspects relatifs à sa composition et à sa mise en oeuvre ne font objet de ce cours.

2.2 Comportement expérimental du béton

2.2.1 Essai de compression

Le béton présente une relative bonne résistance à la compression. Les résistances obtenues dépendent de la composition. En général, les essais sont réalisés sur des éprouvettes normalisées, appelées 16×32 , de forme cylindrique de hauteur 32 cm et de diamètre 16 cm (Aire de 200 cm^2).

A partir d'une courbe contrainte-déformation d'un essai de compression (Figure 2.1), on peut tirer les grandeurs suivantes :

- le module de Young instantané $E_{ij} \approx 30\,000 \text{ MPa}$;
- la contrainte maximale $\sigma_{\max} \approx 20 \sim 40 \text{ MPa}$;
- la déformation maximale à la rupture $\epsilon_r \approx 2\text{‰} = 2 \cdot 10^{-3}$.

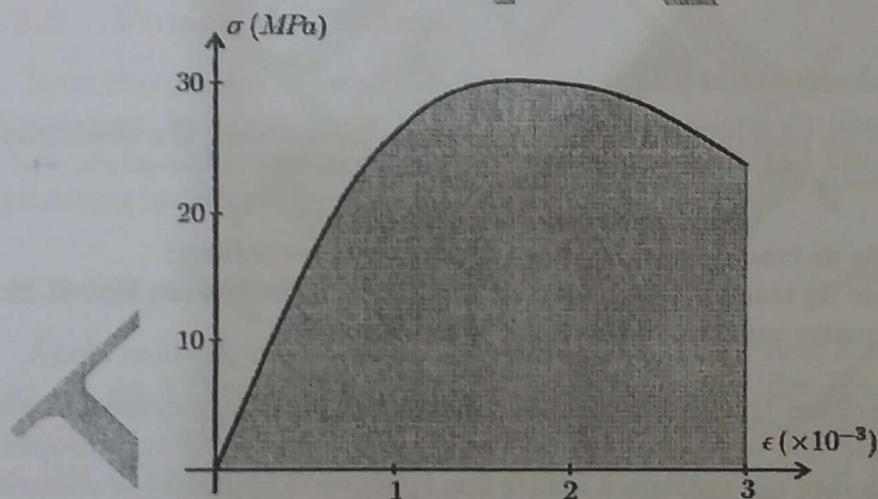


FIGURE 2.1 – Courbe contrainte-déformation d'un essai de compression de béton

L'instruction technique relative au contrôle de la qualité des bétons (15 janvier 1979). Dans les cas les plus courants, cette instruction se résume de la façon suivante :

n : nombre de prélèvements (la valeur pour un prélèvement étant la moyenne de trois éprouvettes);

$f_{c_{\min}}$: la plus faible valeur trouvée pour les n prélèvements;

\bar{f}_{c_j} : valeur moyenne des n prélèvements ;

la règle de conformité est la suivante :

si $n \geq 3$, on a :

$$f_{c_j} \leq \inf\{\bar{f}_{c_j} - 2,7; f_{c_{\min}} + 3\} \quad (\text{MPa}) \quad (2.1)$$

si $n \geq 15$, on calcule l'écart-type d'abord :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (f_{c_j} - \bar{f}_{c_j})^2}{n-1}} \quad (2.2)$$

$$f_{c_j} \leq \inf\{\bar{f}_{c_j} - 1,2\sigma; f_{c_{\min}} + 3\} \quad (\text{MPa}) \quad (2.3)$$

Sauf stipulation du contraire l'âge fixé pour les essais de contrôle est fixé à $j = 28$ jours.

2.2.2 Essai de traction

Il est beaucoup plus difficile de faire des essais en traction. On distingue deux types d'essais :

- Les essais de traction directe avec des éprouvettes collées ;
- Les essais de traction indirecte tels que l'essai Brésilien ou l'essai en flexion quatre points.

Pour les essais en traction indirectes, la déduction du comportement en traction nécessite une interprétation de l'essai par un modèle. Par exemple, pour l'essai Brésilien qui consiste à fendre une éprouvette cylindrique comme indiqué sur la figure (2.2), la résistance à la traction est donnée par :

$$R_t = \frac{2F}{\pi Dh} \quad (2.4)$$

où F est l'effort à la rupture.

On retient que la résistance à la traction du béton est beaucoup plus faible que celle à la compression :

$$R_t \approx \frac{R_c}{10} \quad (2.5)$$

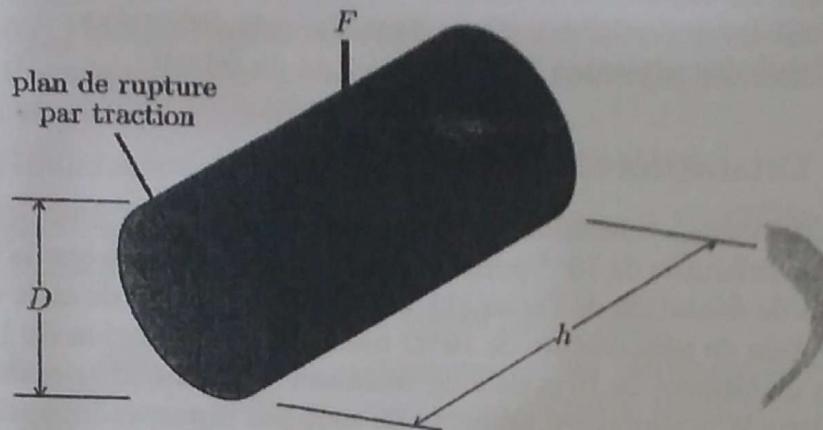


FIGURE 2.2 – Essai Brésilien sur éprouvette cylindrique en béton

2.2.3 Fluage du béton

Sous chargement constant, la déformation du béton augmente continuellement avec le temps. Pour le béton, les déformations de fluage sont loin d'être négligeables puisqu'elles peuvent représenter jusqu'à trois fois les déformations instantanées : $\epsilon_p = \epsilon_{\infty} \approx 3\epsilon_i$.

2.2.4 Retrait du béton

Après coulage, une pièce de béton conservée à l'air tend à se raccourcir. Ceci est dû à l'évaporation de l'eau et peut entraîner des déformations de l'ordre de $1,5 \cdot 10^{-4}$ à $5 \cdot 10^{-4}$ selon l'humidité de l'environnement. On notera que des pièces de béton conservées dans l'eau subissent, au contraire, un gonflement. Le retrait commence dès le premier jour de vie de la pièce en béton et on observe que 80% du retrait est atteint au bout de deux ans. La principale conséquence du retrait est l'apparition de contraintes internes de traction, contraintes dont la valeur peut facilement dépasser la limite de fissuration.

Pour se protéger des désordres liés au retrait, on adoptera les dispositifs constructifs suivants :

- utiliser des bétons à faible chaleur d'hydratation ;
- maintenir les parements en ambiance humide après coulage ;
- disposer des armatures de peaux de faible espacement pour bien ré-

- partir les fissures de retrait ;
- éviter de raccorder des pièces de tailles très différentes ;
- utiliser des adjuvants limitant les effets du retrait.

2.2.5 Dilatation thermique

Le coefficient de dilatation du béton vaut de 9 à $12 \cdot 10^{-6}$ et on adoptera une valeur forfaitaire de 10^{-5} pour le béton armé. On notera que la valeur du coefficient de dilatation de l'acier ($11 \cdot 10^{-6}$) est très proche de celle du béton. Une variation de température de 10°C induit une déformation de 10^{-4} , c'est à dire qu'un élément de 10 m de long verra son extrémité libre se déplacer de 1 mm . Dans la pratique, les éléments ne sont pas libres, et les variations de température entraînent des contraintes internes de traction.

Pour éviter des désordres, on placera régulièrement sur les éléments (dalle, voile de façade) ou bâtiments de grandes dimensions des joints de dilatation espacés de 25 m à 50 m selon la région (B.5.1). Notons que ces joints de dilatation sont aussi un moyen de lutter contre les désordres dus au retrait.

2.3 Calcul réglementaire du béton

2.3.1 Résistance caractéristique en compression

Pour l'établissement des projets et dans les cas courants, un béton est défini par la valeur de sa résistance à la compression à 28 jours, dite valeur caractéristique requise. Elle est notée f_{c28} et choisie en fonction des conditions de fabrication du béton, de la classe du ciment utilisé et de son dosage au m^3 . Lorsque l'âge du béton est inférieur à 28 jours, on prend en compte pour les calculs de résistance f_{cj} , valeur caractéristique à j jours, obtenue suivant les cas par les formules suivantes :

* Pour $j < 28$ jours :

$$\begin{cases} f_{cj} = \frac{j}{4,76+0,83j} f_{c28} & \text{pour } f_{c28} \leq 40 \text{ MPa} \\ f_{cj} = \frac{j}{1,4+0,95j} f_{c28} & \text{pour } f_{c28} > 40 \text{ MPa} \end{cases} \quad (2.6)$$

* Pour $j \geq 28$ jours :

$$f_{cj} = f_{c28} \quad (2.7)$$

Ces formules sont utilisées pour justifier la résistance des sections.

Pour d'autres types de vérifications, on peut admettre une valeur au plus égale à $1,10 f_{c28}$ lorsque l'âge dépasse 28 jours, à condition que le béton ne soit pas traité thermiquement et que sa résistance f_{c28} atteigne au plus 40 MPa.

2.3.2 Résistance caractéristique en traction

La résistance caractéristique à la traction du béton à j jours, notée f_{tj} , est conventionnellement définie par :

$$f_{tj} = 0,6 + 0,06 f_{c_j} \quad (2.8)$$

Dans la plupart des calculs réglementaires des pièces soumises à des contraintes normales, la résistance mécanique du béton tendu sera négligée. Pour les calculs relatifs aux contraintes de cisaillement et à l'adhérence, on adoptera les valeurs données ci-dessus.

2.3.3 Modules de déformation longitudinale

On distingue les modules de YOUNG instantané E_{ij} et différé E_{vj} . Le module instantané est utilisé pour les calculs sous chargement instantané de durée inférieure à 24 heures. Pour des chargements de longue durée (cas courant), on utilisera le module différé, qui prend en compte artificiellement les déformations de fluage du béton. Celles-ci représentant approximativement deux fois les déformations instantanées, le module différé est pris réglementairement égal à trois fois le module instantané :

$$E_{ij} = 3 E_{vj} = 11000 \sqrt[3]{f_{c_j}} \quad (2.9)$$

Il est évident que cette approche est simplificatrice et que le fluage d'un matériau ne vérifie pas la loi de HOOKE d'un matériau élastique (la loi de fluage est une relation entre les contraintes et les vitesses de déformation). Néanmoins, cette approche permet d'estimer les déformations cumulées dues à la déformation instantanée élastique et au fluage à un temps infini.

Le module de de déformation longitudinal différé du béton dépend de la résistance caractéristique à la compression du béton :

$$E_{vj} = 3700 \sqrt[3]{f_{c_j}} \quad (2.10)$$

2.3.4 Coefficient de POISSON

Le coefficient de poisson sera pris égal à $\nu = 0$ pour le calcul de sollicitations à l'ELU et à $\nu = 0,2$ pour le calcul des déformations à l'ELS (A.2.1,3 du BAEL).

2.3.5 Modèle de calcul à l'ELS

Les déformations nécessaires pour atteindre l'ELS sont relativement faibles et on suppose donc que le béton reste dans le domaine élastique (premier schéma de la figure 2.3). On adopte donc la loi de HOOKE de l'élasticité pour décrire le comportement du béton à l'ELS, avec pour des charges de longue durée $E_b = E_{vj}$ et $\nu = 0,2$. La résistance mécanique du béton tendu est négligée (A.4.5,1 du BAEL).

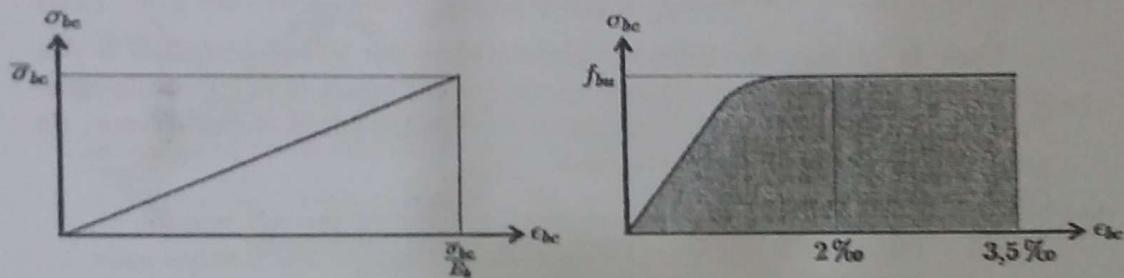


FIGURE 2.3 - Diagrammes élastique et parabole-rectangle du béton

2.3.6 Modèle de calcul à l'ELU

Pour les calculs à l'ELU, le comportement réel du béton est modélisé par la loi parabolique-rectangle sur un diagramme contraintes déformations (figure 2.3).

La valeur de calcul maximale de la résistance en compression du béton f_{bu} est donnée par :

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c2}}{\theta \gamma_b} \quad (2.11)$$

où le coefficient de sécurité partiel γ_b vaut 1,5 pour les combinaisons fondamentales et 1,15 pour les combinaisons accidentelles ; les deux coefficients 0,85 et θ ont pour objet de tenir compte de la décroissance de la résistance du béton avec le temps.

θ est ainsi défini en fonction de la durée d'application des charges comme suit :

$$\begin{cases} \theta = 1 & \text{si la durée est supérieure à 24 h;} \\ \theta = 0,9 & \text{si la durée est comprise entre 1 h et 24 h;} \\ \theta = 0,85 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.12)$$

La première partie de la loi de comportement du béton est une parabole de deuxième degré dont l'équation est définie comme suit :

$$\sigma_b = 0,25 f_{bu} \epsilon_{bc} 10^3 (4 - \epsilon_{bc} 10^3) \quad (2.13)$$

2.4 Les aciers du béton armé (armatures)

Les valeurs de limite élastique sont les mêmes en traction et en compression.

Deux grands types d'armatures sont disponibles sur le marché : les ronds lisses (RL) et les armatures à haute adhérence (HA).

Quand les armatures sont soudées entre elles sous forme de quadrillage elles forment un panneau de treillis soudé.

2.4.1 Diamètres des armatures

Les diamètres normalisés d'armatures courantes sont (en mm) :

(HA) :	6	8	10	12	14	16	20	25	32	40
(RL) :	6	8	10	12						

Dans la figure (2.4), est présentée une photo des différentes barres du BA. Nous signalons que le diamètre $\phi 40$ n'est pas couramment disponible sur le marché des matériaux de construction.

On présente dans le tableau (2.1) les masses linéiques des armatures et les sections par groupe de barres.

2.4.2 Nuances des armatures

Il existe 4 nuances principales qui correspondent à des qualités de limite élastique et de résistance différentes. C'est la limite élastique garantie f_e qui sert de base aux calculs justificatifs selon le règlement BAEL.

2.4.3 Module d'élasticité de l'acier

Le module d'élasticité longitudinale de l'acier E_s est pris forfaitairement égal à $200\,000\text{ N/mm}^2$.

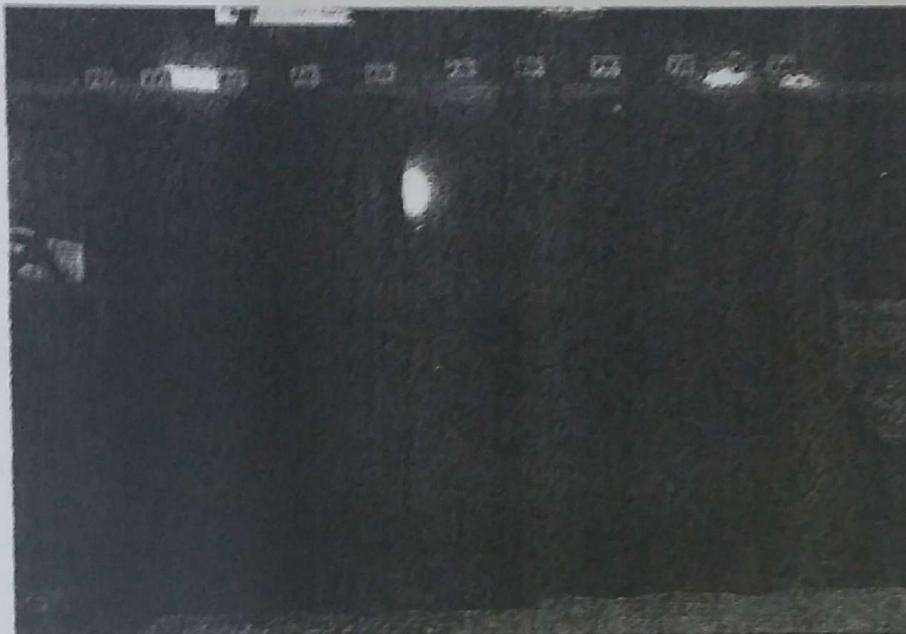


FIGURE 2.4 - Barres normalisées du BA

ϕ (mm)	masse (kg/m)	Sections totales d'acier en cm^2									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	0,222	0,28	0,57	0,85	1,13	1,41	1,70	1,98	2,26	2,54	2,83
8	0,395	0,50	1,01	1,51	2,01	2,51	3,02	3,52	4,02	4,52	5,03
10	0,617	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50	6,28	7,07	7,85
12	0,888	1,13	2,26	3,39	4,52	5,65	6,79	7,92	9,05	10,18	11,31
14	1,210	1,54	3,08	4,62	6,16	7,70	9,24	10,78	12,31	13,85	15,39
16	1,580	2,01	4,02	6,03	8,04	10,05	12,06	14,07	16,08	18,10	20,11
20	2,466	3,14	6,28	9,42	12,57	15,71	18,85	21,99	25,13	28,27	31,42
25	3,85	4,91	9,82	14,73	19,63	24,54	29,45	34,36	39,27	44,18	49,09
32	6,313	8,04	16,08	24,13	32,17	40,21	48,25	56,30	64,34	72,38	80,42

TABLE 2.1 - Tableau des sections d'armatures

Nuance		f_e (MPa)	contrainte de rupture σ_r (MPa)	allongement de rupture %
RL	FeE215	215	330 à 490	22
	FeE235	235	410 à 490	22
HA	FeE400	400	480	14
	FeE500	500	550	12

TABLE 2.2 – Nuances d'armatures et leurs caractéristiques

2.4.4 Diagramme contrainte-déformation

Le diagramme déformation-contrainte des armatures est défini comme mentionné sur la figure (2.5).

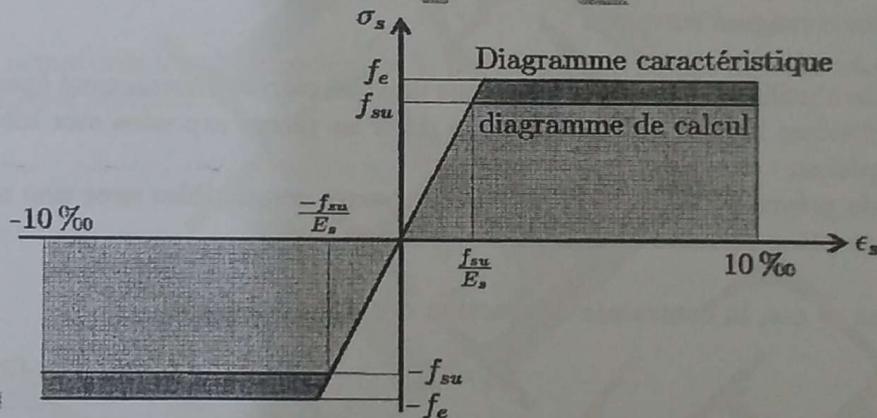


FIGURE 2.5 – Diagramme contrainte-déformation des armatures

2.4.4.1 Calcul à l'ELU

Pour les calculs à l'ELU, on utilise le diagramme de calcul obtenue à partir du diagramme caractéristique en divisant la limite d'élasticité f_e par un coefficient de sécurité γ_s :

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} \quad (2.14)$$

f_{su} est la résistance caractéristique ultime.

avec $\gamma_s = 1,15$ pour les cas courants et $\gamma_s = 1$ pour les combinaisons accidentelles.

2.4.4.2 Vérification à l'ELS

A l'ELS, les vérifications à effectuer pour les aciers portent sur l'état limite d'ouverture des fissures (article A.4.5,3). L'appréciation du degré de nocivité de l'ouverture des fissures dépend de l'environnement (agressif ou non), de la nature de la structure, de l'utilisation de l'ouvrage, de la limite élastique des aciers utilisés et de l'expérience sur des ouvrages analogues. Il appartient au maître d'oeuvre de juger de ce degré de nocivité.

⇨ Cas où la fissuration est peu préjudiciable :

Dans ce cas, aucune vérification particulière n'est demandée sur les aciers à part les consignes suivantes :

- de n'utiliser les gros diamètres que dans les pièces suffisamment épaisses ;
- d'éviter les très petits diamètres dans les pièces exposées aux intempéries ;
- de prévoir le plus grand nombre de barres compatibles avec une mise en place correcte du béton.

Dans ce cas, la contrainte de traction des armatures est :

$$\sigma_s = f_e \quad (2.15)$$

⇨ Cas où la fissuration est préjudiciable :

La fissuration est considérée comme préjudiciable lorsque les éléments en cause sont exposés aux intempéries, à des condensations, ou peuvent être alternativement noyés et immergés en eau douce.

Dans ce cas, la contrainte de traction des armatures doit vérifier :

$$\sigma_s \leq \xi = \min \left[\frac{2}{3} f_e ; \max \left(\frac{f_e}{2} ; 110 \sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (MPa) \quad (2.16)$$

Les armatures les plus proches de la paroi de la structure doivent vérifier la condition suivante :

$$\Phi \geq 6 \text{ mm} \quad (2.17)$$

f_e = limite d'élasticité des aciers utilisés (MPa)

f_{tj} = résistance caractéristique en traction du béton (MPa)

η = coefficient de fissuration et il prend la valeur de 1 pour les RL, 1,6 pour les HA de $\Phi \geq 6\text{ mm}$ 1,3 pour les HA de $\Phi < 6\text{ mm}$.

Cas où la fissuration est très préjudiciable :

La fissuration est considérée comme très préjudiciable lorsque les éléments mis en œuvre sont exposés à un milieu agressif (eau de mer, atmosphère marine telle que embruns et brouillards salins, eau très pure, gaz ou sol particulièrement corrosifs) ou bien doivent assurer une étanchéité.

Dans ce cas, la contrainte de traction des armatures doit vérifier :

$$\sigma_s \leq 0,8\xi = 0,8 \min \left[\frac{2}{3}f_e; \max \left(\frac{f_e}{2}; 90\sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (\text{MPa}) \quad (2.18)$$

Les armatures les plus proches de la paroi de la structure doivent vérifier la condition suivante :

$$\Phi \geq 8\text{ mm} \quad (2.19)$$

Chapitre 3

Hypothèses et données de calcul

3.1 État limite ultime de résistance (ELUR)

3.1.1 Hypothèses de calcul

Pour réaliser un calcul à l'ELU, les hypothèses suivantes doivent être respectées :

* H1 : Les sections droites restent planes après déformation (sauf lorsque la sollicitation appliquée comporte un bi-moment);

* H2 : Les armatures subissent la même déformation normale que le béton qui les entoure, il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures d'acier et le béton;

* H3 : La résistance à la traction du béton est négligée à cause de la fissuration;

* H4 : Le diagramme contraintes-déformations du béton est un diagramme de type parabole-rectangle (voir figure 2.3);

* H5 : Le diagramme contraintes-déformations de l'acier est un diagramme de type "élasto-plastique parfait" (voir figure 2.5);

* H6 : Les positions que peut prendre le diagramme des déformations d'une section droite passent au moins par l'un des trois pivots définis dans la suite;

* H7 : La section d'un groupe de plusieurs barres est *supposée concentrée* en son centre de gravité.

Les hypothèses précédentes sont de nature réglementaire. Il n'y a pas lieu de les justifier par des considérations théoriques ou même des corrélations expérimentales. Pour comprendre ces hypothèses, il faut savoir qu'à l'ELUR, on limite volontairement la déformation en compression du béton et la déformation des armatures et ce pour augmenter la sécurité des constructions en béton armé. En effet, les courbes de comportement réel présentent des paliers de contrainte et il est moins sûr de limiter cette dernière. D'autre part, la distinction entre un état de flexion et de compression centrée provient du fait que dans le premier le diagramme des déformations est linéaire et tous les points de la section ne sont pas soumis à la même déformation (il y'a donc une certaine réserve) alors que dans le deuxième cas tous les points de la section subissent la même déformation normale (situation plus critique que la précédente).

L'hypothèse (H2) est très importante car le principe même d'une structure en béton armé suppose l'existence d'un état parfait d'adhérence entre le béton et les armatures. On verra plus loin que des dispositions spéciales concernant l'ancrage des armatures doivent être prises pour assurer la validité de cette hypothèse.

3.1.2 Diagramme des déformations limites d'une section (règle des pivots)

A l'ELUR, les diagrammes possibles résultent des déformations limites fixées pour les matériaux, d'où les trois domaines de la figure ci-dessous définis à partir des pivots A, B et C (voir figure 3.1).

Le diagramme de déformation d'une section à l'ELUR représenté par une droite doit obligatoirement passer par l'un des pivots A, B ou C. Cette règle se fixe comme objectif pour utiliser au mieux le béton et l'acier.

Dans la figure (3.1), on a les grandeurs suivantes :

- H représente la hauteur totale de la poutre;
- d est la hauteur utile d'une section en flexion simple;
- A_s est la section des aciers tendus.

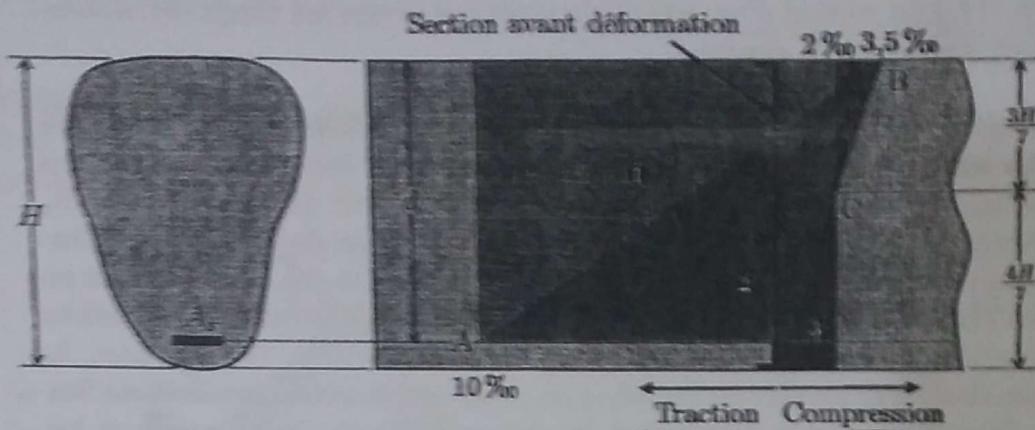


FIGURE 3.1 – Diagramme correspondant aux trois pivots A, B et C.

Dans la suite, on désignera par Y_u la distance entre la fibre supérieure et la fibre neutre et on posera :

$$\alpha_u = \frac{Y_u}{d} \tag{3.1}$$

3.1.3 Analyse du diagramme des déformations limites d'une section

3.1.3.1 Pivot A - Domaine 0 :

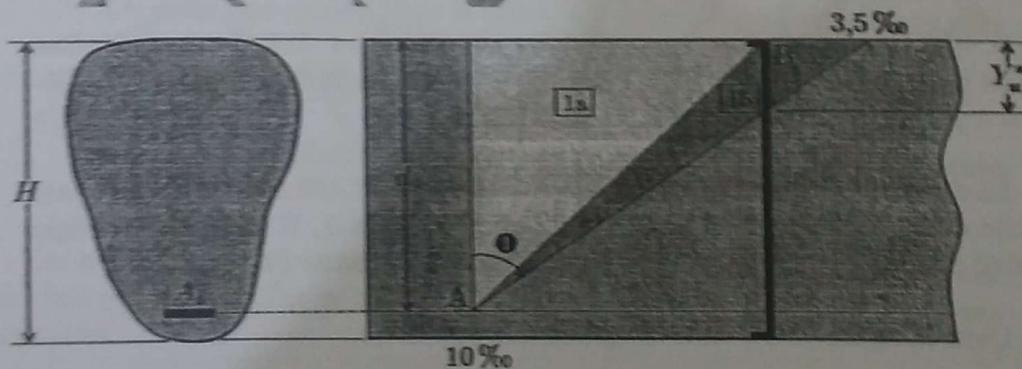


FIGURE 3.2 – Diagramme correspondant au pivot A

les diagrammes passent par le pivot A qui correspond à l'état ultime

d'allongement des armatures avec un allongement maximum de 10 ‰ (figure 3.2). Les armatures tendues sont supposées concentrées en leur centre de gravité. Ce domaine est donc caractérisé par :

$$\begin{cases} \epsilon_{st} = 10 \text{ ‰} \\ \epsilon_{bc} \leq 3,5 \text{ ‰} \\ \text{L'ELUR est atteint par les armatures.} \end{cases} \quad (3.2)$$

ϵ_{st} est la déformation des armatures tendues ;

ϵ_{bc} est la déformation de la fibre supérieure du béton.

on distingue deux sous domaines :

❖ Le sous domaine **1a** : le béton est toujours tendu et ne participe pas à la résistance de la section.

Le sous-domaine **1a** correspond aux situations pratiques suivantes :

- Traction simple (tirant) ;
- Section entièrement tendue en flexion composée (tirant).

❖ Le sous domaine **1b** : le béton est partiellement comprimé.

Le sous-domaine **1b** correspond à la situation pratique suivante :

- Section partiellement comprimée en flexion simple ou composée (poutre ou tirant).

On a intérêt à déterminer la limite entre les domaines ① et ②, cela peut être fait en déterminant la position limite de l'axe neutre Y_u^* entre les deux domaines.

En appliquant le théorème de THALES dans les triangles de la figure (3.2), on trouve :

$$\frac{Y_u^*}{3,5} = \frac{d - Y_u^*}{10} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow 10 Y_u^* &= 3,5 d - 3,5 Y_u^* \\ \rightarrow 13,5 Y_u^* &= 3,5 d \\ \rightarrow \alpha_u^* &= \frac{Y_u^*}{d} = \frac{3,5}{13,5} \approx 0,2593 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_u^* = 0,2593 \\ Y_u^* = 0,2593 d \end{cases} \quad (3.5)$$

La caractérisation des deux sous domaines précédents est décrite comme suit :

$$\begin{cases} \alpha_u \leq 0 & \Rightarrow \text{Le domaine actif est le domaine } \boxed{1a} \\ 0 \leq \alpha_u \leq \alpha_u^* = 0,2593 & \Rightarrow \text{Le domaine actif est le domaine } \boxed{1b} \end{cases}$$

Le pivot A correspond donc à $\alpha_u \leq 0,2593$.

3.1.3.2 Pivot B - Domaine ② :

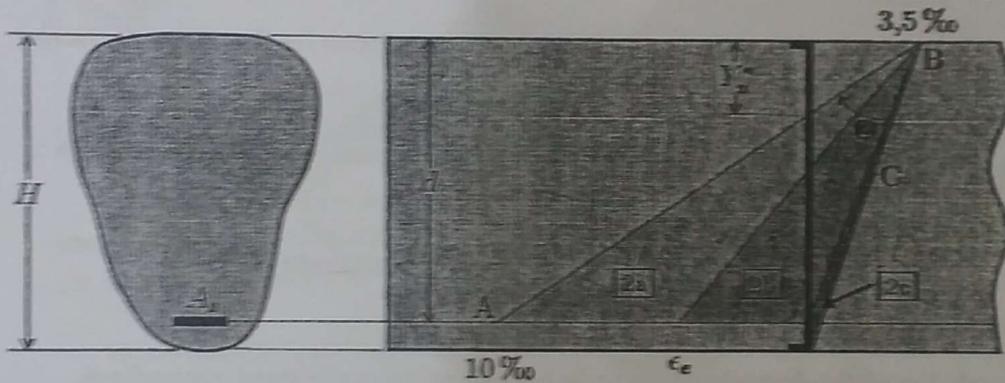


FIGURE 3.3 - Diagramme correspondant au pivot B

les diagrammes passent par le pivot B qui correspond à un raccourcissement de la fibre la plus comprimée de $\epsilon_{bc} = 3,5\text{‰}$ pour le béton et $\epsilon_s \leq 10\text{‰}$ pour l'acier.

Ce diagramme correspond à l'état ultime en compression du béton et la section est partiellement comprimée en flexion simple ou en flexion composée (cas général des poutres).

On distingue 3 sous domaines (figure 3.3) :

✦ Le sous domaine **2a** : L'allongement des armatures est supérieur à l'allongement élastique ϵ_e et les armatures sont donc plastifiées. Le béton

est partiellement comprimé et la section est dans un état de flexion simple ou composée.

✦ Le sous domaine **2b** : La déformation dans les aciers tendus est un allongement qui reste inférieur à la déformation correspondant à la limite d'élasticité ϵ_e . Le béton est partiellement comprimé et la section est dans un état de flexion simple ou composée.

✦ Le sous domaine **2c** : Les aciers subissent un raccourcissement et ils ne jouent pas vraiment leur meilleur rôle dans ce cas ou l'axe neutre passe dans l'enrobage (partie inutile d'un point de vue mécanique de la section).

Les trois domaines peuvent être caractérisés par la grandeur α_u comme on l'a fait pour le cas précédent.

La frontière entre les sous domaines **2a** et **2b** correspond à un allongement des armatures tendues égal à l'allongement $\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s}$ qui est fonction de la nuance d'acier utilisé et pour lequel $\alpha_u = \alpha_e$.

α_e se calcule par l'application du théorème de THALES :

$$\alpha_e = \frac{3,5}{\epsilon_e + 3,5} \quad (3.6)$$

La frontière entre les sous domaines **2b** et **2c** est caractérisée par :

$$\alpha_u = \frac{d}{d} = 1 \quad (3.7)$$

Les domaines ② et ③ sont séparés par la frontière correspondante à :

$$\alpha_u = \frac{H}{d} \quad (3.8)$$

Les trois sous domaines du domaine ② sont définis par :

$$\begin{cases} \alpha_u^* \approx 0,2593 \leq \alpha_u \leq \alpha_e & \Rightarrow \text{Le domaine actif est le domaine } \boxed{2a} \\ \alpha_e \leq \alpha_u \leq 1 & \Rightarrow \text{Le domaine actif est le domaine } \boxed{2b} \\ 1 \leq \alpha_u \leq \frac{H}{d} & \Rightarrow \text{Le domaine actif est le domaine } \boxed{2c} \end{cases}$$

3.1.3.3 Pivot C - Domaine ③ :

Dans ce domaine la déformation de compression du béton au point C doit toujours vérifier :

$$\epsilon_b = 2\text{‰} \quad (3.9)$$

La section est entièrement comprimée.

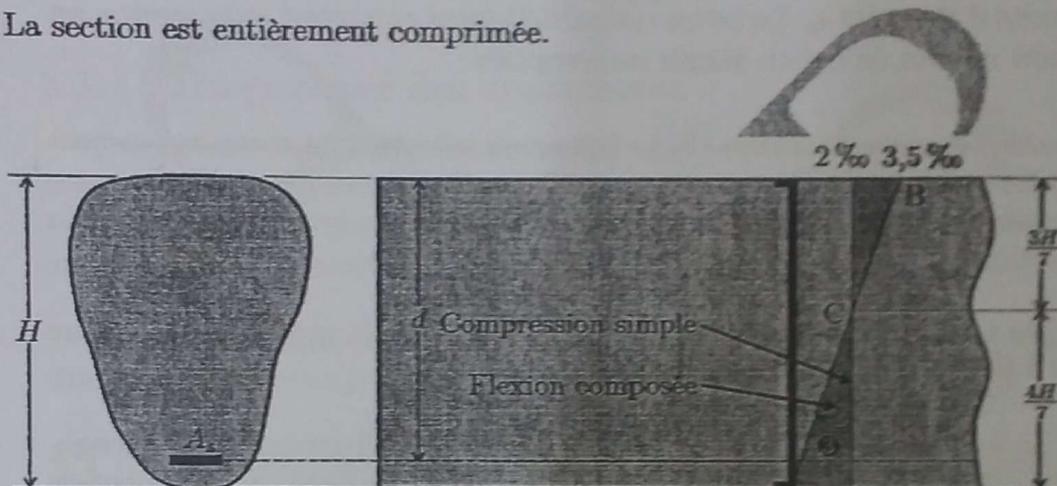


FIGURE 3.4 - Diagramme correspondant au pivot C

L'ELUR est atteint par compression du béton et la section est entièrement comprimée.

Ça correspond au cas de la compression simple ou de la flexion composée avec section entièrement comprimée (cas général des poteaux et des poutres).

La position du point C est localisée par l'application du théorème de THALÈS dans le triangle composé par le domaine ③ et on a :

$$\frac{Y_c}{3,5 - 2} = \frac{H - Y_c}{2} \quad \rightarrow \quad 2Y_c = 1,5H - 1,5Y_c \quad (3.10)$$

$$\rightarrow \quad 3,5Y_c = 1,5H \quad (3.11)$$

$$\rightarrow \quad Y_c = \frac{1,5H}{3,5} = \frac{3H}{7} \quad (3.12)$$

On distingue pour ce pivot, le cas de la compression simple correspondant à la limite verticale du domaine ③ ($\epsilon_{bc} = 2\text{‰}$) et le cas de la flexion composée

avec une section entièrement comprimée qui correspond à tout le domaine ③. Ce domaine est caractérisé par :

$$\frac{H}{d} \leq \alpha_u \leq +\infty \quad (3.13)$$

3.1.4 Diagramme des contraintes

Pour le calcul à l'ELUR, on adoptera pour le béton le diagramme contraintes-déformations en parabole-rectangle. La déformation augmentant linéairement vers le haut à partir de l'axe neutre, la contrainte augmente également mais en suivant la courbe parabole rectangle.

En flexion simple, le diagramme parabole-rectangle est remplacé par un diagramme rectangulaire simplifié.

3.1.5 Justification de l'utilisation du diagramme simplifié du béton

On définit le coefficient de remplissage ψ par le rapport de la surface du diagramme rectangulaire simplifié par rapport à la surface d'un diagramme rectangulaire de hauteur Y_u et de même intensité $\sigma_{bc} = f_{bu}$.

On cherche les expressions du coefficient de remplissage ψ pour les deux cas où on est sur le pivot B et sur le pivot A dans la suite.

3.1.5.1 Cas du pivot B

En considérant un diagramme de déformation, passant par le pivot B, et en traçant le diagramme des contraintes développées dans le béton, on obtient ce qu'on a présenté dans la figure (3.5).

F_b représente la résultante des contraintes de compression dans le béton ; F_s est la résultante de traction dans les aciers tendus ($F_s = A_s f_{su}$ si $\epsilon_s \geq \epsilon_e$).

Sur la même figure on présente le diagramme des contraintes rectangulaire simplifié.

Rappelons le résultat utile qui donne la position du centre de gravité dans le cas d'un secteur délimité par un arc de parabole et admettant une tangente verticale comme l'indique la figure (3.6).

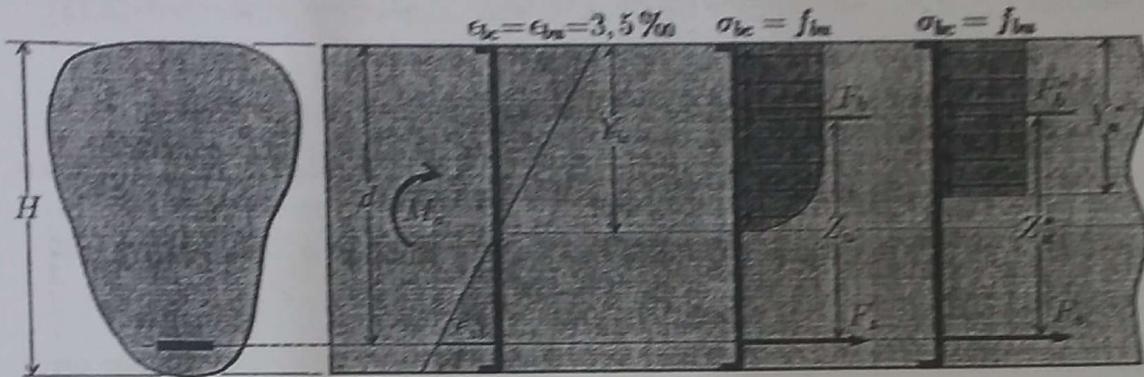


FIGURE 3.5 – Schématisation des diagrammes du béton sur une section partiellement comprimée

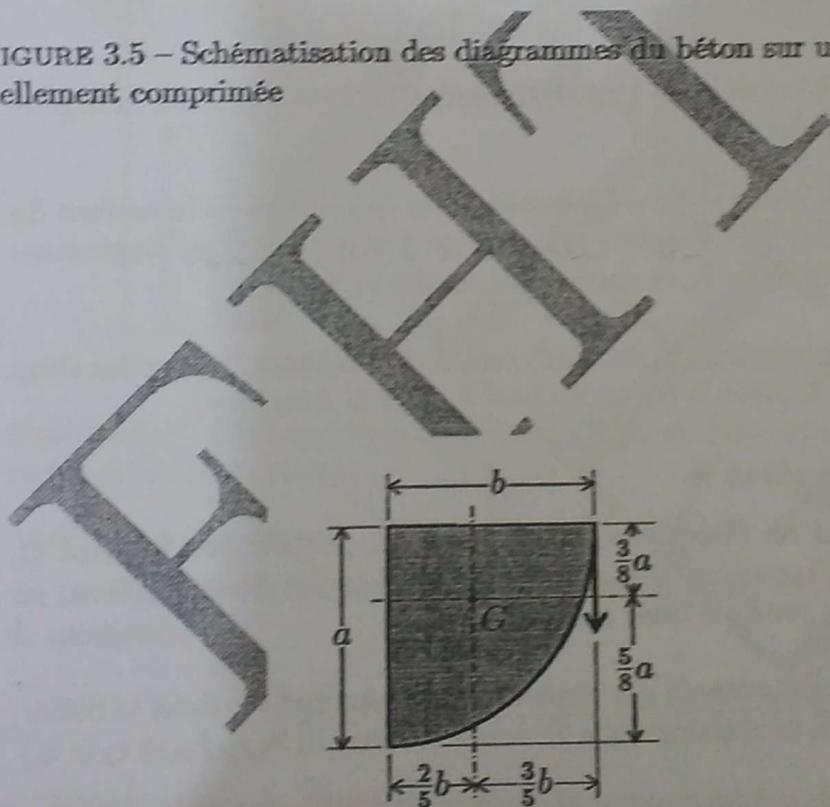


FIGURE 3.6 – Caractéristiques d'une section parabolique

La surface de ce secteur est :

$$S_p = \frac{2}{3}ab \quad (3.14)$$

Le diagramme parabole-rectangle est décomposé en sa partie parabolique et sa partie rectangulaire comme le montre la figure (3.7).

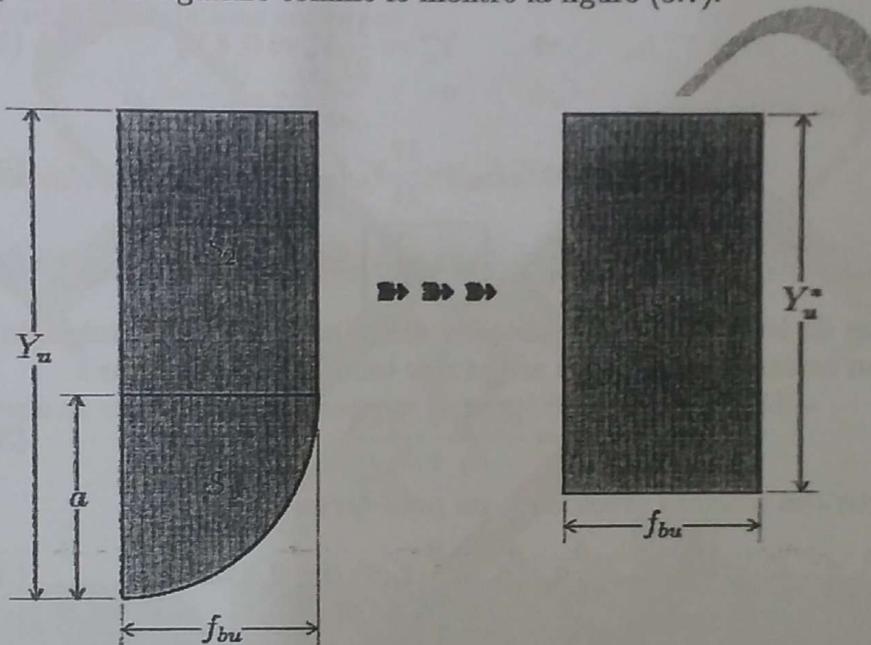


FIGURE 3.7— Décomposition du diagramme parabolique-rectangle et diagramme rectangulaire équivalent

La règle de THALÈS appliquée au diagramme des déformations permet de montrer que :

$$a = \frac{2}{3,5} Y_u \quad \rightarrow \quad a = \frac{4}{7} Y_u \approx 0,5714 Y_u \quad (3.15)$$

L'équivalence du diagramme parabolique-rectangle et du diagramme rectangulaire équivalent permet d'écrire :

$$F_b = F_b^* \quad \rightarrow \quad S = S_1 + S_2 = S^* \quad (3.16)$$

Nous avons :

$$(3.14) \quad \rightarrow \quad S_1 = \frac{2}{3} a f_{bu} = \frac{8}{21} Y_u f_{bu} \approx 0,381 Y_u f_{bu} \quad (3.17)$$

$$S_2 = (Y_u - a)f_{bu} = \frac{3}{7}Y_u f_{bu} \approx 0,4286 Y_u f_{bu} \quad (3.18)$$

$$\rightarrow S^* = S_1 + S_2 = \frac{17}{21}Y_u f_{bu} \approx 0,8095 Y_u f_{bu} \approx 0,8 Y_u f_{bu} \quad (3.19)$$

En gardant le petit coté du diagramme rectangulaire identique à celui du diagramme parabole-rectangle (figure 3.7), on obtient :

$$S^* = Y_u^* f_{bu} \quad \rightarrow \quad Y_u^* = \frac{17}{21}Y_u \approx 0,8 Y_u \quad (3.20)$$

On a d'un autre coté :

$$S^* = \psi Y_u f_{bu} = \frac{17}{21}Y_u f_{bu} \quad (3.21)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\psi = \frac{17}{21}} \quad (3.22)$$

Le bras de levier de la résultante du diagramme parabole-rectangle par rapport au centre de gravité des armatures tendues est défini par :

$$Z_u = \frac{S_1 Z_1 + S_2 Z_2}{S_1 + S_2} \quad (3.23)$$

A partir des schémas précédents, on peut écrire :

$$Z_1 = d - Y_u + \frac{5}{8}a = d - \frac{9}{14}Y_u = d - 0,6429 Y_u \quad (3.24)$$

$$Z_2 = d - \frac{Y_u - a}{2} = d - \frac{3}{14}Y_u = d - 0,2143 Y_u \quad (3.25)$$

$$\rightarrow Z_u = d - \frac{99}{238}Y_u \approx d - 0,416 Y_u \approx d - 0,4 Y_u \quad (3.26)$$

En posant :

$$Z_u = d - \theta Y_u \quad (3.27)$$

on en déduit donc que :

$$\boxed{\theta = \frac{99}{238} \approx 0,4} \quad (3.28)$$

Il est clair à partir de la figure (3.5) que :

$$Z_u^* = d - \frac{1}{2}Y_u^* = d - 0,4 Y_u \quad (3.29)$$

On a donc égalité des bras de levier des deux diagrammes :

$$Z_u = Z_u^* \quad (3.30)$$

C'est ce dernier résultat qui fait que le diagramme rectangulaire simplifié marche de manière cohérente et qui justifie son usage.

3.1.5.2 Cas du pivot A

En pivot A, le raccourcissement du béton est inférieur à 3,5‰ et la contrainte maximale de compression sur le béton est inférieure à f_{bu} .

L'allongement des aciers est quant à lui constant et égal à 10‰. On peut donc établir les relations suivantes :

$$\epsilon_{bc} = \frac{10}{1000} \frac{\alpha_u}{1 - \alpha_u} \rightarrow \alpha_u = \frac{1000 \epsilon_{bc}}{10 + 1000 \epsilon_{bc}} \quad (3.31)$$

pour la valeur particulière de $\epsilon_{bc} = 2\text{‰}$, on a : $\alpha = 0,167$.

* Cas où $0 \leq \alpha_u \leq 0,167$:

Ce cas correspond à $0\text{‰} \leq \epsilon_{bc} \leq 2\text{‰}$.

Dans ce cas, on a le diagramme présenté dans la figure (3.8).

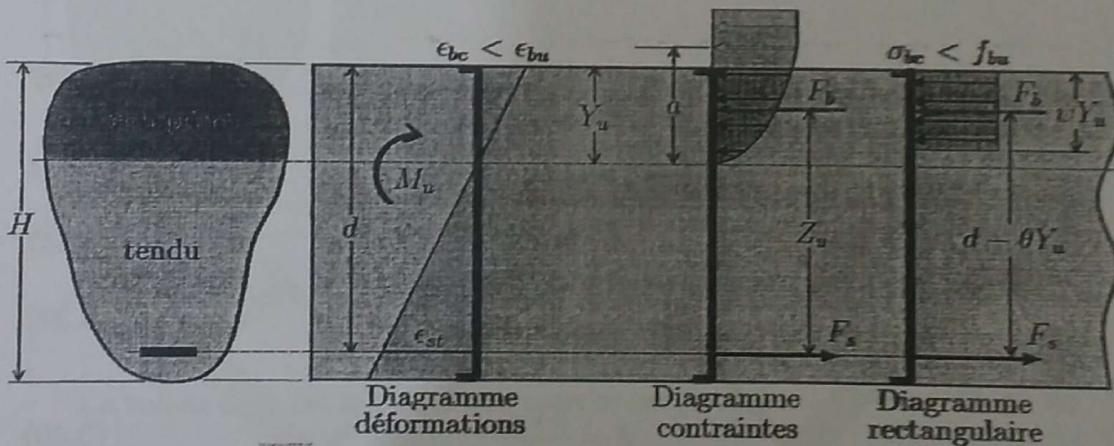


FIGURE 3.8 – Section en flexion simple avec diagramme de contraintes tronqué ($\sigma_{bc} < f_{bu}$)

On note $a = \lambda Y_u$ la valeur de l'ordonnée qui correspondrait à un raccourcissement du béton de 2‰ ce qui revient à prolonger fictivement le diagramme ci-dessus.

En appliquant le théorème des triangles semblables (théorème de THALES), on peut déterminer λ :

$$\frac{2 \cdot 10^{-3}}{\lambda Y_u} = \frac{\epsilon_{bc}}{Y_u} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\epsilon_{bc}} \quad (3.32)$$

$$(3.31) \rightarrow \lambda = \frac{2}{10} \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} \quad (3.33)$$

Pour déterminer le coefficient de remplissage ψ , on cherche à déterminer l'aire du diagramme qui est situé sous la parabole.

L'équation de cette parabole est :

$$\sigma_x = \frac{2x}{\lambda Y_u} \left(1 - \frac{x}{2\lambda Y_u} \right) f_{bu} \quad (3.34)$$

x étant la position d'une fibre de béton comprimée à partir de la fibre neutre.

L'aire recherchée vaut donc :

$$\int_0^{Y_u} \sigma_x dx = \int_0^{Y_u} \frac{2x}{\lambda Y_u} \left(1 - \frac{x}{2\lambda Y_u} \right) f_{bu} dx \quad (3.35)$$

$$= \frac{2f_{bu}}{\lambda Y_u} \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6\lambda Y_u} x^3 \right]_0^{Y_u} \quad (3.36)$$

$$= \frac{2f_{bu}}{\lambda Y_u} \left(\frac{Y_u^2}{2} - \frac{Y_u^2}{6\lambda} \right) \quad (3.37)$$

$$= \frac{2f_{bu} Y_u}{\lambda} \frac{3\lambda - 1}{6\lambda} \quad (3.38)$$

$$= \frac{3\lambda - 1}{3\lambda^2} Y_u f_{bu} \quad (3.39)$$

on en déduit donc :

$$\psi = \frac{3\lambda - 1}{3\lambda^2} \quad (3.40)$$

Le centre de gravité de ce diagramme s'obtient en divisant le moment statique par l'aire du diagramme (formules RDM classiques) :

$$Y_G = \theta Y_u = \frac{\int_0^{Y_u} \sigma_x (Y_u - x) dx}{\int_0^{Y_u} \sigma_x dx} \quad (3.41)$$

après développement on trouve :

$$\theta Y_u = \frac{4\lambda - 1}{4(3\lambda - 1)} Y_u \quad (3.42)$$

* H2 : Le béton tendu est négligé ;

* H3 : Le béton et l'acier sont considérés comme des matériaux linéairement élastiques et il est fait abstraction du retrait et du fluage du béton. La loi de HOOKE est donc appliquée dans ce cas : $\sigma = E\epsilon$;

* H4 : Par convention, le rapport n du module d'élasticité longitudinale de l'acier à celui du béton ou « coefficient d'équivalence » a pour valeur 15 :

$$n = \frac{E_s}{E_b} = 15 \quad (3.59)$$

On a :

$$\begin{cases} \sigma_b = E_b \epsilon_b \\ \sigma_s = E_s \epsilon_s \end{cases} \quad (3.60)$$

Pour le béton au voisinage des armatures, on a :

$$\epsilon_b = \epsilon_s \rightarrow \frac{\sigma_b}{E_b} = \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (3.61)$$

$$\rightarrow \sigma_s = \frac{E_s}{E_b} \sigma_b \quad (3.62)$$

$$\rightarrow \sigma_s = n \sigma_b \quad (3.63)$$

* H5 : Les aires des aciers ne sont pas déduites de l'aire du béton comprimé dans le calcul. On peut, en outre, supposer concentrée en son centre de gravité l'aire d'acier d'un groupe de plusieurs armatures.

❖ **Homogénéisation d'une section en BA** : pour pouvoir appliquer au béton armé qui est un matériau hétérogène les règles de la RDM pour les corps homogènes, il sera nécessaire d'homogénéiser la section de béton armé. Une section d'acier travaille n fois plus qu'une même section de béton comme on l'a démontré dans l'équation (3.63). Donc une section d'acier est équivalente à n fois qu'une même section de béton. Pour homogénéiser la section de béton armé, on remplace la section d'acier par n fois sa section de béton (voir figure 3.10). Dans les calculs, la section du béton équivalente doit avoir le même centre de gravité que la section d'acier remplacée.

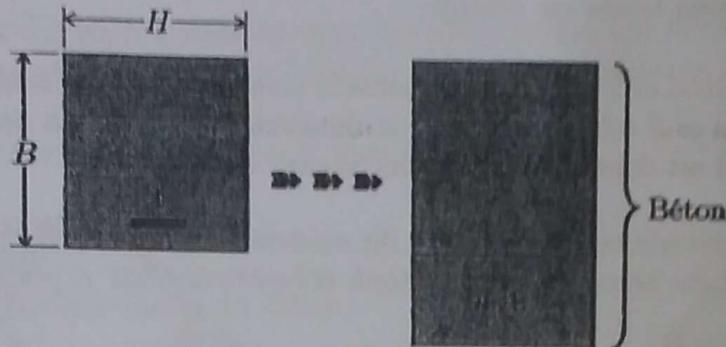


FIGURE 3.10 – Équivalence des sections d'acier et de béton

3.3 État limite de service de compression du béton

La contrainte de compression du béton est limitée à $0,6 f_{c28}$:

$$\sigma_b \leq 0,6 f_{c28} \quad (3.64)$$

Ce risque n'existe que dans le cas où le pourcentage d'armature est élevé :

$$\frac{A_s}{Bd} \geq 2\% \quad (3.65)$$

où A_s est la section d'armatures ;
 B est la largeur de la section calculée ;
 d est la hauteur utile de la section.

3.4 État limite de service d'ouverture des fissures

Les hypothèses correspondantes sont présentées dans la section (2.4.4).

3.5 Exercices

→ Exercice 1 :

Soit des barres utilisées dans une construction qui se trouve dans un milieu agressif, de nuance $FeE400$. Le béton a une résistance de $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$.

Calculez les contraintes limites à l'ELS?

⇒ **Solution 1 :**

Contrainte limite du béton :

$$\sigma_b = 0,6 f_{c28} = 0,6 \cdot 25 = 15 \text{ MPa} \quad (3.66)$$

La structure est dans un milieu agressif, la fissuration est donc très préjudiciable. La contrainte limite de l'acier est :

$$\sigma_s \leq 0,8 \xi = 0,8 \min \left[\frac{2}{3} f_e; \max \left(\frac{f_e}{2}; 110 \sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (3.67)$$

on a :

$$f_{tj} = 0,6 + 0,06 f_{c28} = 0,6 + 0,06 \cdot 25 = 2,1 \text{ MPa} \quad (3.68)$$

$$\rightarrow \sigma_s \leq 0,8 \min [266,667; \max (200; 201,633)] \quad (3.69)$$

$$\rightarrow \sigma_s = 161,306 \text{ MPa} \quad (3.70)$$

Chapitre 4

Calcul des sections en traction simple (Tirants)

4.1 Introduction

D'après les règles de calcul des structures (RDM), on peut considérer une section d'une poutre comme sollicitée en traction simple si la résultante normale appliquée à cette section a comme point d'application le centre de gravité de la section. Autrement dit, le point d'application de la résultante normale doit coïncider avec le centre de gravité du béton.

Le ferrailage d'une section soumise à la traction simple doit être disposé de telle sorte à ce que son centre de gravité doit également coïncider avec le point d'application de la résultante. Tous les éléments en BA d'une structure soumis exclusivement à des efforts normaux de traction sont appelés des Tirants.

Les hypothèses suivantes doivent donc être prises en compte dans le calcul des tirants :

- La résistance du béton à la traction étant négligeable, elle est prise comme nulle dans le calcul ;
- L'effort normal appliqué est équilibré uniquement par les armatures ;
- Les armatures et le béton ont le même centre de gravité (pas de moment parasite).

4.2 Calcul du ferrailage

Le principe de calcul consiste à disposer une section d'armatures qui doit développer une force résistante supérieure ou égale à l'effort normal appliqué.

La force de résistance est déterminée en appliquant à l'acier une contrainte maximale (correspondante à 10‰ de déformation de l'acier), ça correspond au pivot A avec un diagramme de contraintes uniforme sur la section.

4.2.1 Calcul à l'ELU

En respectant le principe de calcul ci-dessus, on doit donc écrire :

$$A_{su} f_{su} \geq N_u \quad (4.1)$$

$$\rightarrow A_{su} \geq \frac{N_u}{f_{su}} \quad (4.2)$$

rappelons que $f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s}$.

4.2.2 Calcul à l'ELS

On calcule le ferrailage à l'ELS en suivant le même principe, ce qui fait on peut également écrire :

$$A_{ss} \bar{\sigma}_{st} \geq N_s \quad (4.3)$$

$$\rightarrow A_{ss} \geq \frac{N_s}{\bar{\sigma}_{st}} \quad (4.4)$$

rappelons que la contrainte limite des aciers $\bar{\sigma}_{st}$ est déterminée en fonction de la préjudiciabilité de la fissuration considérée (voir la fin du chapitre 2).

4.2.3 Minimum réglementaire (non fragilité)

Une section entièrement tendue est considérée comme non fragile si elle est apte à reprendre les contraintes provoquant la fissuration du béton en chargeant les aciers à leur limite d'élasticité f_e . Autrement dit, la résistance des armatures doit être supérieure à la résistance du béton tendu :

$$A_{sb} f_e \geq B f_{t28} \quad (4.5)$$

$$\rightarrow \boxed{A_{sb} \geq \frac{B f_{t28}}{f_e}} \quad (4.6)$$

B étant l'aire de la section du béton.

Puisque la résistance du béton à la traction n'est pas prise en compte, l'aire de la section B peut être prise quelconque, mais pour éviter la fragilité de la section, son aire B doit respecter cette condition de non fragilité. Si l'aire de la section B est imposé, c'est la section d'armatures à disposer qui doit respecter la condition de non fragilité.

4.2.4 Ferrailage à disposer

Le ferrailage à disposer dans la section calculée doit respecter les conditions d'utilisation à l'ELU et à l'ELS. Il doit également respecter la condition de non fragilité, la section la défavorable est adoptée comme suit :

$$\boxed{A_s = \max(A_{su}; A_{ss}; A_{sb})} \quad (4.7)$$

4.2.5 Ferrailage transversal

Nous savons que l'application d'un effort normal à une poutre donnée ne génère pas d'effort tranchant comme le cas de l'application d'un moment fléchissant. Cela ne nécessite pas la disposition d'un ferrailage transversal dans les tirants. Toutefois, le règlement impose un minimum de ferrailage transversal comme suit :

$$\phi_t \geq 0,3\phi_L \quad \text{avec} \quad \phi_{t_{\min}} = 6 \text{ mm} \quad (4.8)$$

L'espacement du ferrailage transversal doit respecter la condition suivante :

$$esp \leq \min(40 \text{ cm}; a + 10 \text{ cm}) \quad (4.9)$$

a étant la dimension la plus petite de la section droite du tirant.

4.3 Exercices

•♦ Exercice 1 :

Soit un tirant en BA soumis à un effort normal de traction ultime $N_u = 400 \text{ kN}$ et un effort normal de service $N_s = 290 \text{ kN}$. La section du tirant est de dimensions $(15 \text{ cm} \times 15 \text{ cm})$.

Le reste des données est comme suit :

béton : $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$, acier : $f_e = 400 \text{ MPa}$ et la fissuration est peu préjudiciable.

Calculer la section d'armatures du tirant ?

⇒ Solution 1 :

Calcul à l'ELU :

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{400}{1,15} = 347,826 \text{ MPa} \quad (4.10)$$

$$\rightarrow A_{su} = \frac{N_u}{f_{su}} = \frac{0,4}{347,826} = 0,00115 \text{ m}^2 = 11,5 \text{ cm}^2 \quad (4.11)$$

La fissuration étant peu préjudiciable, le calcul à l'ELS n'est pas obligatoire.

Minimum de non fragilité :

$$A_{sb} = \frac{Bf_{t28}}{f_e} = \frac{0,15 \cdot 0,15 \cdot 1,8}{400} = 0,000101 \text{ m}^2 = 1,01 \text{ cm}^2 \quad (4.12)$$

La section d'armatures à disposer est :

$$A_s = \max(A_{su}; A_{sb}) = \max(11,5; 1,01) = 11,5 \text{ cm}^2 \quad (4.13)$$

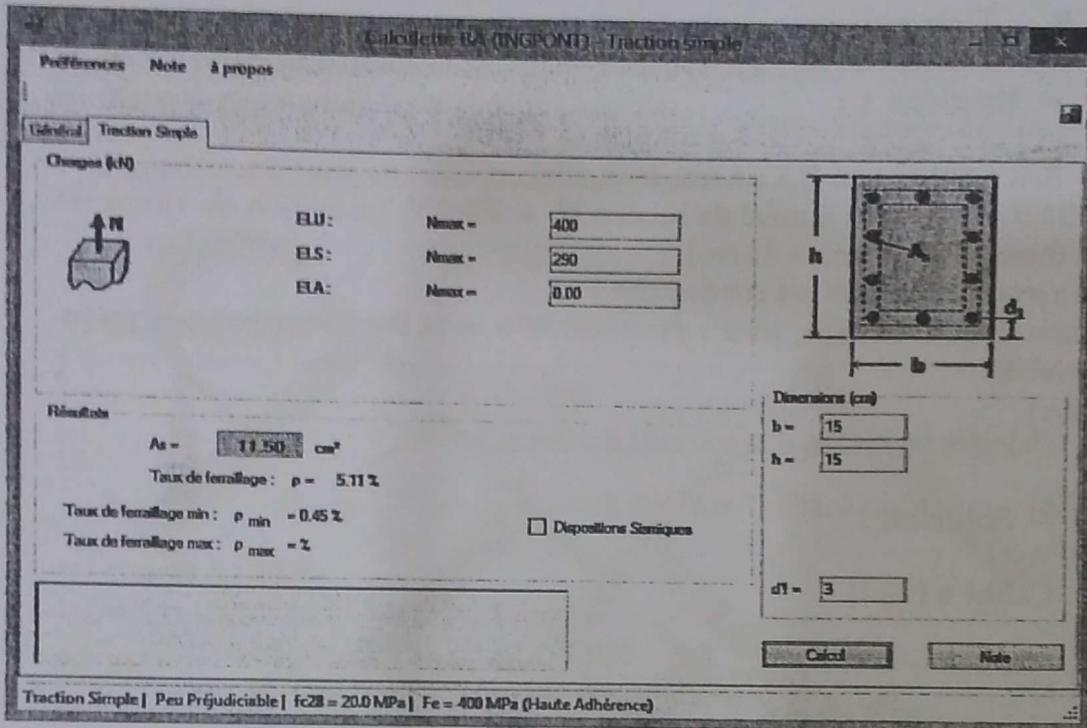


FIGURE 4.1 – Exercice 1 : Résultats de la calculatrice BA INGPONT

On peut disposer 4 barres HA20 comme schématisé sur la figure (4.2).

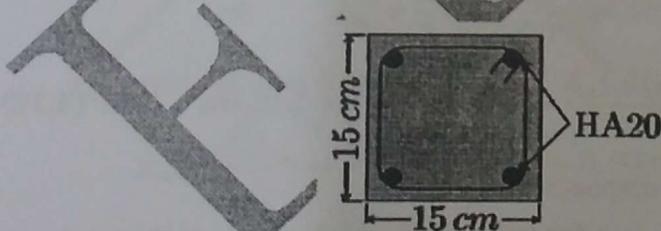


FIGURE 4.2 – Ferrailage proposé du tirant par 4 HA20

⇒ Exercice 2 :

On considère un tirant de section rectangulaire ($25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$) sollicité par un effort normal de traction. A l'ELU on prends : $N_u = 0,5\text{ MN}$ et à l'ELS : $N_s = 0,4\text{ MN}$.

Le béton a une résistance $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et l'acier est de nuance $FeE500$. La fissuration est prise comme préjudiciable.

Calculer la section des armatures longitudinales ?

⇒ Solution 2 :

Calcul à l'ELU :

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,78 \text{ MPa} \quad (4.14)$$

$$\rightarrow A_{su} = \frac{N_u}{f_{su}} = \frac{0,5}{434,78} = 0,00115 \text{ m}^2 = 11,5 \text{ cm}^2 \quad (4.15)$$

Calcul à l'ELS :

$$\bar{\sigma}_{st} = \min \left[\frac{2}{3} f_e; \max \left(\frac{f_e}{2}; 110 \sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (4.16)$$

$$= \min \left[\frac{2}{3} \cdot 500; \max \left(\frac{500}{2}; 110 \sqrt{1,6 \cdot 2,1} \right) \right] \quad (4.17)$$

$$= \min [333, 33; \max (250; 201, 63)] \quad (4.18)$$

$$= 250 \text{ MPa} \quad (4.19)$$

$$\rightarrow A_{ss} = \frac{N_s}{\bar{\sigma}_{st}} = \frac{0,4}{250} = 0,0016 \text{ m}^2 = 16 \text{ cm}^2 \quad (4.20)$$

Minimum de non fragilité :

$$A_{sb} = \frac{B f_{t28}}{f_e} = \frac{0,25 \cdot 0,25 \cdot 2,1}{500} = 0,00026 \text{ m}^2 = 2,6 \text{ cm}^2 \quad (4.21)$$

La section d'armatures à disposer est :

$$A_s = \max(A_{su}; A_{ss}; A_{sb}) = \max(11,5; 16; 2,6) = 16 \text{ cm}^2 \quad (4.22)$$

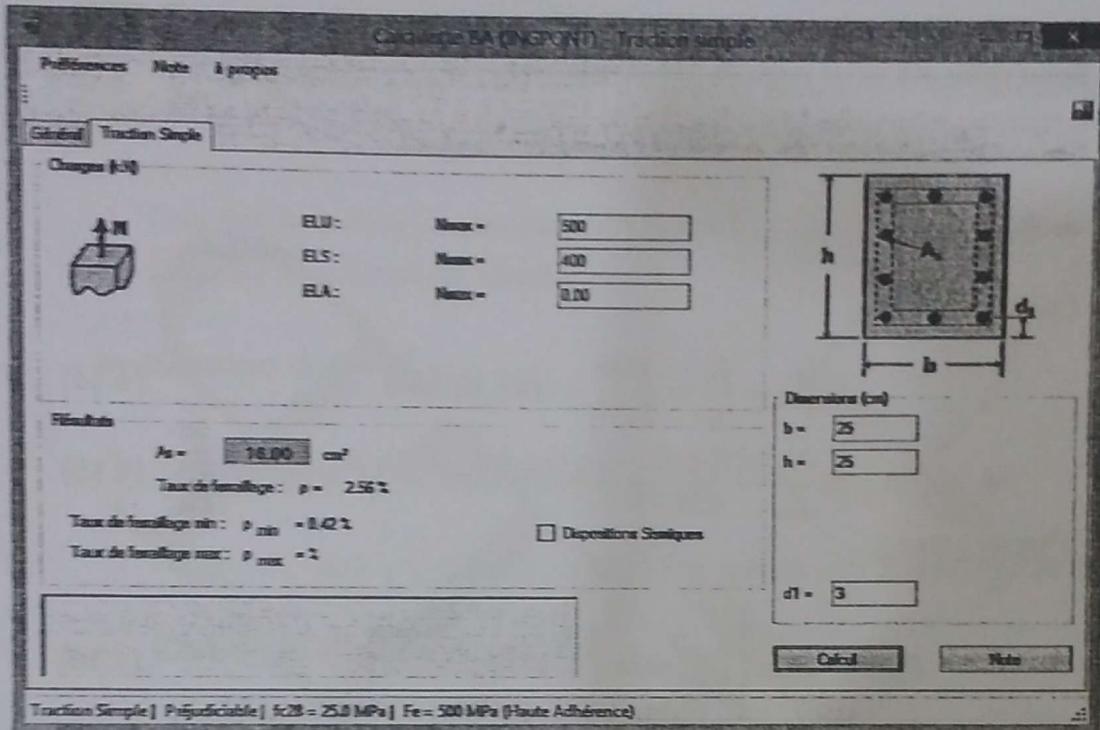


FIGURE 4.3 – Exercice 2 : Résultats de la calculette BA INGPONT

On peut disposer 8 barres HA16 comme schématisé sur la figure (4.4).

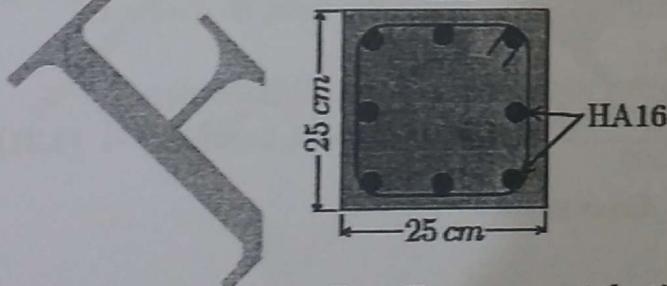


FIGURE 4.4 – Ferrailage proposé du tirant par 8 HA16

⇒ Exercice 3 :

Soit un tirant en BA soumis à une charge permanente $G = 240 \text{ kN}$ et une charge d'exploitation $Q = 180 \text{ kN}$.

Le reste des données est comme suit :
béton : $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$, acier : $f_e = 400 \text{ MPa}$ et la fissuration est peu préjudiciable.

1. Calculer la section d'armatures du tirant ?
2. Calculer le coffrage du tirant ?

⇒ **Solution 3 :**

1. L'effort normal à l'ELU est donné par :

$$N_u = 1,35G + 1,5Q = 1,35 \cdot 0,24 + 1,5 \cdot 0,18 = 0,594 \text{ MN} \quad (4.23)$$

Contrainte ultime de l'acier :

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{400}{1,15} = 347,826 \text{ MPa} \quad (4.24)$$

$$\rightarrow A_{su} = \frac{N_u}{f_{su}} = \frac{0,594}{347,826} = 0,001708 \text{ m}^2 = 17,08 \text{ cm}^2 \quad (4.25)$$

on peut disposer 6HA20 (section de $18,85 \text{ cm}^2$).

Le calcul l'ELS n'est pas obligatoire puisque la fissuration est peu préjudiciable.

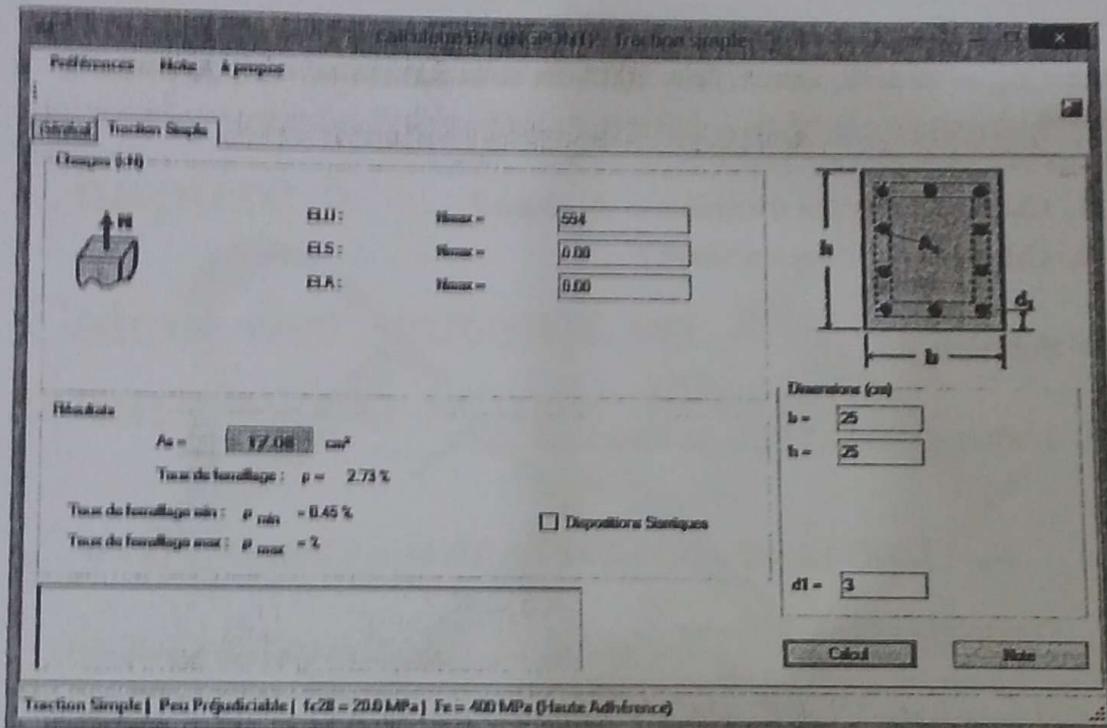


FIGURE 4.5 – Exercice 3 : Résultats de la calcul BA INGPONT

2. La condition de non fragilité est exprimée par :

$$A_s \geq \frac{B f_{t28}}{f_e} \quad (4.26)$$

$$A_s \geq \frac{1,8}{400} B = 0,0045 B \quad (4.27)$$

$$\rightarrow B < \frac{A_s}{0,0045} = \frac{18,85 \cdot 10^{-4}}{0,0045} = 0,4189 \text{ m}^2 = 4189 \text{ cm}^2 \quad (4.28)$$

on peut choisir la section (20 cm × 30 cm).

Vérification :

$$B = 20 \times 30 = 600 \text{ cm}^2 < 4189 \text{ cm}^2 \quad (4.29)$$



Chapitre 5

Calcul des sections en compression simple (Poteaux)

5.1 Introduction

On dit qu'un élément est sollicité en compression simple si les contraintes qui y sont développées sont de même signe (positives dans le cas des poteaux). Or, d'après la mécanique des structures, ce résultat est obtenu lorsqu'on applique la résultante normale à l'intérieur du noyau central. A titre d'exemple, nous présentons dans la figure (5.1) les noyaux centraux pour une section rectangulaire et pour une section circulaire qui restent les formes les plus fréquemment adoptées dans le cas des poteaux.

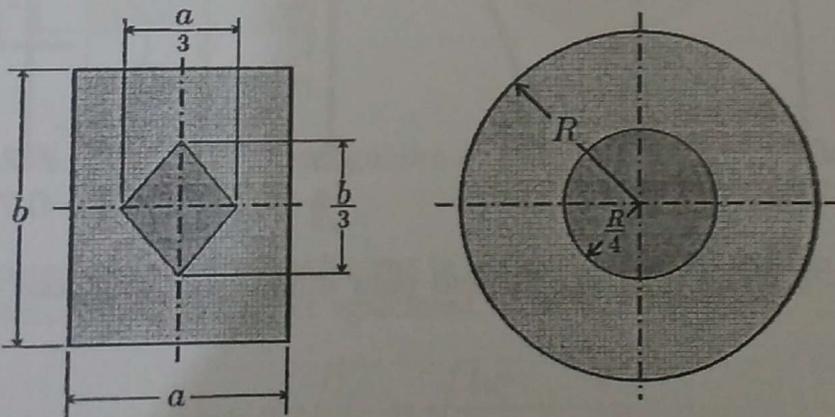


FIGURE 5.1 – Noyau central pour une section rectangulaire et une section circulaire

Dans le domaine du bâtiment, l'expérience montre que le dimensionnement des poteaux vis à vis des efforts normaux uniquement est suffisant. Toutefois, dans les cas où les moments appliqués sont importants, il faudra calculer les poteaux en flexion composée ou en flexion déviée composée. Dans ce chapitre, on se contentera du premier cas.

Le dimensionnement est effectué en appliquant une méthode forfaitaire à l'ELU qu'on développera dans la suite et aucun calcul n'est exigé à l'ELS.

5.2 Longueurs de flambement et élancement mécanique

La longueur de flambement notée L_f dépend de la longueur géométrique de l'élément et des types de conditions aux limites qui lui sont appliquées.

Pour le cas des poteaux isolés avec différents types de conditions aux limites, les longueurs de flambement sont définies dans la figure (5.2).

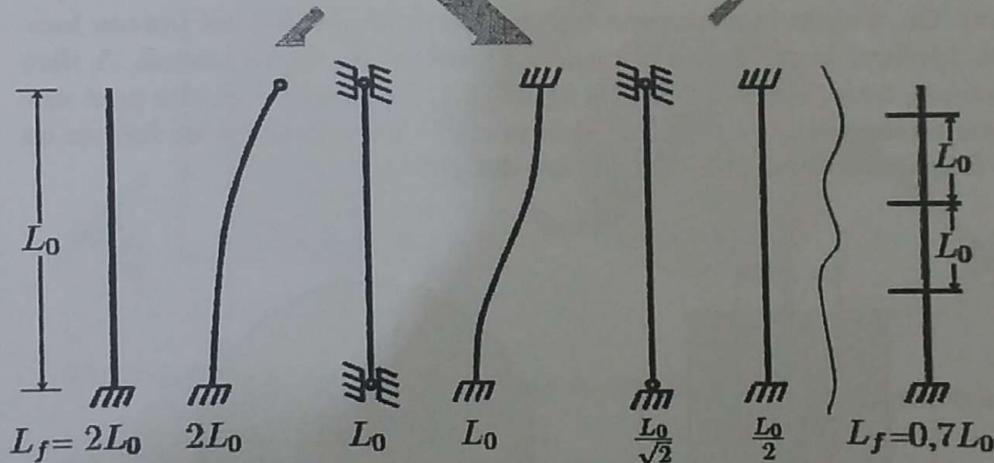


FIGURE 5.2 - Longueurs de flambement pour différentes conditions aux limites

Dans le dernier schéma à droite de la figure (5.2), nous présentons le cas des poteaux d'un immeuble à étages multiples. Dans ce cas, la longueur de flambement est prise égale à : $L_f = 0,7L_0$.

L'élancement mécanique d'un poteau noté λ est défini par :

$$\lambda = \frac{L_f}{i_{\min}} \quad (5.1)$$

où i_{\min} est le rayon de giration minimal suivant les deux directions du poteau.

Le rayon de giration est défini comme suit :

$$i_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{B}} \quad (5.2)$$

où I_{xx} est le moment d'inertie de la section du poteau par rapport à l'axe xx et B est l'aire de la section.

Pour une section rectangulaire (voir figure 5.3), on a :

$$I_{xx} = \frac{ab^3}{12} \quad \text{et} \quad I_{yy} = \frac{ba^3}{12} \quad (5.3)$$

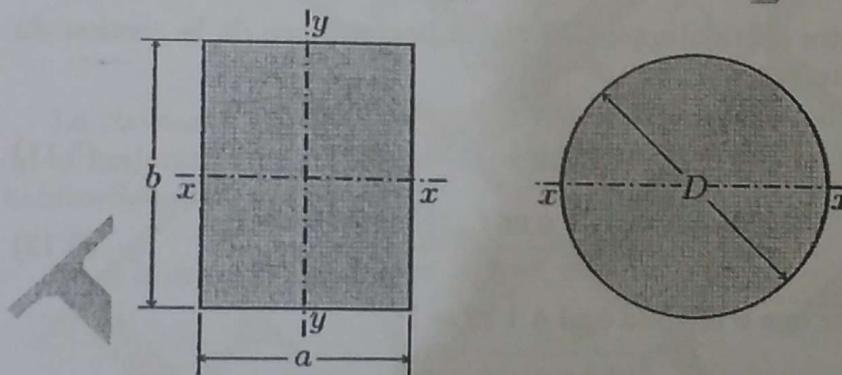


FIGURE 5.3 – Sections rectangulaire et circulaire et axes de symétrie

La dimension a est plus petite que la dimension b de la section. On peut donc constater que $I_{yy} \leq I_{xx}$ et également $i_{yy} \leq i_{xx}$. D'où :

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{yy}}{B}} = \sqrt{\frac{ba^3}{12B}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad (5.4)$$

Pour une section circulaire, on a :

$$I_{xx} = \frac{\pi D^4}{64} \quad (5.5)$$

$$\rightarrow i_{xx} = \sqrt{\frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{\pi D^2}{4}}} \quad (5.6)$$

$$= \sqrt{\frac{D^2}{16}} \quad (5.7)$$

$$\rightarrow i_{xx} = \frac{D}{4} \quad (5.8)$$

Pour une section carrée, elle correspond à une section rectangulaire avec $a = b$:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{yy}}{B}} = \sqrt{\frac{\frac{a^4}{12}}{a^2}} \quad (5.9)$$

$$\rightarrow i_{\min} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad (5.10)$$

5.3 Calcul d'un poteau (Méthode forfaitaire)

L'équilibre entre l'action appliquée N_u et la résistance de la section du poteau est traduite par :

$$N_u \leq B f_{bu} + A_s \frac{f_e}{\gamma_s} \quad (5.11)$$

$$\rightarrow N_u \leq B \frac{0,85 f_{c28}}{\gamma_b} + A_s \frac{f_e}{\gamma_s} \quad (5.12)$$

on peut remarquer que θ est pris égal à 1 ($\theta = 1$).

Pour plus de sécurité, sur tout le périmètre extérieur de la section du béton on élimine 1 cm de béton qui n'est pas pris en compte dans le calcul (voir figure 5.4). La formule précédente est également multipliée par un coefficient α .

On peut facilement constater que d'après la figure (5.4), on a pour une section rectangulaire :

$$B_r = (a - 0,02)(b - 0,02) \quad (m^2) \quad (5.13)$$

Pour une section circulaire, on a :

$$B_r = \pi \frac{(D - 0,02)^2}{4} \quad (m^2) \quad (5.14)$$

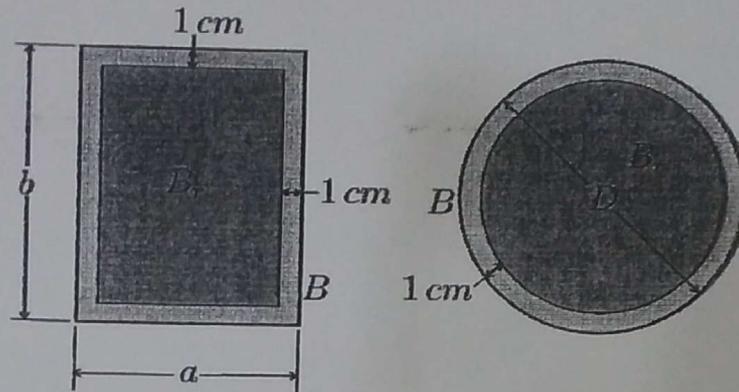


FIGURE 5.4 – Sections réduites pour le calcul

La vérification de la résistance de la section peut se faire, d'une façon forfaitaire, par la formule :

$$N_u \leq \alpha \left(B_r \frac{f_{c28}}{0,9\gamma_b} + A_s \frac{f_e}{\gamma_s} \right) \quad (5.15)$$

La résistance du béton $\frac{0,85f_{c28}}{\gamma_b}$ est remplacée par $\frac{f_{c28}}{0,9\gamma_b}$ pour tenir compte de la majoration de cette résistance parce que les charges sont appliquées habituellement après 90 jours.

Dans le cas où l'élanement $\lambda \leq 50$, on a :

$$\alpha = \frac{0,85}{1 + 0,2 \left(\frac{\lambda}{35} \right)^2} \quad (5.16)$$

Dans le cas où $50 \leq \lambda \leq 70$, on a :

$$\alpha = 0,6 \left(\frac{50}{\lambda} \right)^2 \quad (5.17)$$

Dans le cas où $\lambda > 70$, le risque de flambage est présent et la méthode forfaitaire ne peut pas être utilisée (on doit calculer la section en flexion composée).

Remarque :

- * Lorsque plus de la moitié de la charge est appliquée avant 90 jours, le coefficient α est à diviser par 1,1 (on multiplie par $\frac{\alpha}{1,1}$ au lieu de α);
- * Lorsque la majorité de la charge est appliquée avant 28 jours, on travaille avec f_{c28} au lieu de f_{cm} et le coefficient α est à diviser par 1,2 (on travaille avec f_{c28} et $\frac{\alpha}{1,2}$);
- * Le coefficient reducteur α tient compte du fait de négliger l'effet de second ordre qui est le flambage.

5.4 Calcul du ferrailage

5.4.1 Ferrailage longitudinal

Nous avons justifié que l'effort normal appliqué à la section d'un poteau doit satisfaire la condition suivante :

$$N_u \leq \alpha \left(B_r \frac{f_{c28}}{0,9\gamma_b} + A_s \frac{f_e}{\gamma_s} \right) \quad (5.18)$$

la section d'armatures minimale à disposer est donc :

$$A_s = \left(\frac{N_u}{\alpha} - \frac{B_r f_{c28}}{0,9\gamma_b} \right) \frac{\gamma_s}{f_e} \quad (5.19)$$

- Si $\lambda \leq 35$: A_s représente l'aire de toutes les armatures à dispenser sur tout le contour de la section ;
- Si $\lambda > 35$: A_s représente l'aire à disposer sur les deux cotés selon l'inertie la plus faible (grands cotés).

Le ferrailage minimal à disposer peut être calculé par :

$$A_{s\min} = \max \left[\frac{0,2B}{100}; 0,04u(4\% \text{ du périmètre}) \right] \quad (5.20)$$

où B est l'aire de la section du béton et u est le périmètre de la section en *cm*.

Le ferrailage maximal est défini selon le règlement par :

$$A_{s \max} = \frac{5B}{100} \quad (5.21)$$

Selon le règlement, l'espacement maximal à respecter pour les barres longitudinales est donné par :

$$e_{\max} = \min[a + 10; 40 \text{ cm}] \quad (5.22)$$

où a est le petit coté de la section en cm .

Remarques :

- * Pour les sections polygonales : il faut disposer au moins une barre dans chaque angle;
- * Pour les sections circulaires : il faut disposer au moins 6 barres. Elles sont à répartir d'une façon régulière.

5.4.2 Ferrailage Transversal

Les armatures transversales n'ont aucun rôle au niveau de la résistance. Le seul rôle qu'elles assurent est d'empêcher le flambement (perte de stabilité de forme) des armatures longitudinales. Ces armatures doivent respecter les exigences suivantes :

Diamètre : $\phi_t = 0,3\phi_l$ où ϕ_l est le diamètre des armatures longitudinales ;

L'espacement doit respecter la condition suivante :

$$e \leq \min[15\phi_t; 40 \text{ cm}; a + 10 \text{ cm}] \quad (5.23)$$

où a est le petit coté de la section en cm .

Au niveau des zones de recouvrement des aciers longitudinaux, il faut placer au moins trois armatures transversales.

5.5 Prédimensionnement d'un poteau (Calcul du coffrage)

5.5.1 Section rectangulaire

Pour une section rectangulaire de dimensions $(a \times b)$:

On a vu que pour appliquer la méthode forfaitaire, l'élançement λ doit respecter la condition : $0 < \lambda < 70$. Pour prédimensionner le coffrage, on prend habituellement $\lambda = 35$.

On sait que :

$$\lambda = \frac{L_f}{i_{\min}} = 2\sqrt{3} \frac{L_f}{a} \quad (5.24)$$

$$\rightarrow a = 2\sqrt{3} \frac{L_f}{\lambda} \quad (5.25)$$

On doit chercher la deuxième dimension b de telle sorte à avoir :

$$A_s > 0 \quad (5.26)$$

$$\rightarrow A_s = \left(\frac{N_u}{\alpha} - \frac{B_r f_{c28}}{0,9\gamma_b} \right) \frac{\gamma_s}{f_c} > 0 \quad \text{avec} \quad B_r = (a - 0,02)(b - 0,02) \quad (5.27)$$

$$\rightarrow B_r = (a - 0,02)(b - 0,02) < \frac{N_u 0,9\gamma_b}{\alpha f_{c28}} \quad (5.28)$$

$$\rightarrow (b - 0,02) < \frac{N_u 0,9\gamma_b}{\alpha f_{c28}(a - 0,02)} \quad (5.29)$$

$$\rightarrow b < \frac{N_u 0,9\gamma_b}{\alpha f_{c28}(a - 0,02)} + 0,02 \quad (5.30)$$

5.5.2 Section circulaire

On fixe l'élançement mécanique à $\lambda = 35$ ou une valeur inférieure.

Comme déjà démontré pour une section rectangulaire, en reprenant (5.28) on a :

$$B_r < \frac{N_u 0,9\gamma_b}{\alpha f_{c28}} \quad (5.31)$$

d'un autre côté, on a :

$$\lambda = \frac{L_f}{i_{\min}} = \frac{4L_f}{D} \quad (5.32)$$

On peut donc calculer le diamètre D de deux manières différentes :

1. A partir de (5.32), on a :

$$D_1 = \frac{4L_f}{\lambda} \quad (5.33)$$

2. On peut calculer la section réduite B_r par la formule (5.31), puis en utilisant l'expression d'une section réduite circulaire on a :

$$B_r = \frac{\pi(D_2 - 0,02)^2}{4} \rightarrow D_2 = \sqrt{\frac{4B_r}{\pi}} + 0,02 \quad (5.34)$$

En général, on adopte une valeur du diamètre D multiple de 5 cm et compris entre D_1 et D_2 ($D_1 \leq D \leq D_2$).

5.6 Exercices

• Exercice 1 :

On considère un poteau de section rectangulaire (30 cm × 40 cm) soumis à un effort normal centré $N_u = 2000$ kN.

On suppose que la longueur de flambement de ce poteau est $l_f = 3$ m. Les aciers à utiliser sont de nuance FeE500 et le béton a un $f_{cm} = 25$ MPa. On considère également que la majorité des charges sont appliquées après 90 jours.

Calculer les sections d'armatures longitudinales et transversales ainsi que leurs espacements ?

Proposer un schéma de ferrailage ?

• Solution 1 :

L'élançement mécanique du poteau est :

$$\lambda = 2\sqrt{3} \frac{L_f}{a} = 2\sqrt{3} \frac{3}{0,3} = 34,64 \quad (5.35)$$

on remarque que $\lambda < 50$. Dans ce cas, le coefficient de flambement α est calculé comme suit :

$$\alpha = \frac{0,85}{1 + 0,2 \left(\frac{\lambda}{35}\right)^2} = \frac{0,85}{1 + 0,2 \left(\frac{34,64}{35}\right)^2} = 0,71 \quad (5.36)$$

la section d'armatures longitudinales est :

$$A_s = \left(\frac{N_u}{\alpha} - \frac{B_r f_{c28}}{0,9\gamma_b} \right) \frac{\gamma_s}{f_e} = \left(\frac{2}{0,71} - \frac{0,28 \cdot 0,38 \cdot 25}{0,9 \cdot 1,5} \right) \frac{1,15}{500} \quad (5.37)$$

$$\rightarrow A_s = 0,001947 \text{ m}^2 = 19,47 \text{ cm}^2 \quad (5.38)$$

La section d'armatures minimales à disposer est donnée par :

$$A_{\min} = \max \left(\frac{0,2B}{100}; 0,04u \right) = \max \left(\frac{0,2 \cdot 30 \cdot 40}{100}; 0,04 \cdot 2 \cdot (30 + 40) \right) \quad (5.39)$$

$$\rightarrow A_{\min} = \max(2,4; 5,6) = 5,6 \text{ cm}^2 \quad (5.40)$$

la section maximale est :

$$A_{\max} = 0,05B = 0,05 \cdot 30 \cdot 40 = 60 \text{ cm}^2 \quad (5.41)$$

La section d'armatures à disposer est donc :

$$A_s = 19,47 \text{ cm}^2 \quad (5.42)$$

L'espacement maximal du ferrailage longitudinal est défini par :

$$e_{\max} = \min(a + 10 \text{ cm}; 40 \text{ cm}) = 40 \text{ cm} \quad (5.43)$$

Donc, on peut bien disposer 4 barres HA25 par exemple sur la section du poteau.

FIGURE 5.5 – Exercice 1 : Résultats de la calculatrice BA INGPONT

Le diamètre des armatures transversales est défini par :

$$\phi_t = 0,3\phi_l = 0,3 \cdot 25 = 7,5 \text{ mm} \quad (5.44)$$

on peut donc adopter $\phi_t = 8 \text{ mm}$.

L'espacement du ferrailage transversal est donné par :

$$e \leq \min(15\phi_t; 40 \text{ cm}; a + 10 \text{ cm}) = \min(37,5 \text{ cm}; 40 \text{ cm}; 40 \text{ cm}) = 37,5 \text{ cm} \quad (5.45)$$

on peut donc adopter un espacement $e = 30 \text{ cm}$ ou $e = 35 \text{ cm}$.

⇒ Exercice 2 :

Considérant un poteau d'un bâtiment de dimensions $(25 \text{ cm} \times 25 \text{ cm})$ et subissant un effort normal ultime de compression $N_u = 1,04 \text{ MN}$. Le poteau a une longueur géométrique de $L_0 = 3 \text{ m}$ et le chargement est appliqué après 90 jours de son exécution.

On a également :

béton : $f_{cm} = 25 \text{ MPa}$, acier HA : $f_e = 400 \text{ MPa}$.

Déterminer les armatures du poteau ?

⇒ Solution 2 :

On est sur le cas d'un bâtiment, la longueur de flambage est :

$$L_f = 0,7L_0 = 0,7 \cdot 3 = 2,1 \text{ m} \quad (5.46)$$

L'élançement mécanique du poteau est :

$$\lambda = 2\sqrt{3} \frac{L_f}{a} = 2\sqrt{3} \frac{2,1}{0,25} = 29,1 \quad (5.47)$$

on remarque que $\lambda < 50$. Dans ce cas, le coefficient de flambement α est calculé comme suit :

$$\alpha = \frac{0,85}{1 + 0,2 \left(\frac{\lambda}{35}\right)^2} = \frac{0,85}{1 + 0,2 \left(\frac{29,1}{35}\right)^2} = 0,747 \quad (5.48)$$

la section d'armatures longitudinales est :

$$A_s = \left(\frac{N_n}{\alpha} - \frac{E_s f_{cm}}{0,9\gamma_s} \right) \frac{\gamma_s}{f_e} = \left(\frac{1,04}{0,747} - \frac{0,23^2 \cdot 25}{0,9 \cdot 1,5} \right) \frac{1,15}{400} \quad (5.49)$$

$$\rightarrow A_s = 0,001186 \text{ m}^2 = 11,86 \text{ cm}^2 \quad (5.50)$$

La section d'armatures minimales à disposer est donnée par :

$$A_{\min} = \max \left(\frac{0,2B}{100}; 0,04a \right) = \max \left(\frac{0,2 \cdot 25^2}{100}; 0,04 \cdot 2 \cdot (15 + 15) \right) \quad (5.51)$$

$$\rightarrow A_{\min} = \max(1,25; 2,4) = 2,4 \text{ cm}^2 \quad (5.52)$$

la section maximale est :

$$A_{\max} = 0,05B = 0,05 \cdot 25^2 = 31,25 \text{ cm}^2 \quad (5.53)$$

La section d'armatures à disposer est donc :

$$A_s = 11,86 \text{ cm}^2 \quad (5.54)$$

L'espacement maximal du ferrailage longitudinal est défini par :

$$e_{\max} = \min(a + 10 \text{ cm}; 40 \text{ cm}) = \min(25 + 10; 40 \text{ cm}) = 35 \text{ cm} \quad (5.55)$$

Donc, on peut bien disposer 4 barres HA20 sur la section du poteau (section réelle de $12,56 \text{ cm}^2$).

FIGURE 5.6 – Exercice 2 : Résultats de la calcul BA INGPONT

⇒ Exercice 3 :

Considérant un poteau circulaire de diamètre $D = 35 \text{ cm}$ et subissant un effort normal ultime de compression $N_u = 900 \text{ kN}$. Le poteau a une longueur de flambage de $L_f = 4 \text{ m}$ et le chargement est appliqué après 50 jours de son exécution.

On a également :
béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$, acier HA : $f_e = 400 \text{ MPa}$.

Déterminer les armatures du poteau ?

⇒ Solution 3 :

L'élançement mécanique du poteau est :

$$\lambda = \frac{4L_f}{D} = \frac{4.4}{0,35} = 45,714 \quad (5.56)$$

on remarque que $\lambda < 50$. Dans ce cas, le coefficient de flambement α est calculé comme suit :

$$\alpha = \frac{0,85}{1 + 0,2 \left(\frac{\lambda}{35}\right)^2} = \frac{0,85}{1 + 0,2 \left(\frac{45,714}{35}\right)^2} = 0,6338 \quad (5.57)$$

Le chargement est appliqué à 50 jours, on doit donc faire le calcul avec $\frac{\sigma}{1,3}$ au lieu de α .

La section d'armatures longitudinales est :

$$A_s = \left(\frac{1,1N_u}{\alpha} - \frac{B_r f_{c28}}{0,9\gamma_b} \right) \frac{\gamma_s}{f_e} = \left(\frac{1,1 \cdot 0,9}{0,6338} - \frac{\pi \cdot 0,33^2 \cdot 0,25 \cdot 25}{0,9 \cdot 1,5} \right) \frac{1,15}{400} \quad (5.58)$$

$$\rightarrow A_s = -0,000063 \text{ m}^2 = -0,63 \text{ cm}^2 \quad (5.59)$$

La section d'armatures minimales à disposer est donnée par :

$$A_{\min} = \max \left(\frac{0,2B}{100}; 0,04u \right) = \max \left(\frac{0,2 \cdot \pi \cdot 35^2 \cdot 0,25}{100}; 0,04 \cdot \pi \cdot 35 \right) \quad (5.60)$$

$$\rightarrow A_{\min} = \max(1,92; 4,4) = 4,4 \text{ cm}^2 \quad (5.61)$$

la section maximale est :

$$A_{\max} = 0,05B = 0,05 \cdot \pi \cdot 35^2 \cdot 0,25 = 48,11 \text{ cm}^2 \quad (5.62)$$

La section d'armatures à disposer est donc :

$$A_s = 4,4 \text{ cm}^2 \quad (5.63)$$

L'espacement maximal du ferrailage longitudinal est défini par :

$$e_{\max} = \min(a + 10 \text{ cm}; 40 \text{ cm}) = \min(35 + 10; 40 \text{ cm}) = 40 \text{ cm} \quad (5.64)$$

Rappelons que pour une section circulaire, il faut disposer au moins 6 armatures. Nous pouvons proposer dans notre cas 6HA10 (section réelle de $4,71 \text{ cm}^2$).

FIGURE 5.7 – Exercice 3 : Résultats de la calculatrice BA INGPONT

⇒ Exercice 4 :

Un poteau fait parti de l'ossature d'un bâtiment à étages multiples pour lequel la distance entre planchers est $L_0 = 3 \text{ m}$. Ce poteau de section rectangulaire supporte des charges permanentes $G = 930 \text{ kN}$ et des charges d'exploitation $Q = 163 \text{ kN}$

On a également :

béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$, acier HA : $f_e = 400 \text{ MPa}$.

On a plus de la moitié de la charge qui est appliquée après 90 jours et l'enrobage est $c = 3 \text{ cm}$.

L'élançement mécanique visé est voisin de $\lambda = 30$.

1. Déterminer les dimensions du poteau ?
2. Calculer le ferrailage complet du poteau ?
3. Tracer le schéma de ferrailage du poteau ?

⇒ Solution 4 :

1. On est sur le cas d'un bâtiment et la longueur de flambage est donnée par :

$$L_f = 0,7L_0 = 0,7 \cdot 3 = 2,1 \text{ m} \quad (5.65)$$

le petit coté de la section rectangulaire est calculé par :

$$a = 2\sqrt{3} \frac{L_f}{\lambda} = 2\sqrt{3} \frac{2,1}{30} = 0,2425 \text{ m} = 24,25 \text{ cm} \quad (5.66)$$

on adopte la valeur :

$$a = 0,25 \text{ m} = 25 \text{ cm} \quad (5.67)$$

l'effort normal ultime est :

$$N_u = 1,35G + 1,5Q = 1,35 \cdot 0,93 + 1,5 \cdot 0,163 = 1,5 \text{ MN} \quad (5.68)$$

calcul du coefficient de flambement α :

$$\alpha = \frac{0,85}{1 + 0,2 \left(\frac{\lambda}{35}\right)^2} = \frac{0,85}{1 + 0,2 \left(\frac{30}{35}\right)^2} = 0,7411 \quad (5.69)$$

dans la suite, on calcule le grand coté de la section rectangulaire :

$$b = \frac{0,9\gamma_b N_u}{\alpha f_{c28} (a + 0,02)} + 0,02 = \frac{0,9 \cdot 1,5 \cdot 1,5}{0,7411 \cdot 25 \cdot 0,23} + 0,02 = 0,492 \text{ m} = 49,2 \text{ cm} \quad (5.70)$$

on adopte la valeur :

$$b = 0,45 \text{ m} = 45 \text{ cm} \quad (5.71)$$

En fin de compte, on peut adopter la section rectangulaire de dimensions (25 cm × 45 cm).

2. L'élançement mécanique du poteau est :

$$\lambda = 2\sqrt{3} \frac{L_f}{a} = 2\sqrt{3} \frac{2,1}{0,25} = 29,099 \quad (5.72)$$

on remarque que $\lambda < 50$. Dans ce cas, le coefficient de flambement α est calculé comme suit :

$$\alpha = \frac{0,85}{1 + 0,2 \left(\frac{\lambda}{35}\right)^2} = \frac{0,85}{1 + 0,2 \left(\frac{29,099}{35}\right)^2} = 0,7468 \quad (5.73)$$

la section d'armatures longitudinales est :

$$A_s = \left(\frac{N_u}{\alpha} - \frac{B_r f_{c28}}{0,9\gamma_b} \right) \frac{\gamma_s}{f_e} = \left(\frac{1,5}{0,7468} - \frac{0,23 \cdot 0,43 \cdot 25}{0,9 \cdot 1,5} \right) \frac{1,15}{400} \quad (5.74)$$

$$\rightarrow A_s = 0,000509 \text{ m}^2 = 5,09 \text{ cm}^2 \quad (5.75)$$

La section d'armatures minimales à disposer est donnée par :

$$A_{\min} = \max \left(\frac{0,2B}{100}; 0,04u \right) = \max \left(\frac{0,2 \cdot 25 \cdot 45}{100}; 0,04 \cdot 2 \cdot 70 \right) \quad (5.76)$$

$$\rightarrow A_{\min} = \max(2,25; 5,6) = 5,6 \text{ cm}^2 \quad (5.77)$$

la section maximale est :

$$A_{\max} = 0,05B = 0,05 \cdot 25 \cdot 45 = 56,25 \text{ cm}^2 \quad (5.78)$$

La section d'armatures à disposer est donc :

$$A_s = 5,6 \text{ cm}^2 \quad (5.79)$$

Calculatrice BA (INGPONT) - Compression simple

Préférences Note à propos

Général Compression Simple

Charges (kN)

ELU: Nmax = 1500

ELS: Nmax = 0.00

ELA: Nmax = 0.00

Date d'application de plus de 50% de la charge

Après 90 jours

Après 28 jours

Avant 28 jours

l_{fy} = 2.10 m

l_{fz} = 2.10 m

Résultats

A_s = 5.60 cm²

Taux de ferrillage: ρ = 0.50 %

Taux de ferrillage min: ρ_{min} = 0.50 %

Taux de ferrillage max: ρ_{max} = 5.00 %

Dispositions Statiques

Dimensions (cm)

b = 25 Fixe

h = 45 Fixe

d₁ = 3

Armatures à disposer sur tout le contour de la section !!!

Calcul Note

Compression Simple | Préjudiciable | fc28 = 25.0 MPa | Fe = 400 MPa (Haute Adhérence)

FIGURE 5.8 – Exercice 4 : Résultats de la calculatrice BA INGPONT

L'espacement maximal du ferrailage longitudinal est défini par :

$$e_{\max} = \min(a + 10 \text{ cm}; 40 \text{ cm}) = \min(25 + 10 \text{ cm}; 40 \text{ cm}) = 35 \text{ cm} \quad (5.80)$$

On a un enrobage $c = 3 \text{ cm}$, on doit donc disposer au moins 3 barres sur le grand coté de la section.

On peut disposer 6 barres HA12 sur la section du poteau (section réelle : $6,79 \text{ cm}^2$).

Le diamètre des armatures transversales est défini par :

$$\phi_2 = 0,3\phi_1 = 0,3 \cdot 14 = 4,2 \text{ mm} \quad (5.81)$$

on peut donc adopter $\phi_2 = 6 \text{ mm}$.

L'espacement du ferrailage transversal est donné par :

$$e \leq \min(15\phi_1; 40 \text{ cm}; a + 10 \text{ cm}) = \min(21 \text{ cm}; 40 \text{ cm}; 35 \text{ cm}) = 21 \text{ cm} \quad (5.82)$$

on peut donc adopter un espacement $e = 20 \text{ cm}$.

3. On propose le schéma de ferrailage présenté dans la figure (5.9).

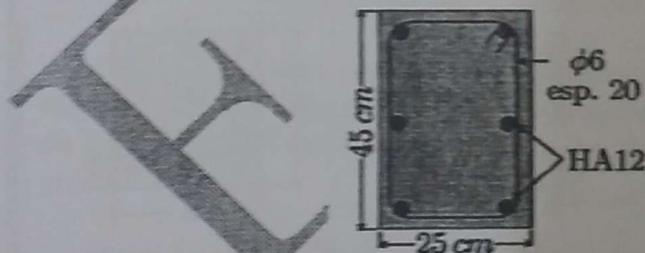


FIGURE 5.9 – Schéma de ferrailage pour l'exercice 4



Chapitre 6

Calcul des sections rectangulaires en flexion simple

6.1 Introduction

Une poutre est sollicitée en flexion simple lorsqu'elle est soumise à l'action de forces concentrées ou réparties disposées perpendiculairement à la fibre moyenne de la poutre.

La réduction de ces forces au centre de gravité d'une section se décompose en un **moment fléchissant** M et un **effort tranchant** V . Dans le cas où la section est sollicitée par un moment pur, on parle d'une flexion pure.

Dans ce chapitre, on traite le dimensionnement d'une section sollicitée par des contraintes normales dues à un moment fléchissant seul. Le traitement de l'effort tranchant est prévu dans un chapitre séparé dans la suite de ce cours.

Pour le dimensionnement pratique d'un élément en béton armé d'une structure, le calcul est mené d'abord à l'ELU et est vérifié dans la suite à l'ELS. Si la vérification n'est pas satisfaite à l'ELS, un redimensionnement à l'ELS doit être mené.

Une deuxième méthode consiste à réaliser les calculs pour une section donnée, à l'ELU et l'ELS et d'adopter en fin de compte la section d'armatures la plus grande.

Signalons, pour le dimensionnement, l'existence de logiciels de calcul au-

tomatique qui sont souvent des logiciels commercialisés mais aussi des feuilles Excel pour les débrouillards. Ces logiciels facilitent bien sûr la résolution du problème de dimensionnement économique comme on l'entend ici sans toutefois dissiper toutes les zones d'ombre. L'exploitant, doit donc être capable d'interpréter les résultats et savoir les exploiter de manière utile. Pour atteindre cet objectif, il n'y a pas mieux que de commencer par pratiquer le calcul manuel en s'aidant d'organigrammes précis.

6.2 Calcul à l'état limite ultime de résistance - ELUR

6.2.1 Récapitulatif des résultats obtenus

La règle des trois pivots et les diagrammes de calcul du béton et de l'acier à l'ELUR permettent d'écrire :

$$F_b = \psi B Y_u f_{bu} \quad (6.1)$$

$$F_s = A_s \sigma_s \quad (6.2)$$

$$Z_u = d - \theta Y_u \quad (6.3)$$

B étant la largeur de la poutre calculée.

Les données relatives à ψ et θ pour les différents cas traités sont présentées dans le tableau (6.1).

	Pivot A		Pivot B		Pivot C
α_u	$0 \leq \alpha_u \leq \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \leq \alpha_u \leq \frac{7}{27}$	$\frac{7}{27} \leq \alpha_u \leq \alpha_e$	$\alpha_e \leq \alpha_u \leq \frac{H}{d}$	$\alpha_u > \frac{H}{d}$
ϵ_b	$\epsilon_b \leq 2\text{‰}$	$2\text{‰} \leq \epsilon_b \leq 3,5\text{‰}$	$\epsilon_b = 3,5\text{‰}$	$\epsilon_b = 3,5\text{‰}$	Flexion comp.
ψ	$\frac{15\alpha_u - 40\alpha_u^2}{3(1-\alpha_u)^2}$	$\frac{16\alpha_u - 1}{15\alpha_u}$	$\frac{17}{21}$	$\frac{17}{21}$	
θ	$\frac{4-9\alpha_u}{12-32\alpha_u}$	$\frac{171\alpha_u^2 - 22\alpha_u + 1}{320\alpha_u^2 - 20\alpha_u}$	$\frac{99}{238}$	$\frac{99}{238}$	
ϵ_s	10‰	10‰	$\epsilon_e \leq \epsilon_s \leq 10\text{‰}$	$\epsilon_s \leq \epsilon_e$	
σ_s	f_{su}	f_{su}	f_{su}	$\sigma_s < f_{su}$	

TABLE 6.1 - Récapitulation des données pour une section en flexion simple

On note que lorsque le pivot est en A, on a :

$$\epsilon_b = 10 \frac{\alpha_u}{1 - \alpha_u} \quad (6.4)$$

et lorsqu'il est en B, on a :

$$\epsilon_s = 3,5 \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} \quad (6.5)$$

6.2.2 Équations d'équilibre

En considérant qu'une section est chargée par un moment ultime M_u et en considérant qu'elle est en équilibre sous ce moment, on a les deux équations d'équilibre suivantes qui sont satisfaites :

* Équilibre des forces :

$$F_b - F_s = 0 \quad \rightarrow \quad \psi Y_u B f_{bu} = A_s \sigma_s \quad (6.6)$$

* Équilibre des moments :

$$M_u = F_b Z_u = \psi Y_u B f_{bu} (d - \theta Y_u) \quad (6.7)$$

Suivant qu'on est sur le pivot A ou sur le pivot B, la compatibilité des déformations nous permet d'avoir :

$$\begin{cases} \epsilon_s = 10 \text{‰} & \text{et} & \epsilon_b = \frac{10\alpha_u}{1-\alpha_u} & \text{(pivot A)} \\ \text{ou} & & & \\ \epsilon_s = 3,5 \frac{1-\alpha_u}{\alpha_u} & \text{et} & \epsilon_b = 3,5 \text{‰} & \text{(pivot B)} \end{cases} \quad (6.8)$$

Pour une bonne utilisation des armatures, le règlement exige que la contrainte développée respecte la condition suivante :

$$\epsilon_s \geq \epsilon_e \quad (\sigma_s = f_{su}) \quad (6.9)$$

Le problème posé consiste en la détermination des deux inconnues Y_u et A_s ou bien α_u et A_s . Cela est possible en utilisant les équations d'équilibre (6.6) et (6.7).

6.2.3 Section sans armatures comprimées

On définit le moment réduit par :

$$\mu = \frac{M_u}{Bd^2 f_{bu}} \quad (6.10)$$

Dans cette équation, $Bd^2 f_{bu}$ représente deux fois le moment maximal que peut reprendre le béton seul. (En appliquant le diagramme rectangulaire

simplifié à toute la hauteur d , le moment repris par la section de béton est $\frac{1}{2}Bd^2f_{bu}$.

L'application de l'équation (6.7) entraîne :

$$M_u = \psi\alpha_u B d^2 f_{bu} (1 - \alpha_u \theta) \quad (6.11)$$

$$\rightarrow \mu = \psi\alpha_u (1 - \alpha_u \theta) \quad (6.12)$$

où α_u est la seule inconnue du problème.

6.2.3.1 Dimensionnement des armatures

En fonction de la valeur de α_u , la résolution du problème est effectuée par domaine.

• Cas 1 : $\frac{7}{27} \approx 0,259 \leq \alpha_u \leq \alpha_e$ - Pivot B :

Le diagramme rectangulaire simplifié peut être utilisé avec $\psi = \frac{17}{21} \approx 0,8$ et $\theta = \frac{99}{238} \approx 0,4$.

L'équation (6.12) devient :

$$\frac{33}{98}\alpha_u^2 - \frac{17}{21}\alpha_u + \mu = 0 \quad (6.13)$$

$$\text{ou } 0,32\alpha_u^2 - 0,8\alpha_u + \mu = 0 \quad (6.14)$$

En dérivant l'équation par rapport à α_u , on trouve la dérivée de μ par rapport à α_u :

$$\frac{d\mu}{d\alpha_u} = -\frac{33}{49}\alpha_u + \frac{17}{21} \quad (6.15)$$

$$= -0,64\alpha_u + 0,8 \quad (6.16)$$

$$= 0,64(1,25 - \alpha_u) \quad (6.17)$$

or d'après l'équation (3.6), on a :

$$\alpha_e = \frac{3,5}{\epsilon_e + 3,5} < 1 \quad \rightarrow \quad \alpha_u < 1 \quad (6.18)$$

$$\rightarrow 1,25 - \alpha_u > 0 \quad (6.19)$$

$$\rightarrow \frac{d\mu}{d\alpha_u} > 0 \quad (6.20)$$

Le moment réduit μ est donc une fonction croissante de α_u , d'où :

$$\frac{7}{27} \leq \alpha_u \leq \alpha_e \quad \rightarrow \quad \mu\left(\frac{7}{27}\right) \leq \mu \leq \mu_e = 0,8\alpha_e - 0,32\alpha_e^2 \quad (6.21)$$

$$\rightarrow \quad 0,1859 \leq \mu \leq \mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) \quad (6.22)$$

Le tableau (6.2) donne les valeurs de α_e et μ_e en fonction de la nuance de l'acier et de γ_s .

	$\gamma_s = 1,15$		$\gamma_s = 1$	
	α_e	μ_e	α_e	μ_e
FeE215	0,789	0,429	0,765	0,422
FeE235	0,774	0,425	0,749	0,418
FeE400	0,668	0,391	0,636	0,379
FeE500	0,617	0,371	0,583	0,358

TABLE 6.2 - Valeurs pratiques de α_e et μ_e

En peut en déduire à partir de ces données que :

$$\Delta = \frac{289}{441} - \frac{66}{49}\mu \quad (6.23)$$

$$\approx 0,66(1 - 2\mu) > 0 \quad (6.24)$$

L'équation (6.13) admet donc deux racines qui sont :

$$\begin{cases} \alpha_{u1} = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \\ \alpha_{u2} = 1,25(1 + \sqrt{1 - 2\mu}) \end{cases} \quad (6.25)$$

la solution α_{u2} est à écarter car $\alpha_{u2} \notin \left[\frac{7}{27}; \alpha_e\right]$.

Donc la seule racine qui a un sens physique est :

$$\alpha_u = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \quad (6.26)$$

L'équation d'équilibre des forces (6.6) permet maintenant d'écrire :

$$A_s = \frac{\psi Y_u B f_{bu}}{\sigma_s} = \frac{0,8\alpha_u B d f_{bu}}{\sigma_s} \quad (6.27)$$

dans le domaine en cours de traitement, on a : $\sigma_s = f_{su}$, d'où :

$$A_s = A_{su} = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.28)$$

avec $\beta_u = 0,8\alpha_u$.

• Cas 2 : $\frac{1}{6} \approx 0,167 \leq \alpha_u \leq \frac{7}{27} \approx 0,259$ - Pivot A :

On a les expressions de ψ et θ comme suit :

$$\psi = \frac{16\alpha_u - 1}{15\alpha_u} \quad (6.29)$$

$$\theta = \frac{171\alpha_u^2 - 22\alpha_u + 1}{320\alpha_u^2 - 20\alpha_u} \quad (6.30)$$

En insérant ces expressions dans l'équation (6.12) du moment réduit, on trouve :

$$\mu = \psi\alpha_u(1 - \alpha_u\theta) \quad (6.31)$$

$$= \frac{16\alpha_u - 1}{15\alpha_u} \alpha_u \left(1 - \alpha_u \frac{171\alpha_u^2 - 22\alpha_u + 1}{320\alpha_u^2 - 20\alpha_u} \right) \quad (6.32)$$

$$= \frac{16\alpha_u - 1}{15} \frac{320\alpha_u - 20 - 171\alpha_u + 22\alpha_u - 1}{320\alpha_u - 20} \quad (6.33)$$

$$= \frac{16\alpha_u - 1}{15} \frac{-171\alpha_u^2 + 342\alpha_u - 21}{20(16\alpha_u - 1)} \quad (6.34)$$

$$= \frac{1}{300} (-171\alpha_u^2 + 342\alpha_u - 21) \quad (6.35)$$

$$\rightarrow \mu = \frac{1}{100} (-57\alpha_u^2 + 114\alpha_u - 7) \quad (6.36)$$

En dérivant μ par rapport à α_u , on obtient :

$$\frac{d\mu}{d\alpha_u} = \frac{1}{100} (-114\alpha_u + 114) \quad (6.37)$$

$$\rightarrow \frac{d\mu}{d\alpha_u} = \frac{57}{50} (1 - \alpha_u) \quad (6.38)$$

En regardant les valeurs courantes de α_u dans le tableau (6.2), on constate que :

$$\frac{d\mu}{d\alpha_u} > 0 \quad (6.39)$$

on en déduit que :

$$\frac{1}{6} \leq \alpha_u \leq \frac{7}{27} \quad \rightarrow \quad \mu\left(\frac{1}{6}\right) \leq \mu \leq \mu\left(\frac{7}{27}\right) \quad (6.40)$$

$$\rightarrow 0,1042 \leq \mu \leq 0,1872 \quad (6.41)$$

La résolution de l'équation (6.36) conduit à la racine utile :

$$\alpha_u = 1 - \sqrt{\frac{50}{57}(1 - 2\mu)} \approx 1 - 0,9366\sqrt{1 - 2\mu} \quad (6.42)$$

L'équation d'équilibre des forces (6.6) nous donne :

$$A_s = \frac{\psi Y_u B f_{bu}}{\sigma_s} = \frac{\psi \alpha_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.43)$$

en injectant la valeur de ψ , on trouve :

$$A_s = \frac{\frac{16\alpha_u - 1}{15\alpha_u} \alpha_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.44)$$

$$\rightarrow A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.45)$$

avec : $\beta_u = \frac{16\alpha_u - 1}{15}$.

❖ Cas 3 : $0 \leq \alpha_u \leq \frac{1}{6} \approx 0,167$ - Pivot A :

On a les expressions de ψ et θ comme suit :

$$\psi = \frac{15\alpha_u - 40\alpha_u^2}{3(1 - \alpha_u)^2} \quad (6.46)$$

$$\theta = \frac{4 - 9\alpha_u}{12 - 32\alpha_u} \quad (6.47)$$

En insérant ces expressions dans l'équation (6.12) du moment réduit, on trouve :

$$\mu = \psi \alpha_u (1 - \alpha_u \theta) \quad (6.48)$$

$$= \frac{15\alpha_u - 40\alpha_u^2}{3(1 - \alpha_u)^2} \alpha_u \left(1 - \alpha_u \frac{4 - 9\alpha_u}{12 - 32\alpha_u} \right) \quad (6.49)$$

$$= \frac{15\alpha_u^2 - 40\alpha_u^3}{3 - 6\alpha_u + 3\alpha_u^2} \cdot \frac{12 - 32\alpha_u - 4\alpha_u + 9\alpha_u^2}{12 - 32\alpha_u} \quad (6.50)$$

$$= \frac{5\alpha_u^2(3 - 8\alpha_u)}{3 - 6\alpha_u + 3\alpha_u^2} \cdot \frac{12 - 36\alpha_u + 9\alpha_u^2}{4(3 - 8\alpha_u)} \quad (6.51)$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{9\alpha_u^4 - 36\alpha_u^3 + 12\alpha_u^2}{3\alpha_u^2 - 6\alpha_u + 3} \quad (6.52)$$

$$(6.53)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\mu_2} \leq \frac{0,6885 B f_{c28}}{\theta \gamma_b M_u} \cdot H^2 \leq \frac{1}{\mu_1} \quad (6.68)$$

on pose $\varphi = \sqrt{\frac{M_u}{B f_{c28}}}$, d'où :

$$\frac{1}{\mu_2} \leq \frac{0,6885}{\theta \gamma_b \varphi^2} \cdot H^2 \leq \frac{1}{\mu_1} \quad (6.69)$$

$$\rightarrow \frac{\theta \gamma_b \varphi^2}{0,6885 \mu_2} \leq H^2 \leq \frac{\theta \gamma_b \varphi^2}{0,6885 \mu_1} \quad (6.70)$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{\theta \gamma_b}{0,6885} \frac{\varphi}{\sqrt{\mu_2}}} \leq H \leq \sqrt{\frac{\theta \gamma_b}{0,6885} \frac{\varphi}{\sqrt{\mu_1}}} \quad (6.71)$$

en prenant $\gamma_b = 1,5$ pour le cas des combinaisons fondamentales et $\theta = 1$, on trouve :

$$\frac{1,476 \varphi}{\sqrt{\mu_2}} \leq H \leq \frac{1,476 \varphi}{\sqrt{\mu_1}} \quad (6.72)$$

D'où le tableau suivant de prédimensionnement du béton :

	FeE400	FeE500
Pivot B avec aciers comprimés	$H \in [1,829 \varphi; 2,360 \varphi]$	$H \in [1,877 \varphi; 2,423 \varphi]$
Pivot B sans aciers comprimés	$H \in [2,360 \varphi; 3,423 \varphi]$	$H \in [2,423 \varphi; 3,423 \varphi]$
Pivot A : $\mu > 0,1042$	$H \in [3,423 \varphi; 4,572 \varphi]$	$H \in [3,423 \varphi; 4,571 \varphi]$

TABLE 6.3 – Tableau de prédimensionnement du béton

6.2.4 Section avec armatures comprimées

Ce cas, correspondant au pivot en B, n'est envisagé que lorsque :

$$\mu_e \leq \mu \leq 0,472 \quad (6.73)$$

le béton est insuffisant dans ce cas.

On pose dans ce cas :

$$\delta' = \frac{d'}{d} \quad (6.74)$$

avec d' représente l'enrobage des armatures comprimées (voir figure 6.1).

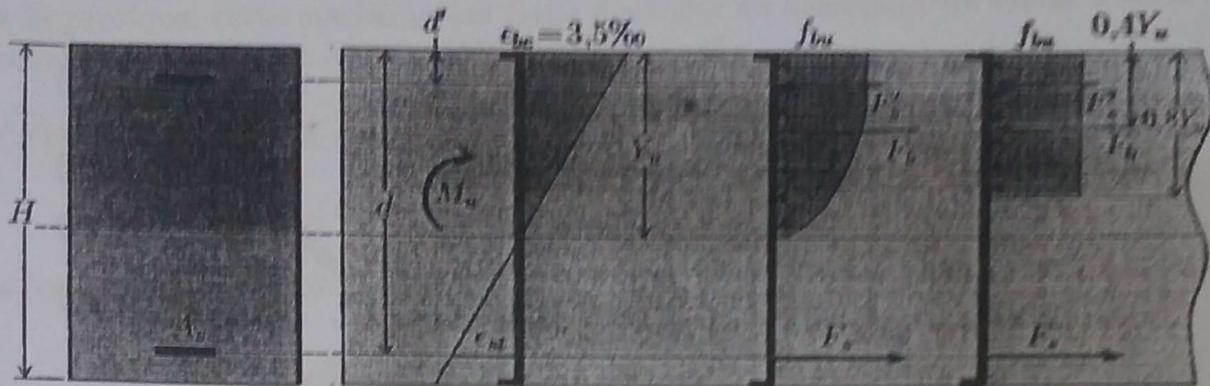


FIGURE 6.1 - Section avec armatures comprimées - pivot B

6.2.4.1 Équations d'équilibre

L'équation d'équilibre des forces est donnée par :

$$F_b + F'_s = F_s \quad \rightarrow \quad 0,8Y_u B f_{bu} + A'_s \sigma'_s = A_s \sigma_s \quad (6.75)$$

L'équation des moments est :

$$M_u = 0,8Y_u B f_{bu} (d - 0,4Y_u) + A'_s \sigma'_s (d - d') \quad (6.76)$$

La compatibilité des déformations est traduite par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \epsilon_{bc} = 3,5\text{‰} \\ \epsilon_s = 3,5 \frac{1-\alpha_u}{\alpha_u} \\ \epsilon'_s = 3,5 \frac{\alpha_u - d'}{\alpha_u} \end{cases} \quad (6.77)$$

L'utilisation économique des aciers impose de respecter :

$$\begin{cases} \epsilon_s \geq \epsilon_e \\ \epsilon'_s \geq \epsilon_e \end{cases} \quad (6.78)$$

on a :

$$\epsilon_s \geq \epsilon_e \quad \rightarrow \quad \frac{7(1-\alpha_u)}{2\alpha_u} \geq \epsilon_e \quad (6.79)$$

$$\rightarrow \quad 7 - 7\alpha_u \geq 2\alpha_u \epsilon_e \quad (6.80)$$

$$\rightarrow \quad 7 \geq (7 + 2\epsilon_e)\alpha_u \quad (6.81)$$

$$\rightarrow \quad \alpha_u \leq \frac{7}{7 + 2\epsilon_e} = \alpha_e \quad (6.82)$$

et on a également :

$$\epsilon'_s \geq \epsilon_e \rightarrow \frac{7(\alpha_u - \delta')}{2\alpha_u} \geq \epsilon_e \quad (6.83)$$

$$\rightarrow 7\alpha_u - 7\delta' \geq 2\alpha_u \epsilon_e \quad (6.84)$$

$$\rightarrow (7 - 2\epsilon_e)\alpha_u \geq 7\delta' \quad (6.85)$$

$$\rightarrow \delta' \leq \frac{7 - 2\epsilon_e}{7} \alpha_u \quad (6.86)$$

on a démontré que :

$$\alpha_u \leq \frac{7}{7 + 2\epsilon_e} \rightarrow \delta' \leq \frac{7 - 2\epsilon_e}{7} \frac{7}{7 + 2\epsilon_e} \quad (6.87)$$

$$\rightarrow \delta' \leq \frac{7 - 2\epsilon_e}{7 + 2\epsilon_e} \quad (6.88)$$

la condition d'utilisation économique des aciers implique donc la vérification de :

$$\begin{cases} \alpha_u \leq \alpha_e = \frac{7}{7 + 2\epsilon_e} \\ \delta' \leq \frac{7 - 2\epsilon_e}{7 + 2\epsilon_e} \end{cases} \quad (6.89)$$

Le règlement BAEL recommande de respecter la condition suivante :

$$A'_s \sigma'_s (d - d') \leq 0,4 M_u \quad (6.90)$$

ça veut dire que les armatures comprimées ne doivent pas reprendre plus de 40% du moment ultime M_u .

6.2.4.2 Méthode de calcul

Le respect des équations d'équilibre entraîne plusieurs valeurs possibles des sections d'armatures A_s et A'_s selon la valeur de Y_u (ou α_u). La valeur de α_u couramment utilisée et qui conduit à une section totale d'armatures $A_s + A'_s$ très proche du minimum est : $\alpha_u = \alpha_e$.

Dans le cas où la même nuance d'armatures est utilisée et en respectant la condition d'utilisation économique des armatures, on a :

$$\sigma_s = \sigma'_s = f_{su} \quad (6.91)$$

La condition suivante reste toujours à vérifier :

$$\delta' \leq \frac{7 - 2\epsilon_e}{7 + 2\epsilon_e} \quad (6.92)$$

dans la pratique, cette condition est facile à vérifier en effectuant un choix convenable de l'enrobage d'armatures comprimées d' .

Le moment réduit est exprimé par :

$$\mu = \frac{M_u}{Bd^2 f_{bu}} = \psi \alpha_u (1 - \alpha_u \theta) \quad (6.93)$$

dans le cas du pivot B on a : $\psi = 0,8$ et $\theta = 0,4$. D'où :

$$\mu = 0,8 \alpha_u (1 - 0,4 \alpha_u) \quad (6.94)$$

dans notre cas, on a : $\alpha_u = \alpha_e$. on obtient donc :

$$\mu = \mu_e = 0,8 \alpha_e (1 - 0,4 \alpha_e) \quad (6.95)$$

D'un autre côté, l'équation d'équilibre des moments (6.76) devient :

$$M_u = 0,8 \alpha_e B d^2 f_{bu} (1 - 0,4 \alpha_e) + A'_s f_{su} (d - d') \quad (6.96)$$

$$(6.95) \text{ et } (6.96) \rightarrow M_u = \mu_e B d^2 f_{bu} + A'_s f_{su} (d - d') \quad (6.97)$$

on a pour le moment réduit :

$$\mu = \frac{M_u}{Bd^2 f_{bu}} \rightarrow M_u = \mu B d^2 f_{bu} \quad (6.98)$$

$$(6.97) \text{ et } (6.98) \rightarrow \mu_e B d^2 f_{bu} + A'_s f_{su} (d - d') = \mu B d^2 f_{bu} \quad (6.99)$$

$$\rightarrow A'_s f_{su} (d - d') = (\mu - \mu_e) B d^2 f_{bu} \quad (6.100)$$

$$\rightarrow A'_s = \frac{(\mu - \mu_e) B d^2 f_{bu}}{f_{su} (d - d')} \quad (6.101)$$

$$(6.75) \rightarrow A_s = A'_s + \frac{0,8 \alpha_e B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.102)$$

sachant que dans ce cas on a : $\sigma_s = \sigma'_s = f_{su}$ et $\alpha_u = \alpha_e$.

Remarques :

* On a intérêt à choisir δ' le plus petit possible mais avec un enrobage suffisant. En général, la valeur $\delta' = 0.11$ convient.

* La condition $\delta' \leq \frac{7-2\alpha_e}{7+2\alpha_e}$ correspond à $\delta' \leq 0.33$ pour FeE400 et $\delta' \leq 0.23$ pour FeE500. Cette condition est donc bien vérifiée pour la valeur particulière $\delta' = 0.11$.

6.3 Récapitulatif du calcul d'une section rectangulaire en flexion simple à l'ELUR

On détermine le moment réduit μ par la formule :

$$\mu = \frac{M_u}{Bd^2 f_{bu}} \quad (6.103)$$

avec :

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{cm}}{\theta \gamma_b} \quad (6.104)$$

on détermine après la valeur particulière du moment réduit correspondant à la limite d'élasticité de l'acier par la formule :

$$\mu_e = 0,8 \alpha_e (1 - 0,4 \alpha_e) \quad (6.105)$$

où on a :

$$\alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} \quad \text{et} \quad \epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} \quad (6.106)$$

Selon la valeur du moment réduit μ trouvée, on calcule les sections d'armatures selon les cas suivants :

* Si $0 \leq \mu \leq 0,1042$: (pivot A)

$$A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.107)$$

avec :

$$\beta_u = \frac{15\alpha_u^2 - 40\alpha_u^3}{3(1 - \alpha_u)^2} \quad (6.108)$$

où α_u est la solution appartenant à l'intervalle $[0; 0,167]$ de l'équation :

$$15\alpha_u^4 - 60\alpha_u^3 + (20 - 4\mu)\alpha_u^2 + 8\mu\alpha_u - 4\mu = 0 \quad (6.109)$$

* Si $0,1042 \leq \mu \leq 0,1859$: (pivot A)

$$A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.110)$$

avec :

$$\beta_u = \frac{16\alpha_u - 1}{15} \quad (6.111)$$

$$\alpha_u = 1 - 0,9366\sqrt{1 - 2\mu} \quad (6.112)$$

* Si $0,1859 \leq \mu \leq \mu_e$: (pivot B)

$$A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.113)$$

avec :

$$\beta_u = 0,8\alpha_u \quad (6.114)$$

$$\alpha_u = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \quad (6.115)$$

* Si $\mu_e \leq \mu \leq 0,472$: (pivot B)

$$A'_s = \frac{(\mu - \mu_e) B d^2 f_{bu}}{f_{su}(d - d')} \quad (6.116)$$

$$A_s = A'_s + \frac{0,8\alpha_e B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.117)$$

6.4 Exercices

⇒ Exercice 1 :

Soit une section ($25 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$) sollicitée par un moment de flexion $M_u = 0,153 \text{ MN.m}$.

On prends un béton de $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et un acier de nuance FeE400.

L'enrobage inférieur est pris égal à 5 cm .

Calculer la section d'armature à l'ELU fondamental ?

⇒ Solution 1 :

À l'ELU fondamental on a : $\gamma_b = 1,5$ et $\gamma_s = 1,15$ et en prenant $\theta = 1$ on trouve :

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 25}{1,5} = 14,1667 \text{ MPa} \quad (6.118)$$

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{400}{1,15} = 347,826 \text{ MPa} \quad (6.119)$$

le moment réduit est donc :

$$\mu = \frac{M_u}{B d^2 f_{bu}} = \frac{0,153}{0,25 \cdot 0,45^2 \cdot 14,1667} = 0,21333 \quad (6.120)$$

d'un autre coté, on a la déformation à la limite d'élasticité des armatures :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{400}{1,15 \cdot 200\,000} = 0,001739 = 1,739\% \quad (6.121)$$

$$\rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 1,739} = 0,668 \quad (6.122)$$

$$\rightarrow \mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) \quad (6.123)$$

$$= 0,8 \cdot 0,668(1 - 0,4 \cdot 0,668) \quad (6.124)$$

$$= 0,391 \quad (6.125)$$

on constate donc qu'on est sur le cas suivant :
 $0,1859 \leq \mu \leq \mu_e = 0,391$ (pivot B)

Dans ce cas les armatures comprimées ne sont pas à prévoir
 on a :

$$\alpha_u = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \quad (6.126)$$

$$= 1,25(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,21333}) \quad (6.127)$$

$$= 0,30351 \quad (6.128)$$

$$\rightarrow \beta_u = 0,8\alpha_u = 0,8 \cdot 0,30351 = 0,2428 \quad (6.129)$$

La section d'armatures tendues à disposer est donc :

$$A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.130)$$

$$= \frac{0,2428 \cdot 0,25 \cdot 0,45 \cdot 14,1667}{347,826} \quad (6.131)$$

$$= 0,001113 \text{ m}^2 \quad (6.132)$$

$$\rightarrow A_s = 11,13 \text{ cm}^2 \quad (6.133)$$

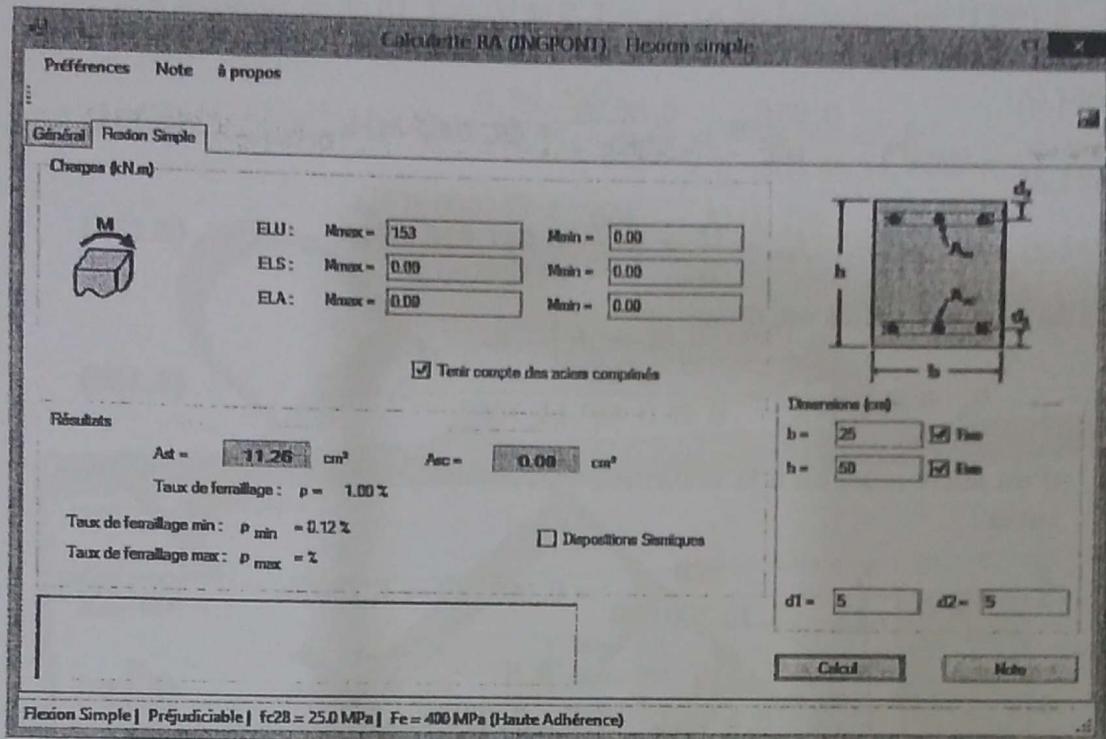


FIGURE 6.2 – Exercice 1 : Résultats de la calculatrice BA INGPONT

⇨ Exercice 2 :

Soit une section ($25\text{ cm} \times 50\text{ cm}$) sollicitée par un moment de flexion $M_u = 315\text{ kN.m}$.

On prends un béton de $f_{c28} = 25\text{ MPa}$ et un acier de nuance FeE400.

Les enrobages supérieur et inférieur sont égales à 5 cm : $d = 45\text{ cm}$ et $d' = 5\text{ cm}$.

1. Calculer la section d'armature à l'ELU fondamental ?
2. Calculer la section d'armature à l'ELU accidentel ?
3. proposer un principe de ferrailage de la section donnée ?

⇨ Solution 2 :

1. À l'ELU fondamental on a : $\gamma_b = 1,5$ et $\gamma_s = 1,15$ et en prenant $\theta = 1$ on trouve :

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 25}{1,5} = 14,1667 \text{ MPa} \quad (6.134)$$

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{400}{1,15} = 347,826 \text{ MPa} \quad (6.135)$$

le moment réduit est donc :

$$\mu = \frac{M_u}{B d^2 f_{bu}} = \frac{0,315}{0,25 \cdot 0,45^2 \cdot 14,1667} = 0,4392 \quad (6.136)$$

d'un autre coté, on a la déformation à la limite d'élasticité des armatures :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{400}{1,15 \cdot 200\,000} = 0,001739 = 1,739\text{‰} \quad (6.137)$$

$$\rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 1,739} = 0,668 \quad (6.138)$$

$$\rightarrow \mu_e = 0,8 \alpha_e (1 - 0,4 \alpha_e) \quad (6.139)$$

$$= 0,8 \cdot 0,668 (1 - 0,4 \cdot 0,668) \quad (6.140)$$

$$= 0,391 \quad (6.141)$$

on constate donc qu'on est sur le cas suivant :

$$\mu_e \leq \mu \leq 0,472 \quad (\text{pivot B})$$

Dans ce cas les armatures comprimées sont à prévoir.

La section d'armatures comprimées à disposer est donc :

$$A'_s = \frac{(\mu - \mu_e) B d^2 f_{bu}}{f_{su} (d - d')} \quad (6.142)$$

$$= \frac{(0,4392 - 0,391) \cdot 0,25 \cdot 0,45^2 \cdot 14,1667}{347,826 (0,45 - 0,05)} \quad (6.143)$$

$$= 0,000248 \text{ m}^2 \quad (6.144)$$

$$\rightarrow \boxed{A'_s = 2,48 \text{ cm}^2} \quad (6.145)$$

La section d'armatures tendues à disposer est :

$$A_s = A'_s + \frac{0,8\alpha_e B d f_{bu}}{f_{ru}} \quad (6.146)$$

$$= 0,000248 + \frac{0,8 \cdot 0,668 \cdot 0,25 \cdot 0,45 \cdot 14,1667}{347,826} \quad (6.147)$$

$$= 0,002697 \text{ m}^2 \quad (6.148)$$

$$\rightarrow \boxed{A_s = 26,97 \text{ cm}^2} \quad (6.149)$$

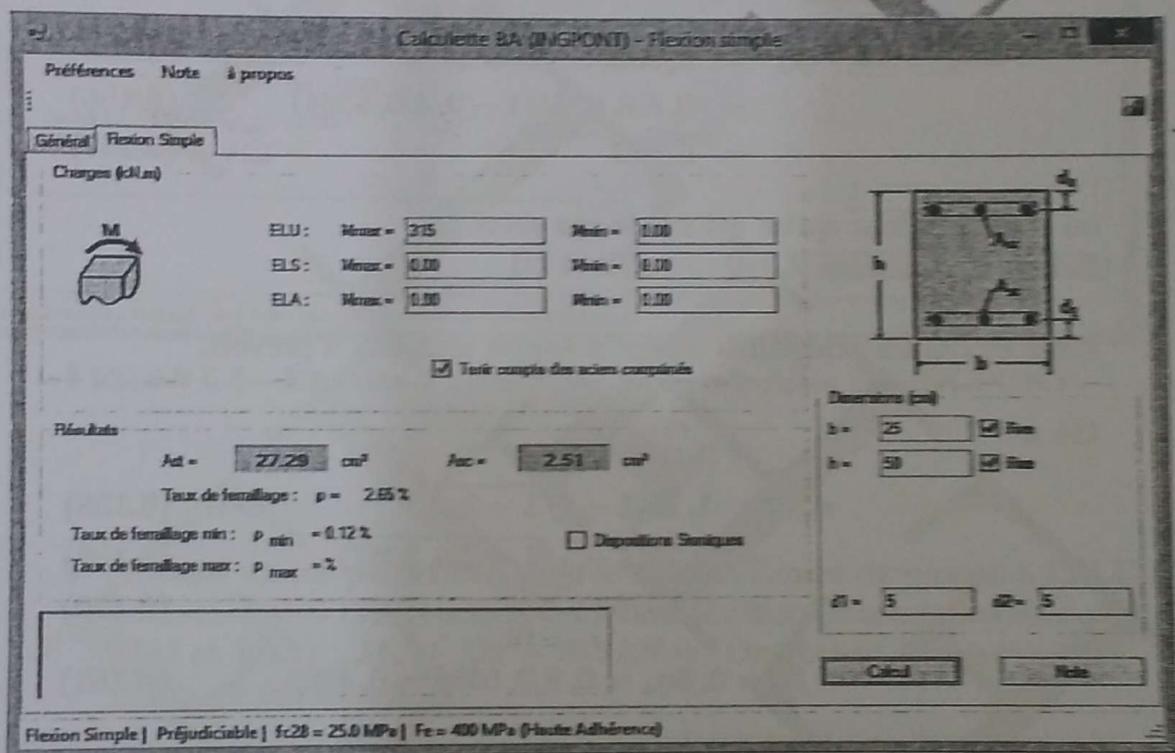


FIGURE 6.3 – Exercice 2 : Résultats de la calculatrice BA INGPONT

2. À l'ELU accidentel, on a : $\gamma_b = 1,15$ et $\gamma_s = 1$ et en prenant $\theta = 1$ on trouve :

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 25}{1,15} = 18,4783 \text{ MPa} \quad (6.150)$$

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{400}{1} = 400 \text{ MPa} \quad (6.151)$$

le moment réduit est donc :

$$\mu = \frac{M_u}{Bd^2 f_{bu}} = \frac{0,315}{0,25 \cdot 0,45^2 \cdot 18,4783} = 0,3367 \quad (6.152)$$

d'un autre coté, on a la déformation à la limite d'élasticité des armatures :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{400}{1.200.000} = 0,002 = 2\text{‰} \quad (6.153)$$

$$\rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 2} = 0,6364 \quad (6.154)$$

$$\rightarrow \mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) \quad (6.155)$$

$$= 0,8 \cdot 0,6364(1 - 0,4 \cdot 0,6364) \quad (6.156)$$

$$= 0,379 \quad (6.157)$$

on constate donc qu'on est sur le cas suivant :

$$0,1859 \leq \mu \leq \mu_e = 0,379 \quad (\text{pivot B})$$

Dans ce cas les armatures comprimées ne sont pas à prévoir.

On a :

$$\alpha_u = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \quad (6.158)$$

$$= 1,25(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,3367}) \quad (6.159)$$

$$= 0,5356 \quad (6.160)$$

$$\rightarrow \beta_u = 0,8\alpha_u = 0,8 \cdot 0,5356 = 0,4285 \quad (6.161)$$

La section d'armatures tendues à disposer est donc :

$$A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.162)$$

$$= \frac{0,4285 \cdot 0,25 \cdot 0,45 \cdot 18,4783}{400} \quad (6.163)$$

$$= 0,002227 \text{ m}^2 \quad (6.164)$$

$$\rightarrow \boxed{A_s = 22,27 \text{ cm}^2} \quad (6.165)$$

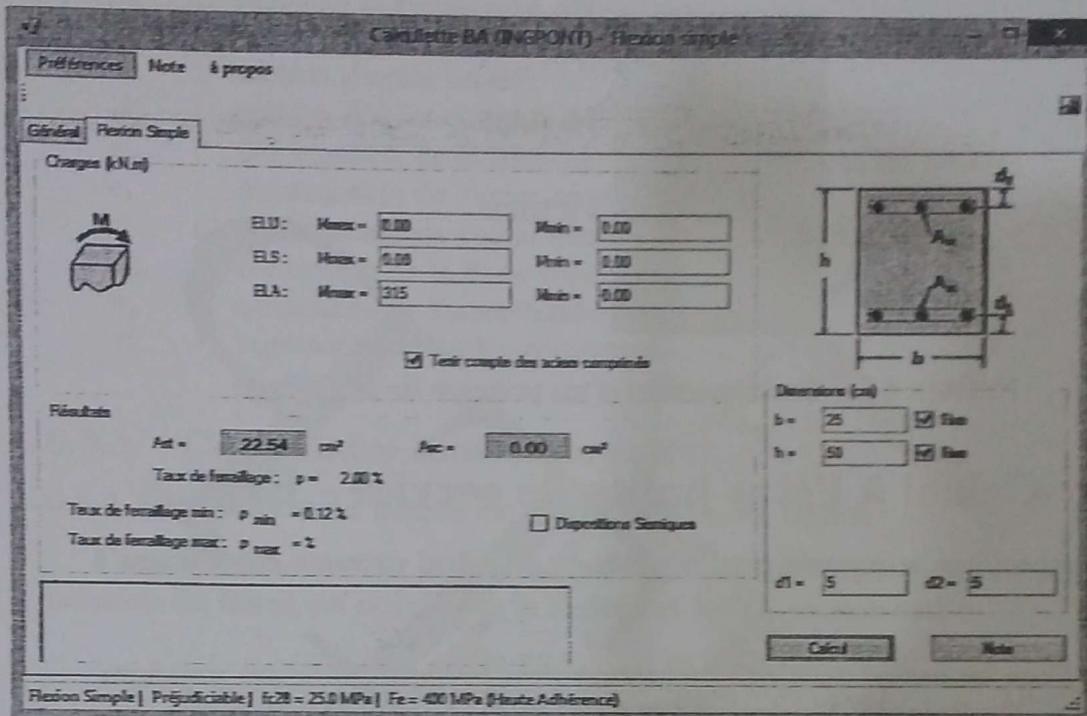


FIGURE 6.4 – Exercice 2 : Résultats de la calculette BA INGPONT

3. Si, dans un cas particulier, on a le même moment développé à l'ELU fondamental et l'ELU accidentel (communément connus sous les noms ELU et ELA) : $M_u = M_a = 315 \text{ kN.m}$. On obtient les sections suivantes de ferrailage :

- ★ ELU : $A_s = 26,97 \text{ cm}^2$ et $A_s' = 2,48 \text{ cm}^2$;
- ★ ELU : $A_s = 22,27 \text{ cm}^2$.

Il apparaît clairement que le résultat obtenu à l'ELU fondamental (ELU) est plus défavorable que celui obtenu à l'ELU accidentel (ELA).

Nous présentons dans la figure (6.5) un principe de ferrailage qui peut être proposé dans ce cas de figure.

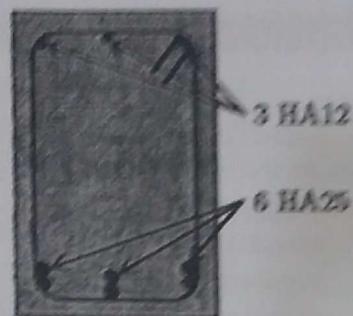


FIGURE 6.5 - Établissement d'un principe de ferrailage

6.5 Calcul à l'état limite de service - ELS

L'expérience a montrée que la méthode de calcul suivante est efficace à l'ELS :

□ Pour les cas où on a une fissuration peu préjudiciable ou une fissuration préjudiciable, le calcul se fait à l'ELU et une vérification se fait dans la suite à l'ELS.

□ Pour le cas où la fissuration est très préjudiciable, le calcul se fait à l'ELS et une vérification se fait à l'ELU.

Les diagrammes de calcul à l'ELS sont présentés dans la figure (6.6).

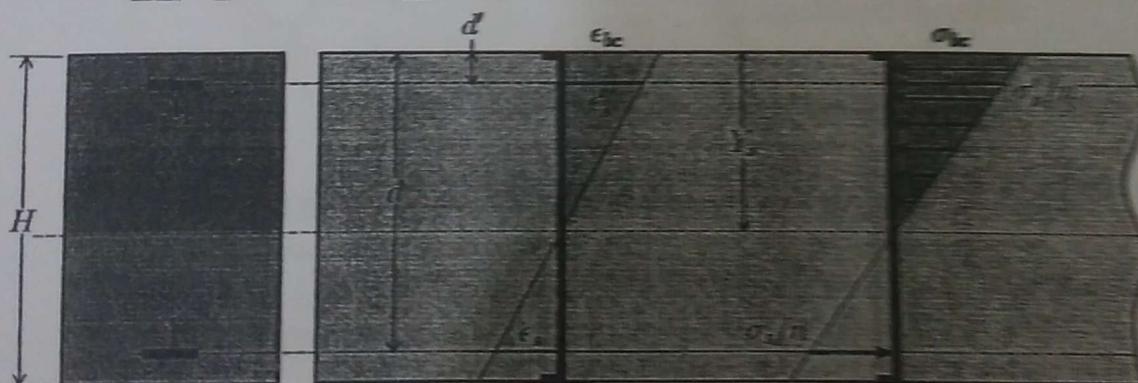


FIGURE 6.6 - Diagrammes des déformations et des contraintes à l'ELS

Les paramètres de la figure sont définis comme suit :

- A_s : section d'acier tendu ;
- A'_s : section d'acier comprimé ;
- ϵ_{bc} : déformation de la fibre supérieure comprimée du béton ;
- ϵ_s : déformation de l'acier tendu ;
- ϵ'_s : déformation de l'acier comprimé ;
- σ_{bc} : contrainte de la fibre supérieure du béton ;
- σ_s : contrainte de l'acier tendu ;
- σ'_s : contrainte de l'acier comprimé.

6.5.1 Contraintes limites de calcul

6.5.1.1 Contrainte limite de compression du béton

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, la contrainte limite de compression du béton est définie par la règlement BAEL comme suit :

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0,6f_{cj} \quad (f_{tu} = \frac{0,85f_{cj}}{\theta\gamma_b} = \frac{0,85f_{cj}}{1,5} \approx 0,57f_{cj}) \quad (6.166)$$

6.5.1.2 Contrainte limite de traction des aciers (ouverture des fissures)

Comme déjà défini, la limitation de la contrainte des armatures dépend de l'agressivité du milieu :

* Fissuration peu préjudiciable :

$$\bar{\sigma}_s = f_e \quad (f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{f_e}{1,15} \approx 0,87) \quad (6.167)$$

* Fissuration préjudiciable :

$$\bar{\sigma}_s = \inf \left\{ \frac{2}{3}f_e; 110\sqrt{\eta f_{tj}} \right\} \quad (6.168)$$

* Fissuration très préjudiciable :

$$\bar{\sigma}_s = \inf \left\{ \frac{1}{2}f_e; 90\sqrt{\eta f_{tj}} \right\} \quad (6.169)$$

η est le coefficient de fissuration. on a $\eta = 1$ pour les aciers RL et $\eta = 1,6$ pour les aciers HA.

6.5.2 Vérification d'une section rectangulaire en flexion simple à l'ELS

Nous présentons dans la figure (6.7) les résultantes des forces appliquées à une section donnée.

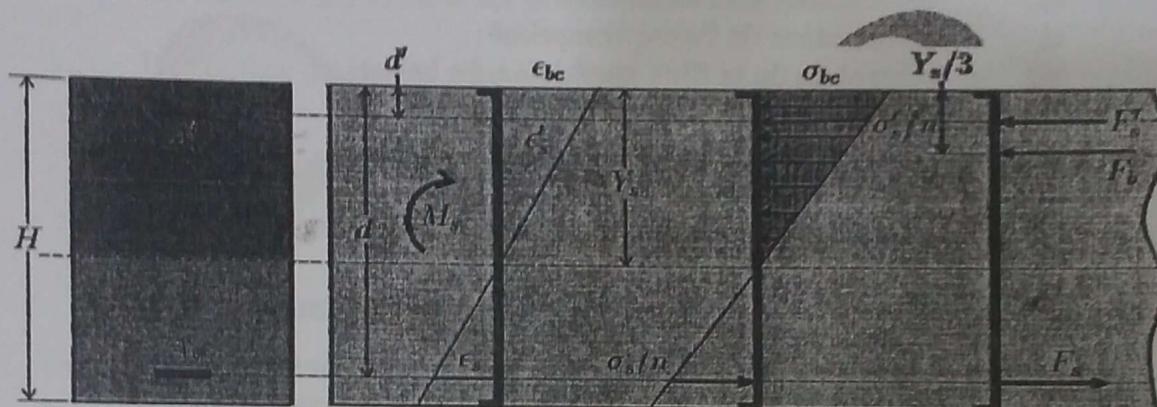


FIGURE 6.7 - Résultantes des diagrammes de contraintes à l'ELS

Ces résultantes sont définies par :

$$F_b = \frac{1}{2} B Y_s \sigma_{bc} \quad (6.170)$$

$$F_s = A_s \sigma_s \quad (6.171)$$

$$F_s' = A_s' \sigma_s' \quad (6.172)$$

6.5.2.1 Équations de base

L'équation d'équilibre des forces est écrite sous la forme :

$$F_b + F_s' = F_s \quad (6.173)$$

L'équation d'équilibre des moments par rapport au centre de gravité des armatures tendues est donnée par :

$$M_s = F_b \left(d - \frac{Y_s}{3} \right) + F_s' (d - d') \quad (6.174)$$

La compatibilité des déformations (théorème de THALES) est exprimée par :

$$\sigma_{bc} = \frac{\sigma_s}{n} \frac{Y_s}{d - Y_s} \quad (6.175)$$

$$\sigma_{bc} = \frac{\sigma'_s Y_s}{n Y_s - d'} \quad (6.176)$$

On pose dans la suite :

$$K = \frac{\sigma_{bc}}{Y_s} \quad (6.177)$$

On réalise dans la suite les démonstrations suivantes :

L'équilibre des forces nous donne :

$$(6.173) \rightarrow \frac{1}{2} B Y_s \sigma_{bc} + A'_s \sigma'_s = A_s \sigma_s \quad (6.178)$$

$$(6.175) \rightarrow \sigma_s = n \sigma_{bc} \frac{d - Y_s}{Y_s} \quad (6.179)$$

$$(6.176) \rightarrow \sigma'_s = n \sigma_{bc} \frac{Y_s - d'}{Y_s} \quad (6.180)$$

$$(6.178) \rightarrow \frac{1}{2} B Y_s \sigma_{bc} + n A'_s \sigma_{bc} \frac{Y_s - d'}{Y_s} = n A_s \sigma_{bc} \frac{d - Y_s}{Y_s} \quad (6.181)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} B Y_s^2 + n A'_s (Y_s - d') = n A_s (d - Y_s) \quad (6.182)$$

$$\rightarrow B Y_s^2 + 2n(A_s + A'_s) Y_s - 2n(A'_s d' + A_s d) = 0 \quad (6.183)$$

cette dernière équation nous permet de déterminer Y_s .

L'équilibre des moments par rapport à la fibre neutre nous donne :

$$M_s = F_b \frac{2}{3} Y_s + F'_s (Y_s - d') + F_s (d - Y_s) \quad (6.184)$$

$$= \frac{1}{2} B Y_s \sigma_{bc} \frac{2}{3} Y_s + A'_s \sigma'_s (Y_s - d') + A_s \sigma_s (d - Y_s) \quad (6.185)$$

$$= B Y_s^2 \frac{\sigma_{bc}}{3} + n A'_s \sigma_{bc} \frac{Y_s - d'}{Y_s} (Y_s - d') \quad (6.186)$$

$$+ n A_s \sigma_{bc} \frac{d - Y_s}{Y_s} (d - Y_s) \quad (6.187)$$

$$= \frac{\sigma_{bc}}{Y_s} \left[\frac{B Y_s^3}{3} + n A'_s (Y_s - d')^2 + n A_s (d - Y_s)^2 \right] \quad (6.188)$$

$$\rightarrow M_s = K \left[\frac{B Y_s^3}{3} + n A'_s (Y_s - d')^2 + n A_s (d - Y_s)^2 \right] = K I \quad (6.189)$$

le terme I représente le moment d'inertie de la section homogénéisée équivalente à la section étudiée.

les contraintes sont exprimées par :

$$(6.179) \rightarrow \sigma_s = nK(d - Y_s) \quad (6.190)$$

$$(6.180) \rightarrow \sigma'_s = nK(Y_s - d') \quad (6.191)$$

$$(6.177) \rightarrow \sigma_{bc} = KY_s \quad (6.192)$$

6.5.2.2 Récapitulatif pour la vérification à l'ELS

En tenant compte des sections d'armatures A_s et A'_s calculées à l'ELU, On peut réaliser une vérification à l'ELS en suivant les étapes suivantes :

On commence par calculer Y_s en résolvant l'équation :

$$BY_s^2 + 2n(A_s + A'_s)Y_s - 2n(A'_s d' + A_s d) = 0 \quad (6.193)$$

le moment d'inertie de la section homogénéisée est déterminé par :

$$I = \frac{BY_s^3}{3} + nA'_s(Y_s - d')^2 + nA_s(d - Y_s)^2 \quad (6.194)$$

puis on cherche le coefficient K par :

$$K = \frac{M_e}{I} \quad (6.195)$$

les contraintes développées sont donc :

$$\begin{cases} \sigma_s = nK(d - Y_s) \\ \sigma'_s = nK(Y_s - d') \\ \sigma_{bc} = KY_s \end{cases} \quad (6.196)$$

On procède dans la suite à l'examen des inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_s \leq \bar{\sigma}_s \\ \sigma'_s \leq \bar{\sigma}'_s \\ \sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc} \end{cases} \quad (6.197)$$

Si ces inégalités sont satisfaites simultanément, la section satisfait les conditions de l'ELS et les résultats trouvés à l'ELU sont à adopter.

Si au moins l'une des trois conditions n'est pas vérifiée, il faudra redimensionner la section à l'ELS.

6.5.3 Dimensionnement d'une section rectangulaire en flexion simple à l'ELS

On pose dans la suite :

$$\alpha_s = \frac{Y_s}{d} \quad (6.198)$$

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2\bar{\sigma}_s} \quad (6.199)$$

$$\delta = \frac{d'}{d} \quad (6.200)$$

On suppose que $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$ pour que les armatures tendues travaillent dans des conditions économiques. Deux cas sont possibles : $A'_s = 0$ ou $A'_s \neq 0$. Ces cas sont traités dans les parties suivantes.

6.5.3.1 Cas où $A'_s = 0$

L'expression du moment de service (6.189) devient :

$$M_s = K \left[\frac{BY_s^3}{3} + nA_s(d - Y_s)^2 \right] \quad (6.201)$$

$$(6.190) \rightarrow K = \frac{\sigma_s}{n(d - Y_s)} \quad (6.202)$$

$$\rightarrow M_s = \frac{\sigma_s}{n(d - Y_s)} \left[\frac{BY_s^3}{3} + nA_s(d - Y_s)^2 \right] \quad (6.203)$$

En développant l'expression du moment réduit, on trouve :

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2\sigma_s} \quad (6.204)$$

$$= \frac{\frac{\sigma_s}{n(d - Y_s)} \left(\frac{BY_s^3}{3} + nA_s(d - Y_s)^2 \right)}{Bd^2\sigma_s} \quad (6.205)$$

$$= \frac{1}{nBd^2(d - Y_s)} \left(\frac{BY_s^3}{3} + nA_s(d - Y_s)^2 \right) \quad (6.206)$$

$$(6.193) \rightarrow BY_s^2 + 2nA_sY_s - 2nA_sd = 0 \quad (6.207)$$

$$\rightarrow BY_s^2 + 2nA_s(Y_s - d) = 0 \quad (6.208)$$

$$\rightarrow nA_s(d - Y_s) = \frac{BY_s^2}{2} \quad (6.209)$$

$$\rightarrow \mu_s = \frac{1}{nBd^2(d - Y_s)} \left(\frac{BY_s^3}{3} + \frac{BY_s^2}{2}(d - Y_s) \right) \quad (6.210)$$

$$= \frac{1}{nBd^2(d - Y_s)} \left(\frac{BY_s^3}{3} + \frac{BdY_s^2}{2} - \frac{BY_s^3}{2} \right) \quad (6.211)$$

$$= \frac{1}{nBd^2(d - Y_s)} \left(-\frac{BY_s^3}{6} + \frac{BdY_s^2}{2} \right) \quad (6.212)$$

$$= \frac{1}{nBd^3(1 - \alpha_s)} \left(\frac{Bd^3}{2}\alpha_s^2 - \frac{Bd^3}{6}\alpha_s^3 \right) \quad (6.213)$$

$$\rightarrow \mu_s = \frac{\alpha_s^2(1 - \alpha_s/3)}{2n(1 - \alpha_s)} \quad (6.214)$$

On peut donc avoir une équation qui nous permettra d'avoir l'expression de α_s en fonction de μ_s comme suit :

$$(6.214) \rightarrow 2n\mu_s - 2n\mu_s\alpha_s = \alpha_s^2 - \frac{1}{3}\alpha_s^3 \quad (6.215)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 6n\mu_s\alpha_s + 6n\mu_s = 0 \quad (6.216)$$

$$n = 15 \rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90\mu_s\alpha_s + 90\mu_s = 0 \quad (6.217)$$

cette équation admet une solution unique dans l'intervalle]0; 1[.

On a dans la suite :

$$K = \frac{\sigma_{bc}}{Y_s} = \frac{\sigma_{st}}{n(d - Y_s)} \quad (6.218)$$

$$\rightarrow K = \frac{\bar{\sigma}_{st}}{nd(1 - \alpha_s)} \quad (6.219)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} = KY_s = \frac{\bar{\sigma}_{st}}{nd(1 - \alpha_s)}\alpha_s d \quad (6.220)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1 - \alpha_s)}\bar{\sigma}_{st} \quad (6.221)$$

Si la valeur trouvée de σ_{bc} vérifie la condition : $\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc}$ on a donc $A'_s = 0$ et la section d'armature tendue est donnée par :

$$(6.209) \rightarrow A_s = \frac{BY_s^2}{2n(d - Y_s)} = \frac{Bd^2\alpha_s^2}{2nd(1 - \alpha_s)} = \frac{Bd\alpha_s^2}{2n(1 - \alpha_s)} \quad (6.222)$$

$$(6.214) \rightarrow \frac{\alpha_s^2}{2n(1 - \alpha_s)} = \frac{\mu_s}{1 - \alpha_s/3} \quad (6.223)$$

$$\rightarrow A_s = \frac{Bd\mu_s}{1 - \alpha_s/3} = \frac{Bd\alpha_s^2}{2n(1 - \alpha_s)} \quad (6.224)$$

6.5.3.2 Cas où $A'_s \neq 0$

Si la valeur de σ_{bc} trouvée dans la phase précédente vérifie : $\sigma_{bc} > \bar{\sigma}_{bc}$, on a alors : $A'_s \neq 0$.

On pose dans ce cas : $\sigma_{bc} = \bar{\sigma}_{bc}$ et $\alpha_s = \alpha_l$.

On a trouvé dans le cas précédent que :

$$\sigma_{bc} = \frac{\alpha_s \bar{\sigma}_s}{n(1 - \alpha_s)} \quad (6.225)$$

pour la limite de ce domaine où on a $\sigma_{bc} = \bar{\sigma}_{bc}$ et $\alpha_s = \alpha_l$ on trouve :

$$\bar{\sigma}_{bc} = \frac{\alpha_l \bar{\sigma}_s}{n(1 - \alpha_l)} \quad (6.226)$$

$$\rightarrow \alpha_l \bar{\sigma}_s = n \bar{\sigma}_{bc} - n \alpha_l \bar{\sigma}_{bc} \quad (6.227)$$

$$\rightarrow \alpha_l (\bar{\sigma}_s + n \bar{\sigma}_{bc}) = n \bar{\sigma}_{bc} \quad (6.228)$$

$$\rightarrow \alpha_l = \frac{n \bar{\sigma}_{bc}}{\bar{\sigma}_s + n \bar{\sigma}_{bc}} \quad (6.229)$$

et on a d'un autre coté en reprenant (6.214) :

$$\mu_s = \mu_l = \frac{\alpha_l^2 (1 - \alpha_l / 3)}{2n(1 - \alpha_l)} \quad (6.230)$$

D'un autre coté, on a :

$$(6.178) \rightarrow A_s = \frac{BY_s \sigma_{bc} / 2 + A'_s \sigma'_s}{\sigma_s} \quad (6.231)$$

$$\sigma_s = \bar{\sigma}_s \text{ et } \sigma_{bc} = \bar{\sigma}_{bc} \rightarrow A_s = \frac{BY_l \bar{\sigma}_{bc} / 2 + A'_s \sigma'_s}{\bar{\sigma}_s} \quad (6.232)$$

$$(6.174) \rightarrow M_s = \frac{1}{2} BY_s \sigma_{bc} \left(d - \frac{Y_s}{3} \right) + A'_s \sigma'_s (d - d') \quad (6.233)$$

$$\rightarrow A'_s = \frac{M_s - \frac{1}{2} BY_s \sigma_{bc} \left(d - \frac{Y_s}{3} \right)}{\sigma'_s (d - d')} \quad (6.234)$$

$$\sigma_{bc} = \bar{\sigma}_{bc} \text{ et } Y_s = Y_l \rightarrow A'_s = \frac{M_s - \frac{1}{2} BY_l \bar{\sigma}_{bc} \left(d - \frac{Y_l}{3} \right)}{\sigma'_s (d - d')} \quad (6.235)$$

le moment réduit est défini par :

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2 \bar{\sigma}_s} \rightarrow M_s = \mu_s B d^2 \bar{\sigma}_s \quad (6.236)$$

on a démontré que :

$$\sigma_s = n\sigma_{bc} \frac{d - Y_s}{Y_s} \rightarrow \bar{\sigma}_s = n\bar{\sigma}_{bc} \frac{d - Y_1}{Y_1} \quad (6.237)$$

$$\rightarrow M_s = \mu_s B d^2 n \bar{\sigma}_{bc} \frac{d - Y_1}{Y_1} \quad (6.238)$$

$$(6.180) \rightarrow \sigma'_s = n\bar{\sigma}_{bc} \frac{Y_1 - d'}{Y_1} \quad (6.239)$$

en injectant les deux dernières équations dans l'expression de A'_s , on trouve :

$$A'_s = \frac{\mu_s B d^2 n \bar{\sigma}_{bc} \frac{d - Y_1}{Y_1} - \frac{1}{2} B Y_1 \bar{\sigma}_{bc} (d - \frac{Y_1}{3})}{n \bar{\sigma}_{bc} \frac{Y_1 - d'}{Y_1} (d - d')} \quad (6.240)$$

$$= \frac{n \mu_s B d^3 (1 - \alpha_1) - \frac{1}{2} B d^3 \alpha_1^2 (1 - \frac{\alpha_1}{3})}{n d^2 (\alpha_1 - \delta) (1 - \delta)} \quad (6.241)$$

$$(6.230) \rightarrow \alpha_1^2 \left(1 - \frac{\alpha_1}{3}\right) = 2n\mu_1 (1 - \alpha_1) \quad (6.242)$$

$$\rightarrow A'_s = \frac{n \mu_s B d (1 - \alpha_1) - \frac{1}{2} B d \cdot 2n\mu_1 (1 - \alpha_1)}{n (\alpha_1 - \delta) (1 - \delta)} \quad (6.243)$$

$$= \frac{\mu_s (1 - \alpha_1) - \mu_1 (1 - \alpha_1)}{(\alpha_1 - \delta) (1 - \delta)} B d \quad (6.244)$$

$$\rightarrow A'_s = \frac{(\mu_s - \mu_1) (1 - \alpha_1)}{(\alpha_1 - \delta) (1 - \delta)} B d \quad (6.245)$$

En remplaçant $\bar{\sigma}_s$ et σ'_s (6.237 et 6.239) dans l'expression de A_s (6.232), on trouve :

$$A_s = \frac{B Y_1 \bar{\sigma}_{bc} / 2 + A'_s \cdot n \bar{\sigma}_{bc} \frac{Y_1 - d'}{Y_1}}{n \bar{\sigma}_{bc} \frac{d - Y_1}{Y_1}} \quad (6.246)$$

$$= \frac{B Y_1^2 + 2n A'_s (Y_1 - d')}{2n (d - Y_1)} \quad (6.247)$$

$$= \frac{B d^2 \alpha_1^2 + 2n d A'_s (\alpha_1 - \delta)}{2n d (1 - \alpha_1)} \quad (6.248)$$

$$= \frac{B d \alpha_1^2}{2n (1 - \alpha_1)} + A'_s \frac{\alpha_1 - \delta}{1 - \alpha_1} \quad (6.249)$$

$$= \frac{B d \alpha_1^2}{2n (1 - \alpha_1)} + \frac{(\mu_s - \mu_1) (1 - \alpha_1)}{(\alpha_1 - \delta) (1 - \delta)} B d \cdot \frac{\alpha_1 - \delta}{1 - \alpha_1} \quad (6.250)$$

$$= \frac{B d \alpha_1^2}{2n (1 - \alpha_1)} + \frac{\mu_s - \mu_1}{1 - \delta} B d \quad (6.251)$$

$$\rightarrow A_s = \frac{\alpha_l^2(1-\delta) + 2n(\mu_s - \mu_l)(1-\alpha_l)}{2n(1-\alpha_l)(1-\delta)} Bd \quad (6.252)$$

Les sections d'armatures sont donc calculées par les formules suivantes :

* Les armatures comprimées sont calculées par (6.235) ou (6.245), soit :

$$A'_s = \frac{M_s - \frac{1}{2}BY_l\bar{\sigma}_{bc}(d - \frac{Y_l}{3})}{\sigma'_s(d - d')} = \frac{(\mu_s - \mu_l)(1 - \alpha_l)}{(\alpha_l - \delta)(1 - \delta)} Bd \quad (6.253)$$

* Les armatures tendues sont calculées par (6.232) ou (6.252), soit :

$$A_s = \frac{BY_l\bar{\sigma}_{bc}/2 + A'_s\sigma'_s}{\bar{\sigma}_s} = \frac{\alpha_l^2(1-\delta) + 2n(\mu_s - \mu_l)(1-\alpha_l)}{2n(1-\alpha_l)(1-\delta)} Bd \quad (6.254)$$

6.5.4 Récapitulatif du calcul d'une section rectangulaire en flexion simple à l'ELS

On calcule le moment réduit par :

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2\bar{\sigma}_s} \quad (6.255)$$

La résolution de l'équation suivante nous permet d'avoir la valeur de α_s :

$$\alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90\mu_s\alpha_s + 90\mu_s = 0 \quad (6.256)$$

on retient la valeur de α_s comprise dans l'intervalle]0; 1[.

Cela nous permet après de calculer la contrainte σ_{bc} du béton :

$$\sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1-\alpha_s)} \bar{\sigma}_{st} \quad (6.257)$$

✿ Si $\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc}$: $A'_s = 0$

La section tendue est calculée par :

$$A_s = \frac{Bd\mu_s}{1-\alpha_s/3} = \frac{Bd\alpha_s^2}{2n(1-\alpha_s)} \quad (6.258)$$

✿ Si $\sigma_{bc} > \bar{\sigma}_{bc}$: $A'_s \neq 0$

Les sections d'acier sont calculées par :

$$A_s = \frac{\alpha_l^2(1-\delta) + 2n(\mu_s - \mu_l)(1-\alpha_l)}{2n(1-\alpha_l)(1-\delta)} Bd \quad (6.259)$$

$$A'_s = \frac{(\mu_s - \mu_l)(1-\alpha_l)}{(\alpha_l - \delta)(1-\delta)} Bd \quad (6.260)$$

où on a :

$$\delta = \frac{d'}{d} \quad (6.261)$$

$$\alpha_l = \frac{n\bar{\sigma}_{bc}}{\bar{\sigma}_s + n\bar{\sigma}_{bc}} \quad (6.262)$$

$$\mu_l = \frac{\alpha_l^2(1-\alpha_l/3)}{2n(1-\alpha_l)} \quad (6.263)$$

Remarque :

Le calcul de α_s peut être effectué par :

- * La lecture d'un tableau qui donne α_s en fonction de μ_s (voir littérature) ;
- * La lecture d'un graphique qui donne α_s en fonction de μ_s ;
- * Un calcul automatique en utilisant MATLAB (ou autre programme) ou simplement en utilisant les itérations de NEWTON-RAPHSON suivantes :

$$\alpha_s^0 = \frac{1}{2} \quad (6.264)$$

$$\alpha_s^{(i+1)} = \alpha_s^{(i)} - \frac{f(\alpha_s^{(i)})}{f'(\alpha_s^{(i)})} \quad (6.265)$$

où on a :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 90\mu_s x + 90\mu_s \quad (6.266)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 90\mu_s \quad (6.267)$$



6.6 Ferrailage minimal

Une section de béton armé en flexion simple doit contenir une section d'armatures minimale capable de reprendre la contrainte de fissuration du béton (f_{tj}) sans dépasser leur limite d'élasticité f_e .

Le moment fléchissant M provoquant la fissuration du béton satisfait l'équation :

$$f_{tj} = \frac{Mv}{I} \quad (6.268)$$

v étant la distance entre le centre de gravité de la section et la fibre tendue extrême ($v = \frac{H}{2}$).

$$I = \frac{BH^3}{12} \rightarrow f_{tj} = \frac{M \frac{H}{2}}{\frac{BH^3}{12}} = \frac{6M}{BH^2} \quad (6.269)$$

$$\rightarrow M = \frac{1}{6} f_{tj} BH^2 \quad (6.270)$$

A l'ELS, le moment réduit est donné par :

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2 \sigma_s} = \frac{M}{Bd^2 f_e} = \frac{f_{tj} BH^2}{6Bd^2 f_e} = \frac{f_{tj}}{6.0,9^2 f_e} = \frac{f_{tj}}{4,86 f_e} \quad (6.271)$$

d'après (6.258), le ferrailage minimal est donné par :

$$A_{\min} = \frac{Bd \mu_s}{1 - \alpha_s/3} \quad (6.272)$$

En pratique, dans les circonstances du ferrailage minimal, on peut considérer que : $1 - \alpha_s/3 \approx 0,9$.

$$\rightarrow A_{\min} = \frac{Bd}{0,9} \frac{f_{tj}}{4,86 f_e} = \frac{Bd f_{tj}}{4,374 f_e} \quad (6.273)$$

$$\rightarrow A_{\min} = 0,23 Bd \frac{f_{tj}}{f_e} \quad (6.274)$$

6.7 Exercices

↔ Exercice 3 :

Soit une poutre isostatique sur deux appuis simples de longueur de 7 m et de section (20 cm × 45 cm). Cette poutre est soumise à l'action de :

- Superstructures : $G_s = 2,5 \text{ kN/m}$;
- Charge d'exploitation : $Q = 12 \text{ kN/m}$.

Le poids volumique du béton est pris égal à $\rho_b = 25 \text{ kN/m}^3$ et les enrobages sont de 5 cm.

1. Calculer le moment ultime maximal sollicitant la poutre (en combinant les actions) ?
2. Cette poutre est à réaliser avec un béton de résistance $f_{cm} = 25 \text{ MPa}$ et un acier HA de nuance FeE400.
 - (a) Calculer le moment réduit limite μ_e ?
 - (b) Déterminer la position du diagramme de déformation de la section considérée ?
 - (c) Calculer la section d'armature nécessaire pour reprendre, avec le béton, le moment ultime calculé ?
 - (d) Proposer une disposition des armatures (principe de ferrailage) ?
3. Chercher le moment à l'ELS et réaliser le dimensionnement nécessaire sachant qu'on a une fissuration préjudiciable ?

⇒ Solution 3 :

1. Nous présentons dans la figure (6.8) une représentation de la surcharge des superstructures G_s et la charge variable d'exploitation Q .

Le poids de la poutre par mètre linéaire est donné par :

$$G_0 = \rho BH = 25 \times 0,20 \times 0,45 \quad (6.275)$$

$$\rightarrow G_0 = 2,25 \text{ kN/ml} \quad (6.276)$$

on sait d'un autre côté qu'on a une charge permanente des superstructures donnée par :

$$G_s = 2,5 \text{ kN/ml} \quad (6.277)$$

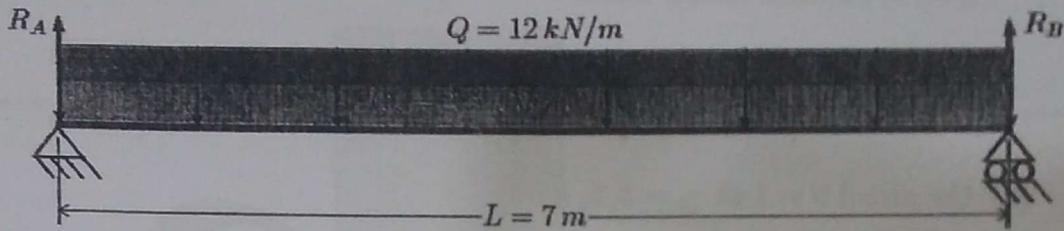


FIGURE 6.8 – Schéma de la poutre isostatique

Pour une poutre isostatique uniformément chargée par une densité de charge q , on peut démontrer que le moment maximal développé à mi-travée est exprimé par :

$$M = \frac{qL^2}{8} \quad (6.278)$$

Les charges permanentes regroupées G_0 et G_s créent donc un moment maximal à mi-travée de la poutre égal à :

$$M_G = (G_0 + G_s) \frac{L^2}{8} = 29,094 \text{ kN.m} \quad (6.279)$$

La charge d'exploitation Q crée un moment qui vaut :

$$M_Q = \frac{QL^2}{8} = 73,5 \text{ kN.m} \quad (6.280)$$

En tenant compte des combinaisons réglementaires de calcul, on trouve :

$$M_u = 1,35M_G + 1,5M_Q = 1,35 \cdot 29,094 + 1,5 \cdot 73,5 \quad (6.281)$$

$$\rightarrow M_u = 149,5 \text{ kN.m} = 0,1495 \text{ MN.m} \quad (6.282)$$

2. En tenant compte de la classe de béton et de la nuance d'acier proposée à savoir $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et FeE400, on trouve :

(a) La déformation des aciers à la limite d'élasticité est :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{400}{1,15 \cdot 200\,000} = 1,74 \text{ ‰} \quad (6.283)$$

$$\rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 1,74} = 0,668 \quad (6.284)$$

d'où le moment réduit limite :

$$\mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) = 0,8 \cdot 0,668(1 - 0,4 \cdot 0,668) \quad (6.285)$$

$$\rightarrow \mu_e = 0,392 \quad (6.286)$$

(b) On prend $\theta = 1$ et $\gamma_b = 1,5$, d'où :

$$f_{bu} = \frac{0,85f_{c28}}{\theta\gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 25}{1,5} = 14,17 \text{ MPa} \quad (6.287)$$

l'enrobage inférieur étant égal à 5 cm, d'où : $d \approx 0,4 \text{ m}$.

Le moment réduit est égal donc à :

$$\mu = \frac{M_u}{Bd^2f_{bu}} = \frac{0,1495}{0,2 \cdot 0,4^2 \cdot 14,17} \quad (6.288)$$

$$\rightarrow \mu = 0,33 \quad (6.289)$$

le moment réduit calculé appartient donc au domaine suivant :
 $0,1859 \leq \mu \leq \mu_e$ (pivot B).

(c) Dans le sous-domaine trouvé, la section d'armatures se calcule comme suit :

$$\alpha_u = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \quad (6.290)$$

$$= 1,25(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,33}) \quad (6.291)$$

$$= 0,52 \quad (6.292)$$

$$\rightarrow \beta_u = 0,8\alpha_u = 0,8 \cdot 0,52 = 0,416 \quad (6.293)$$

on a :

$$f_{su} = \frac{f_e}{1,15} = \frac{400}{1,15} = 347,83 \text{ MPa} \quad (6.294)$$

$$\rightarrow A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.295)$$

$$= \frac{0,416 \cdot 0,2 \cdot 0,4 \cdot 14,17}{347,83} \quad (6.296)$$

$$= 0,001356 \text{ m}^2 \quad (6.297)$$

$$\rightarrow A_s = 13,56 \text{ cm}^2 \quad (6.298)$$

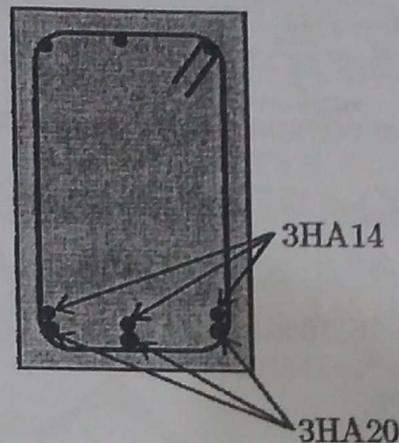


FIGURE 6.9 – Schéma du principe de ferrailage proposé

(d) D'après le tableau des sections des armatures commerciales, on peut proposer le principe de ferrailage présenté dans la figure (6.9).

3. Le moment à l'ELS est calculé par la combinaison suivante :

$$M_s = M_G + M_Q = 29,094 + 73,5 \quad (6.299)$$

$$\rightarrow M_s = 102,594 \text{ kN.m} = 0,102594 \text{ MN.m} \quad (6.300)$$

✱ On procède après à la vérification à l'ELS de la section $A_s = 13,56 \text{ cm}^2$ calculée à l'ELU comme suit :

Calculons l'ordonnée de la fibre neutre Y_s par l'équation :

$$BY_s^2 + 2n(A_s + A'_s)Y_s - 2n(A'_s d' + A_s d) = 0 \quad (6.301)$$

$$\rightarrow 0,2Y_s^2 + 2.15.0,001356Y_s - 2.15.0,001356.0,4 = 0 \quad (6.302)$$

$$\rightarrow 0,2Y_s^2 + 0,04068Y_s - 0,016272 = 0 \quad (6.303)$$

on a les deux racines : $Y_s = -0,4045 \text{ m}$ ou $Y_s = 0,2011 \text{ m}$
la racine physique est : $Y_s = 0,2011 \text{ m} = 20,11 \text{ cm}$

Le moment quadratique de la section homogénéisée est :

$$I = \frac{BY_s^3}{3} + nA'_s(Y_s - d')^2 + nA_s(d - Y_s)^2 \quad (6.304)$$

$$= \frac{1}{3}.0,2.0,2011^3 + 15.0,001356.(0,4 - 0,2011)^2 \quad (6.305)$$

$$\rightarrow I = 0,001347 \text{ m}^4 \quad (6.306)$$

$$\rightarrow K = \frac{M_s}{I} = \frac{0,102594}{0,001347} = 76,1648 \quad (6.307)$$

Les contraintes dans les armatures et le béton sont :

$$\sigma_s = nK(d - Y_s) = 15.76,1648.(0,4 - 0,2011) \quad (6.308)$$

$$\rightarrow \sigma_s = 227,24 \text{ MPa} \quad (6.309)$$

$$\sigma_{bc} = KY_s = 76,1648.0,2011 = 15,32 \text{ MPa} \quad (6.310)$$

Contraintes admissibles :

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0,6f_{c28} = 0,6.25 = 15 \text{ MPa} \quad (6.311)$$

$$\bar{\sigma}_s = \min \left[\frac{2}{3}f_e; \max \left(\frac{f_e}{2}; 110\sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (6.312)$$

$$= \min \left[\frac{2}{3}.400; \max \left(\frac{400}{2}; 110\sqrt{1,6.2,1} \right) \right] \quad (6.313)$$

$$= \min [266,67; \max (200; 201,63)] \quad (6.314)$$

$$\rightarrow \bar{\sigma}_s = 201,63 \text{ MPa} \quad (6.315)$$

On a donc :

$$\begin{cases} \sigma_{bc} = 15,32 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_{bc} = 15 \text{ MPa} \\ \sigma_s = 227,24 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_s = 201,63 \text{ MPa} \end{cases} \quad (6.316)$$

les contraintes admissibles ne sont pas vérifiées et on doit donc redimensionner la section considérée à l'ELS.

☛ Dimensionnement à l'ELS :

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2\bar{\sigma}_s} = \frac{0,102594}{0,2.0,4^2.201,63} = 0,0159 \quad (6.317)$$

on cherche ensuite le paramètre α_s en passant par l'équation :

$$\alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90\mu_s\alpha_s + 90\mu_s = 0 \quad (6.318)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 1,431\alpha_s + 1,431 = 0 \quad (6.319)$$

$$\rightarrow \alpha_s = 0,5243 \quad (\text{on retient } \alpha_s \in]0; 1]) \quad (6.320)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1 - \alpha_s)} \bar{\sigma}_s = \frac{0,5243}{15(1 - 0,5243)} 201,63 \quad (6.321)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} = 14,815 \text{ MPa} \quad (6.322)$$

on a donc :

$$\sigma_{bc} = 14,815 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{bc} = 15 \text{ MPa} \quad (6.323)$$

Une section d'armatures tendue est suffisante :

$$A_s = \frac{Bd\alpha_s^2}{2n(1 - \alpha_s)} = \frac{0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,5243^2}{2 \cdot 15 \cdot (1 - 0,5243)} \quad (6.324)$$

$$\rightarrow A_s = 0,001541 \text{ m}^2 = 15,41 \text{ cm}^2 \quad (6.325)$$

Ferraillage minimal :

$$A_{\min} = 0,23Bd \frac{f_{tj}}{f_e} = 0,23 \cdot 0,2 \cdot 0,45 \frac{2,1}{400} = 0,000098 \text{ m}^2 \quad (6.326)$$

$$\rightarrow A_{\min} = 0,98 \text{ cm}^2 \quad (6.327)$$

on peut donc adopter la section :

$$A_s = 15,41 \text{ cm}^2 \quad (6.328)$$

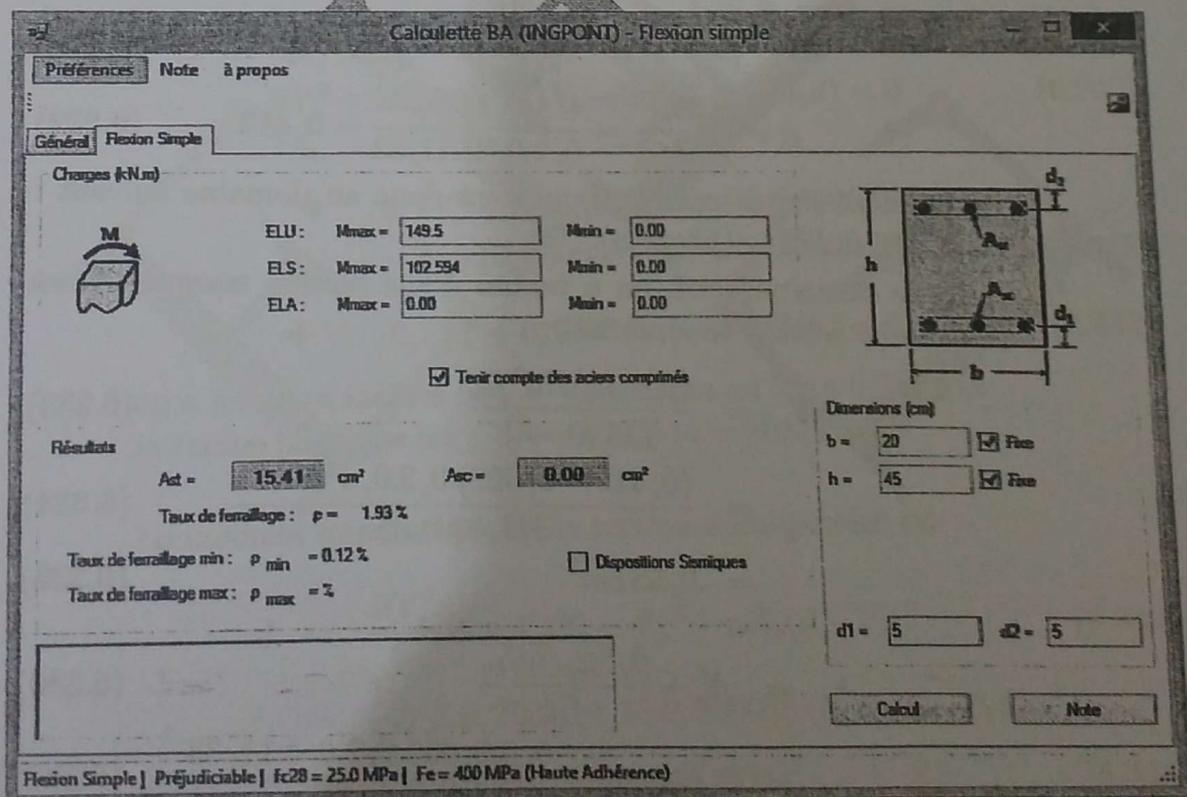


FIGURE 6.10 – Exercice 3 : Résultats de la calculatrice BA INGPONT

→ Exercice 4 :

Mêmes données que l'exercice précédent à part la résistance caractéristique en compression du béton qui devient $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$.

Mêmes questions à traiter.

⇒ Solution 4 :

1. Le moment ultime maximal reste le même que l'exercice précédent, soit :

$$M_u = 149,5 \text{ kN.m} = 0,1495 \text{ MN.m} \quad (6.329)$$

2. La résistance caractéristique du béton devient : $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$.

- (a) Le moment réduit limite reste également le même :

$$\mu_e = 0,392 \quad (6.330)$$

- (b) on a :

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 20}{1,5} = 11,33 \text{ MPa} \quad (6.331)$$

$$\mu = \frac{M_u}{Bd^2 f_{bu}} = \frac{0,1495}{0,2 \cdot 0,4^2 \cdot 11,33} = 0,412 \quad (6.332)$$

Le moment réduit calculé appartient donc au domaine suivant : $\mu_e \leq \mu \leq 0,472$ (pivot B).

- (c) Dans le domaine actif, on a besoin d'une section comprimée en plus d'une section tendue, soit :

$$A'_s = \frac{(\mu - \mu_e) B d^2 f_{bu}}{f_{su} (d - d')} \quad (6.333)$$

$$= \frac{(0,412 - 0,392) \cdot 0,2 \cdot 0,4^2 \cdot 11,33}{347,83 \cdot 0,35} \quad (6.334)$$

$$= 0,58 \text{ cm}^2 \quad (6.335)$$

$$A_s = A'_s + \frac{0,8 \alpha_e B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.336)$$

$$= 0,000058 + \frac{0,8 \cdot 0,668 \cdot 0,2 \cdot 0,4 \cdot 11,33}{347,83} \quad (6.337)$$

$$= 14,5 \text{ cm}^2 \quad (6.338)$$

(d) Un principe de ferrailage possible est présenté dans la figure (6.11).

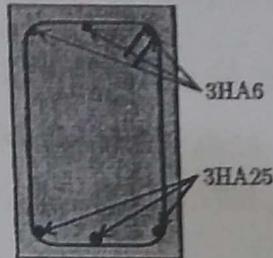


FIGURE 6.11 – Schéma du principe de ferrailage

3. Le moment à l'ELS reste aussi le même :

$$M_s = 102,594 \text{ kN.m} = 0,102594 \text{ MN.m} \quad (6.339)$$

On procède après à la vérification à l'ELS des sections $A_s = 14,5 \text{ cm}^2$ et $A'_s = 0,58 \text{ cm}^2$ calculées à l'ELU :

Calculons l'ordonnée de la fibre neutre Y_s par l'équation :

$$BY_s^2 + 2n(A'_s + A_s)Y_s - 2n(A'_s d' + A_s d) = 0 \quad (6.340)$$

$$\rightarrow 0,2Y_s^2 + 2.15.(0,00145 + 0,000058)Y_s - 2.15.(0,000058.0,05 + 0,00145.0,4) = 0 \quad (6.341)$$

$$\rightarrow 0,2Y_s^2 + 0,04524Y_s - 0,017487 = 0 \quad (6.342)$$

on a les deux racines : $Y_s = -0,4297 \text{ m}$ ou $Y_s = 0,2035 \text{ m}$
la racine physique est : $Y_s = 0,2035 \text{ m} = 20,35 \text{ cm}$

Le moment quadratique de la section homogénéisée est :

$$I = \frac{BY_s^3}{3} + nA'_s(Y_s - d')^2 + nA_s(d - Y_s)^2 \quad (6.343)$$

$$= \frac{1}{3}.0,2.0,2035^3 + 15.0,000058.(0,2035 - 0,05)^2 + 15.0,00145.(0,4 - 0,2035)^2 \quad (6.344)$$

$$\rightarrow I = 0,001422 \text{ m}^4 \quad (6.345)$$

$$\rightarrow K = \frac{M_s}{I} = \frac{0,102594}{0,001422} = 72,1477 \quad (6.346)$$

Les contraintes dans les armatures et le béton sont :

$$\sigma_s = nK(d - Y_s) = 15.72,1477.(0,4 - 0,2035) \quad (6.347)$$

$$\rightarrow \sigma_s = 212,655 \text{ MPa} \quad (6.348)$$

$$\sigma_{bc} = KY_s = 72,1477.0,2035 = 14,68 \text{ MPa} \quad (6.349)$$

Contraintes admissibles :

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0,6f_{c28} = 0,6.20 = 12 \text{ MPa} \quad (6.350)$$

$$\bar{\sigma}_s = \min \left[\frac{2}{3}f_e; \max \left(\frac{f_e}{2}; 110\sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (6.351)$$

$$= \min \left[\frac{2}{3}.400; \max \left(\frac{400}{2}; 110\sqrt{1,6.1,8} \right) \right] \quad (6.352)$$

$$= \min [266,67; \max (200; 186,68)] \quad (6.353)$$

$$\rightarrow \bar{\sigma}_s = 200 \text{ MPa} \quad (6.354)$$

On a donc :

$$\begin{cases} \sigma_{bc} = 14,68 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_{bc} = 12 \text{ MPa} \\ \sigma_s = 212,655 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_s = 200 \text{ MPa} \end{cases} \quad (6.355)$$

les contraintes admissibles ne sont pas vérifiées et on doit donc redimensionner la section considérée à l'ELS.

✳ Dimensionnement à l'ELS :

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2\bar{\sigma}_s} = \frac{0,102594}{0,2.0,4^2.200} = 0,01603 \quad (6.356)$$

on cherche ensuite le paramètre α_s en passant par l'équation :

$$\alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90\mu_s\alpha_s + 90\mu_s = 0 \quad (6.357)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 1,4427\alpha_s + 1,4427 = 0 \quad (6.358)$$

$$\rightarrow \alpha_s = 0,5258 \quad (\text{on retient } \alpha_s \in]0; 1]) \quad (6.359)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1 - \alpha_s)} \bar{\sigma}_s = \frac{0,5258}{15.(1 - 0,5258)} .200 \quad (6.360)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} = 14,784 \text{ MPa} \quad (6.361)$$

on a donc :

$$\sigma_{bc} = 14,784 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_{bc} = 12 \text{ MPa} \quad (6.362)$$

On a besoin d'une section tendue et une section comprimée :

$$\delta = \frac{d'}{d} = \frac{0,05}{0,4} = 0,125 \quad (6.363)$$

$$\alpha_l = \frac{n\bar{\sigma}_{bc}}{\bar{\sigma}_s + n\bar{\sigma}_{bc}} = \frac{15.12}{200 + 15.12} = 0,4737 \quad (6.364)$$

$$\rightarrow \mu_l = \frac{\alpha_l^2(1 - \alpha_l/3)}{2n(1 - \alpha_l)} = \frac{0,4737^2 \cdot (1 - 0,4737/3)}{2.15 \cdot (1 - 0,4737)} = 0,01197 \quad (6.365)$$

la section tendue est donnée par :

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{\alpha_l^2(1 - \delta) + 2n(\mu_s - \mu_l)(1 - \alpha_l)}{2n(1 - \alpha_l)(1 - \delta)} B d \quad (6.366) \\ &= \frac{0,4737^2(1 - 0,125) + 2.15 \cdot (0,01603 - 0,01197)(1 - 0,4737)}{2.15 \cdot (1 - 0,4737)(1 - 0,125)} \cdot 0,2 \cdot 0,4 \end{aligned}$$

$$\rightarrow A_s = 0,001508 \text{ m}^2 = 15,08 \text{ cm}^2 \quad (6.367)$$

$$A'_s = \frac{(\mu_s - \mu_l)(1 - \alpha_l)}{(\alpha_l - \delta)(1 - \delta)} B d \quad (6.368)$$

$$= \frac{(0,01603 - 0,01197) \cdot (1 - 0,4737)}{(0,4737 - 0,125) \cdot (1 - 0,125)} \cdot 0,2 \cdot 0,4 \quad (6.369)$$

$$\rightarrow A'_s = 0,00056 \text{ m}^2 = 5,6 \text{ cm}^2 \quad (6.370)$$

FIGURE 6.12 – Exercice 4 : Résultats de la calculette BA INGPOND

⇒ Exercice 5 :

Soit une poutre rectangulaire de largeur $B = 25 \text{ cm}$ soumise à un moment ultime : $M_u = 400 \text{ kN.m}$.

La classe de béton est de $f_{c28} = 27 \text{ MPa}$ et la nuance d'acier est FeE500.

1. Supposant que nous visons l'atteinte de l'ELU de compression du béton sans présence d'armatures comprimées, calculer la hauteur de la poutre ?
2. Calculer les sections d'armatures de la poutre à l'ELU ?

⇒ Solution 5 :

1. L'atteinte de l'ELU de compression du béton nous oblige de dimensionner la hauteur de la poutre sous le pivot B. Nous allons en plus considérer l'absence des armatures comprimées. Pour cela, nous allons utiliser le tableau (6.3). Donc on a :

$$H \in [2,423 \varphi; 3,423 \varphi] \quad (6.371)$$

on peut proposer la valeur minimale, soit :

$$H = 2,423 \varphi \quad (6.372)$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{M_u}{B f_{c28}}} = \sqrt{\frac{0,4}{0,25 \cdot 27}} = 0,2434 \quad (6.373)$$

$$\rightarrow H = 2,423 \cdot 0,2434 = 0,58 \text{ m} \quad (6.374)$$

on peut donc adopter la hauteur :

$$H = 60 \text{ cm} \quad (6.375)$$

2. on a :

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,78 \text{ MPa} \quad (6.376)$$

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 27}{1,5} = 15,3 \text{ MPa} \quad (6.377)$$

$$\rightarrow \mu = \frac{M_u}{B d^2 f_{bu}} = \frac{0,4}{0,25 \cdot (0,9 \cdot 0,6)^2 \cdot 15,3} = 0,3586 \quad (6.378)$$

calculons le moment réduit limite μ_e :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{500}{1,15 \cdot 200\,000} = 0,002174 \quad (6.379)$$

$$\rightarrow \epsilon_e = 2,174 \text{ ‰} \quad (6.380)$$

$$\rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 2,174} = 0,617 \quad (6.381)$$

$$\rightarrow \mu_e = 0,8 \alpha_e (1 - 0,4 \alpha_e) \quad (6.382)$$

$$= 0,8 \cdot 0,617 \cdot (1 - 0,4 \cdot 0,617) \quad (6.383)$$

$$= 0,372 \quad (6.384)$$

On est bien sur :

$$0,1859 \leq \mu \leq \mu_e : \quad (\text{Pivot B})$$

$$\alpha_u = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2\mu} \right) \quad (6.385)$$

$$= 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,3586} \right) \quad (6.386)$$

$$= 0,585 \quad (6.387)$$

$$\rightarrow \beta_u = 0,8 \alpha_u = 0,8 \cdot 0,585 = 0,468 \quad (6.388)$$

$$\rightarrow A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} = \frac{0,468 \cdot 0,25 \cdot 0,9 \cdot 6,15 \cdot 3}{434,78} = 0,002223 \text{ m}^2 \quad (6.389)$$

La section théorique d'armatures à adopter est donc :

$$A_s = 22,23 \text{ cm}^2 \quad (6.390)$$

La section réelle à disposer doit être supérieure ou égale à cette section théorique calculée et cela en respectant les diamètres d'armatures normalisés disponibles dans le marché.

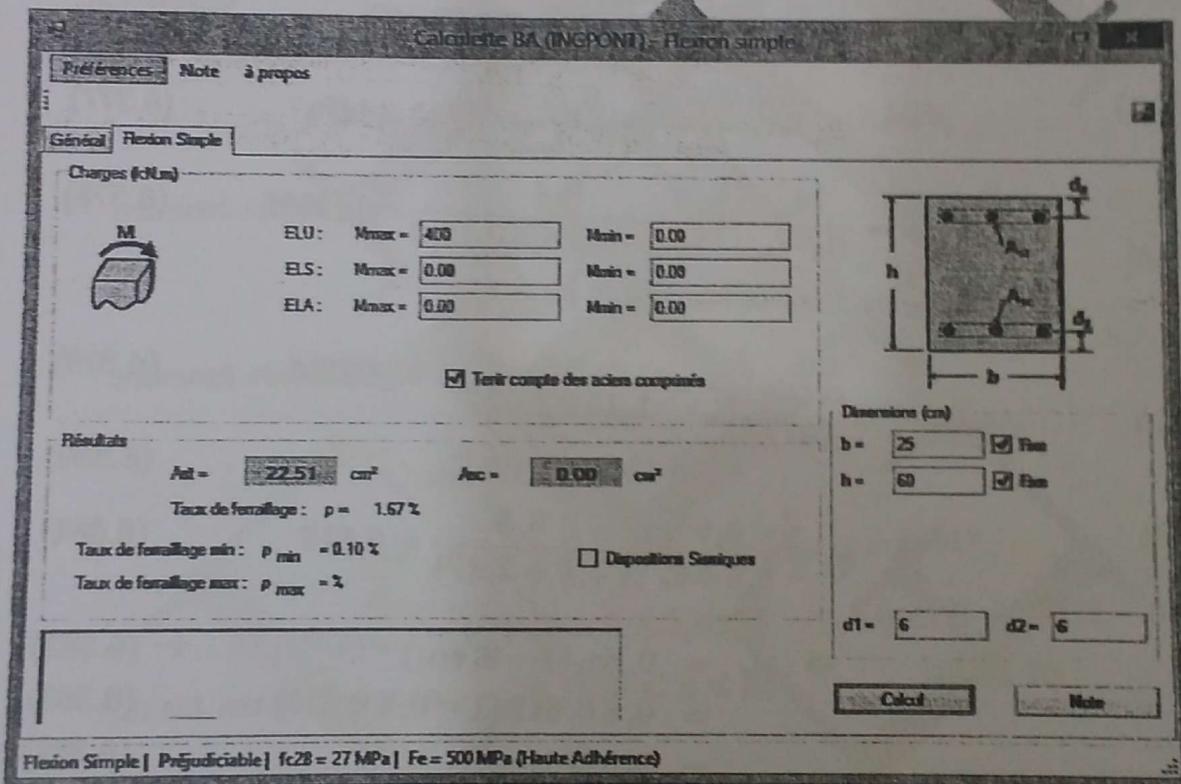


FIGURE 6.13 – Exercice 5 : Résultats de la calculatrice BA INGPONT

⇨ Exercice 6 :

Soit une poutre rectangulaire de dimensions ($22 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$) soumise à un moment ultime $M_u = 160 \text{ kN.m}$ et un moment de service $M_s = 120 \text{ kN.m}$.

La classe de béton est de $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et la nuance d'acier est FeE500. On prend des enrobages égaux à 5 cm .

Dimensionner la section considérée sachant qu'on est en fissuration préjudiciable ?

⇒ **Solution 6 :**

* Dimensionnement à l'ELU :

Les contraintes limites dans l'acier et le béton sont :

$$f_{su} = \frac{f_c}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,78 \text{ MPa} \quad (6.391)$$

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 25}{1,5} = 14,17 \text{ MPa} \quad (6.392)$$

moment réduit :

$$\mu = \frac{M_u}{B d^2 f_{bu}} = \frac{0,16}{0,22 \cdot 0,45^2 \cdot 14,17} = 0,253 \quad (6.393)$$

moment réduit limite :

$$\epsilon_b = \frac{f_c}{\gamma_s E_s} = \frac{500}{1,15 \cdot 200\,000} = 0,00217 = 2,17\text{‰} \quad (6.394)$$

$$\rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 2,17} = 0,617 \quad (6.395)$$

$$\rightarrow \mu_e = 0,8 \alpha_e (1 - 0,4 \alpha_e) = 0,8 \cdot 0,617 (1 - 0,4 \cdot 0,617) = 0,372 \quad (6.396)$$

on est sur le domaine : $0,1859 \leq \mu \leq \mu_e$ (Pivot B)

Calcul de la section d'armature :

$$\alpha_u = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,253}) = 0,371 \quad (6.397)$$

$$\rightarrow \beta_u = 0,8 \alpha_u = 0,8 \cdot 0,371 = 0,297 \quad (6.398)$$

$$\rightarrow A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} = \frac{0,297 \cdot 0,22 \cdot 0,45 \cdot 14,17}{434,78} = 0,000958 \text{ m}^2 \quad (6.399)$$

$$\rightarrow A_s = 9,58 \text{ cm}^2 \quad (6.400)$$

* Vérification à l'ELS :

Ordonnée de la fibre neutre Y_s :

$$BY_s^2 + 2n(A_s + A'_s)Y_s - 2n(A'_s d' + A_s d) = 0 \quad (6.401)$$

$$\rightarrow 0,22Y_s^2 + 2.15.0,000958Y_s - 2.15.0,000958.0,45 = 0 \quad (6.402)$$

$$\rightarrow 0,22Y_s^2 + 0,02874Y_s - 0,01293 = 0 \quad (6.403)$$

$$\rightarrow Y_s = -0,32 \text{ m} \quad \text{ou} \quad Y_s = 0,1858 \text{ m} \quad (6.404)$$

la solution physique est :

$$Y_s = 18,58 \text{ cm} \quad (6.405)$$

moment quadratique de la section homogénéisée

$$I = \frac{BY_s^3}{3} + nA'_s(Y_s - d')^2 + nA_s(d - Y_s)^2 \quad (6.406)$$

$$= \frac{1}{3}.0,22.0,1858^3 + 15.0,000958.(0,45 - 0,1858)^2 \quad (6.407)$$

$$= 0,001473 \quad (6.408)$$

$$\rightarrow K = \frac{M_s}{I} = \frac{0,12}{0,001473} = 81,4664 \quad (6.409)$$

contraintes dans l'acier et le béton :

$$\sigma_s = nK(d - Y_s) = 15.81,4664.(0,45 - 0,1858) = 322,85 \text{ MPa} \quad (6.410)$$

$$\sigma_{bc} = KY_s = 81,4664.0,1858 = 15,14 \text{ MPa} \quad (6.411)$$

Contraintes admissibles :

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0,6f_{c28} = 0,6.25 = 15 \text{ MPa} \quad (6.412)$$

$$\bar{\sigma}_s = \min \left[\frac{2}{3}f_c; \max \left(\frac{f_e}{2}; 110\sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (6.413)$$

$$= \min \left[\frac{2}{3}.500; \max \left(\frac{500}{2}; 110\sqrt{1,6.2,1} \right) \right] \quad (6.414)$$

$$= \min [333,33; \max (250; 201,63)] \quad (6.415)$$

$$= 250 \text{ MPa} \quad (6.416)$$

d'où les inégalités :

$$\begin{cases} \sigma_{bc} = 15,14 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_{bc} = 15 \text{ MPa} \\ \sigma_s = 322,85 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_s = 250 \text{ MPa} \end{cases} \quad (6.417)$$

les contraintes admissibles ne sont donc pas vérifiées à l'ELS. Il faudra redimensionner les armatures à l'ELS.

* Dimensionnement à l'ELS :

Moment réduit :

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2\bar{\sigma}_s} = \frac{0,12}{0,22 \cdot 0,45^2 \cdot 250} = 0,01077 \quad (6.418)$$

déterminons le paramètre α_s :

$$\alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90\mu_s\alpha_s + 90\mu_s = 0 \quad (6.419)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90 \cdot 0,01077\alpha_s + 90 \cdot 0,01077 = 0 \quad (6.420)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 0,9693\alpha_s + 0,9693 = 0 \quad (6.421)$$

la solution appartenant à l'intervalle]0; 1[est :

$$\alpha_s = 0,4555 \quad (6.422)$$

la contrainte dans le béton est :

$$\sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1-\alpha_s)} \bar{\sigma}_s = \frac{0,4555}{15(1-0,4555)} 250 = 13,943 \text{ MPa} \quad (6.423)$$

on a donc :

$$\sigma_{bc} = 13,94 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{bc} = 15 \text{ MPa} \quad (6.424)$$

On a besoin d'une section tendue seule :

$$A_s = \frac{Bd\alpha_s^2}{2n(1-\alpha_s)} = \frac{0,22 \cdot 0,45 \cdot 0,4555^2}{2 \cdot 15 \cdot (1-0,4555)} = 0,001257 \text{ m}^2 \quad (6.425)$$

$$\rightarrow A_s = 12,57 \text{ cm}^2 \quad (6.426)$$

Ferraillage minimal :

$$A_{\min} = 0,23Bd \frac{f_{tj}}{f_e} = 0,23 \cdot 0,22 \cdot 0,45 \cdot 9,0 \cdot 5 \frac{2,1}{500} = 0,000096 \text{ m}^2 \quad (6.427)$$

$$\rightarrow A_{\min} = 0,96 \text{ cm}^2 \quad (6.428)$$

on peut donc adopter la section :

$$A_s = 12,57 \text{ cm}^2 \quad (6.429)$$

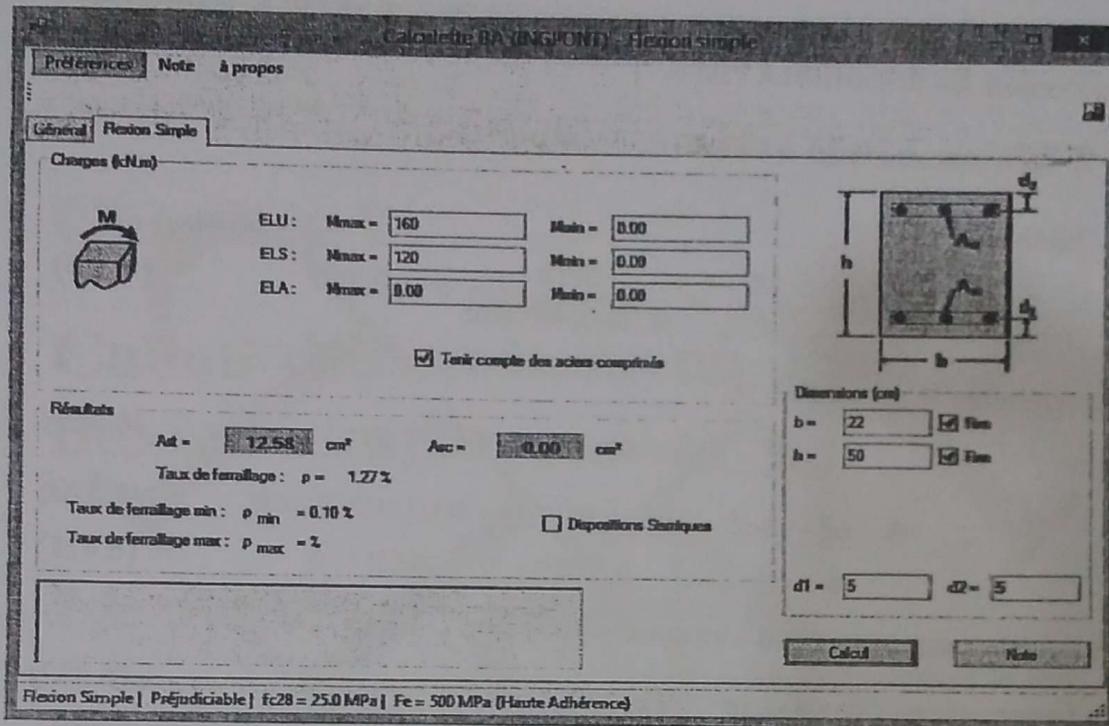
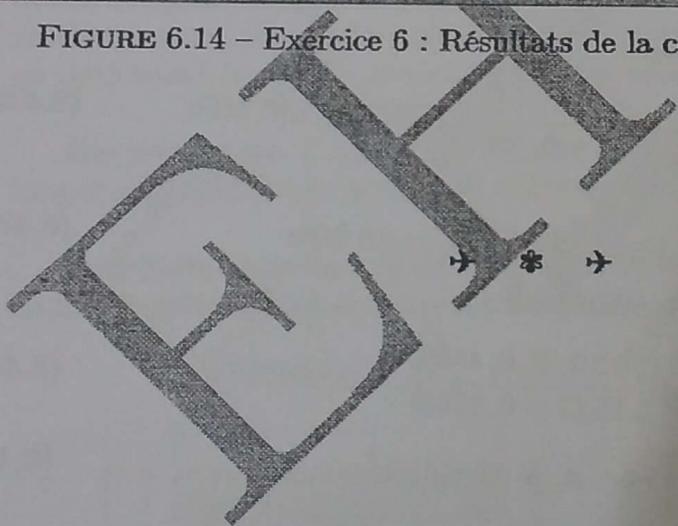


FIGURE 6.14 – Exercice 6 : Résultats de la calculatrice BA INGPONT



Chapitre 7

Calcul des sections en T en flexion simple

7.1 Géométrie et définitions

Comme déjà vu, une poutre en T nous permet d'augmenter le taux de béton comprimée dans une poutre ou plancher. Cela nous permet, quand une section rectangulaire est insuffisante, de prévoir une résistance suffisante tout en optimisant le volume des matériaux en adoptant une poutre en T.

Les poutres en T sont des éléments couramment utilisés dans les différentes applications du génie civil telles que les ponts, bâtiments, ...

Nous présentons dans la figure (7.1) une géométrie simplifiée d'une poutre en T. Les différents éléments constitutifs de la poutre sont définis comme suit :

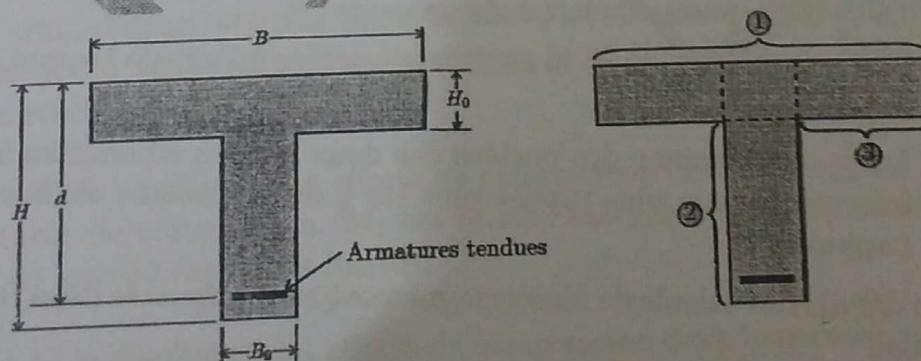


FIGURE 7.1 – Géométrie d'une poutre en T

- La partie ① s'appelle "Table de compression" ;
- La partie ② s'appelle "Nervure" ou "Âme" de la poutre ;
- Les parties ③ s'appellent "Ailes" de la table de compression ;

Cette forme en T nous permet de réduire le volume de béton tendu et d'augmenter le volume de béton comprimé. Cela est évidemment avantageux puisqu'il permet d'optimiser les matériaux et les coûts des constructions.

Les dimensions de la table de compression ne peuvent pas être quelconques. La largeur à considérer d'une aile de la table de compression ne doit pas dépasser la plus petite des valeurs suivantes (voir figure 7.2) :

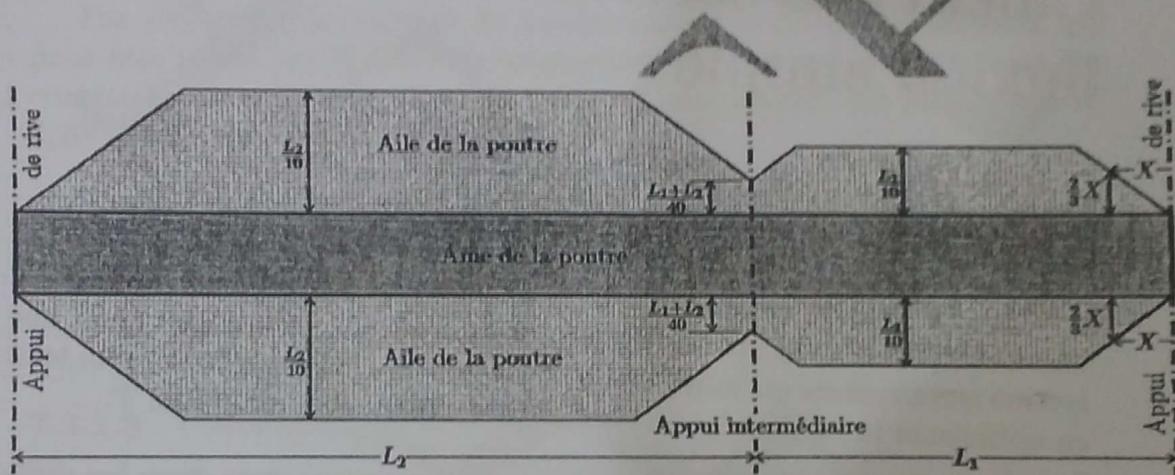


FIGURE 7.2 → Dimensions de calcul de la table de compression

1. La moitié de la distance entre les faces voisines de deux nervures consécutives ;
2. Le $\frac{1}{10}$ de la portée de la travée en cours ;
3. Les $\frac{2}{3}$ de la distance de la section considérée à l'axe de l'appui de bout le plus proche ;
4. Le $\frac{1}{40}$ de la somme des portées des deux travées adjacentes à l'appui intermédiaire le plus proche plus les $\frac{2}{3}$ de la distance de la section à l'appui.

Les détails des calculs de dimensionnement sont présentés dans les parties suivantes.

7.2 Dimensionnement à l'ELU

Pour calculer une poutre en T à l'ELU, deux cas sont à distinguer (en utilisant les diagrammes de contraintes simplifiés) selon que la zone comprimée de hauteur $0,8Y_u$ est située complètement dans la table de compression ou s'étend à la nervure de la poutre.

7.2.1 Calcul sans armatures comprimées

7.2.1.1 Moment de comparaison

Par définition, le moment de comparaison correspond au moment qui peut être repris par la table de compression en utilisant le diagramme des contraintes simplifié. Ça correspond donc à une hauteur du diagramme de $0,8Y_u = H_0$, on a donc :

$$Y_u = \frac{H_0}{0,8} = 1,25H_0 \quad (7.1)$$

$$\rightarrow M_0 = F.Z = 0,8Y_u B f_{bu} (d - 0,4Y_u) = H_0 B f_{bu} \left(d - \frac{H_0}{2} \right) \quad (7.2)$$

7.2.1.2 Calcul pour le cas : $M_u \leq M_0$

La compression n'intéresse qu'une partie de la table de compression. On calcule la section comme une section rectangulaire de hauteur utile d et de largeur B . Les armatures sont calculées comme pour une section rectangulaire.

7.2.1.3 Calcul pour le cas : $M_u \geq M_0$

La compression intéresse toute la hauteur de la table de compression et une partie de la nervure. On décompose la section en T en deux parties comme schématisé dans la figure (7.3).

Soit F_1 la résultante des efforts de compression développée dans les ailes de la table de compression. M_1 est le moment généré par F_1 et réduit au centre de gravité des aciers tendus.

Soit F_2 la résultante des efforts de compression dans la nervure prolongée jusqu'au nu supérieur de la poutre (voir figure 7.3). M_2 est le moment dû à F_2 et réduit au centre de gravité des aciers tendus.

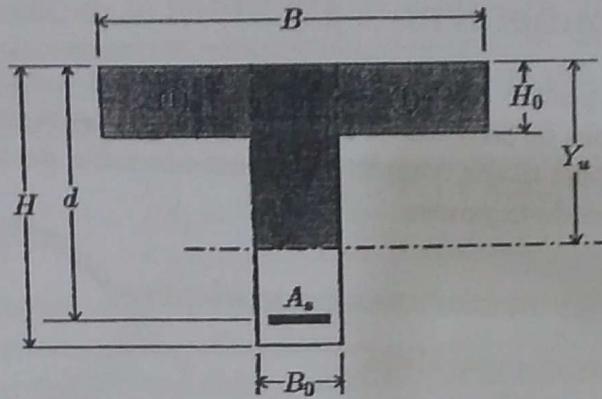


FIGURE 7.3 – Parties comprimées en flexion simple d'une poutre en T

On a donc :

$$F_1 = f_{bu} H_0 (B - B_0) \quad (7.3)$$

$$M_1 = F_1 \left(d - \frac{H_0}{2} \right) = f_{bu} H_0 (B - B_0) \left(d - \frac{H_0}{2} \right) \quad (7.4)$$

$$F_2 = 0,8 Y_u B_0 f_{bu} \quad (7.5)$$

$$M_2 = F_2 (d - 0,4 Y_u) = 0,8 Y_u B_0 f_{bu} (d - 0,4 Y_u) \quad (7.6)$$

$$F_s = A_s \sigma_s \quad (7.7)$$

L'équilibre de la section est traduit par les équations :

$$\begin{cases} A_s \sigma_s - f_{bu} H_0 (B - B_0) - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} = 0 \\ M_u - f_{bu} H_0 (B - B_0) \left(d - \frac{H_0}{2} \right) - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} (d - 0,4 Y_u) = 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

Pour une section rectangulaire sans armatures comprimées, on avait obtenu :

$$\begin{cases} A_s \sigma_s - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} = 0 \\ M_u - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} (d - 0,4 Y_u) = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

posons :

$$\begin{cases} \bar{M} = M_u - f_{bu} H_0 (B - B_0) \left(d - \frac{H_0}{2} \right) \\ \bar{A}_s \bar{\sigma}_s = A_s \sigma_s - f_{bu} H_0 (B - B_0) \end{cases} \quad (7.10)$$

en remplaçant dans les équations du système (7.8), on obtient le système :

$$\begin{cases} \bar{A}_s \bar{\sigma}_s - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} = 0 \\ \bar{M} - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} (d - 0,4 Y_u) = 0 \end{cases} \quad (7.11)$$

Formellement, on se ramène avec ce système au cas d'une section rectangulaire, sans armatures comprimées, sollicitée par un moment \bar{M} où l'on doit calculer la section \bar{A}_s . Une fois le calcul est effectué, la section à adopter réellement est obtenue par :

$$A_s = \frac{f_{bu}H_0(B - B_0) + \bar{A}_s\bar{\sigma}_s}{\sigma_s} \quad (7.12)$$

D'après la définition de \bar{M} , le moment généré par les contraintes développées dans les ailes est introduit dans \bar{M} . Le développement réalisé revient à calculer la section rectangulaire constituée par la nervure prolongée jusqu'au nu supérieur par le moment \bar{M} .

Le moment réduit est défini dans ce cas par :

$$\mu = \frac{\bar{M}}{B_0 d^2 f_{bu}} \quad (\text{Attention à } B_0 \text{ au lieu de } B) \quad (7.13)$$

Le développement réalisé pour une section sans armatures comprimées correspond évidemment à $\mu \leq \mu_e$.

Dans le cas contraire ($\mu > \mu_e$), on a recours à des armatures comprimées et le développement est présenté dans la partie suivante.

7.2.2 Calcul avec armatures comprimées

L'introduction des armatures comprimées entraîne les équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} A_s \sigma_s - A'_s \sigma'_s - f_{bu} H_0 (B - B_0) - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} = 0 \\ M_u - f_{bu} H_0 (B - B_0) \left(d - \frac{H_0}{2}\right) - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} (d - 0,4 Y_u) - A'_s \sigma'_s (d - d') = 0 \end{cases} \quad (7.14)$$

Pour une section rectangulaire sans armatures comprimées, on avait obtenu :

$$\begin{cases} A_s \sigma_s - A'_s \sigma'_s - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} = 0 \\ M_u - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} (d - 0,4 Y_u) - A'_s \sigma'_s (d - d') = 0 \end{cases} \quad (7.15)$$

posons :

$$\begin{cases} \bar{M} = M_u - f_{bu} H_0 (B - B_0) \left(d - \frac{H_0}{2}\right) \\ \bar{A}_s \bar{\sigma}_s = A_s \sigma_s - f_{bu} H_0 (B - B_0) \end{cases} \quad (7.16)$$

en remplaçant dans les équations du système (7.14), on obtient le système :

$$\begin{cases} \bar{A}_s \bar{\sigma}_s - A'_s \sigma'_s - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} = 0 \\ \bar{M} - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} (d - 0,4 Y_u) - A'_s \sigma'_s (d - d') = 0 \end{cases} \quad (7.17)$$

Une fois les sections A'_s et \bar{A}_s sont calculées comme pour une section rectangulaire, on adopte les sections de ferrailage A'_s et A_s avec :

$$A_s = \bar{A}_s + H_0(B - B_0) \frac{f_{bu}}{f_{su}} \quad (7.18)$$

Comme déjà adopté par le règlement pour les sections rectangulaires, les armatures comprimées ne doivent pas reprendre là aussi plus de 40% du moment extérieur appliqué, soit :

$$f_{su} A'_s (d - d') \leq 0,4 M_u \quad (7.19)$$

7.3 Dimensionnement d'une section en T à l'ELS

7.3.1 Vérification à l'ELS

On adoptant un diagramme de contraintes linéaire élastique à l'ELS, on obtient le schéma de la figure (7.4).

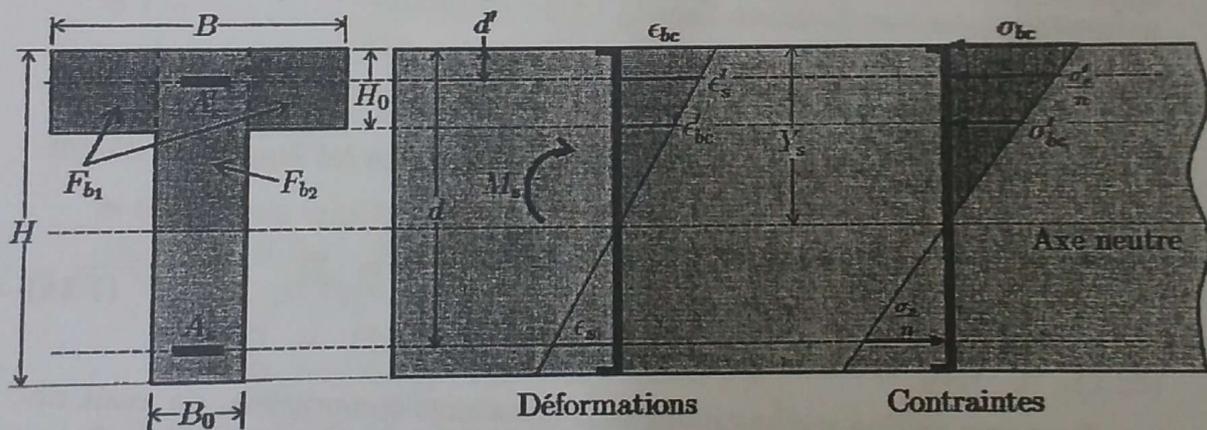


FIGURE 7.4 – Diagrammes des contraintes et déformations à l'ELS d'une poutre en T

On a :

$$\begin{cases} F_{b1} = H_0(B - B_0) \frac{\sigma_{bc} + \sigma'_{bc}}{2} \\ F_{b2} = \frac{B_0 y_s \sigma_{bc}}{2} \\ F_s = A_s \sigma_s \\ F'_s = A'_s \sigma'_s \end{cases} \quad (7.20)$$

On définit après le moment de comparaison à l'ELS qui représente le moment maximal pouvant être repris par la table de compression seule. Cela correspond à $Y_s = H_0$, soit :

$$M_0 = \frac{BH_0}{2} \bar{\sigma}_{bc} \left(d - \frac{H_0}{3} \right) \quad (7.21)$$

→ Cas où $M_s \leq M_0$:

Dans ce cas on a : $Y_s \leq H_0$ et on calculera alors la section en T comme une section rectangulaire de largeur B et de hauteur H .

→ Cas où $M_s > M_0$:

On a dans ce cas : $Y_s > H_0$ et on a une vraie section en T à prendre en compte.

Les démonstrations sont similaires à celles réalisées pour une section rectangulaire et elles ne seront pas présentées ici. Toutefois, les étapes essentielles de vérification sont comme suit :

◆ On cherche la position de l'axe neutre (centre de gravité de la section homogénéisée) en résolvant l'équation :

$$B_0 Y_s^2 + [2H_0(B - B_0) + 2n(A_s + A'_s)] Y_s - [2n(A_s d + A'_s d') + H_0^2(B - B_0)] = 0 \quad (7.22)$$

◆ On calcule ensuite le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre :

$$I = \frac{B_0}{3} Y_s^3 + \frac{(B - B_0) H_0^3}{12} + (B - B_0) H_0 \left(Y_s - \frac{H_0}{2} \right)^2 + n [A_s (d - Y_s)^2 + A'_s (Y_s - d')^2] \quad (7.23)$$

◆ Puis on calcule les contraintes dans le béton et les aciers :

$$K = \frac{M_s}{I} \quad (7.24)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_{bc} = KY_s \\ \sigma_s = nK(d - Y_s) \\ \sigma'_s = nK(Y_s - d') \end{cases} \quad (7.25)$$

◆ Enfin, on vérifie les contraintes admissibles à l'ELS :

$$\begin{cases} \sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc} \\ \sigma_s \leq \bar{\sigma}_s \\ \sigma'_s \leq \bar{\sigma}'_s \end{cases} \quad (7.26)$$

Si ces trois inégalités sont satisfaites, la section passe à l'ELS. Sinon, il faut redimensionner la section à l'ELS.

7.3.2 Calcul à l'ELS

On considère les notations suivantes :

$$\begin{cases} \gamma = \frac{H_0}{d} \\ \theta = \frac{B}{B_0} \\ \alpha_s = \frac{Y_s}{d} \end{cases} \quad \text{***} \quad \begin{cases} \mu_s = \frac{M_s}{B_0 d^2 \bar{\sigma}_s} \\ \delta = \frac{d'}{d} \end{cases} \quad (7.27)$$

Pour économiser l'utilisation des armatures, on considère que $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$.

En utilisant le théorème de THALÈS on a :

$$\frac{\sigma_{bc}}{Y_s} = \frac{\sigma_s}{n(d - Y_s)} \quad \rightarrow \quad \sigma_{bc} = \frac{\sigma_s Y_s}{n(d - Y_s)} \quad (7.28)$$

en l'utilisant une deuxième fois, on trouve :

$$\frac{\sigma'_{bc}}{Y_s - H_0} = \frac{\sigma_s}{n(d - Y_s)} \quad \rightarrow \quad \sigma'_{bc} = \frac{\sigma_s (Y_s - H_0)}{n(d - Y_s)} \quad (7.29)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} + \sigma'_{bc} = \frac{\sigma_s Y_s}{n(d - Y_s)} + \frac{\sigma_s (Y_s - H_0)}{n(d - Y_s)} = \frac{\sigma_s (2Y_s - H_0)}{n(d - Y_s)} \quad (7.30)$$

$$(7.20) \quad \rightarrow \quad F_{b1} = H_0 (B - B_0) \frac{\sigma_{bc} + \sigma'_{bc}}{2} \quad (7.31)$$

$$= \frac{1}{2} \gamma d B_0 (\theta - 1) \frac{\sigma_s (2Y_s - H_0)}{n(d - Y_s)} \quad (7.32)$$

$$= \frac{1}{2} \gamma (\theta - 1) d B_0 \frac{\sigma_s (2\alpha_s d - \gamma d)}{n(d - \alpha_s d)} \quad (7.33)$$

sachant que $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$, on aboutit à l'expression :

$$F_{b1} = \frac{\gamma (\theta - 1) (2\alpha_s - \gamma)}{2n(1 - \alpha_s)} d B_0 \bar{\sigma}_s \quad (7.34)$$

On peut démontrer de la même façon que le bras de levier de F_{b1} par rapport au centre de gravité des aciers tendus est exprimé par :

$$Z_1 = \frac{3(2\alpha_s - \gamma) - \gamma(3\alpha_s - 2\gamma)}{3(2\alpha_s - \gamma)} d \quad (7.35)$$

on démontre également que :

$$F_{b2} = \frac{\alpha_s^2}{2n(1 - \alpha_s)} B_0 d \bar{\sigma}_s \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{3 - \alpha_s}{3} d \quad (7.36)$$

$$F'_s = \frac{\alpha_s - \delta}{1 - \alpha_s} A'_s \bar{\sigma}_s \quad \text{et} \quad Z' = (1 - \delta) d \quad (7.37)$$

7.3.2.1 Cas où $A'_s = 0$:

L'équilibre des moments lorsqu'ils sont réduits par rapport au centre de gravité des armatures tendues permet d'écrire :

$$\alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - [90\mu_s + 3\gamma(2-\gamma)(\theta-1)]\alpha_s + 90\mu_s - \gamma^2(\theta-1)(2\gamma-3) = 0 \quad (7.38)$$

l'unique racine dans l'intervalle $]0; 1[$ de l'équation (7.38) permet de déterminer la contrainte du béton :

$$(7.28) \quad \rightarrow \quad \sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1-\alpha_s)} \bar{\sigma}_s \quad (7.39)$$

Si on a $\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc}$, la section d'armature tendue à disposer est A_s donnée par :

$$A_s = \frac{F_b}{\bar{\sigma}_s} = \frac{F_{b1} + F_{b2}}{\bar{\sigma}_s} \quad (7.40)$$

$$\rightarrow \quad A_s = \frac{\alpha_s^2 + \gamma(\theta-1)(2\alpha_s - \gamma)}{2n(1-\alpha_s)} B_0 d \quad (7.41)$$

dans le cas contraire, une section d'acier comprimée A'_s doit être prévue en plus d'une section tendue A_s .

7.3.2.2 Cas où $A'_s \neq 0$:

Malgré que dans ce cas on a théoriquement $\sigma_{bc} > \bar{\sigma}_{bc}$, on doit respecter le non dépassement de la contrainte admissible du béton et la contrainte supplémentaire est à reprendre par des armatures comprimées :

$$\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc} \quad \rightarrow \quad \alpha_s \leq \alpha_l = \frac{n\bar{\sigma}_{bc}}{n\bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_s} \quad \rightarrow \quad \mu_s \leq \mu_l \quad (7.42)$$

avec :

$$\mu_l = \frac{\gamma(\theta-1)[3\alpha_l(2-\gamma) + \gamma(2\gamma-3)] + \alpha_l^2(3-\alpha_l)}{6n(1-\alpha_l)} \quad (7.43)$$

on pose : $\alpha_s = \alpha_l$ (pour l'économie $\sigma_{bc} = \bar{\sigma}_{bc}$). D'où :

$$M_{b1} = \frac{\gamma(\theta-1)[3(2\alpha_l - \gamma) - \gamma(3\alpha_l - 2\gamma)]}{6n(1-\alpha_l)} B_0 d^2 \bar{\sigma}_s \quad (7.44)$$

$$M_{b2} = \frac{\alpha_l^2(3-\alpha_l)}{6n(1-\alpha_l)} B_0 d^2 \bar{\sigma}_s \quad (7.45)$$

$$\sigma'_s = \frac{\alpha_l - \delta}{1-\alpha_l} \bar{\sigma}_s \quad (7.46)$$

et les sections d'armatures se calculent par :

$$A'_s = \frac{(\mu_s - \mu_t)(1 - \alpha_1)}{(\alpha_1 - \delta)(1 - \delta)} B_0 d \quad (7.47)$$

$$A_s = \frac{2n(1 - \alpha_1)(\mu_s - \mu_t) + (1 - \delta)[\alpha_1^2 + \gamma(\theta - 1)(2\alpha_1 - \gamma)]}{2n(1 - \alpha_1)(1 - \delta)} B_0 d \quad (7.48)$$

on a $\mu_s \geq \mu_t$.

7.3.3 Ferrailage minimal

Rappelons les coordonnées du centre de gravité et le moment d'inertie quadratique I d'une section en T (figure 7.13).

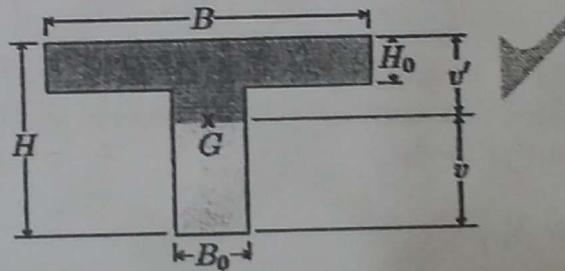


FIGURE 7.5 – Schéma d'une poutre en T

Position du centre de gravité verticalement :

$$v' = \frac{B_0 H^2 + (B - B_0) H_0^2}{2[B_0 H + (B - B_0) H_0]} \quad (7.49)$$

$$v = H - v' \quad (7.50)$$

le moment d'inertie est exprimé par :

$$I = B_0 \frac{H^3}{3} + (B - B_0) \frac{H_0^3}{3} - [B_0 H + (B - B_0) H_0] v'^2 \quad (7.51)$$

Comme pour une section rectangulaire, une section en T doit contenir une section d'armatures minimale capable de reprendre la contrainte de rupture du béton en traction f_{t28} sans que la contrainte d'acier dépasse f_e .

En considérant le moment appliqué positif, la contrainte de la fibre la plus tendue du béton est donnée par :

$$\sigma_b = f_{tj} = \frac{Mv}{I} \quad \rightarrow \quad M = f_{tj} \frac{I}{v} \quad (7.52)$$

d'après (7.40), on a :

$$A_{\min} = \frac{F_b}{\bar{\sigma}_s} = \frac{F_b}{f_e} \quad (7.53)$$

on a :

$$M = F_b Z_b \quad \rightarrow \quad A_{\min} = \frac{M}{Z_b f_e} \quad (7.54)$$

pour le ferrailage minimal, on considère que : $Z_b = 0,9d = 0,81H$

$$\rightarrow A_{\min} = \frac{f_{tj} \frac{I}{v}}{0,81H f_e} \quad (7.55)$$

$$\rightarrow A_{\min} = \frac{I}{0,81Hv} \frac{f_{tj}}{f_e} \quad (7.56)$$

Dans le cas d'un moment négatif, la formule (7.56) reste valable mais en remplaçant v par v' .

7.4 Exercices

•• Exercice 1 :

Considérons un plancher à poutres comme schématisé dans la figure (7.6). Cet hourdis supporte une charge variable, de durée d'application supérieure à 24 h, de : $Q = 10 \text{ kN/m}^2$.

L'enrobage est de 3 cm, la résistance caractéristique du béton est $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et l'acier est de nuance FeE500.

1. Déterminer le moment ultime et le moment de service de dimensionnement des poutres ?
2. En considérant que la dalle participe à la résistance de la poutre, déterminer la largeur des ailes participante à la résistance de la poutre et donner une schématisation de la poutre en T ?
3. Dimensionner les armatures de la poutre à l'ELU fondamental ?

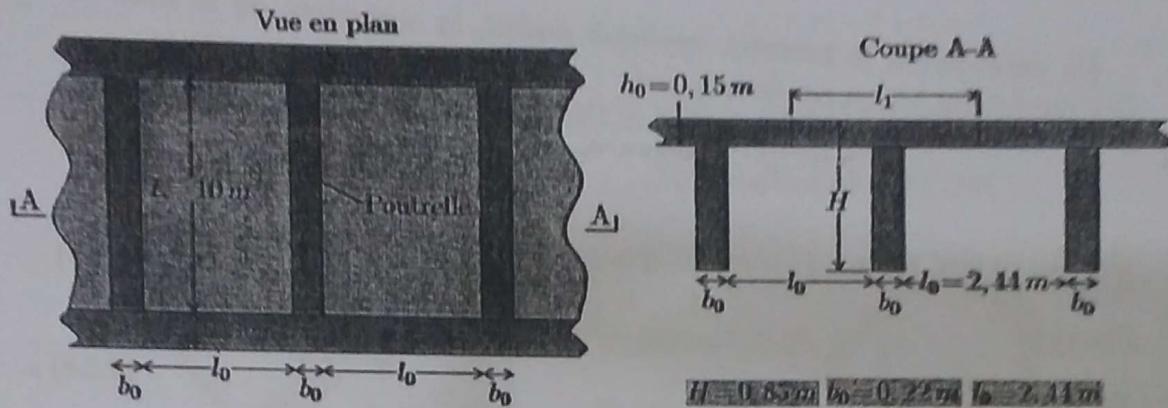


FIGURE 7.6 – Schéma de l'exercice 1

4. Si la dalle de la poutre ne participe à la résistance de celle-ci, dimensionner les armatures de la poutre rectangulaire à l'ELU ?
5. dimensionner la poutre en T à l'ELS en considérant que la fissuration est préjudiciable ?

⇒ Solution 1 :

1. La longueur l_1 qui définit la largeur de la charge permanente transmise à chaque poutre est :

$$l_1 = l_0 + b_0 = 2,44 + 0,22 = 2,66 \text{ m} \quad (7.57)$$

la charge d'exploitation appliquée à la poutre par mètre linéaire (ml) est :

$$q = l_1 Q = 2,66 \cdot 10 = 26,6 \text{ kN/ml} \quad (7.58)$$

La charge permanente à prendre en compte est composée des deux parties suivantes :

— Poids propre de la dalle :

$$g_d = l_1 h_0 \gamma_b = 2,66 \cdot 0,15 \cdot 25 \quad (7.59)$$

$$= 9,975 \text{ kN/ml} \quad (7.60)$$

— Poids propre de la nervure :

$$g_n = b_0 (H - h_0) \gamma_b = 0,22 \cdot (0,85 - 0,15) \cdot 25 \quad (7.61)$$

$$= 3,85 \text{ kN/ml} \quad (7.62)$$

la charge permanente est donc :

$$g = g_a + g_n = 9,975 + 3,85 = 13,825 \text{ kN/ml} \quad (7.63)$$

Le moment ultime de dimensionnement est donné donc par :

$$M_u = (1,35g + 1,5q) \frac{L^2}{8} \quad (7.64)$$

$$= (1,35 \cdot 13,825 + 1,5 \cdot 26,6) \frac{10^2}{8} \quad (7.65)$$

$$\rightarrow M_u = 732,047 \text{ kN.m} \quad (7.66)$$

Le moment de service est :

$$M_s = (g + q) \frac{L^2}{8} \quad (7.67)$$

$$= (13,825 + 26,6) \frac{10^2}{8} \quad (7.68)$$

$$\rightarrow M_s = 505,313 \text{ kN.m} \quad (7.69)$$

2. La largeur de l'aile de la table de compression qui participe à la résistance de la poutre est définie par :

$$l_a = \min \left(\frac{l_0}{2}, \frac{L}{10}, \frac{2}{3}x \right) \quad (7.70)$$

avec $x = L/2 + 0,15 = 5 + 0,15 = 5,15 \text{ m}$. d'où :

$$l_a = \min \left(\frac{2,44}{2}, \frac{10}{10}, \frac{2}{3} \cdot 5,15 \right) = \min (1,22; 1; 3,43) = 1 \text{ m} \quad (7.71)$$

Le schéma de la poutre en T à calculer est présenté dans la figure (7.7).

3. Calculons le moment de comparaison de la section en T :

$$Y_u = 1,25h_0 = 1,25 \cdot 0,15 = 0,1875 \text{ m} \quad (7.72)$$

$$f_{bu} = \frac{0,85f_{c28}}{\theta\gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 25}{1,5} = 14,17 \text{ MPa} \quad (7.73)$$

$$\rightarrow M_0 = h_0 b f_{bu} \left(d - \frac{h_0}{2} \right) \quad (7.74)$$

$$= 0,15 \cdot 2,22 \cdot 14,17 \left(0,82 - \frac{0,15}{2} \right) \quad (7.75)$$

$$= 3,515 \text{ MN.m} \quad (7.76)$$

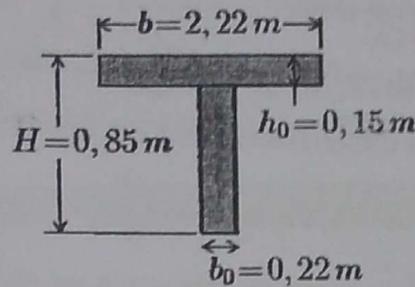


FIGURE 7.7 – Schéma de la poutre en T

On est donc sur le cas où :

$$M_u = 0,732 \text{ MN.m} \leq M_0 = 3,515 \text{ MN.m} \quad (7.77)$$

la section en T considérée peut être donc dimensionnée comme une section rectangulaire de dimensions $(b \times H)$. Pour cela on suit les étapes suivantes :

Le moment réduit est :

$$\mu = \frac{M_u}{bd^2 f_{cm}} = \frac{0,732}{2,22 \cdot (0,82)^2 \cdot 14,17} = 0,0346 \quad (7.78)$$

on est sur le sous domaine : $0 \leq \mu \leq 0,1042$ (pivot A)

Le calcul des armatures dans ce cas passe par la recherche de α_u en résolvant l'équation suivante :

$$15\alpha_u^4 - 60\alpha_u^3 + (20 - 4\mu)\alpha_u^2 + 8\mu\alpha_u - 4\mu = 0 \quad (7.79)$$

$$\rightarrow 15\alpha_u^4 - 60\alpha_u^3 + 19,862\alpha_u^2 + 0,2768\alpha_u - 0,1384 = 0 \quad (7.80)$$

en cherchant la solution comprise entre 0 et 0,167 on trouve :

$$\alpha_u = 0,0881 \quad (7.81)$$

on a d'un autre côté :

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,783 \text{ MPa} \quad (7.82)$$

$$\beta_u = \frac{15\alpha_u^2 - 40\alpha_u^3}{3(1 - \alpha_u)^2} = \frac{15 \cdot (0,0881)^2 - 40 \cdot (0,0881)^3}{3(1 - 0,0881)^2} = 0,0357 \quad (7.83)$$

$$\rightarrow A_s = \frac{\beta_u b d f_{bu}}{f_{su}} = \frac{0,0357 \cdot 2,22 \cdot 0,67 \cdot 14,17}{434,783} \quad (7.84)$$

$$\rightarrow A_s = 21,18 \text{ cm}^2 \quad (7.85)$$

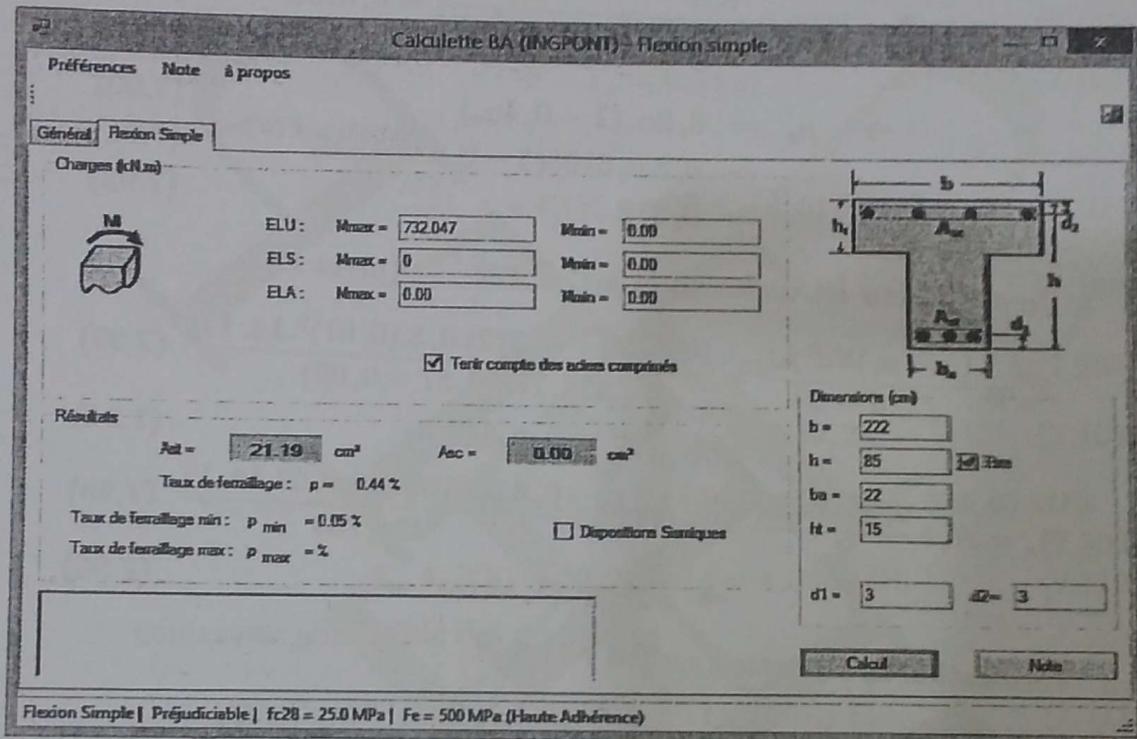


FIGURE 7.8 – Exercice 1 : Résultats de la calcul BA INGPONT

4. Dans le cas où la dalle ne participe pas à la résistance de la poutre, on est sur le cas d'une section rectangulaire de largeur $b' = 0,22 \text{ m}$ et de hauteur $H' = 0,7 \text{ m}$.

Moment réduit :

$$\mu = \frac{M_u}{b' d^2 f_{bu}} = \frac{0,732}{0,22 \cdot (0,67)^2 \cdot 14,17} = 0,5231 \quad (7.86)$$

cette valeur du moment réduit est supérieure à la valeur limite de dimensionnement en flexion simple qui est de 0,472. On peut recourir à une augmentation de la largeur de la poutre en adoptant par exemple : $b' = 0,3 \text{ m}$. Le nouveau moment réduit est :

$$\mu = \frac{0,732}{0,3 \cdot (0,67)^2 \cdot 14,17} = 0,3836 \quad (7.87)$$

on cherche le moment réduit limite :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{500}{1,15 \cdot 200\,000} = 0,002174 = 2,174\text{‰} \quad (7.88)$$

$$\rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 2,174} = 0,6168 \quad (7.89)$$

$$\rightarrow \mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) \quad (7.90)$$

$$= 0,8 \cdot 0,6168(1 - 0,4 \cdot 0,6168) \quad (7.91)$$

$$= 0,372 \quad (7.92)$$

le domaine actif est donc : $\mu_e \leq \mu \leq 0,472$ (pivot B)

$$A'_s = \frac{(\mu - \mu_e)b'd^2 f_{bu}}{f_{su}(d - d')} = \frac{(0,3836 - 0,372) \cdot 0,3 \cdot (0,67)^2 \cdot 14,17}{434,783(0,67 - 0,03)} \quad (7.93)$$

$$\rightarrow A'_s = 0,8 \text{ cm}^2 \quad (7.94)$$

$$A_s = A'_s + \frac{0,8\alpha_e b' d f_{bu}}{f_{su}} = 0,00008 + \frac{0,8 \cdot 0,6168 \cdot 0,3 \cdot 0,67 \cdot 14,17}{434,783} \quad (7.95)$$

$$\rightarrow A_s = 33,12 \text{ cm}^2 \quad (7.96)$$

5. Vérification de la section en T à l'ELS

Contrainte admissible du béton :

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0,6 \cdot f_{c28} = 0,6 \cdot 25 = 15 \text{ MPa} \quad (7.97)$$

moment de comparaison :

$$M_0 = \frac{BH_0}{2} \bar{\sigma}_{bc} \left(d - \frac{H_0}{3} \right) = \frac{2,22 \cdot 0,15}{2} \cdot 15 \cdot \left(0,82 - \frac{0,15}{3} \right) \quad (7.98)$$

$$\rightarrow M_0 = 1,923 \text{ MN.m} \quad (7.99)$$

on a donc :

$$M_s = 0,505 \text{ MN.m} \leq M_0 = 1,923 \text{ MN.m} \quad (7.100)$$

la section en T est à calculer comme section rectangulaire de dimensions ($B \times H$).

Détermination de la position de la fibre neutre :

$$BY_s^2 + 2n(A_s + A'_s)Y_s - 2n(A'_s d' + A_s d) = 0 \quad (7.101)$$

$$\rightarrow 2,22Y_s^2 + 2.15.0,002118Y_s - 2.15.0,002118.0,82 = 0 \quad (7.102)$$

$$\rightarrow 2,22Y_s^2 + 0,06354Y_s - 0,0521 = 0 \quad (7.103)$$

$$\rightarrow Y_s = 0,14 \text{ m} \quad (7.104)$$

moment d'inertie :

$$I = \frac{BY_s^3}{3} + nA'_s(Y_s - d')^2 + nA_s(d - Y_s)^2 \quad (7.105)$$

$$= \frac{2,22.0,14^3}{3} + 15.0,002118.(0,82 - 0,14)^2 \quad (7.106)$$

$$\rightarrow I = 0,0167 \text{ m}^4 \quad (7.107)$$

$$\rightarrow K = \frac{M_s}{I} = \frac{0,505}{0,0167} = 30,24 \quad (7.108)$$

$$\rightarrow \sigma_s = nK(d - Y_s) = 15.30,24.(0,82 - 0,14) = 308,45 \text{ MPa} \quad (7.109)$$

$$\sigma_{bc} = KY_s = 30,24.0,14 = 4,234 \text{ MPa} \quad (7.110)$$

contrainte admissible des armatures :

$$\bar{\sigma}_s = \min \left[\frac{2}{3}f_e; \max \left(\frac{f_e}{2}; 110\sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (7.111)$$

$$= \min \left[\frac{2}{3}.500; \max \left(\frac{500}{2}; 110\sqrt{1,6.2,1} \right) \right] \quad (7.112)$$

$$= \min [333,33; \max (250; 201,63)] \quad (7.113)$$

$$\rightarrow \bar{\sigma}_s = 250 \text{ MPa} \quad (7.114)$$

on a donc :

$$\begin{cases} \sigma_{bc} = 4,234 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{bc} = 15 \text{ MPa} \\ \sigma_s = 308,45 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_s = 250 \text{ MPa} \end{cases} \quad (7.115)$$

La section doit être donc redimensionnée à l'ELS.

Dimensionnement à l'ELS :

Moment réduit à l'ELS :

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2\bar{\sigma}_s} = \frac{0,505}{2,22.0,82^2.250} = 0,001353 \quad (7.116)$$

déterminons le paramètre α_s :

$$\alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90\mu_s\alpha_s + 90\mu_s = 0 \quad (7.117)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90.0,001353\alpha_s + 90.0,001353 = 0 \quad (7.118)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 0,122\alpha_s + 0,122 = 0 \quad (7.119)$$

$$\rightarrow \alpha_s = 0,188 \quad (7.120)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1-\alpha_s)} \bar{\sigma}_s = \frac{0,188}{15.(1-0,188)} . 250 = 3,86 \text{ MPa} \quad (7.121)$$

on a donc :

$$\sigma_{bc} = 3,86 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{bc} = 15 \text{ MPa} \quad (7.122)$$

Une section tendue A_s est suffisante dans ce cas :

$$A_s = \frac{Bd\alpha_s^2}{2n(1-\alpha_s)} = \frac{2,22.0,82.0,188^2}{2.15.(1-0,188)} = 0,00264 \text{ m}^2 \quad (7.123)$$

$$\rightarrow A_s = 26,4 \text{ cm}^2 \quad (7.124)$$

Ferraillage minimal :

Position du centre de gravité de la section en T :

$$v' = \frac{B_0H^2 + (B - B_0)H_0^2}{2(B_0H + (B - B_0)H_0)} = \frac{0,22.0,85^2 + 2.0,15^2}{2.(0,22.0,85 + 2.0,15)} \quad (7.125)$$

$$\rightarrow v' = 0,2094 \text{ m} = 20,94 \text{ cm} \quad (7.126)$$

$$v = H - v' = 0,85 - 0,2094 = 0,6406 \text{ m} = 64,06 \text{ cm} \quad (7.127)$$

le moment d'inertie est exprimé par :

$$I = B_0 \frac{H^3}{3} + (B - B_0) \frac{H_0^3}{3} - (B_0H + (B - B_0)H_0)v'^2 \quad (7.128)$$

$$\rightarrow I = 0,22 \cdot \frac{0,85^3}{3} + 2 \cdot \frac{0,15^3}{3} - (0,22.0,85 + 2.0,15) \cdot 0,2094^2 \quad (7.129)$$

$$\rightarrow I = 0,02593 \text{ m}^4 \quad (7.130)$$

la section d'armatures minimales est :

$$A_{\min} = \frac{I}{0,81Hv} \frac{f_{tj}}{f_e} = \frac{0,02593}{0,81.0,85.0,6406} \frac{2,1}{500} = 0,000247 \text{ m}^2 \quad (7.131)$$

$$\rightarrow A_{\min} = 2,47 \text{ cm}^2 \quad (7.132)$$

La section d'armatures à disposer est donc :

$$A_s = 26,4 \text{ cm}^2 \quad (7.133)$$

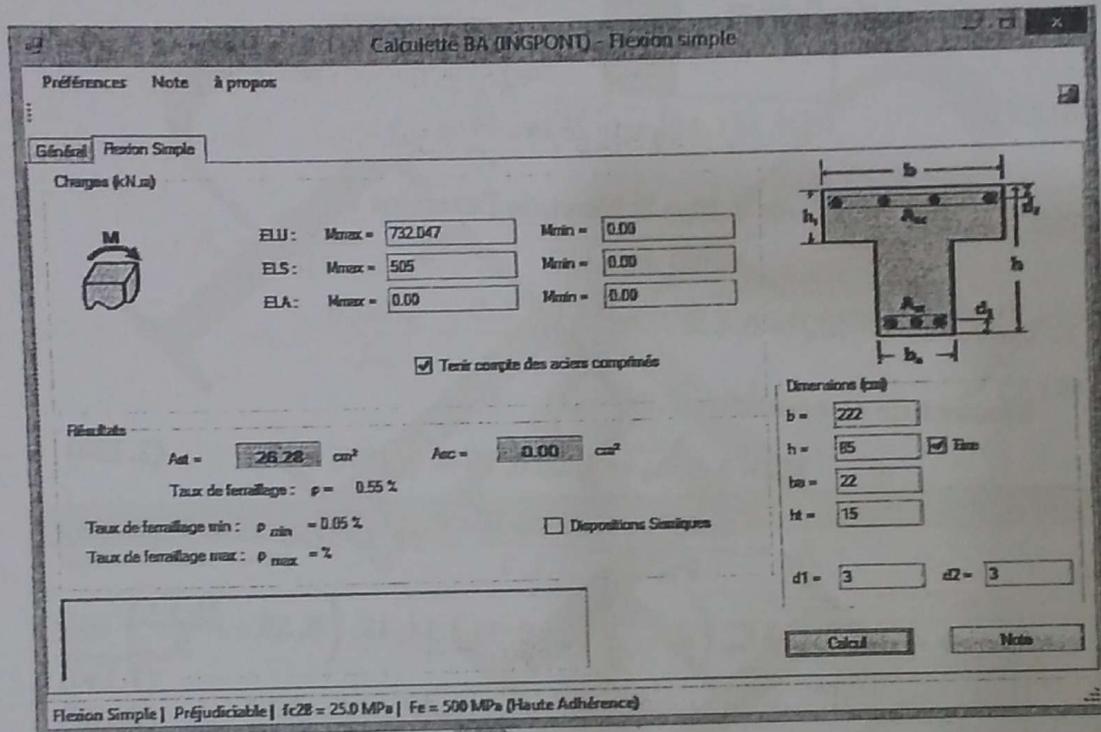


FIGURE 7.9 – Exercice 1 : Résultats de la calculatrice BA INGPONT

Exercice 2 :

Soit une section d'une poutre en T réalisée en béton de résistance caractéristique $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et armée par des aciers de nuance FeE500 (voir figure 7.10).

On prend une hauteur utile $d = 59 \text{ cm}$ et un enrobage supérieur $d' = 4 \text{ cm}$.

1. Dimensionner la section à l'ELU avec un moment $M_u = 0,5 \text{ MN.m}$?
2. Même chose avec un moment $M_u = 1,2 \text{ MN.m}$?

Solution 2 :

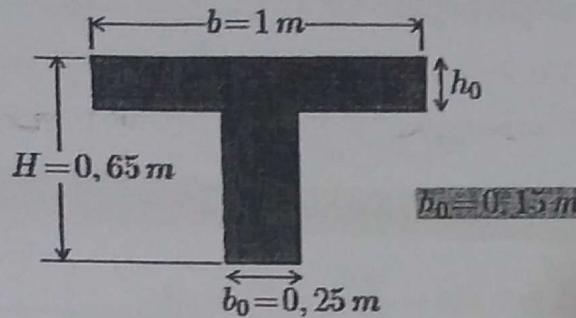


FIGURE 7.10 – Schéma de l'exercice 2

1. Calcul avec : $M_u = 0,5 \text{ MN.m}$

Moment de comparaison :

$$Y_u = 1,25h_0 = 1,25 \cdot 0,15 = 0,1875 \text{ m} \quad (7.134)$$

$$f_{bu} = \frac{0,85f_{c28}}{\theta\gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 25}{1,5} = 14,17 \text{ MPa} \quad (7.135)$$

$$\rightarrow M_0 = h_0 b f_{bu} \left(d - \frac{h_0}{2} \right) = 0,15 \cdot 1 \cdot 14,17 \cdot \left(0,59 - \frac{0,15}{2} \right) \quad (7.136)$$

$$\rightarrow M_0 = 1,095 \text{ MN.m} \quad (7.137)$$

d'où pour ce cas :

$$M_u = 0,5 \text{ MN.m} \leq M_0 = 1,095 \text{ MN.m} \quad (7.138)$$

La section en T peut être dimensionnée comme une section rectangulaire de dimensions $(b \times H)$:

$$\mu = \frac{M_u}{bd^2 f_{bu}} = \frac{0,5}{1 \cdot 0,59^2 \cdot 14,17} = 0,1014 \quad (7.139)$$

on est dans le sous domaine :

$$0 \leq \mu \leq 0,1042 \quad (\text{Pivot A}) \quad (7.140)$$

$$15\alpha_u^4 - 60\alpha_u^3 + (20 - 4\mu)\alpha_u^2 + 8\mu\alpha_u - 4\mu = 0 \quad (7.141)$$

$$\rightarrow 15\alpha_u^4 - 60\alpha_u^3 + (20 - 4 \cdot 0,1014)\alpha_u^2 \quad (7.142)$$

$$+ 8 \cdot 0,1014\alpha_u - 4 \cdot 0,1014 = 0 \quad (7.143)$$

$$\rightarrow 15\alpha_u^4 - 60\alpha_u^3 + 19,594\alpha_u^2 + 0,811\alpha_u - 0,406 = 0 \quad (7.144)$$

la solution de l'équation appartenant à $[0; 0,167]$ est :

$$\alpha_u = 0,164 \quad (7.145)$$

calcul de la section d'armature :

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,783 \text{ MPa} \quad (7.146)$$

$$\beta_u = \frac{15\alpha_u^2 - 40\alpha_u^3}{3(1 - \alpha_u)^2} = \frac{15,0,164^2 - 40,0,164^3}{3(1 - 0,164)^2} = 0,1083 \quad (7.147)$$

$$\rightarrow A_s = \frac{\beta_u b d f_{bu}}{f_{su}} = \frac{0,1083 \cdot 1,0 \cdot 59,14,17}{434,783} = 0,002082 \text{ m}^2 \quad (7.148)$$

$$\rightarrow A_s = 20,82 \text{ cm}^2 \quad (7.149)$$

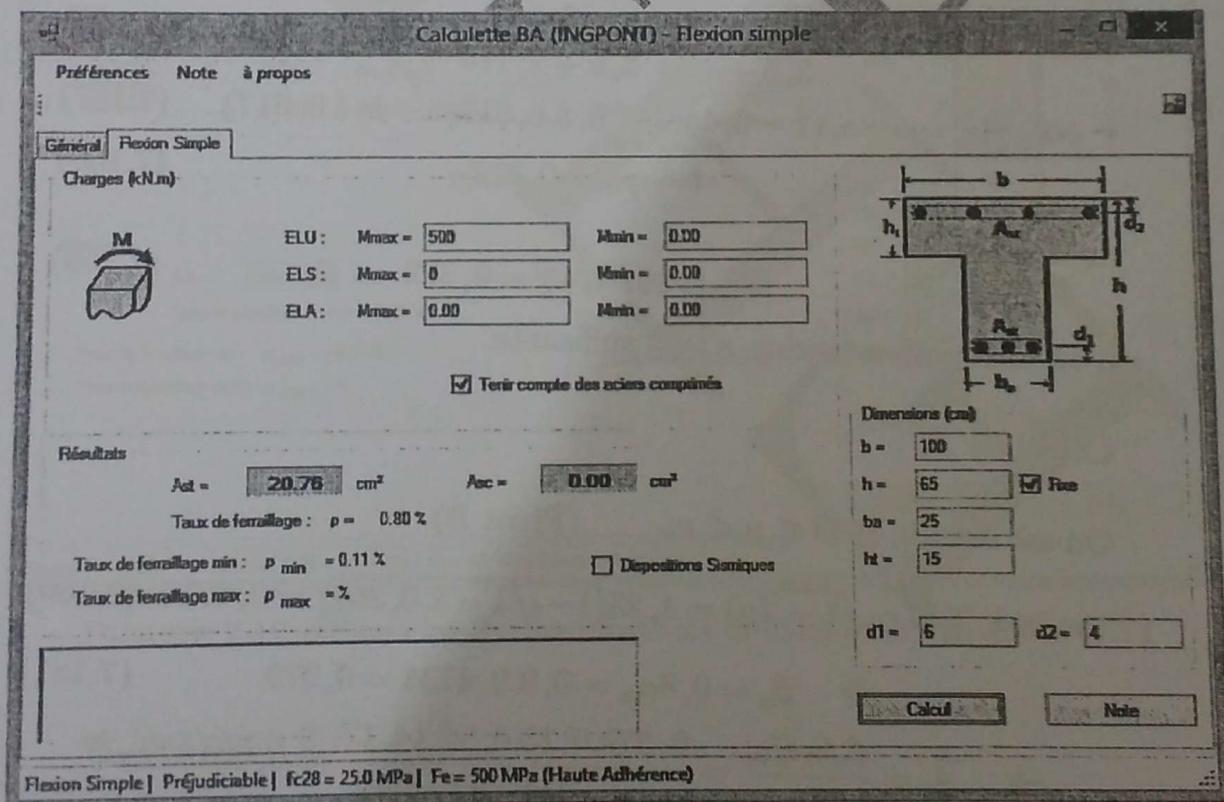


FIGURE 7.11 – Exercice 2 : Résultats de la calculatrice BA INGPONT

2. Calcul avec : $M_u = 1,2 \text{ MN.m}$:

On a :

$$M_u = 1,2 \text{ MN.m} > M_0 = 1,095 \text{ MN.m} \quad (7.150)$$

On a donc une vraie section en T.

$$\bar{M} = M_u - f_{bu} h_0 (b - b_0) \left(d - \frac{h_0}{2} \right) \quad (7.151)$$

$$= 1,2 - 14,17 \cdot 0,15 \cdot (1 - 0,25) \cdot \left(0,59 - \frac{0,15}{2} \right) \quad (7.152)$$

$$\rightarrow \bar{M} = 0,379 \text{ MN.m} \quad (7.153)$$

$$\rightarrow \mu = \frac{\bar{M}}{b_0 d^2 f_{bu}} = \frac{0,379}{0,25 \cdot 0,59^2 \cdot 14,17} = 0,307 \quad (7.154)$$

calcul de μ_e :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{500}{1,15 \cdot 200\,000} = 0,002174 = 2,174 \text{‰} \quad (7.155)$$

$$\rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 2,174} = 0,617 \quad (7.156)$$

$$\rightarrow \mu_e = 0,8 \alpha_e (1 - 0,4 \alpha_e) = 0,8 \cdot 0,617 (1 - 0,4 \cdot 0,617) \quad (7.157)$$

$$\rightarrow \mu_e = 0,372 \quad (7.158)$$

on a donc :

$$\mu = 0,307 \leq \mu_e = 0,372 \quad (7.159)$$

d'où une section tendue A_s est suffisante.

Calcul de \bar{A}_s :

On est sur : $0,1859 \leq \mu \leq \mu_e$ (Pivot B)

$$\alpha_u = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,307}) = 0,4734 \quad (7.160)$$

$$\rightarrow \beta_u = 0,8 \alpha_u = 0,8 \cdot 0,4734 = 0,379 \quad (7.161)$$

$$\rightarrow \bar{A}_s = \frac{\beta_u b_0 d f_{bu}}{f_{su}} = \frac{0,379 \cdot 0,25 \cdot 0,59 \cdot 14,17}{434,783} = 0,001822 \text{ m}^2 \quad (7.162)$$

la section théorique est :

$$A_s = \frac{f_{bu} h_0 (b - b_0) + \overline{A_s} \overline{\sigma_s}}{\sigma_s} \quad (\sigma_s = \overline{\sigma_s} = f_{su}) \quad (7.163)$$

$$= \frac{f_{bu} h_0 (b - b_0)}{f_{su}} + \overline{A_s} \quad (7.164)$$

$$= \frac{14,17 \cdot 0,15(1 - 0,25)}{434,783} + 0,001822 \quad (7.165)$$

$$= 0,005488 \text{ m}^2 \quad (7.166)$$

$$\rightarrow A_s = 54,88 \text{ cm}^2 \quad (7.167)$$

FIGURE 7.12 — Exercice 2 : Résultats de la calcul BA INGPONT

◆ Exercice 3 :

Reprenons le même exemple de l'exercice 2 en supposant que le calcul a été réalisé pour un moment ultime $M_u = 1,2 \text{ MN.m}$.
On prend en compte l'application d'un moment de service $M_s = 0,7 \text{ MN.m}$ et on considère que la fissuration est préjudiciable.

Vérifier à l'ELS la section déjà calculée à l'ELU et redimensionner la section à l'ELS si nécessaire ?

⇒ **Solution 3 :**

Vérification de la section en T à l'ELS :

Contrainte admissible du béton :

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0,6 \cdot f_{c28} = 0,6 \cdot 25 = 15 \text{ MPa} \quad (7.168)$$

moment de comparaison :

$$M_0 = \frac{bh_0}{2} \bar{\sigma}_{bc} \left(d - \frac{h_0}{3} \right) = \frac{1,0 \cdot 15}{2} \cdot 15 \cdot \left(0,59 - \frac{0,15}{3} \right) \quad (7.169)$$

$$\rightarrow M_0 = 0,608 \text{ MN}\cdot\text{m} \quad (7.170)$$

on a donc :

$$M_s = 0,7 \text{ MN}\cdot\text{m} > M_0 = 0,608 \text{ MN}\cdot\text{m} \quad (7.171)$$

On a donc une vraie section en T.

Détermination de la position de la fibre neutre :

$$b_0 Y_s^2 + [2h_0(b-b_0) + 2n(A_s + A'_s)] Y_s - [2n(A_s d + A'_s d') + h_0^2(b-b_0)] = 0 \quad (7.172)$$

$$\rightarrow 0,25 Y_s^2 + [2 \cdot 0,15 \cdot (1 - 0,25) + 2 \cdot 15 \cdot 0,005488] Y_s - [2 \cdot 15 \cdot 0,005488 \cdot 0,59 + 0,15^2 \cdot (1 - 0,25)] = 0 \quad (7.173)$$

$$\rightarrow 0,25 Y_s^2 + 0,3896 Y_s - 0,114 = 0 \quad (7.174)$$

$$\rightarrow Y_s = 0,252 \text{ m} \quad (7.175)$$

moment d'inertie :

$$I = \frac{b_0}{3} Y_s^3 + \frac{(b-b_0)h_0^3}{12} + (b-b_0)h_0 \left(Y_s - \frac{h_0}{2} \right)^2 + n[A_s(d-Y_s)^2 + A'_s(Y_s-d')^2] \quad (7.176)$$

$$= \frac{0,25}{3} \cdot 0,252^3 + \frac{(1-0,25) \cdot 0,15^3}{12} + (1-0,25) \cdot 0,15 \cdot \left(0,252 - \frac{0,15}{2} \right)^2 + 15 \cdot 0,005488 \cdot (0,59 - 0,252)^2 \quad (7.177)$$

$$\rightarrow I = 0,01447 \text{ m}^4 \quad (7.178)$$

calcul des contraintes :

$$K = \frac{M_s}{I} = \frac{0,7}{0,01447} = 48,376 \quad (7.179)$$

$$\rightarrow \sigma_s = nK(d - Y_s) = 15.48,376.(0,59 - 0,252) = 245,27 \text{ MPa} \quad (7.180)$$

$$\sigma_{bc} = KY_s = 48,376.0,252 = 12,19 \text{ MPa} \quad (7.181)$$

contrainte admissible des armatures :

$$\bar{\sigma}_s = \min \left[\frac{2}{3}f_e; \max \left(\frac{f_e}{2}; 110\sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (7.182)$$

$$= \min \left[\frac{2}{3}.500; \max \left(\frac{500}{2}; 110\sqrt{1,6.2,1} \right) \right] \quad (7.183)$$

$$= \min [333,33; \max (250; 201,63)] \quad (7.184)$$

$$\rightarrow \bar{\sigma}_s = 250 \text{ MPa} \quad (7.185)$$

on a donc :

$$\begin{cases} \sigma_{bc} = 12,19 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{bc} = 15 \text{ MPa} \\ \sigma_s = 245,27 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_s = 250 \text{ MPa} \end{cases} \quad (7.186)$$

La vérification est satisfaite et le dimensionnement à l'ELS n'est pas nécessaire.

La section A_s calculée à l'ELU est à garder :

$$A_s = 54,88 \text{ cm}^2 \quad (7.187)$$

•• Exercice 4 :

Considérant une poutre en T comme schématisé dans la figure (7.13) qui subit les moments suivants : $M_u = 20\,000 \text{ kN.m}$ et $M_s = 17\,000 \text{ kN.m}$. on considère qu'on a un béton dont $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$, un acier $f_e = 500 \text{ MPa}$, un enrobage $c = 5 \text{ cm}$ et la fissuration est jugée préjudiciable.

Réaliser le calcul de ferrailage de la section à l'ELU et à l'ELS ?

•• Solution 4 :

Calcul à l'ELU :

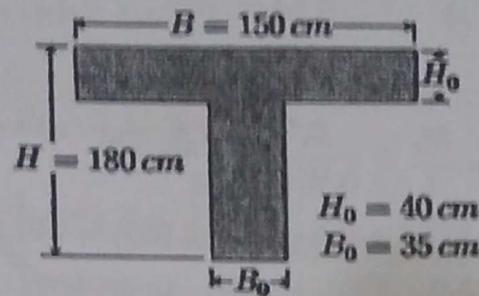


FIGURE 7.13 – Exercice 4 : Géométrie de la section en T

Contraintes limites dans le béton et l'acier :

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{cm}}{\theta \gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 30}{1,5} = 17 \text{ MPa} \quad (7.188)$$

$$f_{su} = \frac{f_c}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,783 \text{ MPa} \quad (7.189)$$

Le moment de comparaison à PELU est :

$$M_0 = H_0 B f_{bu} \left(d - \frac{H_0}{2} \right) = 0,4 \cdot 1,5 \cdot 17 \cdot \left(1,75 - \frac{0,4}{2} \right) \quad (7.190)$$

$$\rightarrow M_0 = 15,81 \text{ MN.m} \quad (7.191)$$

on a :

$$M_u = 20 \text{ MN.m} > M_0 = 15,81 \text{ MN.m} \quad (7.192)$$

on est donc dans le cas d'une vraie section en T.

On calcule la section en T comme une section rectangulaire de dimensions $(B_0 \times H)$ sous le moment modifié \bar{M} :

$$\bar{M} = M_u - f_{bu} H_0 (B - B_0) \left(d - \frac{H_0}{2} \right) \quad (7.193)$$

$$= 20 - 17 \cdot 0,4 (1,5 - 0,35) \left(1,75 - \frac{0,4}{2} \right) \quad (7.194)$$

$$= 7,879 \text{ MN.m} \quad (7.195)$$

moment réduit :

$$\mu = \frac{\bar{M}}{B_0 d^2 f_{bu}} = \frac{7,879}{0,35 \cdot 1,75^2 \cdot 17} = 0,4324 \quad (7.196)$$

calcul du moment réduit limite :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{500}{1,15 \cdot 200000} = 0,002174 = 2,174 \text{‰} \quad (7.197)$$

$$\rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 2,174} = 0,6168 \quad (7.198)$$

$$\rightarrow \mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) = 0,8 \cdot 0,6168(1 - 0,4 \cdot 0,6168) = 0,3717 \quad (7.199)$$

On est donc sur le cas : $\mu_e = 0,3717 \leq \mu = 0,4324 \leq 0,472$

$$A'_s = \frac{(\mu - \mu_e)B_0 d^2 f_{bu}}{f_{su}(d - d')} = \frac{(0,4324 - 0,3717) \cdot 0,35 \cdot 1,75^2 \cdot 17}{434,783 \cdot (1,75 - 0,05)} \quad (7.200)$$

$$\rightarrow A'_s = 0,001496 \text{ m}^2 \quad (7.201)$$

$$\bar{A}_s = A'_s + \frac{0,8\alpha_e B_0 d f_{bu}}{f_{su}} = 0,001496 + \frac{0,8 \cdot 0,6168 \cdot 0,35 \cdot 1,75 \cdot 17}{434,783} \quad (7.202)$$

$$\rightarrow \bar{A}_s = 0,013313 \text{ m}^2 \quad (7.203)$$

$$A_s = \bar{A}_s + H_0(B - B_0) \frac{f_{bu}}{f_{su}} = 0,013313 + 0,4(1,5 - 0,35) \cdot \frac{17}{434,783} \quad (7.204)$$

$$\rightarrow A_s = 0,031299 \text{ m}^2 \quad (7.205)$$

Les sections d'acier à l'ELU sont donc comme suit :

$$A_s = 0,031299 \text{ m}^2 = 312,99 \text{ cm}^2 \quad (7.206)$$

$$A'_s = 0,001496 \text{ m}^2 = 14,96 \text{ cm}^2 \quad (7.207)$$

Vérification à l'ELS :

Contrainte limite du béton à l'ELS :

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0,6f_{c28} = 0,6 \cdot 30 = 18 \text{ MPa} \quad (7.208)$$

Calcul du moment de comparaison :

$$M_0 = \frac{BH_0}{2} \bar{\sigma}_{bc} \left(d - \frac{H_0}{3} \right) = \frac{1,5 \cdot 0,4}{2} \cdot 18 \cdot \left(1,75 - \frac{0,4}{3} \right) = 8,73 \text{ MN.m} \quad (7.209)$$

On est sur le cas : $M_s = 17 \text{ MN.m} > M_0 = 8,73 \text{ MN.m}$

En conséquence, on est sur le cas d'une vraie section en T.

Calcul de la position de la fibre neutre Y_s :

$$B_0 Y_s^2 + [2H_0(B - B_0) + 2n(A_s + A'_s)]Y_s - [2n(A_s d + A'_s d') + H_0^2(B - B_0)] = 0 \quad (7.210)$$

$$\rightarrow 0,35 Y_s^2 + [2 \cdot 0,4(1,5 - 0,35) + 2 \cdot 15(0,031299 + 0,001496)]Y_s - [2 \cdot 15(0,031299 \cdot 1,75 + 0,001496 \cdot 0,05) + 0,4^2(1,5 - 0,35)] = 0 \quad (7.211)$$

$$\rightarrow 0,35 Y_s^2 + 1,904 Y_s - 1,829 = 0 \quad (7.212)$$

les deux racines de l'équation sont : $Y_s = 0,833 \text{ m}$ et $Y_s = -6,273 \text{ m}$
la solution physique est : $Y_s = 0,833 \text{ m}$

Le moment d'inertie est :

$$I = \frac{B_0 Y_s^3}{3} + \frac{(B - B_0) H_0^3}{12} + (B - B_0) H_0 \left(Y_s - \frac{H_0}{2} \right)^2 + n[A_s(d - Y_s)^2 + A'_s(Y_s - d')^2] \quad (7.213)$$

$$= \frac{0,35}{3} 0,833^3 + \frac{(1,5 - 0,35) \cdot 0,4^3}{12} + (1,5 - 0,35) \cdot 0,4 \left(0,833 - \frac{0,4}{2} \right)^2 + 15[0,031299(1,75 - 0,833)^2 + 0,001496(0,833 - 0,05)^2] \quad (7.214)$$

$$= 0,66643 \text{ m}^4 \quad (7.215)$$

$$\rightarrow K = \frac{M_s}{I} = \frac{17}{0,66643} = 25,509 \quad (7.216)$$

contraintes dans le béton et les aciers :

$$\sigma_{bc} = K Y_s = 25,509 \cdot 0,833 = 21,249 \text{ MPa} \quad (7.217)$$

$$\sigma_s = nK(d - Y_s) = 15 \cdot 25,509(1,75 - 0,833) = 350,876 \text{ MPa} \quad (7.218)$$

$$\sigma'_s = nK(Y_s - d') = 15 \cdot 25,509(0,833 - 0,05) = 299,603 \text{ MPa} \quad (7.219)$$

On a une fissuration préjudiciable, la contrainte limite de l'acier est définie par :

$$\bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}'_s = \min \left[\frac{2}{3} f_e; \max \left(\frac{f_e}{2}; 110 \sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (7.220)$$

$$= \min \left[\frac{2}{3} \cdot 500; \max \left(\frac{500}{2}; 110 \sqrt{1,6 \cdot 2,4} \right) \right] \quad (7.221)$$

$$= \min [333,333; \max (250; 215,555)] \quad (7.222)$$

$$\rightarrow \bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}'_s = 250 \text{ MPa} \quad (7.223)$$

Comparaison des contraintes développées avec les contraintes limites :

$$\begin{cases} \sigma_{bc} = 21,219 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_{bc} = 18 \text{ MPa} \\ \sigma_s = 350,876 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_s = 250 \text{ MPa} \\ \sigma'_s = 299,603 \text{ MPa} > \bar{\sigma}'_s = 250 \text{ MPa} \end{cases} \quad (7.224)$$

on constate que les contraintes limites des matériaux sont dépassées et la vérification à l'ELS n'est donc pas satisfaite.

Calcul à l'ELS :

On calcule les paramètres :

$$\gamma = \frac{H_0}{d} = \frac{0,4}{1,75} = 0,2286 \quad (7.225)$$

$$\theta = \frac{B}{B_0} = \frac{1,5}{0,35} = 4,286 \quad (7.226)$$

$$\delta = \frac{d'}{d} = \frac{0,05}{1,75} = 0,02857 \quad (7.227)$$

$$\mu_s = \frac{M_s}{B_0 d^2 \bar{\sigma}_s} = \frac{17}{0,35 \cdot 1,75^2 \cdot 250} = 0,06344 \quad (7.228)$$

Recherche du paramètre α_s :

$$\alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - [90\mu_s + 3\gamma(2-\gamma)(\theta-1)]\alpha_s + 90\mu_s - \gamma^2(\theta-1)(2\gamma-3) = 0 \quad (7.229)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - [90 \cdot 0,06344 + 3 \cdot 0,2286 \cdot (2 - 0,2286) \cdot (4,286 - 1)]\alpha_s + 90 \cdot 0,06344 - 0,2286^2 \cdot (4,286 - 1) \cdot (2 \cdot 0,2286 - 3) = 0 \quad (7.230)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 9,7015\alpha_s + 6,1463 = 0 \quad (7.231)$$

la solution de l'équation appartenant à l'intervalle $]0; 1[$ est :

$$\alpha_s = 0,5557 \quad (7.232)$$

La contrainte dans le béton est :

$$\sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1-\alpha_s)} \bar{\sigma}_s = \frac{0,5557}{15 \cdot (1 - 0,5557)} 250 = 20,85 \text{ MPa} \quad (7.233)$$

on est sur le cas :

$$\sigma_{bc} = 20,85 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_{bc} = 18 \text{ MPa} \quad (7.234)$$

Calcul avec armatures comprimées :

$$\alpha_1 = \frac{n\bar{\sigma}_{bc}}{n\bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_s} = \frac{15,18}{15,18 + 250} = 0,5192 \quad (7.235)$$

$$\mu_1 = \frac{\gamma(\theta - 1)[3\alpha_1(2 - \gamma) + \gamma(2\gamma - 3)] + \alpha_1^2(3 - \alpha_1)}{6n(1 - \alpha_1)} \quad (7.236)$$

$$= \frac{\{0,2286(4,286 - 1)[3 \cdot 0,5192(2 - 0,2286) + 0,2286(2 \cdot 0,2286 - 3)] + 0,5192^2(3 - 0,5192)\}}{6 \cdot 15(1 - 0,5192)} \quad (7.237)$$

$$= 0,0533 \quad (7.238)$$

$$A'_s = \frac{(\mu_s - \mu_1)(1 - \alpha_1)}{(\alpha_1 - \delta)(1 - \delta)} B_0 d \quad (7.239)$$

$$= \frac{(0,06344 - 0,0533)(1 - 0,5192)}{(0,5192 - 0,02857)(1 - 0,02857)} \cdot 0,35 \cdot 1,75 \quad (7.240)$$

$$\rightarrow A'_s = 0,006265 \text{ m}^2 = 62,65 \text{ cm}^2 \quad (7.241)$$

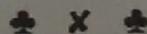
$$A_s = \frac{2n(1 - \alpha_1)(\mu_s - \mu_1) + (1 - \delta)[\alpha_1^2 + \gamma(\theta - 1)(2\alpha_1 - \gamma)]}{2n(1 - \alpha_1)(1 - \delta)} B_0 d \quad (7.242)$$

$$= \frac{\{2 \cdot 15 \cdot (1 - 0,5192)(0,06344 - 0,0533) + (1 - 0,02857)[0,5192^2 + 0,2286 \cdot (4,286 - 1) \cdot (2 \cdot 0,5192 - 0,2286)]\}}{2 \cdot 15 \cdot (1 - 0,5192)(1 - 0,02857)} \quad (7.243)$$

$$\rightarrow A_s = 0,043671 \text{ m}^2 = 436,71 \text{ cm}^2 \quad (7.244)$$

Le ferrailage à adopter pour la poutre en T est comme suit :

$$\begin{cases} A_s = 436,71 \text{ cm}^2 \\ A'_s = 62,65 \text{ cm}^2 \end{cases} \quad (7.245)$$



Calculatrice BA (INGPONT) - Flexion simple

Préférences Note à propos

Général Flexion Simple

Charges (kN/m)



ELU:	M _{max} = 20000	M _{min} = 0.00
ELS:	M _{max} = 17000	M _{min} = 0.00
E.L.A.:	M _{max} = 0.00	M _{min} = 0.00

Tenir compte des aciers comprimés

Résultats

A_{st} = 438.96 cm² A_{sc} = 62.88 cm²

Taux de ferrillage : $\rho = 4.66\%$

Taux de ferrillage min : $\rho_{\min} = 2.06\%$ Dispositions Spéciales

Taux de ferrillage max : $\rho_{\max} = 7\%$

Dimensions (cm)

b = 150
h = 180 Fin
b₀ = 35
h₀ = 40
d1 = 5 d2 = 5

Calcul Note

Flexion Simple | Préjudiciable | f_{c28} = 30.0 MPa | f_e = 500 MPa (Haute Adhérence)

FIGURE 7.14 – Exercice 4 : Résultats du logiciel INGPONT

Chapitre 8

Calcul par rapport à l'effort tranchant

8.1 Introduction

Dans les structures en béton armé, on a besoin d'une façon général d'un ferrailage transversal (cadres, étriers, épingles, cerces, ...) pour reprendre convenablement les contraintes tangentielles d'efforts tranchants (voir figure 8.1).

Dans ce chapitre on vas se focaliser sur la méthode de calcul du ferrailage transversal, en cas de besoin, pour reprendre les efforts de traction dus à l'effort tranchant.

Des justifications complémentaires des appuis des poutres seront présentées ainsi que les dispositions constructives concernant les armatures transversales.

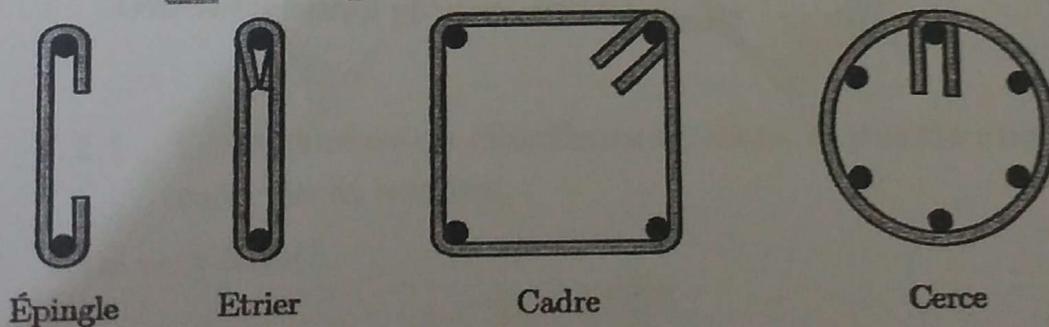


FIGURE 8.1 - Géométries du ferrailage transversal

Théoriquement, le calcul des armatures de coiffure doit se faire à l'ELU et l'ELS. Pourtant, en pratique, les phénomènes de fissuration et de déformation dues à l'effort tranchant sont toujours moindres à l'ELS par rapport à l'ELU. Pour cette raison, le calcul des armatures de l'effort tranchant n'est prévu réglementairement qu'à l'ELU.

La vérification à l'ELS se traduit uniquement par des dispositions constructives à respecter.

8.2 Contrainte de cisaillement (tangente) conventionnelle

Prenons une section droite d'une poutre contenant une section d'armatures tendues A_s et qui subit un moment fléchissant M_u (8.2). La section de la poutre est composée d'une partie supérieure comprimée et d'une partie inférieure tendue.

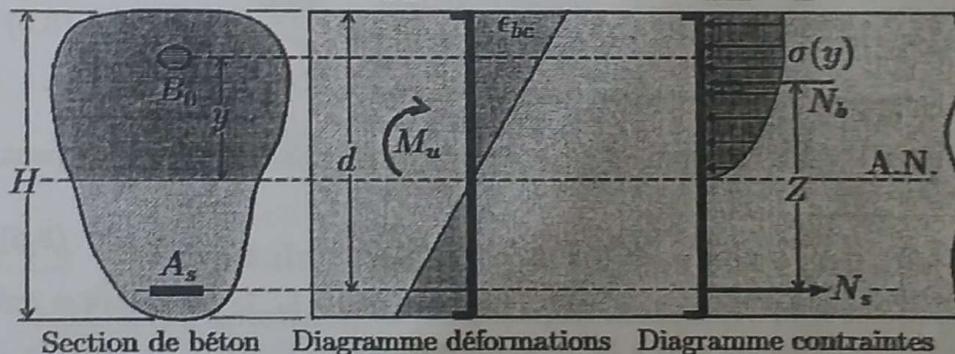


FIGURE 8.2 - Section d'une poutre sollicitée en flexion

8.2.1 Contraintes de cisaillement dans la partie comprimée de la section

On peut écrire :

$$\sigma(y) = \frac{M_u y}{I} \quad (8.1)$$

y étant l'ordonnée d'une fibre de matière choisie arbitrairement dans la zone comprimée du béton (8.2) et I étant le moment d'inertie quadratique de la

section homogène du béton.

La résultante s'exerçant sur la fibre de section B_0 est :

$$N_0 = \int_{B_0} \sigma(y) dB = \frac{M_u}{I} \int_{B_0} y dB = \frac{M_u}{I} S_0 \quad (8.2)$$

L'effort N_0 tend à faire glisser la fibre B_0 par rapport à la fibre neutre.

Par unité de longueur dx , l'effort de glissement g est donné par :

$$g = \frac{dN_0}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{M_u}{I} S_0 \right) = \frac{S_0}{I} \frac{dM_u}{dx} \quad (8.3)$$

$$\rightarrow g = \frac{V_u}{I} S_0 \quad (8.4)$$

Sous l'effort g , le prisme défini par la section B_0 et de longueur élémentaire dx a tendance à se déplacer le long d'une surface de glissement donnée par :

$$S_{\text{gliss}} = u dx \quad (8.5)$$

où u est le périmètre de la section de la fibre B_0 .

En supposant la contrainte tangentielle τ_u uniformément répartie, on peut écrire :

$$\tau_u = \frac{dN_0}{u dx} = \frac{g}{u} = \frac{V_u S_0}{I u} \quad (8.6)$$

Si on prend pour B_0 toute la largeur de la section b_0 , le périmètre u qui subit des contraintes est égal à b_0 , d'où dans ce cas :

$$\tau_u = \frac{V_u S_0}{I b_0} \quad (8.7)$$

Si on prend en plus toute la section comprimée homogène et d'après la formule (8.2), on a :

$$N_b = \frac{M_u}{I} S_1 \quad (8.8)$$

où S_1 est le moment statique de la section homogène comprimée.

On a également :

$$M_u = N_b Z \rightarrow N_b = \frac{M_u}{I} S_1 = \frac{M_u}{Z} \quad (8.9)$$

$$\rightarrow Z = \frac{I}{S_1} \quad (8.10)$$

en considérant (8.7), on obtient donc :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 Z} \quad (8.11)$$

8.2.2 Contraintes de cisaillement dans la partie tendue de la section

Dans la zone tendue, l'effort normal est annulé à cause de la fissuration du béton. Il y a donc cisaillement pur et l'effort de glissement doit équilibrer dans ce cas toute la section comprimée du béton.

D'une part, on a :

$$dM_u = Z dN_b \quad (8.12)$$

d'autre part, on a sur une longueur dx de la poutre :

$$dN_b = \tau_u b_0 dx \quad (8.13)$$

$$\rightarrow dN_b = \frac{dM_u}{Z} = \frac{dM_u}{dx} \frac{dx}{Z} = V_u \frac{dx}{Z} = \tau_u b_0 dx \quad (8.14)$$

$$\rightarrow \tau_u = \frac{V_u}{b_0 Z} \quad (8.15)$$

8.2.3 Récapitulatif des deux cas

A la fin des deux dernières parties, on a justifié que :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 Z} \quad (8.16)$$

on considère en général que : $Z \approx 0,9d$. D'où :

$$\tau_u = \frac{V_u}{0,9b_0 d} \quad (8.17)$$

Réglementairement, pour la justification de l'âme d'une poutre, le BAEL prend pour la contrainte tangente :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} \quad (8.18)$$

avec :

- V_u : valeur de l'effort tranchant dans la section considérée ;
 b_0 : largeur de l'âme (largeur tout court dans le cas d'une section rectangulaire ; largeur de la nervure dans le cas d'une section en T) ;
 d : hauteur utile ;
 τ_u : contrainte tangente conventionnelle (dite de comparaison).

8.3 Effort tranchant à prendre en compte dans les calculs

Pour tenir compte des effets de transmission des charges sur les appuis, l'effort tranchant à prendre en compte dans le calcul est détaillé ci après.

8.3.1 Charges réparties

La charge répartie est négligée sur une longueur $\frac{H}{2}$ à partir de l'appui et celles situées entre $\frac{H}{2}$ et $\frac{3H}{2}$ développent un effort tranchant égal à $\frac{2q_u}{3H}x$ (voir figure 8.3).

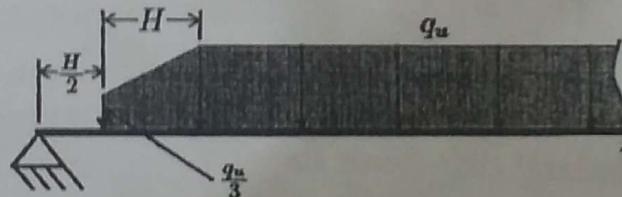


FIGURE 8.3 – Distribution à prendre en compte pour une charge répartie

Soit $V_{u_{max}}$ l'effort tranchant au niveau de l'appui donné par la distribution q_u non réduite au niveau de l'appui. On a donc :

$$V_{u_{max}} = \frac{q_u L}{2} \quad (8.19)$$

l'effort tranchant maximal de calcul est donné, selon le schéma de la figure

(8.3), par :

$$V_{u0} = V_{u_{\max}} - q_u \frac{H}{2} - \int_{\frac{H}{2}}^{\frac{3H}{2}} \left(q_u - \frac{2q_u}{3H} x \right) dx \quad (8.20)$$

$$= V_{u_{\max}} - q_u \frac{H}{2} - q_u H + \frac{2q_u}{3H} \cdot \frac{1}{2} \left(\left(\frac{3H}{2} \right)^2 - \left(\frac{H}{2} \right)^2 \right) \quad (8.21)$$

$$= V_{u_{\max}} - \frac{3}{2} q_u H + \frac{q_u}{3H} \left(\frac{9H^2}{4} - \frac{H^2}{4} \right) \quad (8.22)$$

$$= V_{u_{\max}} - \frac{3}{2} q_u H + \frac{q_u}{3H} \cdot 2H^2 \quad (8.23)$$

$$= V_{u_{\max}} - \frac{3}{2} q_u H + \frac{2}{3} q_u H \quad (8.24)$$

$$\rightarrow V_{u0} = \frac{q_u L}{2} - \frac{5}{6} q_u H \quad (8.25)$$

La réduction de l'effort tranchant est de $\frac{5}{6} q_u H$ et cela nous permet de tenir compte du phénomène de transmission des charges (parce qu'une partie passe directement dans l'appui et n'affecte pas l'effort tranchant dans la poutre).

8.3.2 Charges concentrées

Pour une charge concentrée Q_u située à une distance a de l'appui, on adopte la réduction suivante :

$$Q_u = \begin{cases} 0 & \text{si } a < \frac{H}{2} \\ \frac{2a}{3H} Q_u & \text{si } \frac{H}{2} \leq a \leq \frac{3H}{2} \end{cases} \quad (8.26)$$

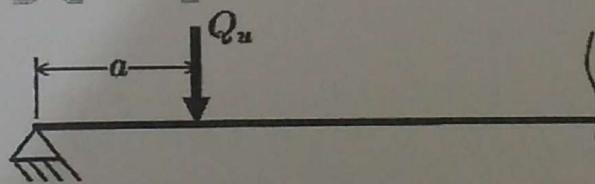


FIGURE 8.4 - Charge concentrée

8.4 Contrainte tangente limite ultime

Le BAEL considère pour la détermination de l'état limite ultime du béton de l'âme d'une section courante les deux cas suivants :

- Armatures transversales droites ($\alpha = \frac{\pi}{2}$);
- Armatures transversales inclinées à 45° ($\alpha = \frac{\pi}{4}$).

8.4.1 Armatures transversales droites ($\alpha = \frac{\pi}{2}$)

- Fissuration peu préjudiciable :

$$\bar{\tau}_u = \min \left\{ 0, 20 \frac{f_{c_j}}{\gamma_b}; 5 \text{ MPa} \right\} \quad (8.27)$$

- Fissuration préjudiciable ou très préjudiciable :

$$\bar{\tau}_u = \min \left\{ 0, 15 \frac{f_{c_j}}{\gamma_b}; 4 \text{ MPa} \right\} \quad (8.28)$$

8.4.2 Armatures transversales inclinées à 45° ($\alpha = \frac{\pi}{4}$)

On adopte dans ce cas l'expression suivante indépendamment de la préjudiciabilité du milieu :

$$\bar{\tau}_u = \min \left\{ 0, 27 \frac{f_{c_j}}{\gamma_b}; 7 \text{ MPa} \right\} \quad (8.29)$$

8.4.3 Pièces dont toutes les sections droites sont comprimées (poteaux)

Dans ce cas on adopte pour $\bar{\tau}_u$:

$$\bar{\tau}_u = \min \left\{ 0, 06 \frac{f_{c_j}}{\gamma_b}; 1,5 \text{ MPa} \right\} \quad (8.30)$$

Remarque :

Pour les armatures inclinées avec un angle $\alpha \in [45^\circ; 90^\circ]$, on procède par interpolation sur les valeurs précédentes.

8.5 Vérification du cisaillement du béton de l'âme

La contrainte du béton τ_u doit simplement vérifier, dans tous les cas, la condition suivante :

$$\tau_u \leq \bar{\tau}_u \quad (8.31)$$

8.6 Calcul des armatures transversales d'une poutre

8.6.1 Comportement local de l'âme sous l'action de l'effort tranchant

On considère un parallélépipède élémentaire de la poutre dont les faces sont parallèles aux axes principaux de la poutre et dont la longueur est égale à la largeur de la section (figure 8.5).

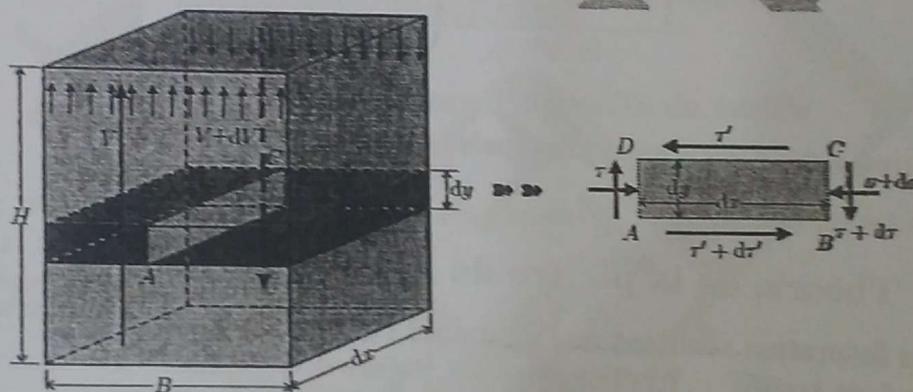


FIGURE 8.5 - État des contraintes en effort tranchant

Lorsqu'on choisit $dy = dx$, l'équilibre du domaine $ABCD$ en rotation permet de retrouver le principe de réciprocité des contraintes tangentes : $\tau = \tau'$.

Exprimons les contraintes principales associées à un état de contrainte de pur cisaillement en supposant $\sigma = 0$ (voir figure 8.6).

Il est facile de remarquer, en projetant les contraintes sur les diagonales, que :

- La diagonale BD subit des contraintes de compression ;
- La diagonale AC subit des contraintes de traction.

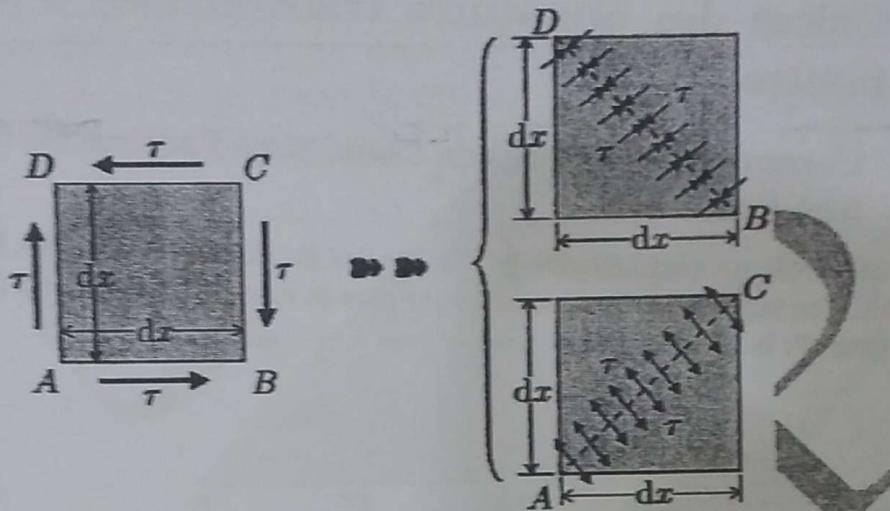


FIGURE 8.6 - Contraintes principales g n r es par un cisaillement

8.6.2 Théorie de la poutre de RITTER-MORSH

Après fissuration résultant de l'action de l'effort tranchant, la poutre est assimil e à un treillis de RITTER-MORSH (figure 8.7) constitu e par :

- Une membrure comprim e ① correspondant à la zone du béton comprim e avec éventuellement des aciers comprimés;
- Une membrure tendue ② correspondant aux aciers tendus;
- Des diagonales tendues ③ correspondant aux cours ou aux barres relev es inclin es d'un angle α à partir de l'horizontale;
- Des diagonales comprim es ④ qui correspondent aux bielles de béton d'angle 45° par rapport à l'horizontale.

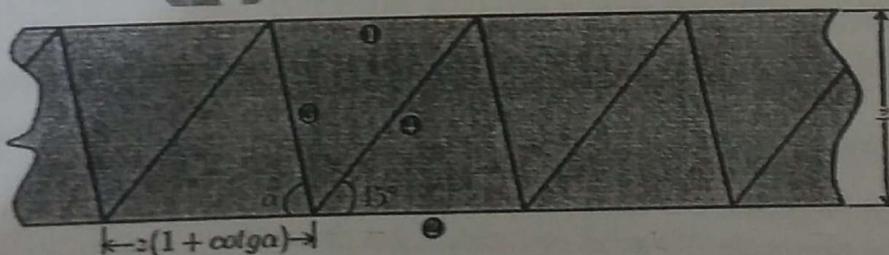


FIGURE 8.7 - Poutre treillis de RITTER-MORSH

Détermination de la largeur d'une maille (figure 8.8) :

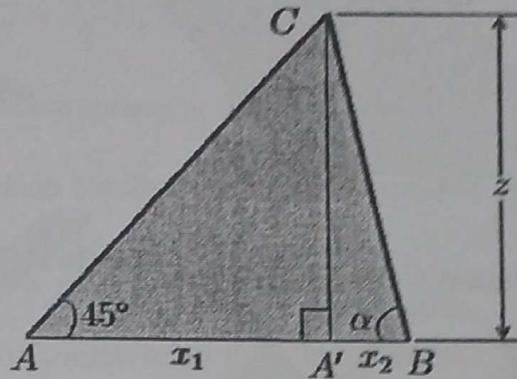


FIGURE 8.8 - Dimensions d'une maille du modèle

Le triangle (AA'C) étant isocèle de sommet A', la longueur x_1 est donc :
 $x_1 = z$.
 on a également :

$$\tan \alpha = \frac{z}{x_2} \rightarrow x_2 = \frac{z}{\tan \alpha} = z \cot \alpha \quad (8.32)$$

la largeur de la maille L est :

$$L = x_1 + x_2 = z + z \cot \alpha = z(1 + \cot \alpha) \quad (8.33)$$

Prenons une maille du treillis (figure 8.9) et introduisons une coupure fictive selon $y'y$. Les équations d'équilibre donnent :

$$V_u = N_t \sin \alpha \rightarrow N_t = \frac{V_u}{\sin \alpha} \quad (8.34)$$

où N_t est l'effort de traction dans les cours généré par l'application de l'effort tranchant V_u .

Soit S_t l'espacement des cours d'armatures transversales entre A et B. Le nombre de cours est :

$$n = \frac{z(1 + \cot \alpha)}{S_t} \quad (8.35)$$

Soit A_t l'aire de la section droite d'un cours placé entre A et B et σ_s la contrainte de traction dans les aciers, alors :

$$N_t = n A_t \sigma_s \quad (8.36)$$

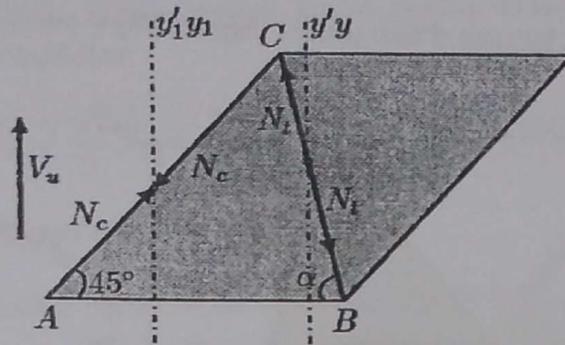


FIGURE 8.9 – Schématisation d'une maille du treillis de RITTER-MORSH

$$\rightarrow \frac{\sigma_s A_t}{S_t} = \frac{N_t}{n S_t} \quad (8.37)$$

$$(8.34) \text{ et } (8.35) \rightarrow \frac{\sigma_s A_t}{S_t} = \frac{V_u}{n \sin \alpha \frac{z(1+\cot \alpha)}{n}} \quad (8.38)$$

$$\rightarrow \frac{\sigma_s A_t}{S_t} = \frac{V_u}{z(\sin \alpha + \cos \alpha)} \quad (8.39)$$

En introduisant l'expression de τ_u dans cette expression, on trouve la formule suivante permettant le dimensionnement des cours d'acier :

$$(8.39) \rightarrow \frac{A_t}{B_0 S_t} = \frac{V_u}{z \sigma_s B_0 (\sin \alpha + \cos \alpha)} \quad (8.40)$$

$$\tau_u = \frac{V_u}{B_0 d} \rightarrow \frac{A_t}{B_0 S_t} = \frac{B_0 d \tau_u}{z \sigma_s B_0 (\sin \alpha + \cos \alpha)} \quad (8.41)$$

$$\rightarrow \frac{A_t}{B_0 S_t} = \frac{\tau_u}{\frac{z}{d} \sigma_s (\sin \alpha + \cos \alpha)} \quad (8.42)$$

où B_0 est la largeur de l'âme de la section.

Ainsi, en fixant par exemple à priori S_t (il est préférable que cette valeur soit la plus petite possible pour assurer une meilleure répartition des armatures sans toutefois empêcher le bon bétonnage), il est possible de calculer la valeur théorique de la section des armatures transversales correspondant au modèle de comportement défini par le treillis de RITTER-MORSH.

L'introduction d'une autre coupure $y_1 y_1$ au niveau de la bielle comprimée permet d'écrire à l'équilibre :

$$V_u = \frac{\sqrt{2}}{2} N_c = \frac{1}{\sqrt{2}} N_c \quad \rightarrow \quad N_c = \sqrt{2} V_u \quad (8.43)$$

où N_c est l'effort de compression dans la bielle.

L'aire de la section totale de la bielle comprimée est :

$$S_b = B_0 L \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} B_0 z (1 + \cot g \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0 z (1 + \cot g \alpha) \quad (8.44)$$

La contrainte de compression dans le béton est :

$$\sigma_{bc} = \frac{N_c}{S_b} = \frac{\sqrt{2} V_u}{\frac{1}{\sqrt{2}} B_0 z (1 + \cot g \alpha)} = \frac{2 V_u}{B_0 z (1 + \cot g \alpha)} \quad (8.45)$$

cette formule permet la vérification de la compression dans les bielles.

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a : $\sigma_{bc} \approx 2\tau_u$.

8.7 Armatures transversales d'une poutre

La formule de dimensionnement précédente néglige la participation du béton non fissuré à l'équilibre du treillis. Pour tenir compte de ce fait, les règles de calcul introduisant de manière empirique un coefficient k et la relation à satisfaire devient :

$$\frac{A_t}{B_0 S_t} \geq \frac{\tau_u - 0,3 f_{t_j}^* k}{\frac{z}{d} \sigma_s (\cos \alpha + \sin \alpha)} \quad (8.46)$$

soit en prenant $\sigma_s = \frac{f_{et}}{\gamma_s}$ et $\frac{z}{d} \approx 0,9$:

$$\frac{A_t}{B_0 S_t} \geq \frac{\gamma_s (\tau_u - 0,3 f_{t_j}^* k)}{0,9 f_{et} (\cos \alpha + \sin \alpha)} \quad (8.47)$$

où $f_{t_j}^*$ est la contrainte caractéristique de la traction du béton à j jours, plafonnée toutefois à 3,3 MPa.

$$f_{t_j}^* = \min(f_{t_j}; 3,3 \text{ MPa}) \quad (8.48)$$

Le coefficient k prend les valeurs suivantes :

- $k = 0$: en cas de reprise de bétonnage ou si la fissuration est jugée très préjudiciable;
 $k = 1$: en flexion simple s'il n'y a pas de reprise de bétonnage ou s'il y a reprise mais avec indentation qui dépasse 5 mm;
 $k = 1 + \frac{3(N_u/B)}{f_{c28}}$: en flexion composée où $N_u > 0$ (compression);
 B étant la section totale du béton;
 $k = 1 - \frac{10(N_u/B)}{f_{c28}}$: en flexion composée où $N_u < 0$ (traction).

Dans le cas le plus courant où $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (armatures transversales droites) pour la flexion simple sans reprise de bétonnage ($k = 1$), la formule de dimensionnement des cours devient :

$$\frac{A_t}{B_0 S_t} \geq \frac{\gamma_s(\tau_u - 0,3f_{tj}^*)}{0,9f_{ct}} \rightarrow S_t \leq \frac{0,9A_t f_{ct}}{\gamma_s B_0 (\tau_u - 0,3f_{tj}^*)} \quad (8.49)$$

8.8 Ferrailage transversal minimal

Le règlement exige un ferrailage de couture minimal défini par :

$$\frac{A_t f_{ct}}{B_0 S_t \sin \alpha} \geq \max\left(\frac{\tau_u}{2}; 0,4 \text{ MPa}\right) \quad (8.50)$$

8.9 Règle d'ALBERT CAQUOT pour la détermination pratique des espacements

8.9.1 Conditions d'application

Les trois conditions suivantes doivent être satisfaites pour pouvoir appliquer la règle d'ALBERT CAQUOT :

- Charges uniformément réparties;
- Section constante de la poutre;
- Cas de flexion simple et $k = 1$ (voir ci-haut).

8.9.2 Démarche à suivre

1. Choix d'un cours d'acier;
2. Calcul de l'espacement S_t à l'appui par :

$$S_t = \frac{0,9A_t f_{ct}}{\gamma_s B_0 (\tau_u - 0,3f_{tj}^*)} \quad (8.51)$$

3. Positionner le premier cours à une distance $\frac{S_t}{2}$ de l'appui ;
4. Les espacements suivants sont choisis dans la suite des valeurs : 7 cm, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 20, 25, 35, 40 cm. Chaque valeur d'espacement doit être répétée autant de fois qu'il y a de mètres dans la demi portée de la poutre (prendre la partie entière du rapport).

8.10 Dispositions constructives minimales

8.10.1 Espacement et diamètre des cours d'acier

Selon le BAEL, la valeur maximale suivante doit être respectée :

$$S_t \leq \inf(0,9d; 40 \text{ cm}) \quad (8.52)$$

la condition de non fragilité doit être également respectée :

$$S_t \leq \frac{A_t f_{et}}{0,4B_0} \quad (8.53)$$

dans cette formule, les dimensions sont exprimées en cm et la contrainte en MPa.

Le diamètre des armatures transversales ϕ_t doit vérifier la condition :

$$\phi_t \leq \min \left(\frac{H}{35}; \phi_{l_{\min}}; \frac{B_0}{10} \right) \quad (8.54)$$

où ϕ_t est le diamètre des armatures longitudinales.

8.11 Résistance du béton de la bielle

La contrainte dans le béton doit respecter la condition :

$$(8.45) \rightarrow \sigma_{bc} = \frac{2V_u}{0,9B_0d(1 + \cotg \alpha)} \leq f_{bu} \quad (8.55)$$

8.12 Justifications aux appuis : appui simple d'about

8.12.1 Profondeur minimale d'appui

Dans la figure (8.10), a représente la largeur de la bielle d'about et est calculée selon que l'armature inférieure est droite ou en crochet. Dans le cas

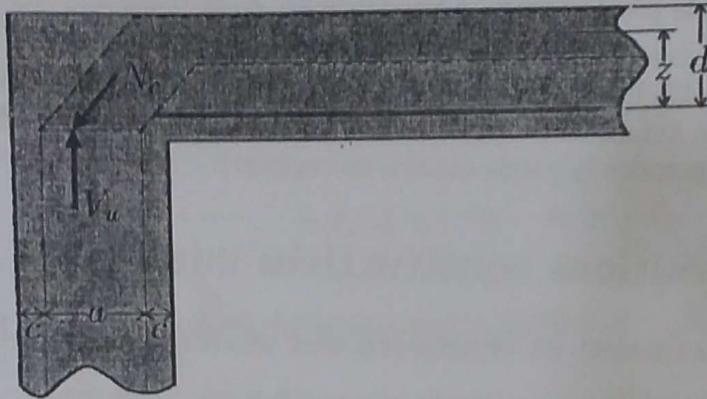


FIGURE 8.10 – Schématisation de la bielle d'about au niveau d'un appui

d'un crochet, il faut satisfaire $2mm$ à droite au lieu de l'enrobage c .

Dans tous les cas, la bielle d'about a une largeur a qui vérifie : $a \leq 0,9d$

Selon la figure (8.10), l'équilibre des efforts verticalement nous donne :

$$V_u = \frac{\sqrt{2}}{2} N_c \rightarrow N_c = \sqrt{2} V_u \quad (8.56)$$

la contrainte générée par N_c sur la section droite de la bielle d'about est :

$$\sigma_{bc} = \frac{N_c}{\frac{a}{\sqrt{2}} B_0} = \frac{\sqrt{2} V_u}{\frac{a}{\sqrt{2}} B_0} = \frac{2V_u}{aB_0} \quad (8.57)$$

la contrainte de la bielle d'about doit vérifier la condition :

$$\sigma_{bc} \leq f_{bu} \rightarrow \frac{2V_u}{aB_0} \leq \frac{0,8f_{cj}}{\gamma_b} = \frac{0,8f_{cj}}{1,5} \quad (8.58)$$

$$\rightarrow a \geq \frac{1,5 \cdot 2V_u}{0,8B_0 f_{cj}} \quad (8.59)$$

La vérification de la bielle sur appui en compression impose donc :

$$V_u \leq 0,267 B_0 a f_{cj} \quad (8.60)$$

ou encore :

$$a \geq \frac{3,75 V_u}{B_0 f_{cj}} \quad (8.61)$$

8.12.2 Sections minimales d'armatures inférieures sur appui

L'équilibre de la bielle est satisfaite si la section d'armatures respecte la condition suivante :

$$A_s f_{su} \leq V_u \rightarrow A_s \geq \frac{\gamma_s V_u}{f_e} \quad (8.62)$$

8.13 Justifications aux appuis : Appui intermédiaire

Posons : $V_u = \max(V_{ug}, V_{ud})$ et $R_u = |V_{ug}| + |V_{ud}|$, avec l'indice g qui désigne à gauche de l'appui et d à droite de l'appui.

8.13.1 Profondeur minimale d'appui

Le paramètre a déjà défini (figure 8.10) doit satisfaire :

$$a \geq \frac{3,75 V_u}{B_0 f_{cj}} \quad (8.63)$$

8.13.2 Contrainte moyenne de compression sur l'appui (poinçonnement)

On doit satisfaire la condition :

$$\frac{R_u}{B_0 a} \leq \frac{1,3 f_{c28}}{\gamma_b} \quad (8.64)$$

$$\rightarrow a \geq \frac{\gamma_b R_u}{1,3 B_0 f_{c28}} \quad (8.65)$$

8.13.3 Section minimale d'armatures inférieures sur appui

Sur un appui intermédiaire, d'après le principe de réciprocité des efforts, l'effort tranchant V_u développé sur l'appui génère un effort normal dans les armatures longitudinales inférieures égal à V_u . De plus, on a sur un appui intermédiaire un moment fléchissant M_u , ce moment génère un effort normal

dans les dites armatures égal à $\frac{M_u}{Z}$.

L'effort normal appliqué sur les armatures inférieures est donc :

$$N_s = V_u + \frac{M_u}{Z} \quad (8.66)$$

l'effort normal de résistance doit être supérieur à l'effort appliqué :

$$A_s f_{su} \geq N_s = V_u + \frac{M_u}{Z} \quad (8.67)$$

$$\rightarrow A_s \geq \frac{\gamma_s}{f_e} \left(V_u + \frac{M_u}{Z} \right) \quad (8.68)$$

La section d'armatures doit avoir une valeur minimale en vérifiant la condition :

$$A_s \geq \frac{\gamma_s}{f_e} \left(V_u + \frac{M_u}{0,9d} \right) \quad (8.69)$$

sachant que le moment M_u sur appui est négatif.

8.14 Cas des dalles

Aucune armature d'effort tranchant n'est requise si cette condition est remplie :

$$\tau_u \leq \bar{\tau}_u \quad (8.70)$$

avec $\bar{\tau}_u = \frac{0,07 f_{c28}}{\gamma_b}$ et la pièce est bétonnée sans reprise de bétonnage sur toute son épaisseur.

Dans le cas général des dalles, on remarque que τ_u prend des valeurs faibles. Toutefois, si la condition n'est pas vérifiée, on procède habituellement à une augmentation de l'épaisseur dans l'objectif de faire respecter la condition.



8.15 Exercices

◆ Exercice 1 :

Soit une section rectangulaire soumise à un effort tranchant $V_u = 92,4 \text{ kN}$ comme schématisé dans la figure (8.11). On prend en compte un béton de

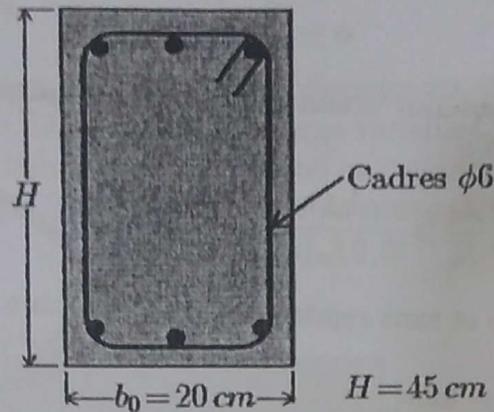


FIGURE 8.11 – Schéma de l'exercice 1

résistance caractéristique $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$ et un acier de nuance FeE215.

On considère qu'on a pas de reprise de bétonnage et la fissuration est peu préjudiciable.

1. Justifier l'âme de la poutre ?
2. Calculer l'espacement des armatures transversales ?

⇒ **Solution 1 :**

1. La contrainte tangente dans la section est :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} = \frac{92,4 \cdot 10^{-3}}{0,20 \cdot 0,41} = 1,13 \text{ MPa} \quad (8.71)$$

Pour des armatures droites ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) et en fissuration peu préjudiciable, la contrainte tangente limite ultime du béton est :

$$\bar{\tau}_u = \min \left\{ 0,2 \frac{f_{c28}}{\gamma_b}; 5 \text{ MPa} \right\} \quad (8.72)$$

$$= \min \left\{ 0,2 \frac{30}{1,5}; 5 \text{ MPa} \right\} \quad (8.73)$$

$$= 4 \text{ MPa} \quad (8.74)$$

on a :

$$\tau_u \leq \bar{\tau}_u \quad (8.75)$$

on peut prendre donc :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad (8.76)$$

2. Calcul de l'espacement des armatures transversales sachant que le diamètre est de 6 mm :

$$\frac{A_t}{S_t} \geq \frac{\gamma_s b_0 (\tau_u - 0,3k f_{t28}^*)}{0,9 f_{ct} (\cos \alpha + \sin \alpha)} \quad (8.77)$$

En peu préjudiciable et sans reprise de bétonnage on a : $k = 1$. On a également :

$$f_{t28}^* = \min\{f_{t28}; 3,3 \text{ MPa}\} = 2,4 \text{ MPa} \quad (8.78)$$

$$\rightarrow \frac{A_t}{S_t} \geq \frac{1,15 \cdot 0,2(1,13 - 0,3 \cdot 1 \cdot 2,4)}{0,9 \cdot 215} = 0,0487 \text{ cm} \quad (8.79)$$

sachant que $A_t = 0,56 \text{ cm}^2$ puisqu'on a deux sections $\phi 6$ qui travaille (cadres $\phi 6$), on obtient :

$$S_t \leq \frac{A_t}{0,0487} = \frac{0,56}{0,0487} = 11,5 \text{ cm} \quad (8.80)$$

On peut adopter donc l'espacement :

$$S_t = 11 \text{ cm} \quad (8.81)$$

On vérifie après la condition de non fragilité :

$$S_t \leq \frac{A_t f_{ct}}{0,4 b_0} = \frac{0,56 \cdot 10^{-4} \cdot 215}{0,4 \cdot 0,2} = 0,1505 \text{ m} \quad (8.82)$$

$$\rightarrow S_t \leq 15,05 \text{ cm} \quad (8.83)$$

cette condition est bien vérifiée.

La condition suivante doit être également vérifiée :

$$S_t \leq \inf\{0,9d; 40 \text{ cm}\} = \inf\{0,9 \cdot 40,5; 40 \text{ cm}\} = 36,45 \text{ cm} \quad (8.84)$$

cette condition est également vérifiée.

On peut donc bien adopter l'espacement de : $S_t = 11 \text{ cm}$.

⇒ Exercice 2 :

Soit une poutre en T bi-appuyée uniformément chargée par une charge permanente $G = 13,83 \text{ kN/m}$ et une charge variable $Q = 26,6 \text{ kN/m}$ comme schématisé dans la figure (8.12). On prend en compte un béton de résistance caractéristique $f_{ctk} = 25 \text{ MPa}$ et un acier de nuance FeE500.

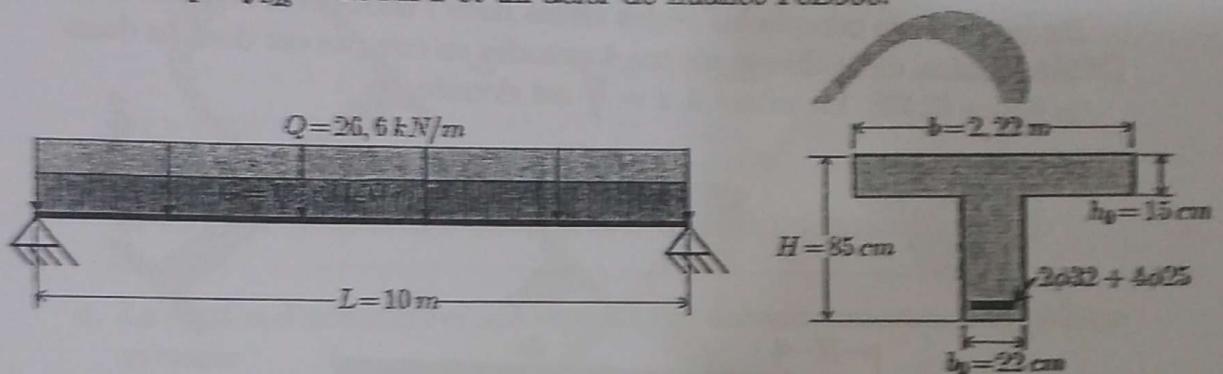


FIGURE 8.12 – Poutre en T uniformément chargée

On considère qu'on a pas de reprise de bétonnage et la fissuration est préjudiciable. La hauteur utile est : $d = 80 \text{ cm}$.

Pour le calcul à l'effort tranchant, on considère qu'au niveau des appuis on a :

- une distance de $\frac{H}{2}$ est considérée comme non chargée à partir de l'appui ;
- une deuxième distance, à partir de la limite de la première, égale à H est considérée comme chargée par une densité $\frac{2q}{3H}x$ (avec $\frac{H}{2} \leq x \leq \frac{3H}{2}$).

1. Calculer le chargement ultime à prendre en compte dans le calcul de l'effort tranchant et tracer sa distribution ?
2. Déterminer l'effort tranchant de calcul maximal au niveau des appuis ?
3. Vérifier l'âme du béton et justifier la prise en compte d'armatures d'effort tranchant verticales ?
4. Dimensionner le ferrailage transversal ?

⇒ Solution 2 :

1. La densité de charge à prendre en compte à l'ELU est :

$$q_u = 1,35G + 1,5Q \quad (8.85)$$

$$= 1,35.13,83 + 1,5.26,6 \quad (8.86)$$

$$= 58,57 \text{ kN/m} \quad (8.87)$$

En prenant en compte les règles citées dans l'énoncé de l'exercice, la distribution de la charge ultime à prendre en compte est donnée dans la figure (8.13). La valeur à $x = \frac{H}{2}$ est donnée par :

$$q(0,5H) = \frac{2q_u H}{3H} = \frac{q_u}{3} \quad (8.88)$$

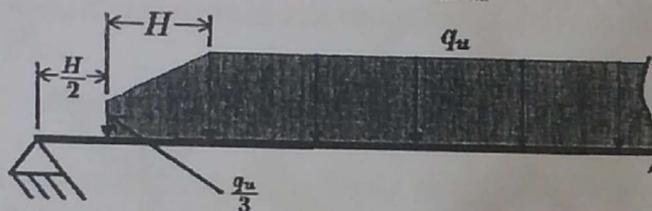


FIGURE 8.13 - Distribution à prendre en compte

2. Soit $V_{u_{\max}}$ l'effort tranchant au niveau de l'appui donné par la distribution q_u non réduite au niveau de l'appui. On a donc :

$$V_{u_{\max}} = \frac{q_u L}{2} \quad (8.89)$$

l'effort tranchant maximal de calcul est donné, selon le schéma de la figure (8.13), par :

$$V_{u_0} = \frac{q_u L}{2} - \frac{5}{6} q_u H \quad (8.90)$$

$$= 58,57 \left(5 - \frac{5}{6} \cdot 0,85 \right) \quad (8.91)$$

$$\rightarrow V_{u_0} = 251,36 \text{ kN} \quad (8.92)$$

3. La contrainte tangente conventionnelle est :

$$\tau_u = \frac{V_{u_0}}{b_0 d} = \frac{0,25136}{0,22 \cdot 0,8} = 1,43 \text{ MPa} \quad (8.93)$$

la contrainte tangente limite est :

$$\bar{\tau}_u = \min \left\{ 0,15 \frac{f_{cj}}{\gamma_b}; 4 \text{ MPa} \right\} \quad (8.94)$$

$$= \min \left\{ 0,15 \cdot \frac{25}{1,5}; 4 \text{ MPa} \right\} \quad (8.95)$$

$$\rightarrow \bar{\tau}_u = 2,5 \text{ MPa} \quad (8.96)$$

on a donc :

$$\tau_u \leq \bar{\tau}_u \quad (8.97)$$

et on peut adopter des armatures transversales droites ($\alpha = \frac{\pi}{2}$).

4. La section d'armature et son espacement doivent respecter la condition suivante :

$$\frac{A_t}{S_t} \geq \frac{\gamma_s b_0 (\tau_u - 0,3k f_{tj}^*)}{0,9 f_{ct}} \quad (8.98)$$

Nous pouvons choisir $\phi_t = 6 \text{ mm}$ et calculer l'espacement donc par la formule :

$$S_t \leq \frac{0,9 A_t f_{ct}}{\gamma_s b_0 (\tau_u - 0,3k f_{tj}^*)} \quad (8.99)$$

En fissuration préjudiciable et sans reprise de bétonnage, on a $k = 1$. on a également :

$$f_{tj}^* = \min \{ f_{tj}; 3,3 \text{ MPa} \} = 2,1 \text{ MPa} \quad (8.100)$$

$$\rightarrow S_t \leq \frac{0,9 \cdot 0,56 \cdot 10^{-4} \cdot 500}{1,15 \cdot 0,22 \cdot (1,43 - 0,3 \cdot 1 \cdot 2,1)} = 0,125 \text{ m} = 12,5 \text{ cm} \quad (8.101)$$

Vérifions la condition de non fragilité :

$$S_t \leq \frac{A_t f_{ct}}{0,4 b_0} = \frac{0,56 \cdot 10^{-4} \cdot 500}{0,4 \cdot 0,22} = 0,318 \text{ m} = 31,8 \text{ cm} \quad (8.102)$$

deuxième condition à vérifier :

$$S_t \leq \inf(0,9d; 40 \text{ cm}) = \inf(0,9 \cdot 80; 40 \text{ cm}) = 40 \text{ cm} \quad (8.103)$$

les deux conditions sont remplies et on peut donc adopter un ferrailage transversal de diamètre $\phi_t = 6 \text{ mm}$ avec un espacement $S_t = 12 \text{ cm}$.

↔ Exercice 3 :

Soit une poutre rectangulaire ($B_0 = 30 \text{ cm} \times H = 60 \text{ cm}$) sollicitée par un moment ultime $M_u = 500 \text{ kN.m}$ et un effort tranchant $V_u = 330 \text{ kN}$.

Données du problème :

Béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ Acier long. : $f_e = 500 \text{ MPa}$
 Acier transv. : $f_{et} = 235 \text{ MPa}$ Enrobages : $c = 5 \text{ cm}$
 Portée de la poutre : $L = 6 \text{ m}$ Fissuration peu nuisible
 Pas de reprise de bétonnage

Calculer le ferrailage longitudinal et transversal de la poutre ?

⇒ Solution 3 :

Ferrailage longitudinal :

D'après la méthodologie développée dans le chapitre de calcul des sections rectangulaires en flexion simple, on obtient les résultats suivants (Logiciel INGPONT) :

$$A_s = 27,89 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad A'_s = 1,05 \text{ cm}^2 \quad (8.104)$$

On peut adopter pour la section tendue 6HA25 (section réelle : $29,45 \text{ cm}^2$) et pour les armatures de montage 3HA8 (section réelle : $1,51 \text{ cm}^2$). Le ferrailage est disposé comme montré dans la figure (8.14).

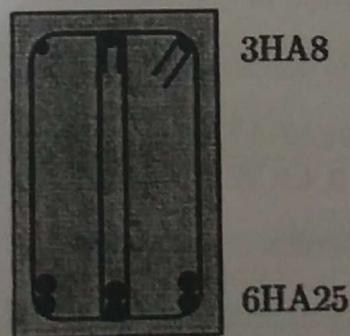


FIGURE 8.14 - Disposition du ferrailage

Puisqu'on a sur un lit trois positions de barres, on peut adopter pour le ferrailage transversal un cadre et un étrier comme schématisé dans la figure (8.14).

Ferrailage transversal :

Contrainte tangente conventionnelle :

$$\tau_u = \frac{V_u}{B_0 d} = \frac{0,33}{0,3 \cdot 0,55} = 2 \text{ MPa} \quad (8.105)$$

contrainte tangente limite :

$$\bar{\tau}_u = \min \left(0,2 \frac{f_{c28}}{\gamma_b}; 5 \text{ MPa} \right) = \min \left(0,2 \frac{25}{1,5}; 5 \text{ MPa} \right) \quad (8.106)$$

$$\rightarrow \bar{\tau}_u = \min(3,333; 5 \text{ MPa}) = 3,333 \text{ MPa} \quad (8.107)$$

on a donc :

$$\tau_u = 2 \text{ MPa} \leq \bar{\tau}_u = 3,333 \text{ MPa} \quad (8.108)$$

en conséquence, on peut adopter des armatures de cœture droite ($\alpha = \frac{\pi}{2}$).

Le diamètre des aciers transversaux doit satisfaire la condition :

$$\phi_t \leq \min \left(\frac{H}{35}; \phi_{t_{\min}}; \frac{B_0}{10} \right) = \min \left(\frac{60}{35}; 0,8; \frac{30}{10} \right) = \min(1,7; 0,8; 3) \quad (8.109)$$

$$\rightarrow \phi_t \leq 0,8 \text{ cm} = 8 \text{ mm} \quad (8.110)$$

on peut donc prendre $\phi_t = 8 \text{ mm}$.

Calcul de l'espacement des aciers de cœture :

$$\frac{A_t}{B_0 S_t} \geq \frac{\gamma_s(\tau_u - 0,3 f_{ij}^* k)}{0,9 f_{ct}(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{\gamma_s(\tau_u - 0,3 f_{ij}^* k)}{0,9 f_{ct}} \quad (8.111)$$

$$\rightarrow S_t \leq \frac{0,9 f_{ct} A_t}{\gamma_s B_0 (\tau_u - 0,3 f_{ij}^* k)} \quad (8.112)$$

On a une poutre qui travaille en flexion simple et on a pas de reprise de bétonnage, on a donc : $k = 1$.

On a également :

$$f_{ij}^* = \min(f_{tj}; 3,3 \text{ MPa}) = \min(2,1 \text{ MPa}; 3,3 \text{ MPa}) = 2,1 \text{ MPa} \quad (8.113)$$

pour l'espacement :

$$S_t \leq \frac{0,9 \cdot 235 \cdot 4,0 \cdot 5,10^{-4}}{1,15 \cdot 0,3(2 - 0,3 \cdot 2,1 \cdot 1)} = 0,0894 \text{ m} = 8,94 \text{ cm} \quad (8.114)$$

Au final, on peut adopter des $\phi 6$ espacement 8 cm.

Pour faciliter le bétonnage de la poutre, on peut augmenter l'espacement en adoptant un diamètre $\phi 10$ mais il faut augmenter également le diamètre minimal du ferrailage longitudinal.

Dans notre cas, on va se contenter des résultats obtenus auparavant ($\phi 6$ esp. 8 cm).

Vérification des espacements maximaux :

$$S_t \leq \frac{A_t f_{ct}}{0,4 B_0} = \frac{4,0 \cdot 5,10^{-4} \cdot 235}{0,4 \cdot 0,3} = 0,3917 \text{ m} = 39,17 \text{ cm} \quad (8.115)$$

$$S_t \leq \inf(0,9d; 40 \text{ cm}) = \inf(0,9 \cdot 55; 40) = \inf(49,5 \text{ cm}; 40 \text{ cm}) \quad (8.116)$$

$$\rightarrow S_t \leq 40 \text{ cm} \quad (8.117)$$

les deux conditions précédentes sont vérifiées.

Pour la disposition du ferrailage transversal, on adopte la méthode de CAQUOT (figure 8.15).

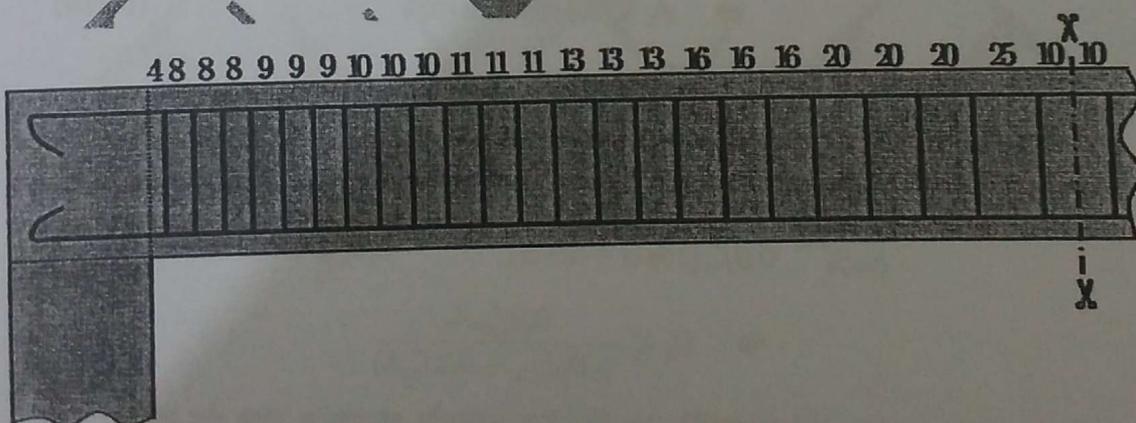


FIGURE 8.15 – Répartition du ferrailage transversal (Méthode de CAQUOT)

Vérification des distances :

$$4 + 3 \cdot (8 + 9 + 10 + 11 + 13 + 16 + 20) + 25 + 10 = 300 \text{ cm} = 3 \text{ m} = \frac{L}{2} \quad (8.118)$$

Le ferrailage doit être disposé d'une façon symétrique des deux cotés de la poutre.



EHTP

Chapitre 9

Calcul des sections en flexion composée

9.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de calculer les sections de béton armé subissant une flexion composée. Un tel cas correspond aux éléments chargés par un effort normal N et un moment fléchissant M appliqué sur l'un des plans principaux de la section droite de l'élément.

Selon les signes de l'effort normal et du moment fléchissant, on a à traiter trois situations possibles : section entièrement tendue, section partiellement comprimée et section entièrement comprimée.

9.2 Centre de pression et noyau central d'une section homogène

On considère une section droite d'un élément en BA chargé par un système de chargement ($M; N$) appliqué au niveau du centre de gravité G (figure 9.1).

9.2.1 Effort normal équivalent et centre de pression

Le système de chargement appliqué ($M; N$) est équivalent à un effort normal N appliqué en dehors du centre de gravité au niveau d'un point C qu'on appelle Centre de pression (voir figure 9.1).

9.2 Centre de pression et noyau central d'une section homogène 187

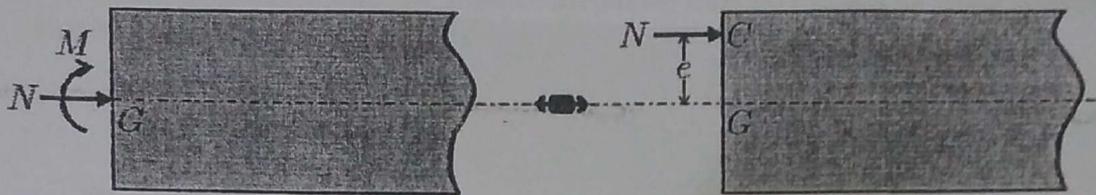


FIGURE 9.1 – Equivalence des efforts

L'ordonnée du centre de pression par rapport au centre de gravité G est défini par :

$$e = \frac{M}{N} \quad (9.1)$$

L'excentrement e est donné en valeur algébrique.

La position de la section tendue d'armatures dépend du signe du moment M . Toutefois, on a une exception dans le cas où on a un effort normal de compression qui rend la section entièrement comprimée.

9.2.2 Noyau central

Le noyau central d'une section donnée est constitué de l'ensemble des points qui vérifient la condition suivante : si un effort normal est appliqué sur l'un de ces points, cela engendre des contraintes de même signe sur toute la section.

La détermination du noyau central est relativement simple pour les sections simples géométriquement. Toutefois, dans certains cas, ce calcul devient relativement lourd !

Ce calcul peut être fait en analysant les contraintes au niveau des fibres extrêmes de la section (figure 9.2).

Dans le cas d'une poutre plane à plan moyen et chargée dans ce plan, la contrainte à une ordonnée y est donnée par :

$$\sigma(y) = \frac{N}{S} + \frac{My}{I} \quad (9.2)$$

où S est l'aire de la section droite ; y est l'ordonnée de la fibre sur laquelle on cherche la contrainte σ et I est le moment d'inertie de la section.

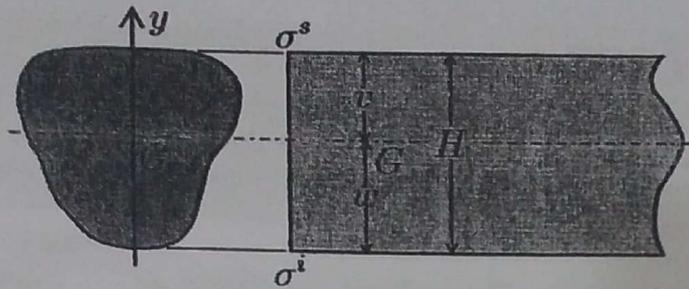


FIGURE 9.2 – Paramétrage d'une section

La fibre extrême supérieure est définie par $y = v$, d'où :

$$\sigma^s = \frac{N}{S} + \frac{Mv}{I} \quad (9.3)$$

La fibre extrême inférieure est définie par $y = -w$:

$$\sigma^i = \frac{N}{S} - \frac{Mw}{I} \quad (9.4)$$

D'après la définition du noyau central, le centre de pression C lui appartient si toutes les contraintes générées sont de même signe. Ceci est vrai en particulier pour les fibres extrême, d'où :

$$\sigma^s \sigma^i \geq 0 \quad (9.5)$$

la limite du noyau central correspond à $\sigma^s \sigma^i = 0$. On a donc deux cas :

$$\sigma^s = 0 \rightarrow \frac{N}{S} + \frac{Mv}{I} = 0 \quad (9.6)$$

$$\rightarrow N + \frac{Mv}{i^2} = 0 \quad (9.7)$$

$$\rightarrow 1 + \frac{ev}{i^2} = 0 \quad (9.8)$$

$$\rightarrow e = -\frac{i^2}{v} \quad (9.9)$$

i étant le rayon de giration de la section par rapport à l'axe passant par le centre de gravité G .

De même pour $\sigma^i = 0$ qui donne :

$$e = \frac{i^2}{w} \quad (9.10)$$

9.2 Centre de pression et noyau central d'une section homogène 189

Pour être à l'intérieur du noyau central, on doit être entre les deux valeurs extrêmes de e calculées, soit :

$$\boxed{-\frac{i^2}{v} \leq e \leq \frac{i^2}{w}} \quad (9.11)$$

☛ Exemple :

Section rectangulaire de dimensions $(B \times H)$ et section circulaire de diamètre D .

Section rectangulaire :

$$i^2 = \frac{I}{S} = \frac{BH^3}{12BH} = \frac{H^2}{12} \quad (9.12)$$

$$v = w = \frac{H}{2} \quad (9.13)$$

on a donc :

$$-\frac{i^2}{v} \leq e \leq \frac{i^2}{w} \rightarrow -\frac{H^2/12}{H/2} \leq e \leq \frac{H^2/12}{H/2} \quad (9.14)$$

$$-\frac{H}{6} \leq e \leq \frac{H}{6} \quad (9.15)$$

De même pour un axe vertical passant par le centre de gravité G , on obtient :

$$-\frac{B}{6} \leq e \leq \frac{B}{6} \quad (9.16)$$

Le noyau central de la section rectangulaire est présenté dans la figure (9.3).

Section circulaire :

$$i^2 = \frac{I}{S} = \frac{\pi D^4}{64} \frac{4}{\pi D^2} = \frac{D^2}{16} \quad (9.17)$$

$$v = w = \frac{D}{2} \quad (9.18)$$

on a donc :

$$-\frac{i^2}{v} \leq e \leq \frac{i^2}{w} \rightarrow -\frac{D^2/16}{D/2} \leq e \leq \frac{D^2/16}{D/2} \quad (9.19)$$

$$-\frac{D}{8} \leq e \leq \frac{D}{8} \quad (9.20)$$

Le noyau central d'une section circulaire de diamètre D est un cercle centré sur le centre de gravité G et qui a un diamètre $D' = \frac{D}{8}$.

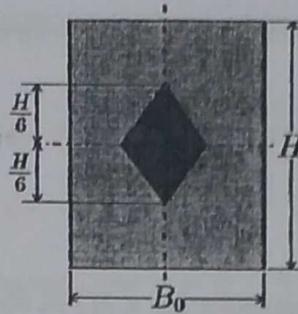


FIGURE 9.3 – Noyau central d'une section rectangulaire

9.3 Calcul d'une section rectangulaire à l'ELU

Les développements qui seront présentés correspondent à un moment ultime positif ($M_u \geq 0$). Dans la pratique si on a un moment négatif, il suffit de faire le calcul avec la valeur absolue du moment et de renverser à la fin les positions des armatures calculées.

9.3.1 Calcul d'une section entièrement tendue

Une section en BA est entièrement tendue si elle subit un effort normal de traction dont le centre de pression est compris entre les deux sections d'armatures A_1 et A_2 (figure 9.4). On peut écrire :

$$C \in [A_1; A_2] \rightarrow \frac{H}{2} - d \leq e \leq \frac{H}{2} - d' \quad (9.21)$$

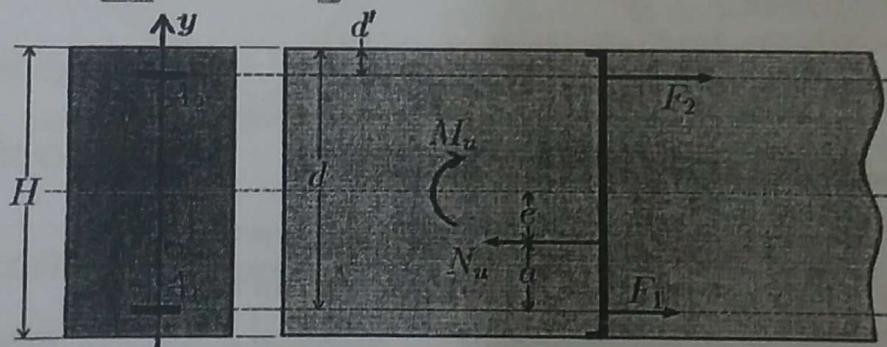


FIGURE 9.4 – Schéma de la section entièrement tendue

Si on suppose que le moment est positif $M_u \geq 0$ et puisque $N_u \leq 0$, on a : $e \leq 0$.

La distance entre le centre de pression et la section d'armatures A_1 est :

$$a = d - \frac{H}{2} + e = d - \frac{H}{2} + \frac{M_u}{N_u} \quad (9.22)$$

On peut constater facilement que $d \geq \frac{H}{2} - e$ d'où : $a \geq 0$.

Sachant que le béton d'une section entièrement tendue ne travaille pas, l'équilibre des forces et des moments nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} -N_u + F_1 + F_2 = 0 \\ -N_u a + F_2(d - d') = 0 \end{cases} \quad (9.23)$$

$$\rightarrow \begin{cases} -N_u + A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 = 0 \\ -N_u a + A_2 \sigma_2 (d - d') = 0 \end{cases} \quad (9.24)$$

Dans l'objectif d'économiser l'utilisation des aciers, on doit prendre : $\sigma_1 = \sigma_2 = f_{su}$. D'où :

$$\begin{cases} A_2 = \frac{N_u a}{f_{su}(d - d')} \\ A_1 = \frac{N_u}{f_{su}} - A_2 \end{cases} \quad (9.25)$$

Dans le cas d'une section entièrement tendue avec $M_u \geq 0$, le centre de pression C doit être situé entre le centre de gravité G et la section d'armatures A_1 . D'où :

$$0 \leq a \leq d - \frac{H}{2} \quad (9.26)$$

$$\rightarrow 0 \leq M_u \leq M_1 = N_u \left(\frac{H}{2} - d \right) \quad (9.27)$$

9.3.2 Calcul d'une section partiellement comprimée

Une section est partiellement comprimée dans les deux cas suivants :

- Le centre de pression C est situé à l'extérieur des sections d'armatures théoriques A_1 et A_2 et cela indépendamment du signe de l'effort normal N_u (traction ou compression).
- Le centre de pression C est situé à l'intérieur des sections théoriques d'aciers avec l'application d'un effort normal N_u de compression et le moment fléchissant M_u doit être supérieur à M_3 :

$$\begin{cases} N_u \geq 0 \\ M_u \geq M_3 = N_u \left(\frac{H}{2} - d' \right) - (0,337H - 0,81d')N_0 \end{cases} \quad (9.28)$$

où :

$$N_0 = BHf_{bu} \tag{9.29}$$

On signale que l'équivalence du diagramme des contraintes du béton comprimé avec le diagramme rectangulaire simplifié reste valable puisque la fibre neutre se situe entre les armatures de la section A_1 et A_2 (figure 9.5). Les démonstrations de l'équivalence sont déjà menées auparavant.

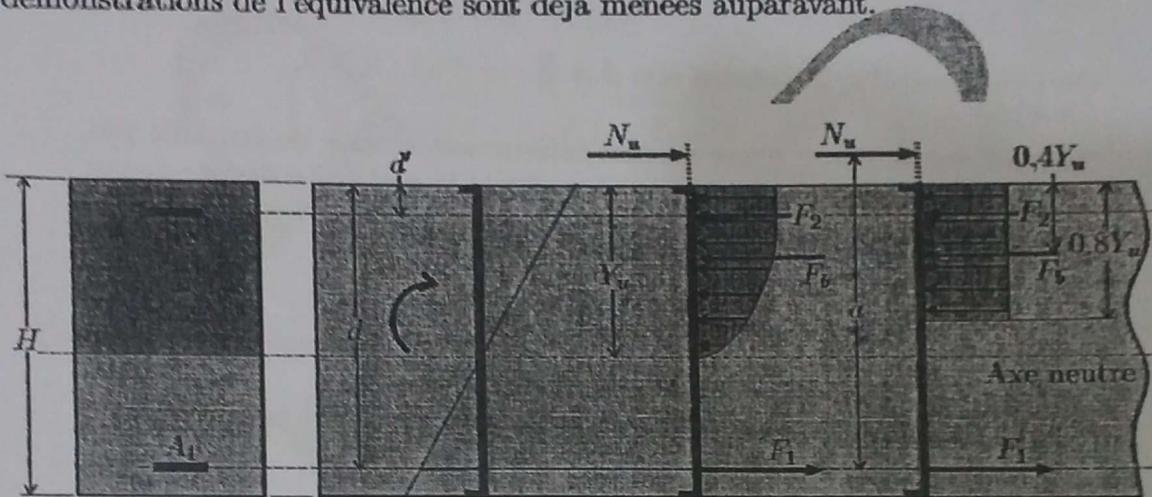


FIGURE 9.5 - État des efforts dans une section partiellement comprimée

Le bras de levier a de l'effort normal équivalent N_u par rapport à A_1 est donné par :

$$a = d - \frac{H}{2} + e \tag{9.30}$$

on peut écrire :

$$a \geq 0 \iff d - \frac{H}{2} + e \geq 0 \tag{9.31}$$

$$\iff d - \frac{H}{2} \geq -e \tag{9.32}$$

Géométriquement d'après la figure (9.5), on a : $|e| \geq d - \frac{H}{2}$
 En conséquence, la seule solution pour l'inégalité (9.32) est :

$$e \geq 0 \iff \frac{M_u}{N_u} \geq 0 \tag{9.33}$$

$$\iff N_u \geq 0 \tag{9.34}$$

Au final, on peut annoncer que : $a \geq 0$ si et seulement si $N_u \geq 0$
 Ou encore : $a \leq 0$ si et seulement si $N_u \leq 0$

Dans tous les cas on a donc : $N_u a \geq 0$

Les équations d'équilibre des efforts et moments sont :

$$\begin{cases} N_u + F_1 - F_b - F_2 = 0 \\ N_u a - F_2(d - d') - F_b(d - 0,4Y_u) = 0 \end{cases} \quad (9.35)$$

$$\rightarrow \begin{cases} (N_u + A_1\sigma_1) - F_b - A_2\sigma_2 = 0 \\ N_u a - F_b(d - 0,4Y_u) - A_2\sigma_2(d - d') = 0 \end{cases} \quad (9.36)$$

Posons :

$$\begin{cases} N_u + A_1\sigma_1 = \bar{A}_1\bar{\sigma}_1 \\ A_2\sigma_2 = \bar{A}_2\bar{\sigma}_2 \\ \bar{M} = N_u a \geq 0 \end{cases} \quad (9.37)$$

Les équations d'équilibre deviennent sous la forme :

$$\rightarrow \begin{cases} \bar{A}_1\bar{\sigma}_1 - F_b - \bar{A}_2\bar{\sigma}_2 = 0 \\ \bar{M} - F_b(d - 0,4Y_u) - \bar{A}_2\bar{\sigma}_2(d - d') = 0 \end{cases} \quad (9.38)$$

Ces équations correspondent mathématiquement à une section soumise à une flexion simple sous le moment \bar{M} dont les sections d'armatures sont \bar{A}_1 et \bar{A}_2 .

Il suffit donc de faire le calcul en flexion simple sous le moment $\bar{M} = N_u a$ et une fois les sections \bar{A}_1 et \bar{A}_2 sont calculées, on obtient les sections réelles par :

$$\begin{cases} A_1 = \bar{A}_1 - \frac{N_u}{f_{su}} \\ A_2 = \bar{A}_2 \end{cases} \quad (9.39)$$

Pour l'utilisation économique des aciers, on a considéré dans tous les calculs que :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = f_{su} \quad (9.40)$$

9.3.3 Calcul d'une section entièrement comprimée

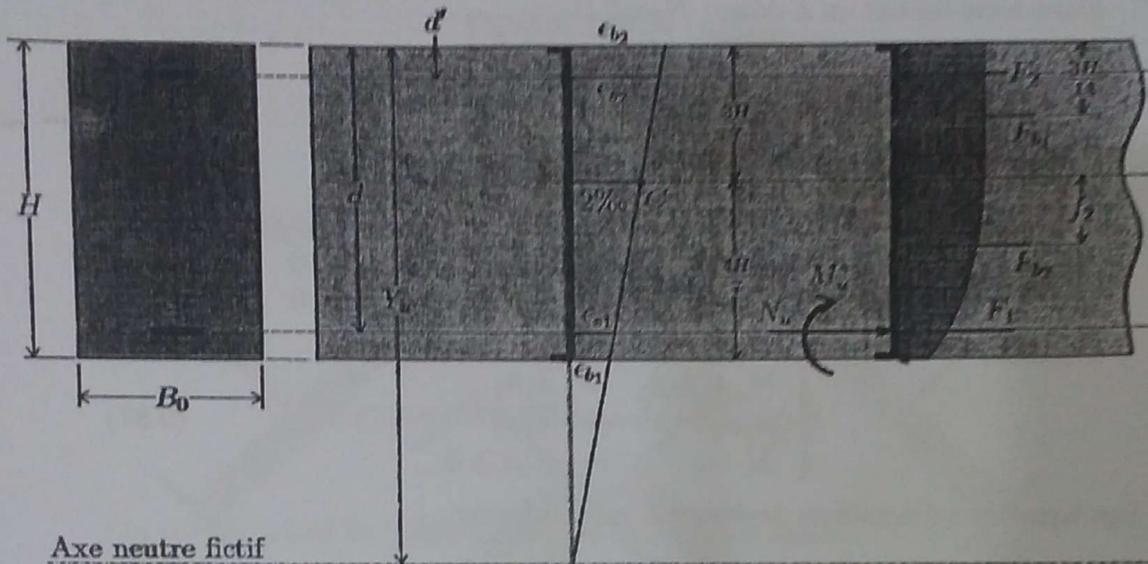


FIGURE 9.6 – État des déformations et des efforts dans une section entièrement comprimée

9.4 Exercices

⇒ Exercice 1 :

Soit une section rectangulaire soumise à un effort normal $N_u = 849 \text{ kN}$ et un moment fléchissant $M_u = 243 \text{ kN.m}$ (voir figure 9.7).

On prend en compte un béton de résistance caractéristique $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$ et un acier de nuance FeE400.

Calculer les armatures de la section considérée ?

⇒ Solution 1 :

Sachant que $\gamma_b = 1,5$, $\gamma_s = 1,15$ et en prenant $\theta = 1$, on a :

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 20}{1,5} = 11,33 \text{ MPa} \tag{9.41}$$

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{400}{1,15} = 347,826 \text{ MPa} \tag{9.42}$$

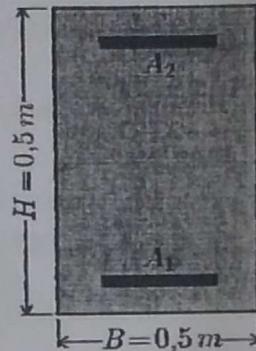


FIGURE 9.7 - Schéma de l'exercice 1

On calcule après les valeurs de N_0 et N_1 comme suit :

$$N_0 = BHf_{bu} = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 11,33 = 2,83 \text{ MN} \quad (9.43)$$

$$N_1 = N_0 - 2,8 \frac{M_u}{H} = 2,83 - 2,8 \cdot \frac{0,243}{0,5} = 1,469 \text{ MN} \quad (9.44)$$

On a donc :

$$0 \leq N_u \leq N_1 \quad (9.45)$$

la section est donc **partiellement comprimée**.

Cette section peut être calculée comme une section de mêmes dimensions travaillant en flexion simple et sollicitée par le moment \bar{M} défini ci-après.

$$e = \frac{M_u}{N_u} = \frac{0,243}{0,849} = 0,286 \text{ m} \quad (9.46)$$

$$\rightarrow \bar{M} = N_u a \quad (9.47)$$

$$= N_u \left(d - \frac{H}{2} + e \right) \quad (9.48)$$

$$= 0,849(0,9 \cdot 0,5 - 0,25 + 0,286) \quad (9.49)$$

$$= 0,413 \text{ MN.m} \quad (9.50)$$

Le moment réduit est donné par :

$$\mu = \frac{\bar{M}}{Bd^2 f_{bu}} = \frac{0,413}{0,5 \cdot (0,9 \cdot 0,5)^2 \cdot 11,33} = 0,36 \quad (9.51)$$

on a :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{400}{1,15 \cdot 200\,000} = 1,739\text{‰} \quad (9.52)$$

$$\rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 1,739} = 0,668 \quad (9.53)$$

le moment réduit limite est :

$$\mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) = 0,8 \cdot 0,668(1 - 0,4 \cdot 0,668) = 0,392 \quad (9.54)$$

On est donc dans le sous-domaine : $0,1859 \leq \mu \leq \mu_e$ (Pivot B)

$$\alpha_u = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2\mu}\right) = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,36}\right) = 0,589 \quad (9.55)$$

$$\rightarrow \beta_u = 0,8\alpha_u = 0,8 \cdot 0,589 = 0,471 \quad (9.56)$$

la section d'armature est donc :

$$\bar{A}_1 = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} = \frac{0,471 \cdot 0,5 \cdot 9,0 \cdot 5,11,33}{347,826} = 0,003452 \text{ m}^2 \quad (9.57)$$

On a donc : $\bar{A}_1 = 34,52 \text{ cm}^2$ et $\bar{A}_2 = 0 \text{ cm}^2$.

d'où :

$$A_2 = \bar{A}_2 = 0 \text{ cm}^2 \quad (9.58)$$

$$A_1 = \bar{A}_1 \frac{N_u}{f_{su}} = 0,003452 \cdot \frac{0,849}{347,826} = 0,001011 \text{ m}^2 \quad (9.59)$$

Le ferrailage à adopter pour la section en flexion composée est :

$$\boxed{A_1 = 10,11 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad A_2 = 0 \text{ cm}^2} \quad (9.60)$$

•• Exercice 2 :

Soit une section rectangulaire de dimensions ($B = 0,3 \text{ m}$; $H = 0,6 \text{ m}$).
Cette section est soumise aux charges permanentes :

$$\begin{cases} N_g = -200 \text{ kN} \\ M_g = 20 \text{ kN.m} \end{cases} \quad (9.61)$$

cette section est soumise également aux charges variables suivantes :

$$\begin{cases} N_q = -200 \text{ kN} \\ M_q = 20 \text{ kN.m} \end{cases} \quad (9.62)$$

On prend en compte un béton de résistance caractéristique $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et un acier de nuance FeE500.

On prend : $d = 55 \text{ cm}$ et $d' = 5 \text{ cm}$.

1. Déterminer les sollicitations de calcul à l'ELU ?
2. Dimensionner la section de BA ?

⇒ Exercice 3 :

Soit une section rectangulaire de dimensions ($B = 0,3 \text{ m}$; $H = 0,6 \text{ m}$). Cette section est soumise aux charges suivantes : $N_u = 2548 \text{ kN}$ et $M_u = 77 \text{ kN.m}$.

On prend en compte un béton de résistance caractéristique $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et un acier de nuance FeE400.

On prend : $d = 55 \text{ cm}$ et $d' = 5 \text{ cm}$.

Calculer les armatures de la section ?

⇒ Exercice 4 :

Soit une section rectangulaire de dimensions ($B = 0,3 \text{ m}$; $H = 0,5 \text{ m}$). Cette section est soumise aux charges permanentes :

$$\begin{cases} N_g = 0,805 \text{ MN} \\ M_g = 0,018 \text{ MN.m} \end{cases} \quad (9.63)$$

cette section est soumise également aux charges variables suivantes :

$$\begin{cases} N_q = 0,995 \text{ MN} \\ M_q = 0,022 \text{ MN.m} \end{cases} \quad (9.64)$$

On prend en compte un béton de résistance caractéristique $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et un acier de nuance FeE500.

On prend : $d = 45 \text{ cm}$ et $d' = 5 \text{ cm}$.

1. Déterminer les sollicitations de calcul à l'ELU ?

2. Dimensionner la section de BA ?



EHTP