

CHAPITRE IV : ELEMENT CADRE

IV-1 Élément Poutre avec Effort Axial - Élément Cadre

En tenant compte des déplacements suivant l'axe de l'élément poutre, on peut former la matrice de rigidité de l'élément cadre par superposition de l'élément barre et de l'élément poutre (Fig.4-1)

Rappelons que pour l'élément barre, la matrice de rigidité est donnée par

$$[K_b] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

soit

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4-2)$$

Pour l'élément poutre, nous avons :

$$[K_p] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

et

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = [K_p] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad (4-4)$$

Pour l'élément cadre on doit avoir

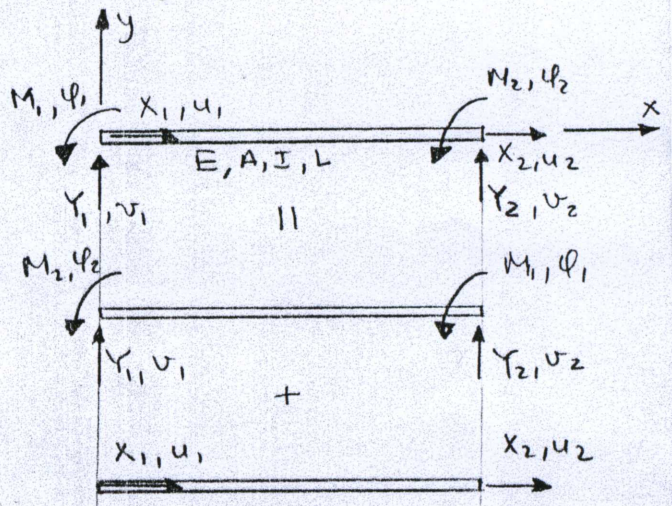


Fig 4-1

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = [K_e] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad (4-5)$$

Pour pouvoir appliquer la superposition, les matrices $[K_b]$ et $[K_p]$ doivent être du même ordre que $[K]$. c.à.d.:

Pour l'élément barre :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \\ X_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-6)$$

Pour l'élément poutre :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ Y_1 \\ M \\ 0 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ 0 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad (4-7)$$

par superposition des Equations (4-6) et (4-7), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 12\beta & 6\beta L & 0 & -12\beta & 6\beta L \\ 0 & 6\beta L & 4\beta L^2 & 0 & -6\beta L & 2\beta L^2 \\ -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -12\beta & -6\beta L & 0 & 12\beta & -6\beta L \\ 0 & 6\beta L & 2\beta L^2 & 0 & -6\beta L & 4\beta L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad (4-8)$$

où $\alpha = \frac{EA}{L}$ et $\beta = \frac{EI}{L^3}$

et par conséquent

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \alpha & & & & & & \\ 0 & 12\beta & & & & & \\ 0 & 6\beta L & 4\beta L^2 & & & & \\ -\alpha & 0 & 0 & \alpha & & & \\ 0 & -12\beta & -6\beta L & 0 & 12\beta & & \\ 0 & 6\beta L & 2\beta L^2 & 0 & -6\beta L & 4\beta L^2 & \end{bmatrix} \quad \text{Sym} \quad (4-9)$$

IV-2 Transformation dans le repère global

Dans le cas d'une structure orientée arbitrairement dans le plan, les matrices de rigidité doivent être exprimées dans un repère de référence global.

Considérons l'élément cadre illustré à la figure 4-2 où les repères (\hat{x}, \hat{y}) et (x, y) représentent les systèmes de coordonnées locales et globales respectivement.

les déplacements généralisés locaux et globaux sont reliés par la matrice de transformation suivante :

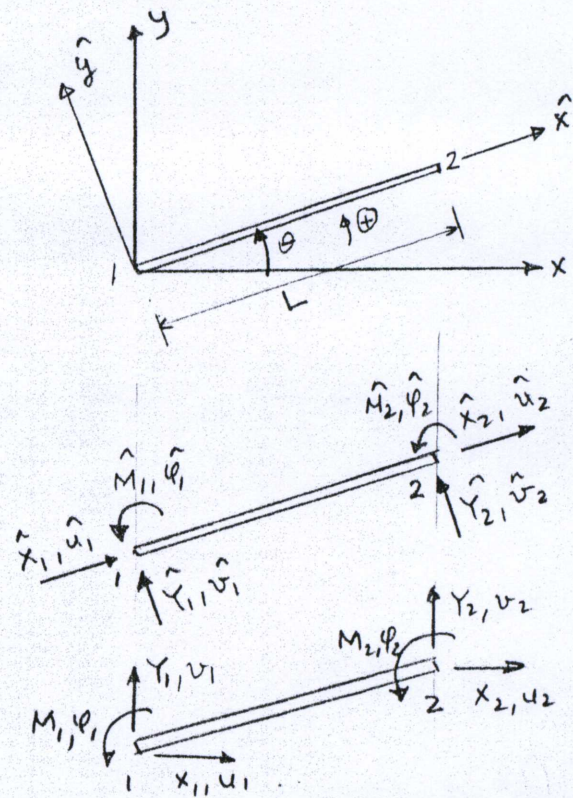


Fig. 4-2

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & & & \\ -\mu & \lambda & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \lambda & \mu & 0 \\ & & & \mu & \lambda & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \phi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (4-10)$$

où $\lambda = \cos \theta$, $\mu = \sin \theta$

soit

$$\{\hat{q}_e\} = [T] \{q_e\} \quad (4-11)$$

De la même manière on peut écrire

$$\{\hat{f}_e\} = [T] \{f_e\} \quad (4-12)$$

où $[T]$ représente la matrice de transformation du repère global au repère local. Puisque $[T]$ est orthogonale on a $[T]^{-1} = [T]^T$

D'après l'Eq. (4-12)

$$\{f_e\} = [T]^{-1} \{\hat{f}_e\} = [T]^T \{\hat{f}_e\} \quad (4-13)$$

D'autre part

$$\{\hat{f}_e\} = [\hat{k}_e] \{\hat{q}_e\} \quad (4-14)$$

$$\{f_e\} = [k_e] \{q_e\} \quad (4-15)$$

Eq. (4-14) dans Eq. (4-13) et Eq. (4-11)

$$\begin{aligned} \{f_e\} &= [T]^T [\hat{k}_e] \{\hat{q}_e\} \\ &= [T]^T [\hat{k}_e] [T] \{q_e\} \\ &= [k_e] \{q_e\} \end{aligned} \quad (4-16)$$

D'où

$$[k_e] = [T]^T [\hat{k}_e] [T] \quad (4-17)$$

En substituant les valeurs de $[T]$, $[T]^T$ et $[\hat{k}_e]$, la matrice de rigidité de l'élément cadre dans le repère global est donnée explicitement par :

$$[k_e] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A\lambda^2 + \frac{12I}{L^2} \mu^2 & (A - \frac{12I}{L^2}) \lambda \mu & -\frac{6I}{L} \mu & -(A\lambda^2 + \frac{12I}{L^2} \mu^2) & -(\frac{A - 12I}{L^2}) \lambda \mu & -\frac{6I}{L} \mu \\ & A\mu^2 + \frac{12I}{L^2} \lambda^2 & \frac{6I}{L} \lambda & -(A - \frac{12I}{L^2}) \lambda \mu & -(A\mu^2 + \frac{12I}{L^2} \lambda^2) & \frac{6I}{L} \lambda \\ & & 4I & \frac{6I}{L} \mu & -\frac{6I}{L} \lambda & 2I \\ \text{Sym} & & & A\lambda^2 + \frac{12I}{L^2} \mu^2 & (\frac{A - 12I}{L^2}) \lambda \mu & \frac{6I}{L} \mu \\ & & & & A\mu^2 + \frac{12I}{L^2} \lambda^2 & -\frac{6I}{L} \lambda \\ & & & & & 4I \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

IV-3 Exemple d'application

①: Elément cadre

$A_1 = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$

$I_1 = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^4$

$L_1 = 3 \text{ m}$

$E_1 = 210 \text{ GPa} = 210 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$

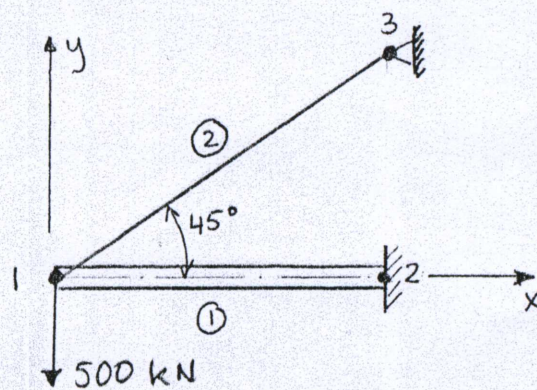


Fig-4-3

②: Elément barre

$A_2 = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$

$E_2 = E_1 = 210 \text{ GPa}$

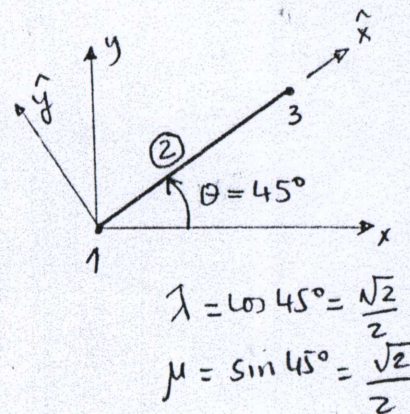
$L_2 = \frac{L_1}{\cos 45^\circ} = \frac{3}{\cos 45^\circ}$

on se propose de déterminer les déplacements au nœud 1 et les efforts dans les éléments.

Elément barre:

Dans le repère global on a

$$[k_e^{(2)}] = \frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda \mu & -\lambda^2 & -\lambda \mu \\ & \mu^2 & -\lambda \mu & -\mu^2 \\ & & \lambda^2 & \lambda \mu \\ & & & \mu^2 \end{bmatrix}$$

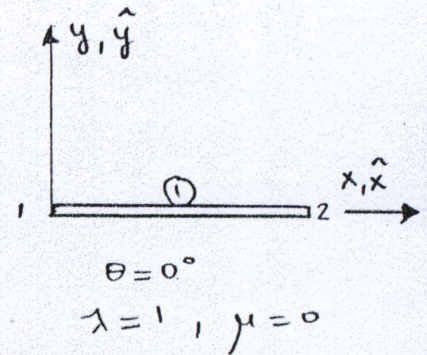


En éliminant les dd l imposés, on obtient la forme réduite de $[k_e^{(2)}]$ comme suit:

$$[k_e^{(1)}] = \frac{(1 \cdot 10^{-3})(210 \times 10^6)}{(3/0.707)} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = 70 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ 0.354 & 0.354 \\ 0.354 & 0.354 \end{bmatrix}$$

Élément cadre

$$[k_e^{(1)}] = \frac{E_1}{L_1} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \varphi_1 & u_2=0 & v_2=0 & \varphi_2=0 \\ A_1 & 0 & 0 & -A_1 & 0 & 0 \\ & \frac{12I_1}{L_1^2} & \frac{6I_1}{L_1} & 0 & -\frac{12I_1}{L_1^2} & \frac{6I_1}{L_1} \\ & & 4I_1 & 0 & -\frac{6I_1}{L_1} & 2I_1 \\ \text{Sym} & & & A_1 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12I_1}{L_1^2} & -\frac{6I_1}{L_1} \\ & & & & & 4I_1 \end{bmatrix}$$



sous forme réduite :

$$[k_e^{(1)}] = \frac{E_1}{L_1} \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_1}{L_1^2} & \frac{6I_1}{L_1} \\ 0 & \frac{6I_1}{L_1} & 4I_1 \end{bmatrix} = 70 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \varphi_1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.067 & 0.10 \\ 0 & 0.10 & 0.20 \end{bmatrix}$$

Assemblage

$$[K] = 70 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \varphi_1 \\ 2 + 0.354 & 0 + 0.354 & 0 + 0 \\ 0 + 0.354 & 0.067 + 0.354 & 0.10 + 0 \\ 0 + 0 & 0.10 + 0 & 0.20 + 0 \end{bmatrix} = 70 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 2.354 & 0.354 & 0 \\ 0.354 & 0.421 & 0.10 \\ 0 & 0.10 & 0.20 \end{bmatrix}$$

Dans le repère global on a : $\{f\} = [K]\{q\}$
sous forme réduite on peut écrire explicitement

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -500 \\ 0 \end{Bmatrix} = 70 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 2.354 & 0.354 & 0 \\ 0.354 & 0.421 & 0.10 \\ 0 & 0.10 & 0.20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix}$$

ce qui donne

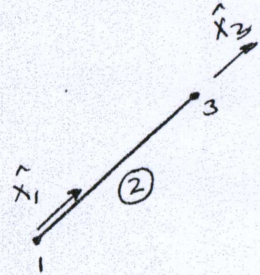
$$\begin{cases} u_1 = 3.38 \times 10^{-3} \text{ m} = 3.38 \text{ mm} \\ v_1 = -22.5 \times 10^{-3} \text{ m} = -22.5 \text{ mm} \\ \varphi_1 = 0.0113 \text{ rad} \end{cases}$$

Les efforts internes aux nœuds sont obtenus dans le repère local par

$$\begin{aligned} \{\hat{f}_e\} &= [\hat{k}_e] \{\hat{q}_e\} \\ &= [\hat{k}_e] [T] \{q_e\} \end{aligned}$$

Élément barre

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_3 \end{Bmatrix} &= \frac{A_2 E_2}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{A_2 E_2}{L_2} \begin{Bmatrix} \lambda(u_1 - u_3) + \mu(v_1 - v_3) \\ -\lambda(u_1 - u_3) - \mu(v_1 - v_3) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



$$u_3 = v_3 = 0$$

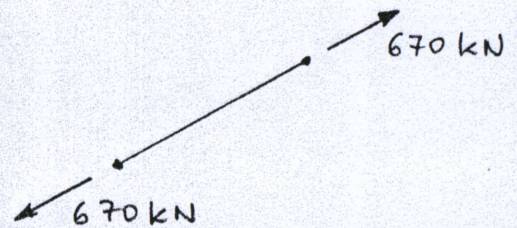
$$\begin{Bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_3 \end{Bmatrix} = \frac{A_2 E_2}{L_2} \begin{Bmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ -(\lambda u_1 + \mu v_1) \end{Bmatrix}$$

soit

$$\hat{X}_1 = -\hat{X}_3 = \frac{A_2 E_2}{L_2} (\lambda u_1 + \mu v_1) = -670 \text{ kN}$$

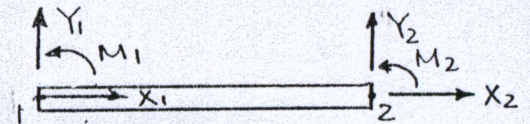
d'où

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = -670 \text{ kN} \\ \hat{X}_3 = 670 \text{ kN} \end{cases}$$



Élément Cadre

le repère local coïncide avec le repère global



$$\{\hat{f}^{\text{e}}\} = \{f^{\text{e}}\}, \quad \{\hat{q}^{\text{e}}\} = \{q^{\text{e}}\}, \quad [\hat{k}_e^{\text{e}}] = [k_e^{\text{e}}]$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = 70 \times 10^3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.067 & 0.10 & 0 & -0.067 & 0.10 \\ 0 & 0.10 & 0.20 & 0 & -0.10 & 0.10 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.067 & -0.10 & 0 & 0.067 & -0.10 \\ 0 & 0.10 & 0.10 & 0 & -0.10 & 0.20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \\ \\ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En partitionnant la matrice $[\hat{K}_e^{\text{D}}]$, on obtient :

$$[\hat{K}_e^{\text{D}}] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{K}_{aa}^{\text{D}} & \hat{K}_{ab}^{\text{D}} \\ \hline \hat{K}_{ab}^{\text{D}} & \hat{K}_{bb}^{\text{D}} \end{array} \right]$$

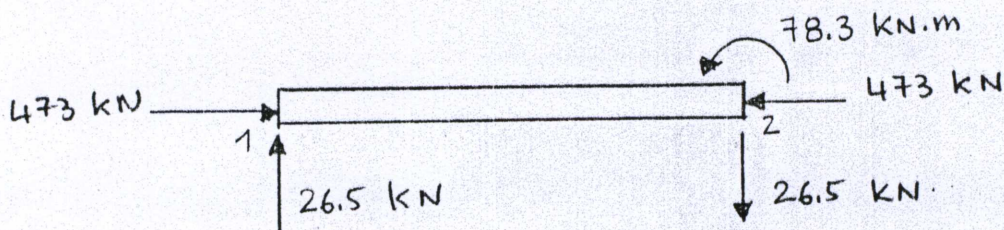
D'où

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = [K_{aa}^{\text{D}}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} = 70 \times 10^3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.067 & 0.10 \\ 0 & 0.10 & 0.20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00338 \\ -0.0225 \\ 0.0113 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 473 \text{ KN} \\ 26.5 \text{ KN} \\ 0.0 \text{ KN.m} \end{Bmatrix}$$

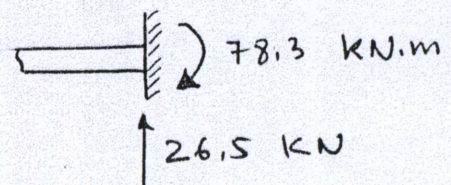
$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = [K_{ab}^{\text{D}}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} = 70 \times 10^3 \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.067 & 0.10 \\ 0 & 0.10 & 0.20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00338 \\ -0.0225 \\ 0.0113 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -473 \text{ KN} \\ -26.5 \text{ KN} \\ 78.3 \text{ KN.m} \end{Bmatrix}$$

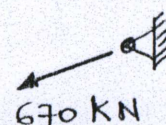


Réactions aux appuis

Noeud. 2



Noeud. 3



IV-4 Élément Cadre Spatial

On se propose de développer la matrice de rigidité de l'élément cadre dans un repère de coordonnées à 3 dimensions (x, y, z) représenté à la Fig. 4-4

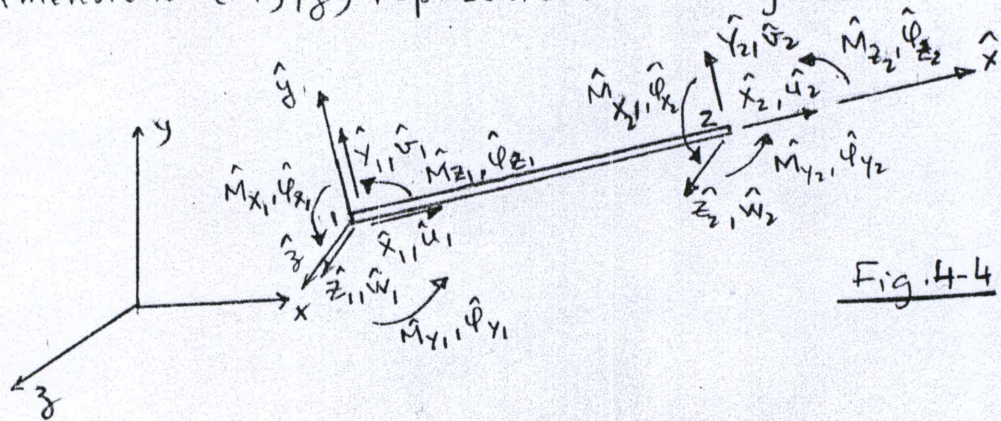


Fig. 4-4

L'élément cadre illustré ci-dessus peut être obtenu par superposition des quatre éléments suivants :

- 1) Élément barre en extension :
- 2) Élément poutre fléchie autour de oz dans le plan (xoy) :
- 3) Élément poutre fléchie autour de oy dans le plan (xoz) :
- 4) Élément torsion :

De la même manière que précédemment, on définit la matrice de rigidité de l'élément soumis uniquement à la torsion par :

$$\begin{Bmatrix} \hat{M}_{x_1} \\ \hat{M}_{x_2} \end{Bmatrix} = [K_t] \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_{x_1} \\ \hat{\phi}_{x_2} \end{Bmatrix} \quad (4-19)$$

Avec :

\hat{M}_{x1} , \hat{M}_{x2} les moments de torsion aux extrémités de l'élément
 $\hat{\varphi}_{x1}$, $\hat{\varphi}_{x2}$ les angles de torsion aux nœuds 1 et 2

Cet élément est similaire à l'élément barre en extension. En effet le champ de déplacement peut être défini par :

$$\hat{\varphi} = a_0 + a_1 \hat{x} = \hat{\varphi}_{x1} + \left(\frac{\hat{\varphi}_{x2} - \hat{\varphi}_{x1}}{L} \right) \hat{x} \quad (4-20)$$

sous forme matricielle :

$$\hat{\varphi} = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} \hat{\varphi}_{x1} \\ \hat{\varphi}_{x2} \end{Bmatrix} \quad \text{où } N_1 = 1 - \frac{\hat{x}}{L} \text{ et } N_2 = \frac{\hat{x}}{L} \quad (4-21)$$

L'énergie de déformation associée aux efforts de torsion dans l'élément est donnée par :

$$U_t = \frac{GJ}{2} \int_0^L \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \quad (4-22)$$

Par analogie avec l'énergie de déformation d'une barre en extension ou a en utilisant le 1^{er} théorème de Castigliano :

$$\frac{d\hat{\varphi}}{d\hat{x}} = \left(\frac{\hat{\varphi}_{x2} - \hat{\varphi}_{x1}}{L} \right) = a_1 = \text{cste} \quad \Rightarrow$$

$$U_t = \frac{GJ}{2} \int_0^L (a_1)^2 dx = \frac{GJ}{2} (a_1)^2 \int_0^L dx = \frac{GJ}{2} (a_1)^2 L$$

$$\text{soit } U_t = \frac{GJ}{2L} (\hat{\varphi}_{x2} - \hat{\varphi}_{x1})^2 \quad (4-23)$$

ensuite :

$$\frac{\partial U_t}{\partial \hat{\varphi}_{x1}} = \frac{GJ}{L} (\hat{\varphi}_{x1} - \hat{\varphi}_{x2}) = \hat{M}_{x1}$$

$$\frac{\partial U_t}{\partial \hat{\varphi}_{x2}} = \frac{GJ}{L} (\hat{\varphi}_{x2} - \hat{\varphi}_{x1}) = \hat{M}_{x2}$$

sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \hat{M}_{x1} \\ \hat{M}_{x2} \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\varphi}_{x1} \\ \hat{\varphi}_{x2} \end{Bmatrix}$$

D'où

$$[K_t^e] = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

Avec :

G = module d'élasticité transversal ou module de cisaillement

J = moment d'inertie polaire de la section transversale

Ainsi, après superposition des matrices de rigidité des 4 éléments, on obtient la matrice de rigidité de l'élément cadre comme suit :

