Didier Bouteloup
IGN/ENSG

Calculs topométriques

www.GenieCivilPDF.com

www.GenieCivilPDF.com

Table des matières

www.GenieCivilPDF.com

www.GenieCivilPDF.com

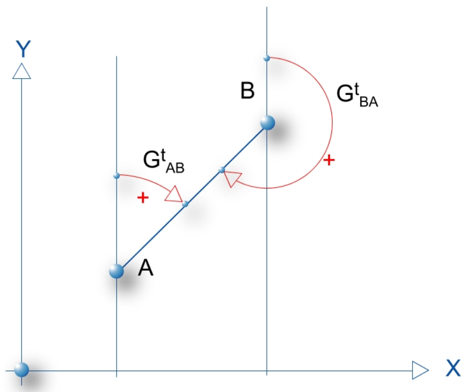
Chapitre

I

Gisement d'une direction

1. Qu'est-ce qu'un gisement ?

Définition
Le gisement est l'angle formé par la direction orientée AB avec l'axe parallèle à l'axe des ordonnées (axe Y) de la représentation.
Les gisements sont comptés positivement de 0 à 400 grades dans le sens des aiguilles d'une montre.



▲ SCH. 1

Propriété : $G_{BA} = G_{AB} + 200_{grades}$

www.GenieCivilPDF.com

www.GenieCivilPDF.com

Chapitre

II

Calcul gisement et distance entre 2 points

1. Calcul gisement et distance entre 2 points

1.1. Conversion Polaire --> Rectangulaire

Problème direct $(X_A, Y_A, G_{AM}, D_{AM}) \rightarrow (X_M, Y_M)$

Calcul des coordonnées d'un point M inconnu par la donnée des coordonnées d'un point A connu et de la mesure du gisement et de la distance AM.

$X_M = X_A + D_{AM} \text{ . sin } G_{AM}$

$Y_M = Y_A + D_{AM} \text{ . cos } G_{AM}$

1.2. Conversion Rectangulaire --> Polaire

Problème inverse $(X_A, Y_A, X_B, Y_B) \rightarrow (G_{AB}, D_{AB})$

Calcul du gisement et de la distance AB à partir des coordonnées des points A et B connus.

www.GenieCivilPDF.com

$$D_{AM} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

$$G_{AB} = \arctan \frac{(X_B - X_A)}{(Y_B - Y_A)} \quad (1)$$

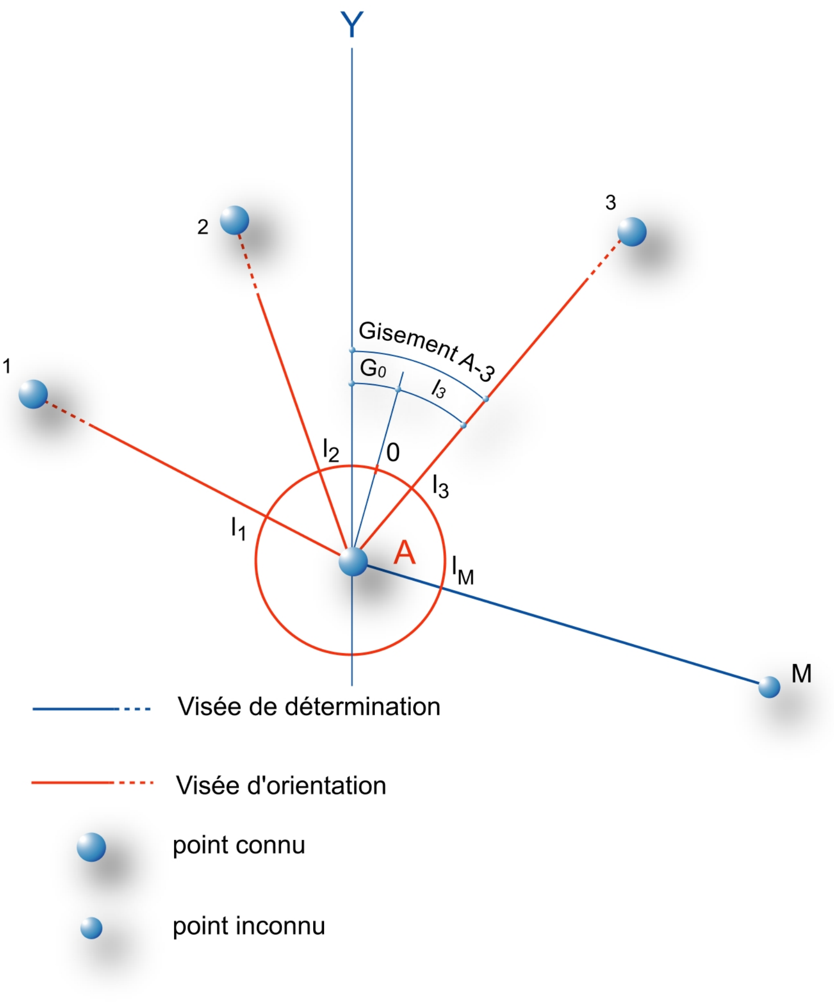
ou

$$G_{AB} = 2.\arctan \frac{(X_B - X_A)}{\sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} + (Y_B - Y_A)} \quad (2)$$

Remarque
la formule (2) permet de lever l'ambiguïté de 200 grades sur le calcul de « arctan ».

1.3. G0 et Rayonnement

Orientation du limbe
Un théodolite permet d'effectuer des lectures d'angles horizontaux. Ces lectures sont comptées positivement dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport à une direction origine correspondant à la lecture « zéro ».



▲ Sch. 2

www.GenieCivilPDF.com

Le gisement d'une direction peut se déduire du gisement de l'origine des lectures d'angles horizontaux mesurées lors du tour d'horizon. Celui ci appelé G0 d'orientation peut se calculer à partir de l'observation de points connus en coordonnées.

G0 individuel en station A sur le point visé connu i : $G_{0i} = G_{Ai} - l_i$

Définition

La moyenne de ces valeurs individuelles donne l'orientation moyenne du zéro du limbe au moment du tour d'horizon

- $G_{0(moyen)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n} G_{0i}$
- n est le nombre de points visés connus en coordonnées depuis la station

L'analyse des écarts entre les G0 individuels et ce gisement moyen d'orientation permet de déceler les éventuelles erreurs de calculs et d'observations mais aussi de montrer un éventuel déplacement des points connus en coordonnées (borne déplacée, mauvaise identification de points visés...).

Le gisement d'une direction à déterminer se calcule simplement ensuite :

$G_{AM} = G_{0moyen} + L_M$

Exercice n°1. Calcul de V0 et rayonnement

Un géomètre procède à la détermination de 2 points nouveaux 80 et 81 à partir de points géodésiques les plus proches 50, 51, 52 , 53 et 54 de coordonnées planes suivantes.

Points	E(m)	N(m)
50	982 591.010	3 155 242.710
51	983 111.450	3 157 891.810
52	986 130.980	3 154 407.730
53	979 758.400	3 154 999.820
54	982 679.857	3 154 794.980

▲ TAB. 1

Il stationne le point 50 et mesure le angles horizontaux suivants :

www.GenieCivilPDF.com

Point Visé	Moyenne des lectures réduites (grades)
80	0.0000
52	52.7859
81	156.6256
53	232.5948
51	350.3884
54	125.5665

▲ TAB. 2

Il mesure également les distances horizontales réduites à la projection depuis la station 50 :

Point Visé	Distances horizontales (m)
80	300.460
81	216.612

▲ TAB. 3

Question1

- Calculer pour chaque point connu le G0 individuel
- Calculer le G0 moyen de la station 50

Question2

- Calculer les coordonnées planes des points 80 et 81

www.GenieCivilPDF.com

Chapitre

III

Intersection

1. Intersection

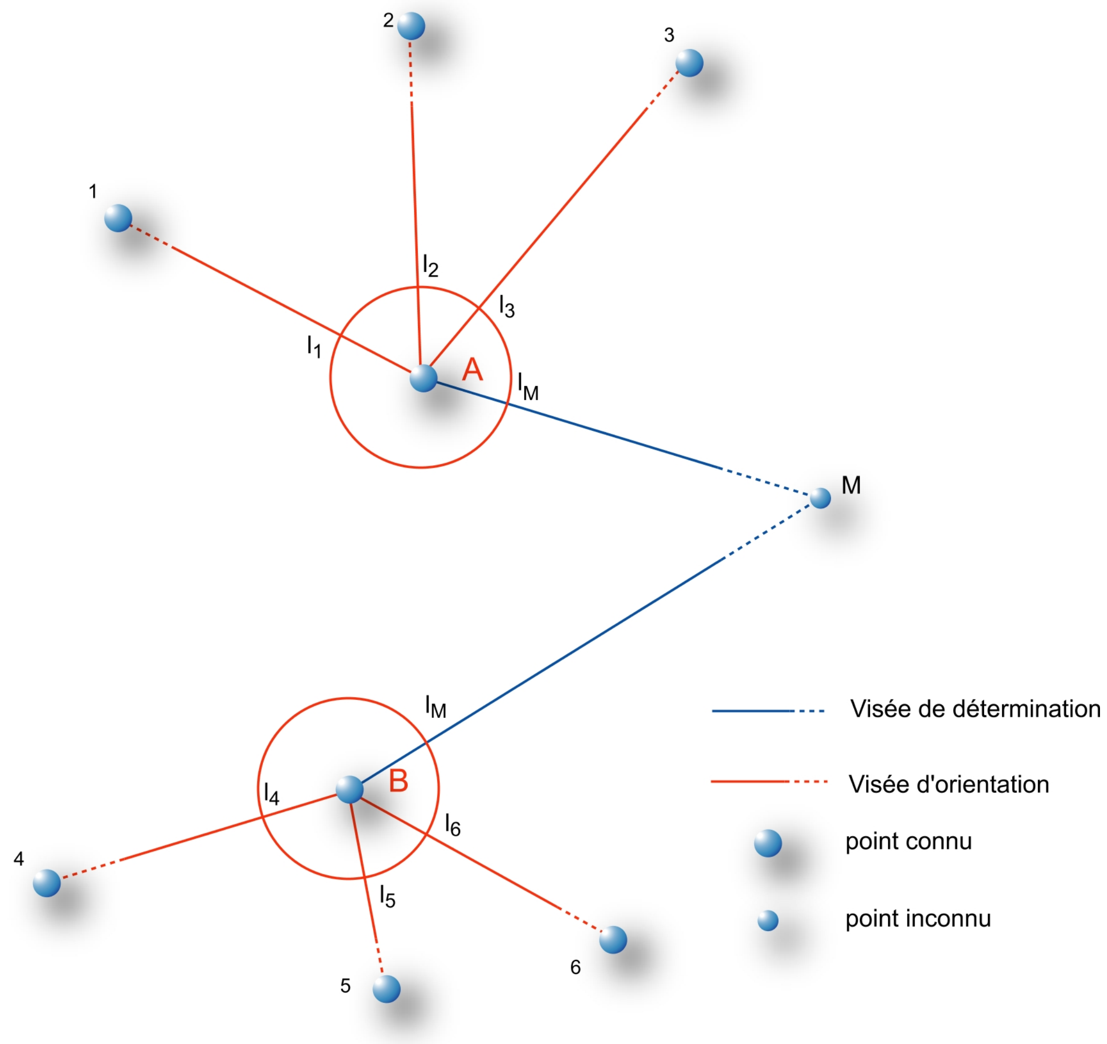
1.1. Problématique

Methode

Comment déterminer les coordonnées (X_M, Y_M) d'un point *M* inaccessible (clocher, château d'eau, pylône, cible,...) à partir d'un réseau de points géodésiques

La distance n'étant pas mesurable directement, pour résoudre ce problème à 2 inconnues, 2 séries de mesures sont nécessaires.
A partir d'un point connu *A*, un tour d'horizon est effectué s'orientant sur des points connus (*1*, *2*, *3*) et le point *M* inconnu. Ces mesures d'angles horizontaux vont permettre de déterminer le gisement de la direction *AM*.
La même opération depuis un point connu *B* permettra de définir le gisement de la direction *BM*. Le calcul consiste à déterminer le lieu d'intersection de ces deux lieux géométriques ainsi définis.

www.GenieCivilPDF.com



▲ SCH. 3

1.2. Calcul d'un point isolé à partir de 2 visées d'intersection

Solution trigonométrique

1. Calcul des G0 moyen d'orientation en A et en B avec

$$G_{Ai} = 2\arctan\left(\frac{\Delta X}{\Delta Y + \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}}\right) = 2\arctan\left(\frac{\Delta X}{\Delta Y + D}\right)$$

avec

$$\Delta X = X_i - X_A,\ \Delta Y = Y_i - Y_A$$

$$D = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$$

2. Calcul et validation du G0 moyen

www.GenieCivilPDF.com

$$G_{0_i} = G_{Ai} - l_i$$

$$G_{0(moyen)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n} G_{0i}$$

3. Calcul des gisements G_{AM} et G_{BM}

pour la station en A $G_{AM} = G0_{moyen} + L_M$

pour la station en B $G_{BM} = G0_{moyen} + L_M$

4. Calcul du gisement et de la distance *AB*

$$G_{AB} = 2\arctan\left(\frac{X_B - X_A}{(Y_B - Y_A) + D_{AB}}\right)$$

avec

$$D_{AB} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$$

avec

$$\Delta X = X_B - X_A$$

$$\Delta Y = Y_B - Y_A$$

5. Résolution du triangle *ABM* (voir schéma ci dessous)

$\hat{A} = G_{AB} - G_{AM}$ de meme $\hat{B} = G_{BM} - G_{BA}$ (dans le cas de la figure)

$$\widehat{M} = 200gon - \hat{A} - \hat{B}$$

La relation des sinus appliquée au triangle ABM permet d'écrire :

$$\frac{D_{AB}}{\sin \widehat{M}} = \frac{D_{AM}}{\sin \hat{B}} = \frac{D_{BM}}{\sin \hat{A}}$$

d'où

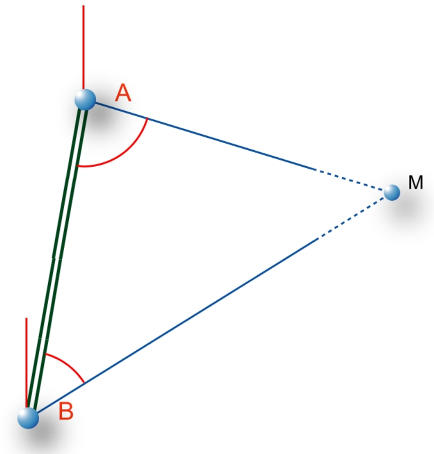
$$D_{AM} = \frac{D_{AB} \sin \hat{B}}{\sin \widehat{M}} \text{ et } D_{BM} = \frac{D_{AB} \sin \hat{A}}{\sin \widehat{M}}$$

6. Calcul des coordonnées de M à partir de A

$$X_M = X_A + D_{AM} \cdot \sin G_{AM}$$

$$Y_M = Y_A + D_{AM} \cdot \cos G_{AM}$$

www.GenieCivilPDF.com



▲ SCH. 4 : RÉSOLUTION DU TRIANGLE ABM

Solution analytique

Cette solution repose sur l'écriture des équations des droites *AM* et *BM*, elle est plus facile à mettre en œ uvre d'un point de vue informatique

$$Y_M = Y_A + \frac{(X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \cdot \tan G_{BM}}{\tan G_{AM} - \tan G_{BM}}$$

$$X_M = X_A + (Y_M - Y_A) \cdot \tan G_{AM}$$

ou

$$X_M = X_A + \frac{(Y_B - Y_A) - (X_B - X_A) \cdot \cot G_{BM}}{\cot G_{AM} - \cot G_{BM}}$$

$$Y_M = Y_A + (X_M - X_A) \cdot \cot G_{AM}$$

Remarque

Pour des questions de stabilité numérique, il est préférable de calculer la plus petite valeur de

$\Delta X = X_M - X_A$ *ou* $\Delta Y = Y_M - Y_A$

à partir de la plus grande de ces deux valeurs. Le contrôle du calcul consiste à comparer le gisement G_{BM} calculé au gisement issu des observations.

www.GenieCivilPDF.com

Chapitre

IV

Relèvement

1. Relèvement

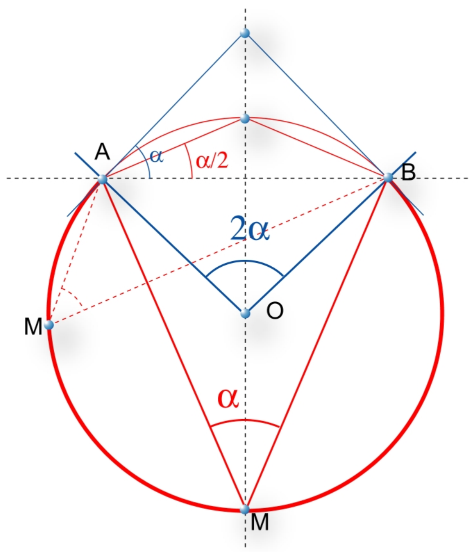
1.1. Arc capable

Définition

L'ensemble des points M sous lequel on peut voir 2 points A et B sous un angle constant α est une portion de cercle de centre O appelé arc capable AB

Propriété

L'angle observé au centre du cercle est le double de l'angle observé en un point quelconque de l'arc capable.



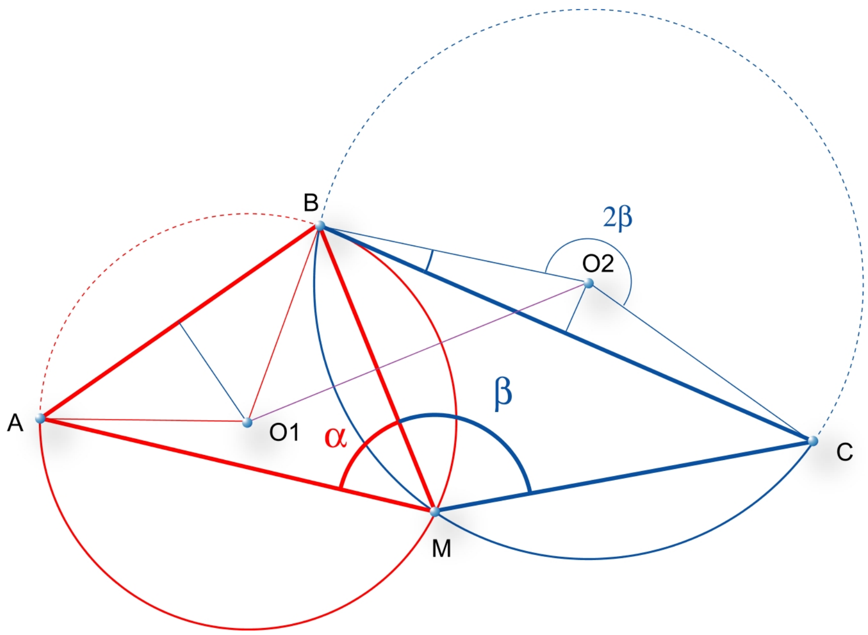
▲ SCH. 5

www.GenieCivilPDF.com

1.2. Relèvement

L'ensemble des points M sous lequel un opérateur aperçoit le segment AB sous un angle α et le segment BC sous un angle β se situe donc à l'intersection de 2 arcs capables.

Solution géométrique



▲ Sch. 6

1. Calcul des gisements et distances AB et BC.

2. Calcul des coordonnées des centres O_1 et O_2 des cercles support des arcs capables

$$G_{AO_1} = G_{AB} + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$ de même $$G_{BO_2} = G_{BC} - \left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$D_{AO_1} = \frac{D_{AB}}{2\sin\alpha}$$ $$D_{BO_2} = \frac{D_{BC}}{2\sin\beta}$$

3. Résolution du triangle O_1O_2M

4. Calcul des coordonnées de M à partir de O_1 et contrôle du calcul en calculant à partir de O_2.

Solution Analytique

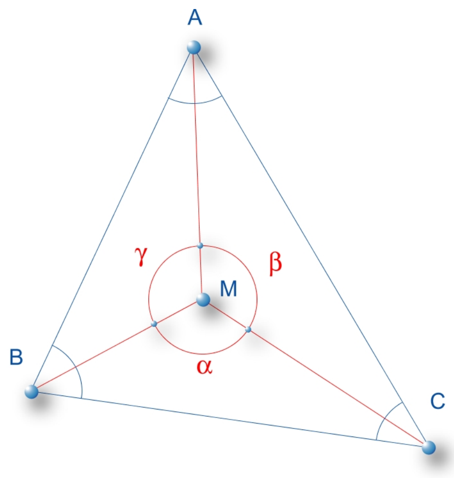
La solution M est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients p, m, n :

www.GenieCivilPDF.com

$$p\,\overrightarrow{MA} + m\,\overrightarrow{MB} + n\,\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

$$X_M = \frac{pX_A+mX_B+nX_C}{p+m+n}$$

$$Y_M = \frac{pY_A+mY_B+nY_C}{p+m+n}$$



▲ SCH. 7

Soient A et α les angles qui intersectent le segment BC respectivement en A et M

Soient B et β les angles qui intersectent le segment AC respectivement en B et M

Soient C et γ les angles qui intersectent le segment AB respectivement en C et M

Les poids p, m et n s'obtiennent comme suit :

$$p = \frac{1}{\cot A - \cot \alpha}$$

$$m = \frac{1}{\cot B - \cot \beta}$$

$$n = \frac{1}{\cot C - \cot \gamma}$$

www.GenieCivilPDF.com

www.GenieCivilPDF.com

Chapitre

V

Station excentrée

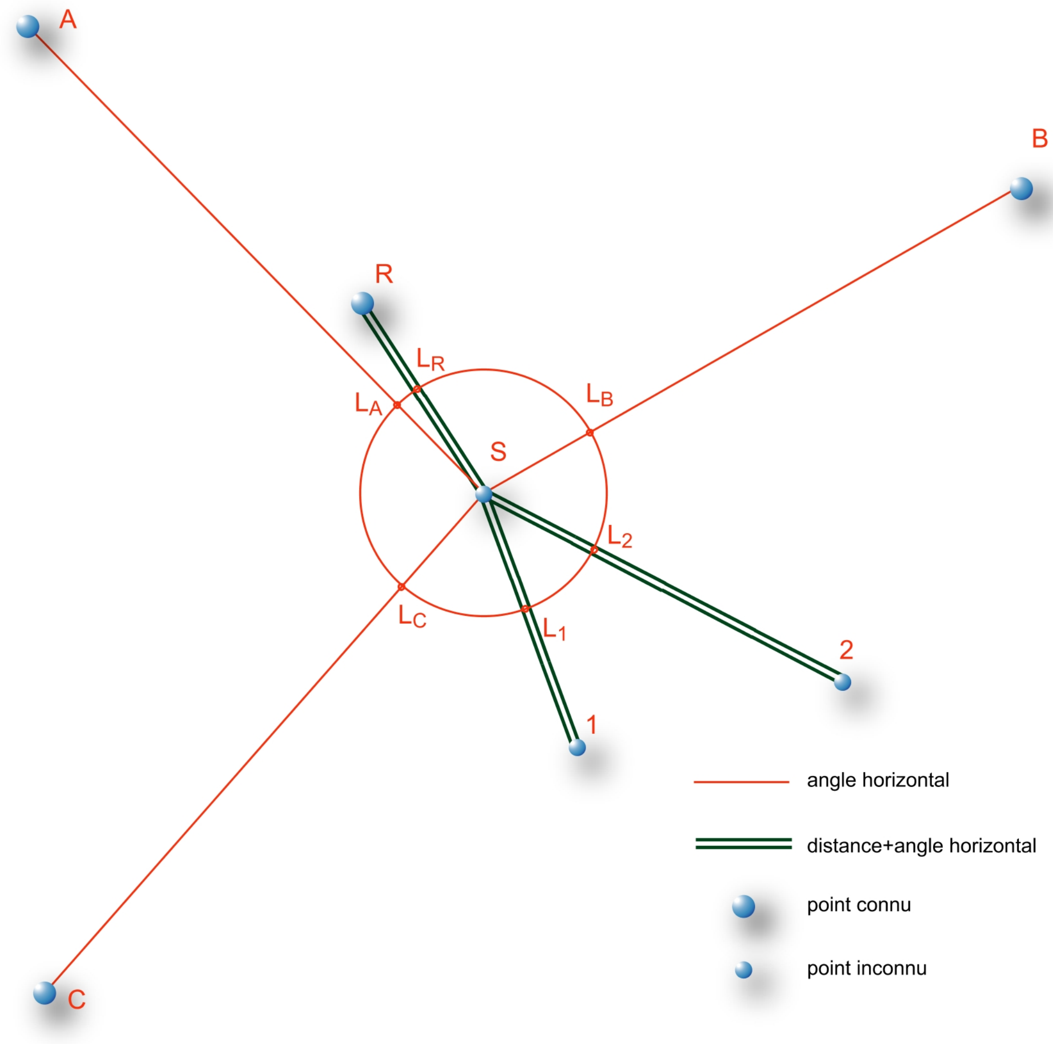
1. Station excentrée

Problématique

Afin de déterminer les coordonnées de points nouveaux *1* et *2* et lorsque les conditions d'observation du repère connu *R* n'autorisent pas le centrage du théodolite sur ce dernier il est nécessaire d'effectuer des observations à partir d'un point auxiliaire temporaire *S* :

Mesures d'angles horizontaux sur des points connus *A*, *B*, *C*, ... et inconnus *1,2,..(notation : 1i)*
Mesures de distance sur le repère proche *R (notation : dsr)*
Mesures de distances sur les points à déterminer *1,2, ...(notation : Dsi)*

www.GenieCivilPDF.com



▲ SCH. 8

Calculs

Une solution consiste à calculer au préalable les coordonnées de la station excentrée *S*.

Pour calculer les gisements *Si*, il suffit de corriger le gisement *Ri* d'un petit angle ε avec :

1. Calcul des gisements et distances entre la station connue et les points d'orientation

$$G_{Ri} = 2\arctan\left(\frac{\Delta X}{\Delta Y + \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}}\right)$$

$$\Delta X = X_i - X_R$$

$$\Delta Y = Y_i - Y_R$$

2. Calcul de la correction à appliquer aux gisements

www.GenieCivilPDF.com

$\sin \varepsilon_i = \frac{d_{RS} \cdot \sin(l_i - l_R)}{D_{Ri}}$ et $G_{Si} = G_{Ri} - \varepsilon_i$

3. Calcul du gisement moyen d'orientation en S

$G0_i = G_{Si} - l_i$

$$G0_{moyen} = \frac{\sum_1^n G0_i}{n}$$

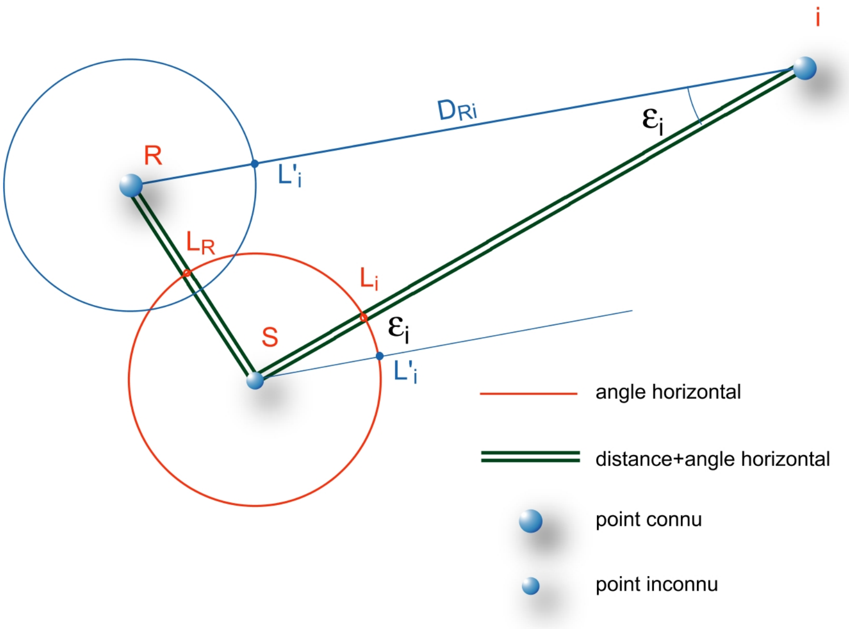
4. Il suffit ensuite de calculer les coordonnées de S à partir :

- Coordonnées de R
- Gisement RS :

  $G_{RS} = G0_{moyen} + l_R + 200_{grades}$
- Distance mesurée d_{rs}

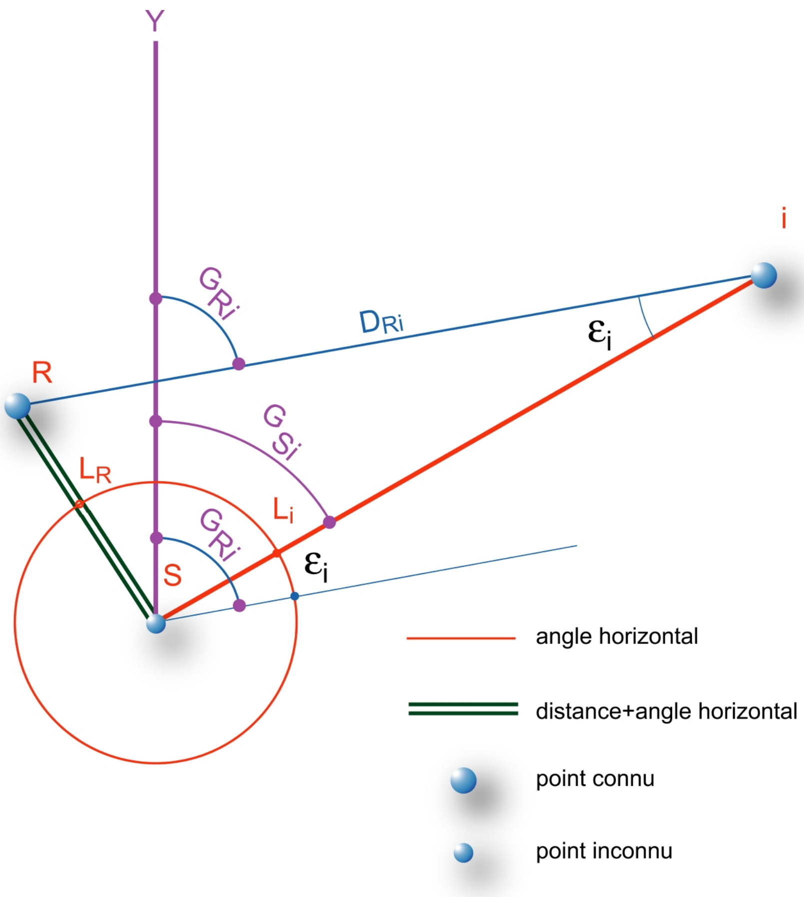
5. Enfin de calculer les coordonnées des points nouveaux à partir de S :

- Coordonnées de S
- Gisement Si : $G_{si} = G_{0moyen} + l_i$
- Distance mesurée d_{si}



▲ SCH. 9 : CAS D'UN POINT I INCONNU

www.GenieCivilPDF.com



▲ SCH. 10 : CAS D'UN POINT I CONNU

www.GenieCivilPDF.com

Chapitre

VI

Cheminement polygonal

1. Cheminement polygonal

1.1. Definition

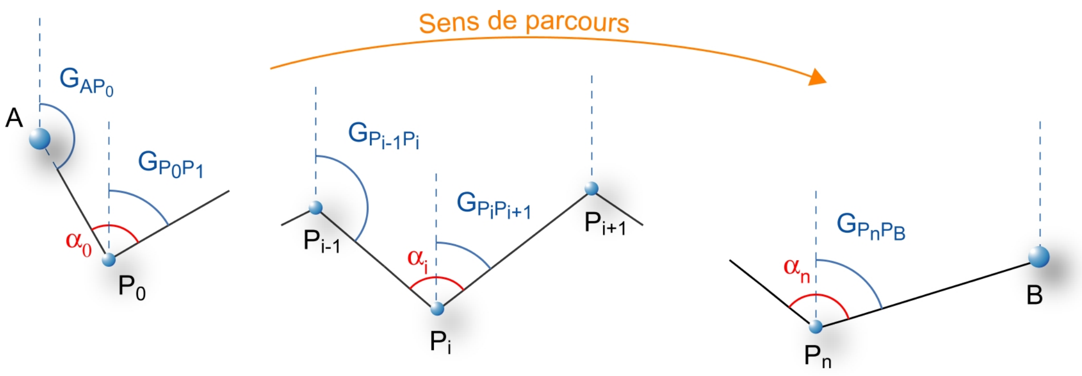
Une ligne polygonale ou polygonation est un ensemble de sommets formant une ligne brisée dont on a pris soin de mesurer les angles ainsi que la longueur des cotés pour ainsi déterminer les coordonnées de chacun de ses sommets.
Ce cheminement est dit encadré lorsque les coordonnées de point de départ et d'arrivée sont connues, il est dit en antenne lorsque seule les coordonnées du point de départ sont connues, et fermé lorsque les points de départ et d'arrivée sont confondus.

1.2. Calculs

Transmission des gisements

L'orientation du premier coté du cheminement est calculée à partir de visées d'orientation sur d'autres points connus, la transmission de cette orientation s'effectue à l'aide de l'angle observé à chaque sommet. *(voir chapitre 1.3 G0 et rayonnement)*

www.GenieCivilPDF.com



▲ SCH. 11

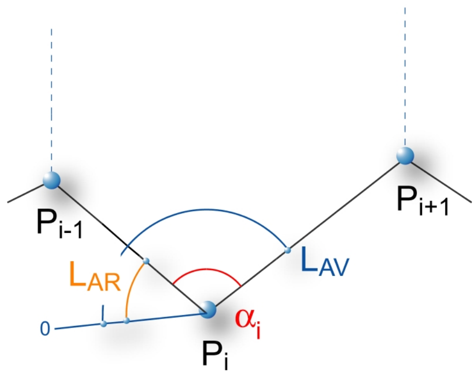
$$G_{P_0P_1} = G_{AP_0} + 200gr + \alpha_0$$

Fondamentaux

$G_{P_nP_{n+1}} = G_{P_{n-1}P_n} + 200gr + \alpha_n$

L'angle α i est calculé par différence de lectures azimutales entre la visée « avant » et la visée « arrière » soit :

$\alpha_i = LAV_i - LAR_i$



▲ SCH. 12

Exemple de calcul d'un cheminement encadré

Coordonnées des points S0 et S5 :

Xs0 = 782875,12 Xs5 = 783228,94
Ys0 = 215320,46 Ys5 = 215327,80

Les gisements G_{AS0} et G_{S5B} ont été précedemment calculés à partir des coordonnées de A, S_0, S_5 et B

www.GenieCivilPDF.com

Transmission des gisements								
Stations	Points visés	Lecture		α_i	Gisements	C_i	ΣC_i	Gisements
		AR	AV	gr.	Calculés (gr.)	milligr.		gr.
A	S_0				251,324			
S_0	A	0,000		39,432	90,756	+4	+ 4	90,760
	S_1		39,432					
S_1	S_0	0,000		219,887	110,643	+4	+ 8	110,651
	S_2		219,887					
S_2	S_1	0,000		182,143	92,786	+4	+ 12	92,798
	S_3		182,143					
S_3	S_2	0,000		228,478	121,264	+4	+ 16	121,280
	S_4		228,478					
S_4	S_3	0,000		151,73	73,002	+4	+ 20	73,022
	S_5		151,738					
S_5	S_4	0,000		257,128	130,130	+4	+ 24	130,154
	B		257,128					
B					130,154			
					f = -0,024			

▲ IMG. 1

Compensation des gisements

L'imprécision des angles observés, fait que le gisement d'arrivée calculé, diffère du gisement connu G_{S5B}. Cette quantité s'appelle l'écart de fermeture angulaire (f).

L'écart de fermeture angulaire (f) est réparti soit :

- uniformément sur chaque gisement

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_i = \cdots = C_n = \frac{-f}{n+1} \quad \text{ici } C_i = \frac{+24}{6} = +4\,\text{milligrades}$$

- proportionnellement à la longueur des côtés,

$$C_i = \frac{D_{S_iS_{i+1}} \cdot (-f)}{\Sigma D_{S_iS_{i+1}}}$$

www.GenieCivilPDF.com

Transmission des coordonnées											
Stations	Points visés	Gisements gr.	Distances m	ΔX m	C_{xi} mm	ΣC_{Xi} mm	X m	ΔY m	C_{yi} mm	ΣC_{Yi} mm	Y m
A	S_0						782875,12				215320,46
S_0	S_1	90,760	78,12	+ 77,299	+ 8	+ 8	782952,43	+ 11,299	- 3	- 3	215331,76
S_1	S_2	110,651	89,72	+ 88,467	+ 10	+ 18	783040,90	- 14,940	- 4	- 7	215316,81
S_2	S_3	92,798	63,41	+ 63,005	+ 7	+ 25	783103,92	+ 7,158	- 3	- 10	215323,97
S_3	S_4	121,280	69,68	+ 65,823	+ 7	+ 32	783169,75	- 22,860	- 3	- 13	215301,10
S_4	S_5	73,022	64,93	+ 59,187	+ 7	+ 39	783228,94	+ 26,699	- 3	- 16	215327,80
			365,86	+ 353,781				+ 7,356			
		783228,94 - 782875,12 =		+ 353,820			215327,80 - 215320,46 =	+ 7,340			
				f_x = - 0,039				f_y = + 0,016			

▲ IMG. 2

Compensation des Δ X et Δ Y

Pour chaque coté, on peut calculer à partir du gisement compensé et de la distance mesurée (réduite à la projection) Δ X et Δ Y. L'imprécision des angles et des distances observées, cumulée à l'imprécision des coordonnées des points de départ et d'arrivée provoque une différence entre :

Les coordonnées calculées du point d'arrivée

$$X_{S5calculee} = X_{S0} + \sum \Delta X$$

$$Y_{S5calculee} = Y_{S0} + \sum \Delta Y$$

et les coordonnées connues du point d'arrivée

(X_{S5}, Y_{S5})

Ces quantités s'appellent écarts de fermeture planimétrique selon les axes de la projection, respectivement (f_x) selon l'axe des abscisses X et (f_y) selon l'axe des ordonnées Y.

Ces écarts de fermeture sont ensuite répartis proportionnellement à la longueur des cotés :

Compensation des ΔX et ΔY $C_{X_i} = \dfrac{D_{S_iS_{i+1}} \cdot (-f_x)}{\Sigma D_{S_iS_{i+1}}}$ $\qquad C_{Y_i} = \dfrac{D_{S_iS_{i+1}} \cdot (-f_y)}{\Sigma D_{S_iS_{i+1}}}$

ici par exemple $C_{X_0} = \dfrac{78{,}12 \cdot (39)}{365{,}86} \approx +8$ $\qquad C_{Y_0} = \dfrac{78{,}12 \cdot (-16)}{365{,}86} \approx -3$

www.GenieCivilPDF.com

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice n°1 : Calcul de V0 et rayonnement

Question n°1

Station	Pt Visé	Giseme	Distanc	Lecture	V0i	Poids	pV0i	ei	Toléran	Distanc
		grades	*m*		*grades*			*grades*	*grades*	*m*
50	51	12,3497	2699,739	350,3884	61,9613	1,00	61,9613	-0,0003	0,0009	-0,012
50	52	114,7465	3637,111	52,7859	61,9606	1,00	61,9606	0,0004	0,0008	0,022
50	53	294,5544	2843,005	232,5948	61,9596	1,00	61,9596	0,0014	0,0009	0,061
50	54	187,5290	456,460	125,5665	61,9625	1,00	61,9625	-0,0015	0,0049	-0,011

▲ TAB. 4

Gisement moyen	61,9610	grades
écart moyen d'orientation	0,0012	grades

▲ TAB. 5

Question n°2

Station	Point Visé						
		Lectures	*Distances*	*DX*	*DY*	*X*	*Y*
		grades	*m*	*m*	*m*		
50	80	0,0000	300,460	248,401	169,036	982839,411	3155411,746
50	81	156,6256	216,612	-62,347	-207,445	982528,663	3155035,265

▲ TAB. 6 : CALCUL DES POINTS RAYONNÉS

www.GenieCivilPDF.com