

## **Initiation au béton armé.**



### **Détermination de ferrailage complet d'une poutre en flexion simple (à l'état limite ultime)**

# 1. Principe du béton armé

## 1.1. Introduction et historique

Le **béton armé** correspond à un mariage judicieux de matériaux aux caractéristiques complémentaires : l'**acier** pour sa capacité à résister aux contraintes de traction et le béton pour sa capacité à résister à la compression. Le **béton** étant lui-même un mélange intelligent de **granulats**, de **ciment** et d'**eau**. Le ciment et l'acier résultent quant à eux de processus de fabrication spécifiques.

Les méthodes de composition de béton permettant d'obtenir les performances voulues sont très élaborées. Néanmoins pour donner des ordres de grandeur disons que la "recette" pour obtenir 1 m<sup>3</sup> de béton "courant" consiste à malaxer environ 1200 kg de graviers, 600 kg de sable, 400 kg de ciment et 200 litres d'eau. Cela permet d'espérer, à 28 jours d'âge du béton, une résistance à la compression de l'ordre de 30 MPa. Actuellement les bétons courants contrôlés atteignent régulièrement 25 à 40 MPa, les bétons à haute performance (BHP) 50 à 100 MPa voire plus. La résistance à la traction des bétons courants est de 8 à 12 fois plus faible et la rupture d'une pièce sollicitée est brutale. Le béton est un matériau fragile et peu résistant à la traction (comme la pierre).

La pierre comme le béton ayant une très faible résistance à la traction ne permet pas de résoudre facilement le problème du franchissement qui pose la question de la résistance aux efforts internes de traction. Les voûtes ou les arcs sont une réponse à ce problème car leur forme permet de n'avoir que de la compression dans le matériau (reste néanmoins à résoudre la question des poussées horizontales en pied). Le bois et l'acier résistent aux efforts de compression et de traction. Mais pour que le béton résiste aussi il faut l'armer ou le précontraindre.

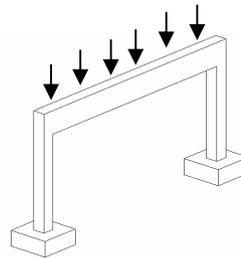
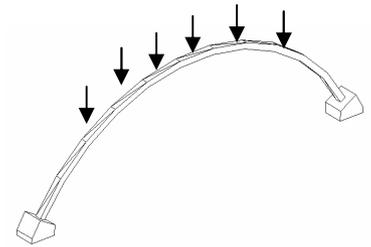


Fig 1.1 Le franchissement



On trouvera ci-après un bref historique du béton armé...

### La découverte du ciment

Le mélange de Chaux, d'argile, de sable et d'eau est très ancien. Les Égyptiens l'utilisaient déjà 2600 ans av. J.-C. Vers le I<sup>er</sup> siècle, les Romains perfectionnèrent ce « liant » en y ajoutant de la terre volcanique de Pouzzole, ce qui lui permettait de prendre sous l'eau, ou en y ajoutant de la tuile broyée (tuileau), ce qui améliorait la prise et le durcissement. Un des premiers grands ouvrages en béton est le Panthéon de Rome, construit sous Adrien en 128 ap.J-C avec une coupole hémisphérique de 43,20 m de diamètre à base de béton de pouzzolane.



Coupole du Panthéon de Rome

Pourtant, la découverte du ciment est attribuée à Louis Vicat, jeune ingénieur de l'école nationale des ponts et chaussées. En 1818, il fut le premier au monde à fabriquer, de manière artificielle et contrôlée, des chaux hydrauliques dont il détermina les composants ainsi que leur proportion. La région grenobloise est au début du 20<sup>ème</sup> siècle un haut lieu de production de ciment avec une cinquantaine de cimenteries autour de Grenoble. Pendant l'année 1908, Jules Bied, directeur du laboratoire de la société Pavin de Lafarge, découvre le Ciment Fondu©, fabriqué à partir de calcaire et de bauxite, alors qu'il était à la recherche d'un liant hydraulique qui ne soit attaqué ni par l'eau de mer ni par les eaux sulfatées.

## Le 19<sup>e</sup> siècle. Béton moulé et pierres factices de ciment moulé

Le béton de ciment est apparu en architecture grâce aux bétons moulés et aux pierres factices, imitation des pierres de taille coulées en béton ; souvent du béton de ciment prompt naturel.

La pratique du moulage débuta au début du XIX<sup>e</sup> siècle dans les régions où l'on connaissait déjà le banchage du pisé et grâce à la rapidité de prise du ciment prompt naturel (dit aussi ciment romain). François Cointeraux faisait déjà des moulages à Lyon et Grenoble à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle. François Coignet fut un des plus importants promoteur du béton moulé. Industriel lyonnais, il bâtit son usine de Saint-Denis (Paris) en 1855 en béton-pisé qu'il breveta.

La pierre factice eut un véritable succès dans la région de Grenoble, grâce aux ciments prompts naturels à partir des années 1840 (Ciment de la Porte de France par Dumolard et Viallet, Ciment d'Uriol par Berthelot et Ciment de la Pérelle par la société Vicat ; aujourd'hui, seuls La Porte de France et la Pérelle, propriétés de Vicat, produisent du ciment prompt naturel en Europe) . On moulait tout, canalisation d'égouts, vases, statues, balustrades, pierres d'angles, de claveaux, corniches, modillons, etc. Cette pratique s'est répandue ensuite dans de nombreuses grandes villes d'Europe. Les villes du nord de l'Italie ont aussi utilisé le ciment moulé, grâce au prompt importé de Grenoble.

Grenoble est non seulement le pays de la « houille blanche » mais aussi celui de l' « or gris » : La Casamaures vers 1855 et La Tour Perret 1925 en témoignent. En Isère, on bâtissait au 19<sup>e</sup> de nombreuses maisons et surtout des églises avec des éléments architectoniques de ciment moulé comme l'église de Cessieu qui date de 1850, celle de Champier de 1853 ou encore l'église Saint-Bruno de Voiron (1857-1871), Saint-Bruno de Grenoble (1869-1875) qui sont entièrement en pierres factices de ciment prompt moulé.

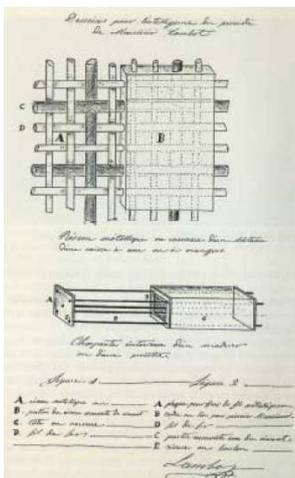


Fig 1.2 La Casamaures



La Tour Perret

## L'apparition des armatures avec le mortier armé



Dessins de J.L.Lambot

L'armature de métal dans les mortiers provient des techniques de moulage en sculpture et fut utilisé d'abord par des jardiniers expérimentateurs. Joseph- Louis Lambot à Miraval fabriqua en 1845 des caisses pour orangiers et réservoirs avec du fil de fer et du mortier, en 1849 une barque armée par un quadrillage de barres de fer, et enfin en 1855 il posa un brevet : le "fercement", une combinaison de fer et de mortier pour les constructions navales et les caisses à fleur. Il construisit un canot en 1855 qui passa inaperçu à l'Exposition universelle de Paris. Joseph Monier déposa en 1867, à Paris, une demande pour "un système de caisses-bassins mobiles en fer et ciment applicables à l'horticulture". Il réalisa un premier pont bi-poutre de 13,80m de portée à Chazelet. Après un long oubli, il fallut attendre l'extrême fin du XIX<sup>e</sup> siècle pour qu'en France, Hennebique, fasse à nouveau, usage du béton armé, lui donnant un véritable départ.



La première réalisation en béton armé : Barque de Joseph Louis Lambot 1849. Musée de Brignoles



Pont bi-poutre de Chazelet, 1875, Joseph Monier

## L'invention du béton armé

En Angleterre, des entrepreneurs comme Alexander Payne et Thaddeus Hyatt, tentèrent dans les années 1870 d'appriivoiser les armatures dans les bétons mais furent désavoués par des contradicteurs et quelques infortunes. Aux États-Unis les armatures métalliques du béton furent dévoilées par William E. Ward et exploitées par Ernest Leslie Ransome, avec ses fers Ransome dans les années 1880.

Il fallut attendre la maîtrise du béton armé, les réflexions techniques d'ingénieurs pour voir apparaître un véritable intérêt cimentier. François Hennebique abandonna ainsi son métier d'entrepreneur en 1892 et devint ingénieur consultant. Il eut un succès considérable. Créa une société de franchises en construction et bâtit des dizaines de milliers d'édifices.

Il publia le magazine *Béton armé* à partir de 1898 pour faire connaître ses travaux qui permirent à la charpenterie monolithe d'éliminer le ciment armé trop mince. Edmond Coignet et Napoléon de Tedesco ont communiqué, les premiers en 1894, un mode de calcul rationnel des ouvrages en béton aggloméré et en ciment armé.

Les armatures, en fer, puis en acier, revêtent des formes variées : barres cylindriques lisses, mais aussi carrées, torsadées, crénelées, crantées, cannelées... On a aussi utilisé, des chaînes, des feuillards, des profilés de construction métallique. Les moules (ou "coffrages") seront longtemps en bois, en fonte parfois et aujourd'hui couramment métalliques pour les ouvrages répétitifs, voire en carton (poteaux circulaires). Ils permettent une liberté de forme et un coût par rapport à la pierre qui expliquent le fort développement du béton armé au début du siècle.

## Le 20<sup>e</sup> siècle...

La circulaire du 20 octobre 1906 pose les premiers fondements techniques du béton armé, admis à figurer parmi les matériaux de construction classiques. De son côté, Charles Rabut, faisant ses premiers travaux théoriques sur le béton armé à l'École des Ponts et Chaussées, l'avait intégré à son programme dès 1897 (c'est le premier cours de béton armé), alors qu'il n'existait encore aucun manuel traitant du sujet. Il fait ainsi découvrir cette technique à de jeunes ingénieurs, dont Eugène Freyssinet, le père du béton précontraint. Son brevet est déposé en 1929. Mais, c'est seulement après la Seconde Guerre mondiale que la précontrainte commence à se développer. On doit aussi à Eugène Freyssinet l'idée de la vibration du béton.



*Pont du Sautet (Sud de Grenoble). Albert Caquot, 1928*

A partir des années 30, Pier Luigi Nervi conçoit des ouvrages en exploitant un procédé constructif de son cru fondé sur l'utilisation du ferro-ciment, reprise perfectionnée du système Monnier. Le principe : des doubles rangées d'arcs se coupent à angle droit (nervures). L'allègement de structure ainsi obtenu permet de développer des portées considérables. Tout comme Freyssinet, Albert Caquot a été sensibilisé au béton armé. Il construisit en 1920 le premier pont en *bow-string* (arc à tirants) à Aulnoye et lance surtout le premier pont à haubans à Pierrelatte en 1952.

Au cours du 20<sup>e</sup> siècle les applications vont se multiplier : ouvrages d'art, réservoirs, châteaux d'eau, tribunes, soutènements, planchers industriels,... Aujourd'hui beaucoup de ces ouvrages se dégradent, d'où une réflexion et des recherches sur le matériau et sur la conception des ouvrages (durabilité, résistance au gel, enrobage...)

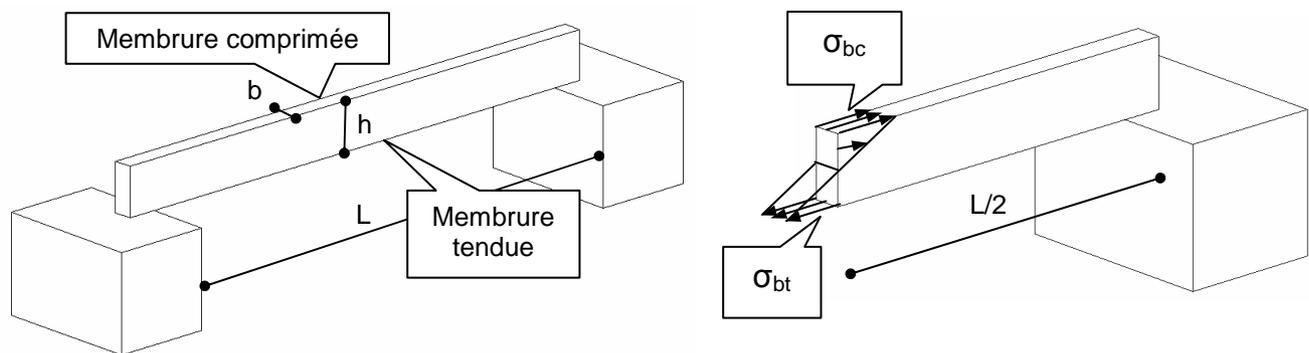
## Fin du 20<sup>e</sup> siècle, la recherche de hautes performances

La fin des années 80 voit l'arrivée du *Béton à Hautes Performances (BHP)*, d'une résistance à la compression supérieure à 50 MPa. Allié à la précontrainte, ce matériau révolutionne la construction des ouvrages d'art qui deviennent plus fins, plus élancés et plus durables. Au début des années 90, Bouygues, Lafarge et Rhodia explorent le domaine de l'ultra-haute résistance, bien au-delà des 150 MPa.

## Historique des règles définissant la conception et le calcul des ouvrages :

- Circulaire du Ministère des Travaux Publics de 1906 (qq pages)
- Circulaire Ministérielle de 1934 (30 pages)
- Règles BA 45 (90 pages)
- Règles BA 60
- Circulaire Ministérielle de 1964
- Règles CC BA 68
- Règles BAEL 80 modifiées en 83
- Règles BAEL 91 (145 pages)
- Eurocode 2 "Règles unifiées communes pour les structures en béton"

## 1.2. Un exemple d'ouvrage élémentaire



**Fig.1.3 Poutre en béton non armé, de section droite rectangulaire  $b \times h$ , franchissant une portée de  $L$  mètres de nu à nu des appuis.**

La poutre est sollicitée par son seul "poids propre",  $g$ , densité de charge uniformément répartie, exprimée en daN, kN ou MN par "mètre linéaire" de poutre. Elle "travaille" en flexion "simple". A mi portée, le moment de flexion est maximum, il a pour intensité :

$$M_{\max} = g \cdot L^2 / 8$$

Si on admet une distribution plane des contraintes normales agissant sur le béton de la section droite à mi-portée, les contraintes maximales valent  $\sigma_{bc} = -\sigma_{bt} = M_{\max} \cdot v / L = 6 \cdot M_{\max} / (bh^2)$

Si l'intensité de  $\sigma_{bt}$  reste inférieure à la résistance à la traction du béton, notée  $f_{tj}$ , il n'y a pas risque de rupture.

**Exercice :**

Avec cette hypothèse de distribution des contraintes, déterminer la portée maximum  $L$  d'une poutre en béton non armé ne supportant que son propre poids ( $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$ ). Application numérique :  $b = 30\text{cm}$ ,  $h = 60\text{cm}$ ,  $f_{tj} = 2\text{MPa}$ ,

**Solution :**

Charge linéique uniforme  $g = b\gamma h$

Moment fléchissant maximum  $M = g \cdot L^2 / 8$

Contrainte maximum de traction  $\sigma_{bt} = 6 \cdot M / (bh^2) = 6 \cdot b\gamma h \cdot L^2 / (8 bh^2) = 3 \cdot \gamma \cdot L^2 / (4h) < f_{tj}$

D'où  $L < (f_{tj} \cdot 4h / (3 \cdot \gamma))^{1/2} = (2 \times 4 \times 0,6 / (4 \times 0,025))^{1/2} = 8\text{m}$

On peut aussi représenter les forces résultantes des compressions et des tractions  $N_{bc}$  et  $N_{bt}$

Leur intensité respective représente le volume des prismes de compression et de traction de la Fig.1.1. Soit

$$N_{bc} = \sigma_{bc} \cdot (h/2) \cdot (b/2) =$$

$$N_{bc} = 6 \cdot M_{\max} / (bh^2) \cdot (h \cdot b / 4)$$

$$N_{bc} = 3 M_{\max} / (2h) = N_{bt}$$

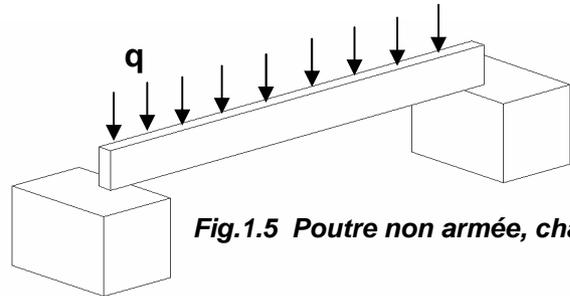
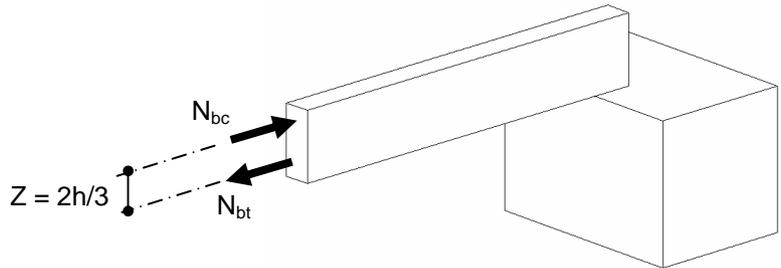
$$\text{ou } M_{\max} = N_{bc} (2/3) \cdot h = N_{bt} (2/3) \cdot h$$

On parle de "couple des forces intérieures", de "bras de levier"  $Z = (2/3)h$  et de moment égal au moment de flexion maximum.

Si on fait croître le moment de flexion en appliquant à la poutre non armée une charge d'exploitation, notée  $q$ , en daN, kN, ou MN par ml, la rupture brutale se produit si on atteint  $\sigma_{bt} = f_{tj}$

La rupture se produit dans la zone où règne le moment de flexion maxi.

**Fig.1.4 Couple de forces intérieures**



**Fig.1.5 Poutre non armée, chargée**

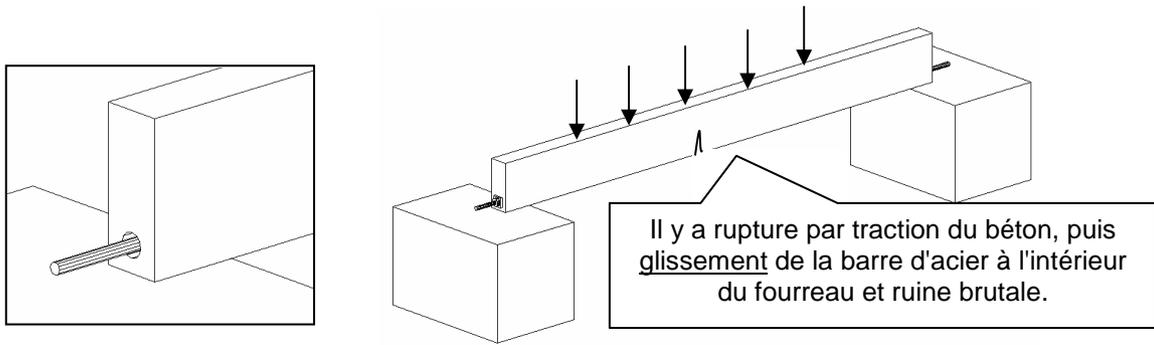
**Exercice :**

1. Déterminer la charge «  $q$  » que peut supporter la poutre si  $b = 30\text{cm}$ ,  $h = 60\text{cm}$ ,  $L=6\text{m}$ ,  $f_{tj} = 2\text{MPa}$

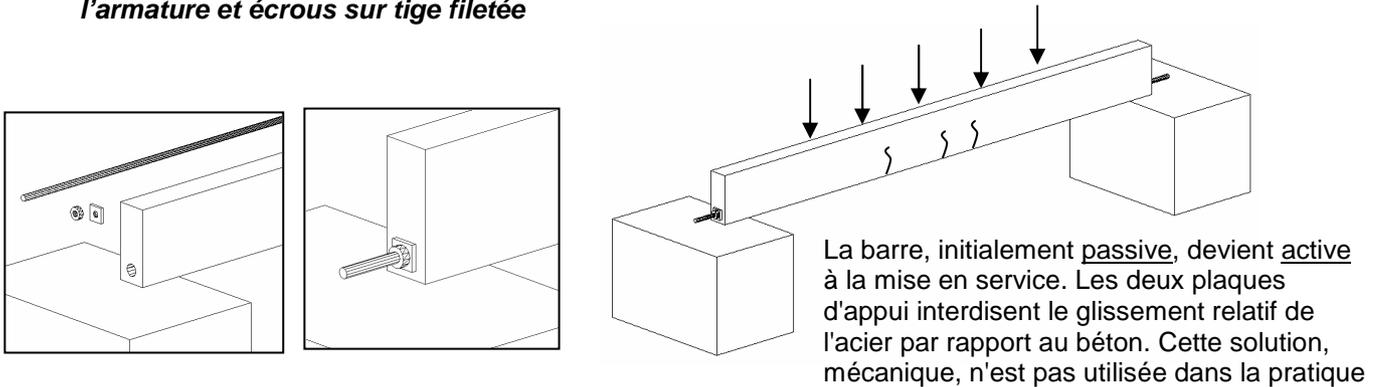
2. Calculer ensuite les forces résultantes des compressions et des tractions  $N_{bc}$  et  $N_{bt}$

D'où l'idée de disposer, préalablement à la mise en service, une (ou plusieurs) barres d'acier ("armatures") parallèlement à la direction et capable d'équilibrer cet effort. On peut imaginer d'armer ou de « précontraindre » le béton.

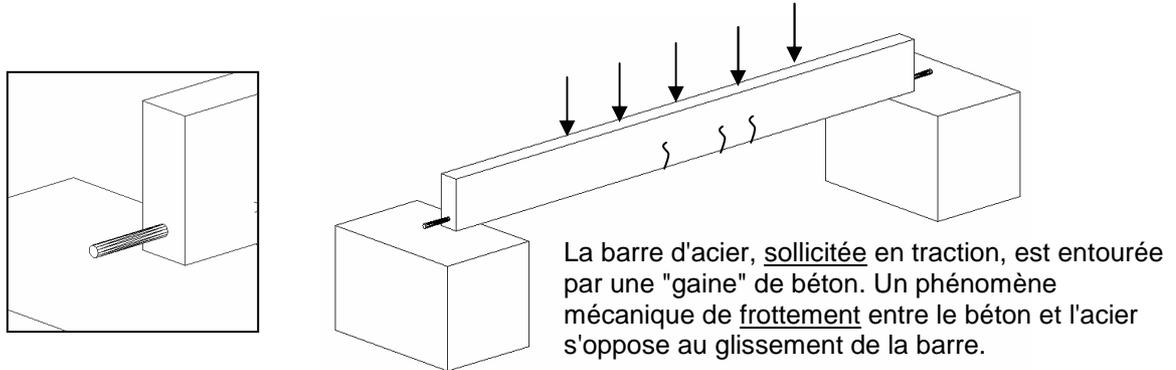
**Fig.1.6. Association d'armature et de béton, mais l'armature est dans un fourreau.**



**Fig.1.7. Association d'armature et de béton avec plaques d'appui empêchant le glissement de l'armature et écrous sur tige filetée**

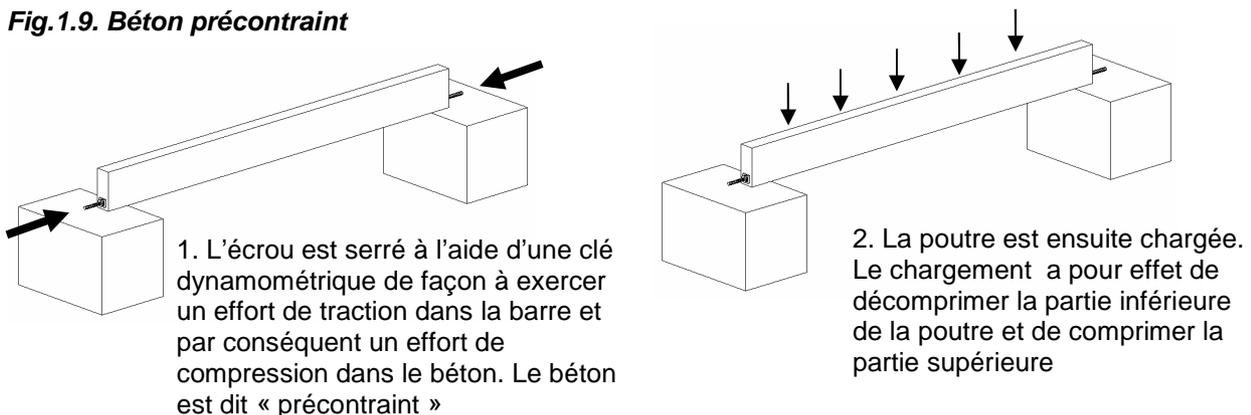


**Fig.1.8. Association d'armature et de béton. L'armature adhère au béton.**



Cette solution est la plus économique. On parle du phénomène, naturel, d'adhérence entre le béton et acier.

**Fig.1.9. Béton précontraint**



Ce type de précontrainte est dite par post-tension. Mais dans le domaine du bâtiment la précontrainte par fils adhérents est plus couramment utilisée. Il s'agit de couler du béton autour de câbles initialement tendus par des vérins. Lorsque le béton atteint la résistance voulue, les vérins sont relâchés, et par adhérence les câbles vont précontraindre le béton.

Lors de l'étude d'une structure en béton armé, il va donc être nécessaire de connaître l'origine et l'intensité des sollicitations de traction :

- un effort normal de traction, un moment de flexion, un moment de torsion, un effort tranchant, induisent des contraintes de traction dans le béton ; ce sont les plus faciles à exprimer et à quantifier à l'aide des méthodes de la Résistance des Matériaux adaptées au matériau béton armé, mixte et hétérogène.
- les effets du retrait du béton, de la température (chocs thermiques, gradients de température), des tassements différentiels éventuels des sols de fondations, des chocs, des séismes, des explosions, de la grande hyperstaticité des ouvrages de bâtiment, sont connus mais difficiles à quantifier. On s'en prémunit en respectant des dispositions constructives et en prévoyant des armatures minimales réglementaires.

### 1.3 Actions, Combinaisons, Etats Limites

Les différentes étapes d'un projet de béton armé sont les suivantes:

1. Analyse de la structure, modélisation
2. Détermination des actions ou bilan des charges
3. Descente de charges et combinaisons d'actions
4. Sollicitations (N, V et M)
5. Dimensionnement
6. Plans de coffrage et plans de ferrailage

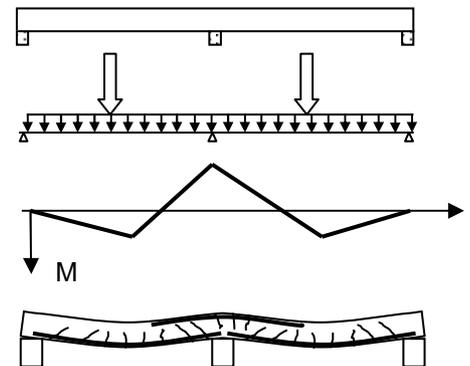


Fig 1.10 Etapes de l'étude

Ce paragraphe revient sur les points 2 et 4.

Une structure en béton bien conçue doit atteindre plusieurs objectifs:

• L'ossature ne doit pas s'effondrer	• L'ensemble doit rester en équilibre lorsque des charges sont appliquées
	• Le béton et l'acier ne doivent pas se rompre
	• Les éléments ne doivent pas flamber
• La structure doit être durable	• Limitation de l'ouverture de fissure
• La structure ne doit pas se déformer excessivement	• Limitation des flèches

Les actions sont les charges appliquées à la structure, on distingue :

Actions permanentes	G	Poids propre des superstructures et des équipements fixes (cloisons, revêtement de sol)	NF P 06-004
Actions variables	Q W S	Charge d'exploitation Vent Neige	NF P 06 001 NV 65 N 84
Actions accidentelles	FA	Séismes...	PS 92

Les valeurs numériques de ces actions sont définies réglementairement. Ces valeurs caractéristiques correspondent à des valeurs dont la probabilité d'être effectivement dépassées est fixée à l'avance. Comme ces actions peuvent se cumuler, on parle de combinaison d'actions. On additionne les valeurs pondérées des différentes actions (voir Annexe D du BAEL)

La conception des ouvrages en béton se fait selon la théorie des Etats Limites. On distingue:

Les Etats Limites de Service ou E.L.S	Les Etats Limites Ultimes ou E.L.U.
<p>Ce sont les conditions qu'il faut respecter pour que l'exploitation normale et la durabilité de la construction soient assurées. Les états limites de service présentent deux domaines:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Un domaine qui nécessite des calculs : par exemple, vérifier que des contraintes ou des déformations sont admissibles</li> <li>2. Un domaine qui ne nécessite aucun calcul : c'est l'ensemble des dispositions constructives qui doivent être assurées.</li> </ol>	<p>Ils font référence aux conditions de rupture. Il s'agit de s'assurer que le risque de ruine est très faible en prenant divers coefficients de sécurité (sur les matériaux) et de pondération (sur les charges). En effet les sources d'erreur sont les suivantes :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Les <u>matériaux</u> peuvent être moins résistants que prévu.</li> <li>- Les <u>charges appliquées</u> peuvent être plus sévères que prévu.</li> <li>- Les <u>méthodes de calcul et les hypothèses</u> peuvent ne pas correspondre exactement à la réalité.</li> </ul>

• Les différents états limites en béton armé (selon BAEL)	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• L'ensemble doit rester en équilibre lorsque des charges sont appliquées</li> <li>• Le béton et l'acier ne doivent pas se rompre</li> <li>• Les éléments ne doivent pas flamber</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ELU d'équilibre statique</li> <li>• ELU de résistance des matériaux</li> <li>• ELU de stabilité de forme</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Limitation de l'ouverture de fissure</li> <li>• Limitation des flèches</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ELS de durabilité</li> <li>• ELS de conditions d'exploitation</li> </ul>

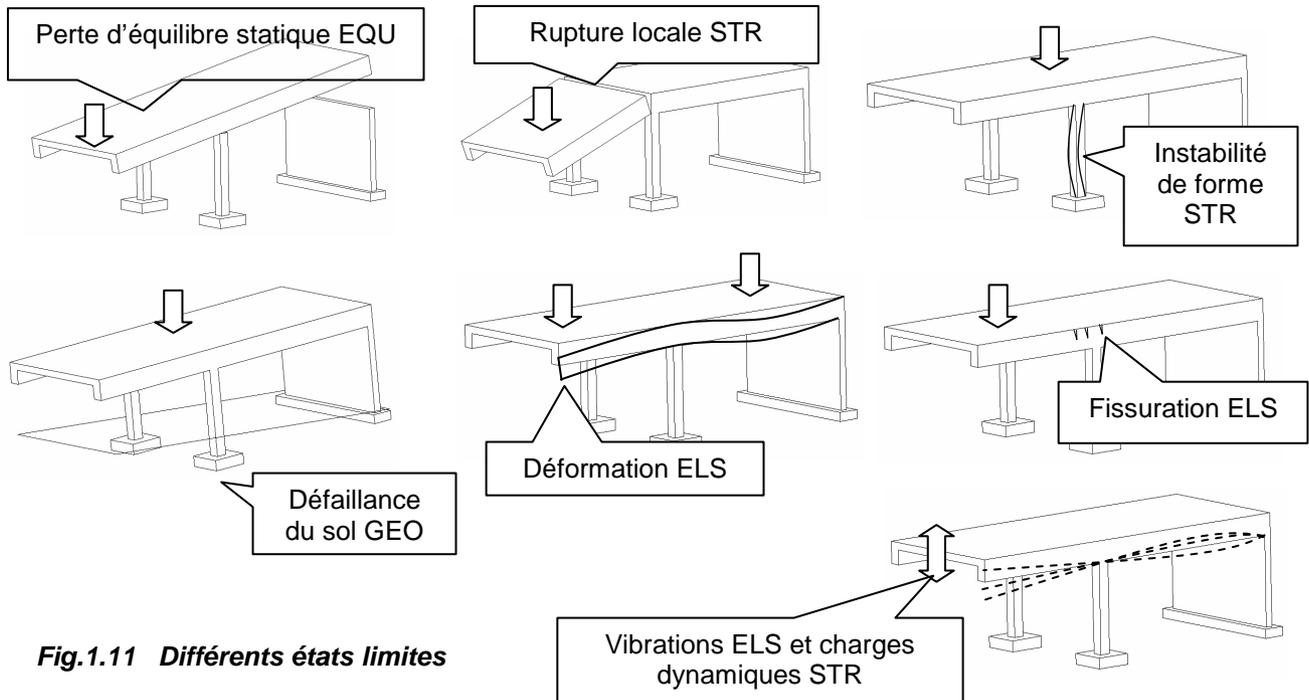
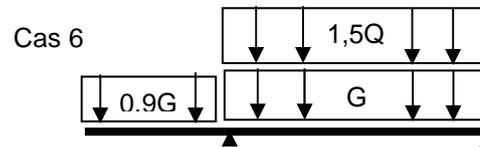
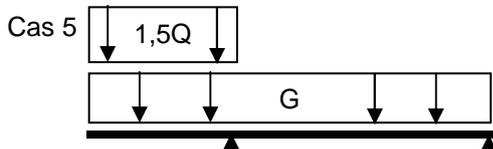
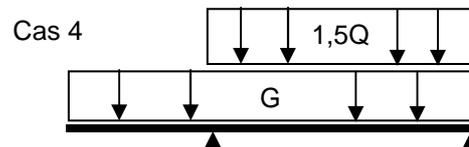
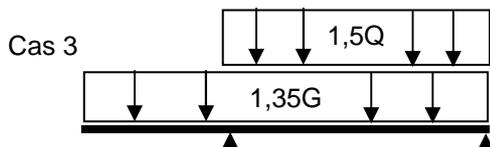
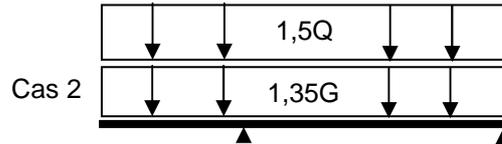
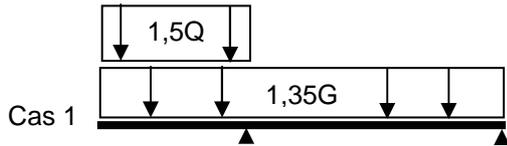


Fig.1.11 Différents états limites

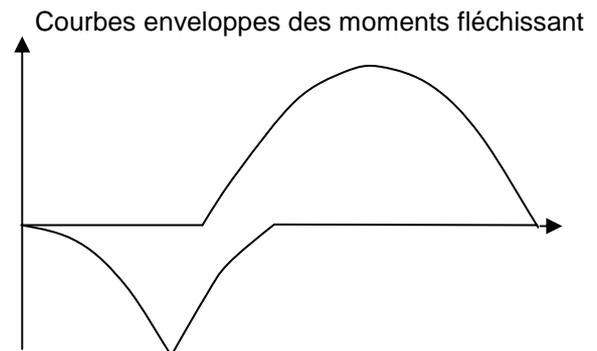
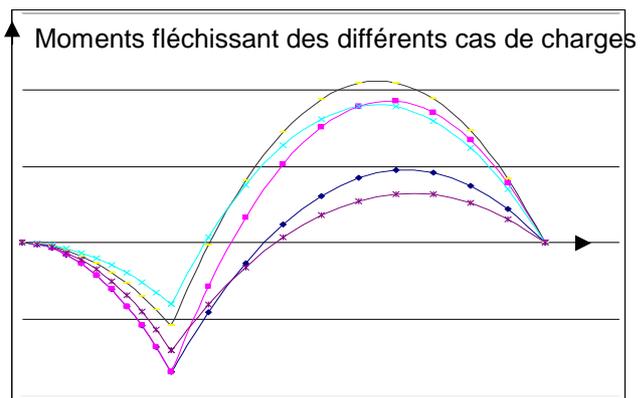
## 1.4 Courbes enveloppes

Selon que les différentes travées peuvent être chargées ou déchargées par la charge d'exploitation, différents cas de charges doivent être étudiés. Dans le cas d'une poutre sur deux appuis simples prolongée par un porte-à-faux on peut distinguer les 6 cas suivants :



Ce cas est éventuellement déterminant pour l'équilibre statique (risque de basculement). Le coefficient 0,9 est conforme à l'article B.3.2,1 du BAEL.

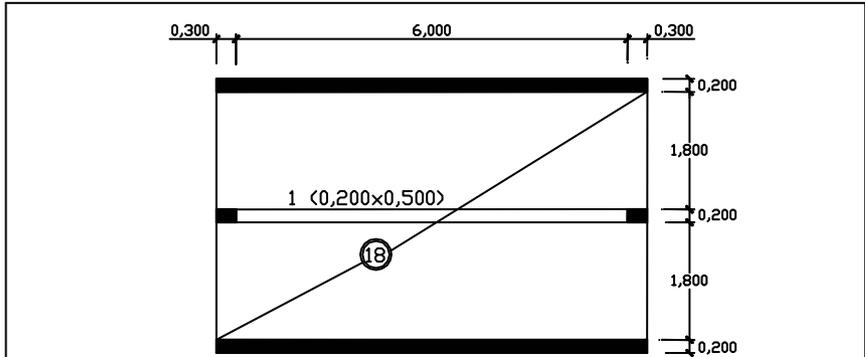
Ce sont les cas de charges 3 et 4 qui sont éventuellement déterminant pour le moment en travée et les cas 1 et 2 pour le moment sur appui.



# 1.5. Application : Etude d'une poutre

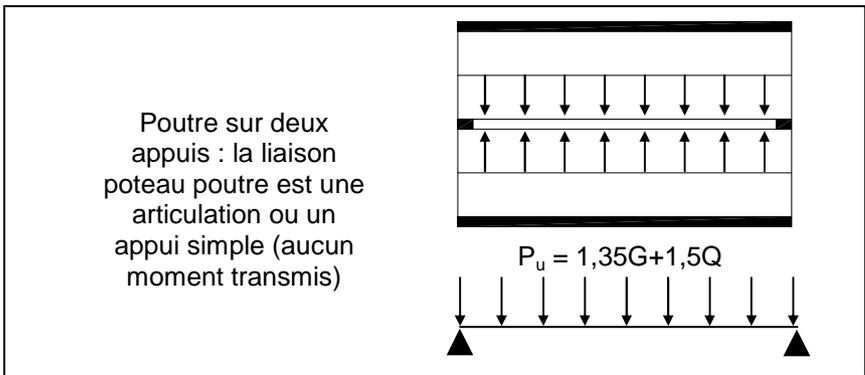
Cet exemple sera repris et poursuivi dans les chapitres 4 à 6 qui suivent

Données du problème



Les charges appliquées sont :  
 - le poids propre du béton armé  $25\text{ kN/m}^3$   
 - le revêtement de sol et les cloisons  $1,2\text{ kN/m}^2$   
 - la charge d'exploitation  $1,5\text{ kN/m}^2$   
 La combinaison d'état limite ultime est  $1,35G + 1,5Q$

Modélisation

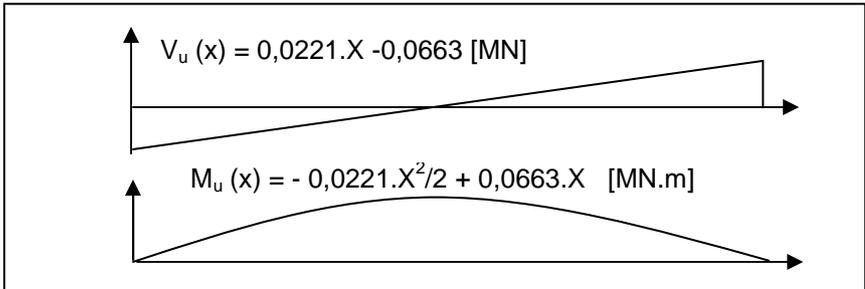


Bilan des charges  
G, Q

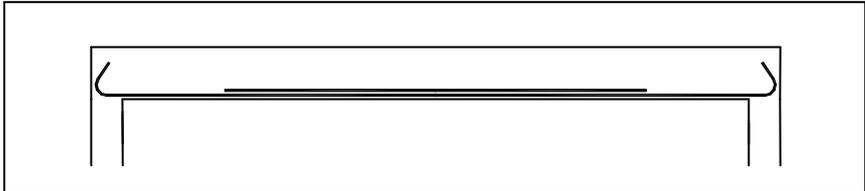
G	poids propre de la dalle $0,18 \times 2 \times 25$ Poids propre retombée de poutre $0,20 \times 0,32 \times 25$ Revêtement de sol et cloisons $1,2 \times 2$ Total $G = 13\text{ kN/m}$
Q	Charge d'exploitation $Q = 2 \times 1,5 = 3\text{ kN/m}$

$1,35G + 1,5Q = 1,35 \times 13 + 1,5 \times 3 = 22,1\text{ kN/m} = 0,0221\text{ MN/m}$

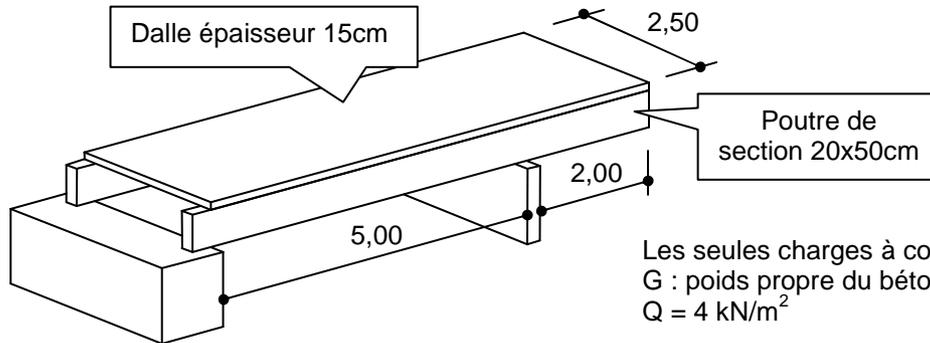
Sollicitations  
 $V_u$   $M_u$



Principe de ferrailage longitudinal



## 1.6 Application : Courbes enveloppes



- Vérifier que l'équilibre statique de l'ouvrage est assuré pour la combinaison de charge suivante :  $G+1,5Q$  sur la partie en porte-à-faux de 2m et  $0,9G$  sur la travée de 5m.
- Déterminer les courbes enveloppes des moments fléchissant pour chacune des deux poutres ci-dessus en considérant que la charge d'exploitation  $Q$  peut se trouver indépendamment sur la travée de 5m ou sur la partie en porte-à-faux de 2m.

### Solution :

Chaque poutre supporte :

$G$  = poids propre de la dalle et de la poutre elle-même

$$G = (0,15 \times 1,25 + 0,2 \times 0,5) \times 25 = 7,19 \text{ kN/m}^2$$

$$Q = 1,25 \times 4 = 6 \text{ kN/m}^2$$

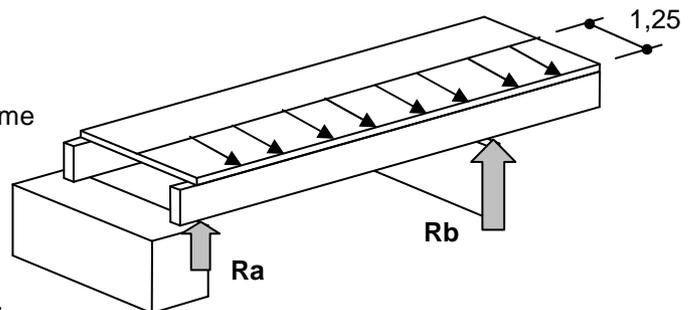
#### 1. Equilibre statique

Il suffit de vérifier que  $R_a$  est bien dirigé vers le haut.

Somme des moments par rapport à l'appui 'b' égale à 0.

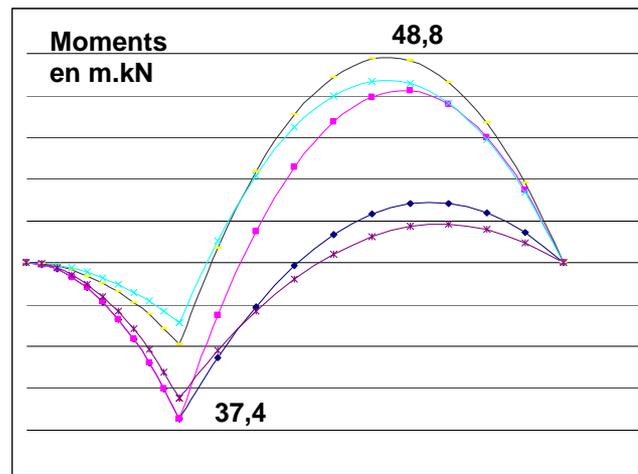
$$0,9.G \times 5 \times 2,5 - 5 \times R_a - (G+1,5.Q) \times 2 \times 1 = 0$$

Soit  $R_a = 9,7 \text{ kN}$  dirigé vers le haut. L'équilibre statique est assuré.



#### 2. Courbes enveloppes

Les 5 cas de charges à étudier sont ceux du § 1.4.

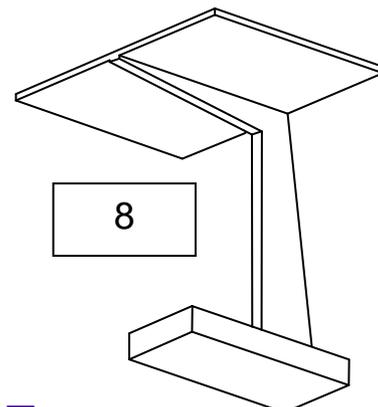
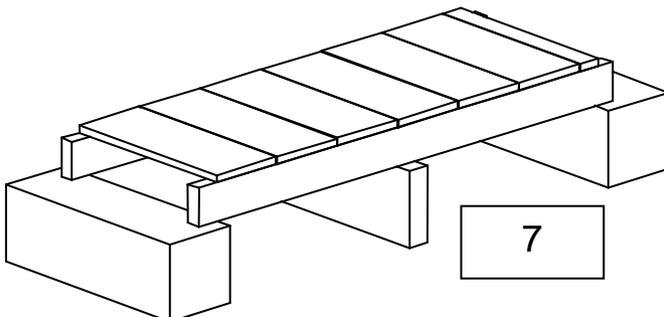
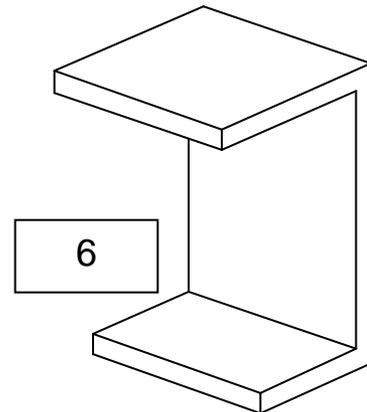
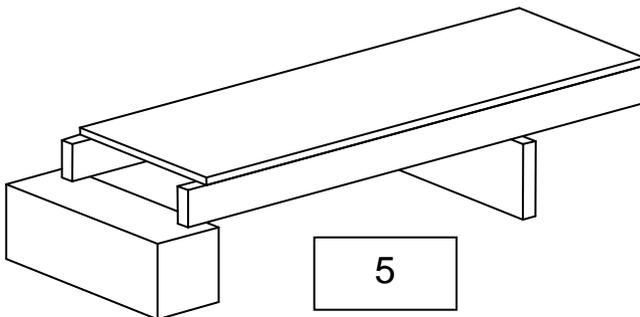
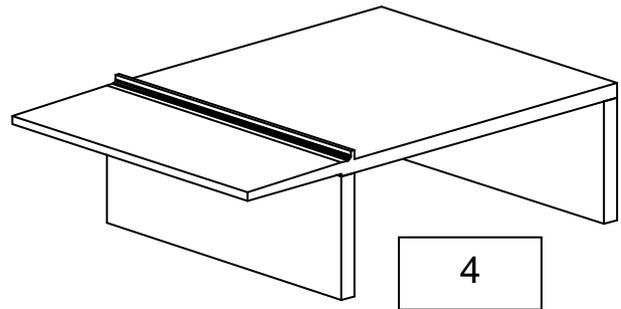
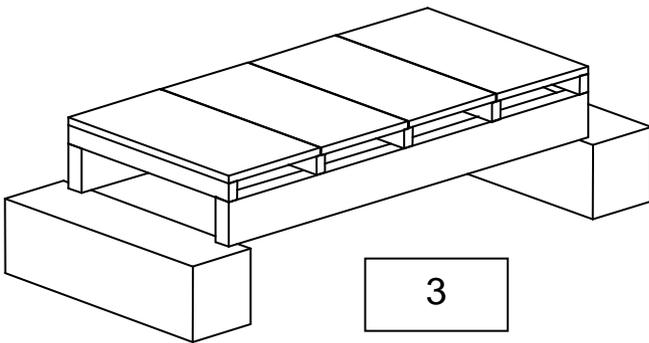
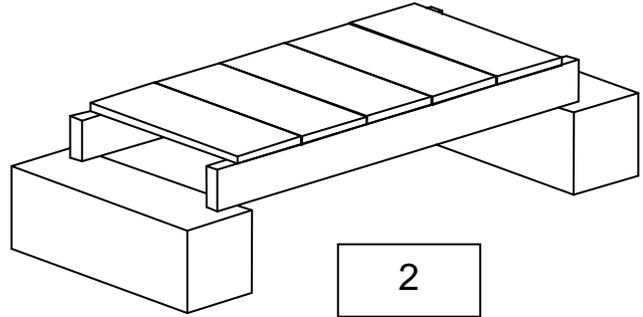
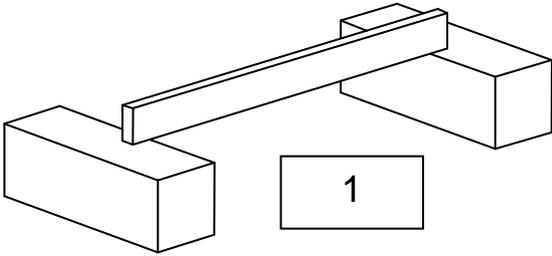


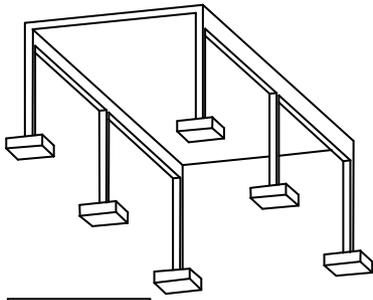
## 1.7 Propositions de T.D

---

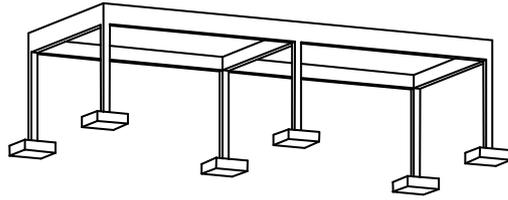
A partir de ces quelques structures simples, donner :

- la modélisation
- le bilan des actions
- les combinaisons ELS, ELU
- les sollicitations M et V à l'ELU (éventuellement à l'ELS)

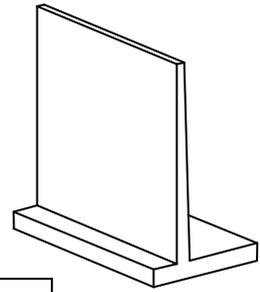




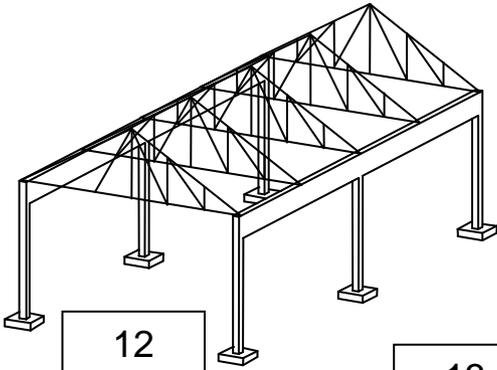
9



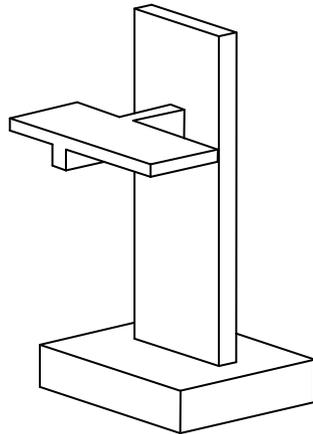
10



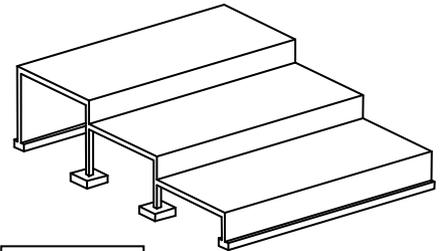
11



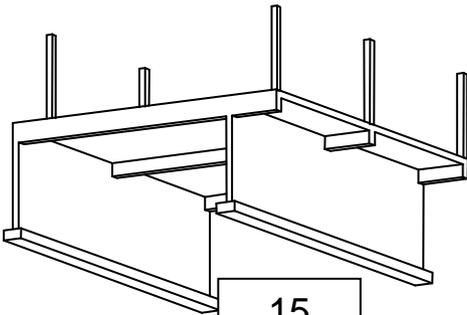
12



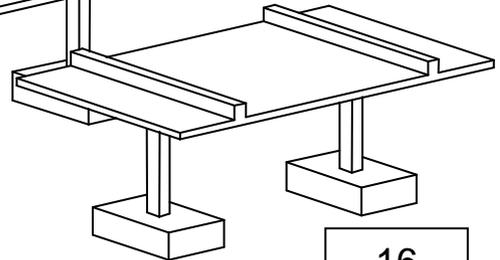
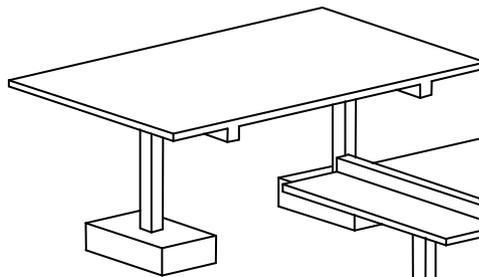
13



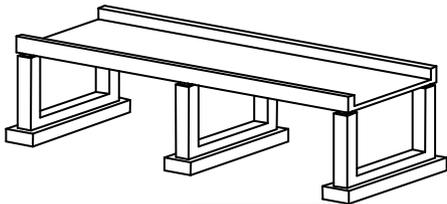
14



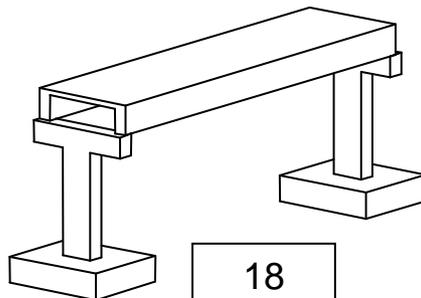
15



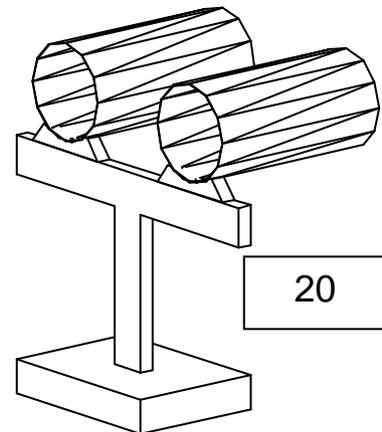
16



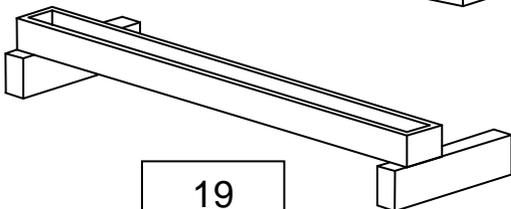
17



18



20



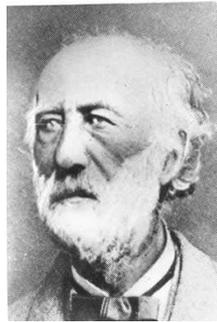
19

## Annexe 1: Quelques personnages historiques...

D'après <http://fr.structurae.de>



*Louis Vicat*  
1786- 1861



*Joseph Louis Lambot*  
1814-1887



*Joseph Monier*  
1823-1906



*François Hennebique*  
1842-1921



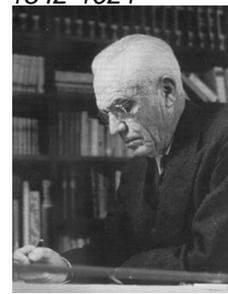
*Charles Rabut*  
1852- 1925



*Eugène Freyssinet*  
1879- 1962



*Albert Caquot*  
1881-1976



*Pier Luigi Nervi*  
1891-1979

### Louis Vicat

**1856** Publication du livre "Traité pratique et théorique de la composition des mortiers, ciments et gangues à pouzzolanes et de leur emploi dans toutes sortes de travaux, suivi des moyens d'en apprécier la durée dans les constructions à la mer".

### Joseph Louis Lambot

**1848** Barque en ciment armé de fer.

**1851** Premier brevet pour une association fer- ciment.

**1855** La barque est présentée à l'Exposition universelle de Paris avec un grand succès.

### Joseph Monier

**1867** Brevet sur des caisses en ciment armé de fer pour l'horticulture.

**1868** Brevet pour des tuyaux et des bassins fixes en ciment armé.

**1869** Brevet pour des panneaux en ciment armé servant à la clôture des maisons.

**1872** Construction d'un réservoir en ciment armé de 130 m<sup>3</sup> à Bougival.

**1873** Brevet pour la construction des ponts et des passerelles en ciment armé.

**1875** Premier pont en ciment armé au château de Chazelet près de Saint-Benoît-du-Sault dans l'Indre: 13,80 m de portée et 4,25 m de largeur.

**1878** Brevet sur des poutres en béton armées de fer.

### François Hennebique

**1886** Suggère que les forces de tensions soient prise seulement par les armatures dans le béton

**1894** Premier pont en béton armé à Wiggen (Suisse)

**1896** Publie le journal "Béton armé"

### Eugène Freyssinet

**1910** Pont de Veudre sur l'Allier

**1933 - 1935** Rénovation du port du Havre; première utilisation du béton précontraint

**1941 - 1945** Plusieurs pont en béton précontraint en France

## Annexe 2. Autres matériaux composites...

---

Un des problèmes constructif majeur est d'utiliser des matériaux locaux, largement disponibles, bon marché et performants mécaniquement. Mais la plupart des éléments de structure doivent résister à des contraintes de compression et de traction. Hélas la terre, la pierre, le béton résistent bien à la compression mais mal à la traction. Depuis des siècles on cherche à « marier » le mieux possible ces matériaux à d'autres qui eux, résistent bien à la traction. Tels l'acier, les fibres végétales ou synthétiques...

Les solutions techniques peuvent être classées en deux grandes familles que l'on pourrait appeler « matériaux composites » et « système constructifs »

### Matériaux composites

Béton armé par des armatures

- Métalliques en barre (acier lisse, à haute adhérence, acier inox...)
- Métalliques en fibre
- Synthétiques en fibres (polymère...)
- Synthétique en barre (fibre de verre)
- Fibre de carbone (plaque ou tissu)
- Fibres végétales (bambou, chanvre...)

Béton précontraint

- Par fils adhérents : poutrelles, poutres, prédalles, dalles alvéolaires
- Par post contrainte (interne, externe) : poutres, voussoirs...

Adobe, pisé, géobéton armé de :

- Fibres végétales (bambou, chanvre...)
- Acier

Terre armé (renforcement de sol)

- Lanière métallique en acier galvanisé
- Lanière polyester
- Géosynthétique

### Systèmes constructifs

Maçonnerie chaînée

- Chaînages verticaux et horizontaux par de l'acier, du bambou...
- Chaînages dans les joints

Plancher à bac acier collaborant

- Plancher mixte bois- béton (avec connecteurs acier)
- Poutres mixte acier- béton (avec connecteurs acier)

## 2. Les Matériaux du Béton Armé

### 2.1 Le Béton (A.2.1)

Le béton est un mélange de ciment, de granulats, d'eau et éventuellement d'adjuvants défini par des normes (y compris pour l'eau...).

#### Ciments

La production annuelle est en France d'environ 20 millions de tonnes ([www.infociments.fr](http://www.infociments.fr))  
On distingue différents types de ciment et différentes classes de résistance.

Classes	Définition
CEM I	Ciment Portland
CEM II	Ciment Portland composé (au laitier, fumée de silice, pouzzolane, cendres volantes, schistes calcinés, calcaire)
CEM III	Ciment de haut fourneau
CEM IV	Ciment pouzzolanique
CEM V	Ciment composé (laitier, cendres)

Résistance minimale	Normal (N)		Rapide (R)	
	A 2 jours	A 28 jours	A 2 jours	A 28 jours
Classe 32,5	/	32,5	≥ 10	32,5
Classe 42,5	≥ 10	42,5	≥ 20	42,5
Classe 52,5	≥ 20	52,5	≥ 30	52,5

#### Bétons

Un béton est défini par un certain nombre de critères et sera caractérisé par des performances dont la résistance n'est qu'un des aspects.

La norme EN 206-1 s'applique à tous les bétons de structure, y compris ceux réalisés sur chantier, contrairement à la norme NF-P-18.305 qui ne s'appliquait qu'aux bétons prêts à l'emploi. Les Bétons prêts à l'emploi (B.P.E) sont fabriqués industriellement avec les avantages que cela comporte (matériaux stockés correctement, dosages précis (l'ajout d'eau dépend de la teneur en eau des granulats), contrôles systématiques des composants, régularité des caractéristiques du produit...)

On voit sur la marché, au travers du réseau des usines de Béton Prêt à l'Emploi, des bétons de résistance très élevée, regroupés sous le terme de Bétons à Hautes Performances.

En fait ils recouvrent une vaste gamme de bétons; une classification est proposée en fonction de leur résistance, mais ne pas perdre de vue que le mot "performance" englobe des caractéristiques diverses :

- densité
- porosité
- perméabilité ou résistance à la pénétration de l'eau
- résistance aux agents agressifs extérieurs (chimiques notamment)
- résistance aux cycles gel- dégel et au sels de déverglaçage
- résistance à l'abrasion
- tenue au feu
- déformabilité
- retrait, fluage
- maniabilité
- développement accéléré de la résistance
- hydratation retardée
- teneur en air (air entraîné et occlus)
- résistance à la compression (qui n'est que l'une d'entre elles).

Il existe au sens de la norme, trois types de béton :

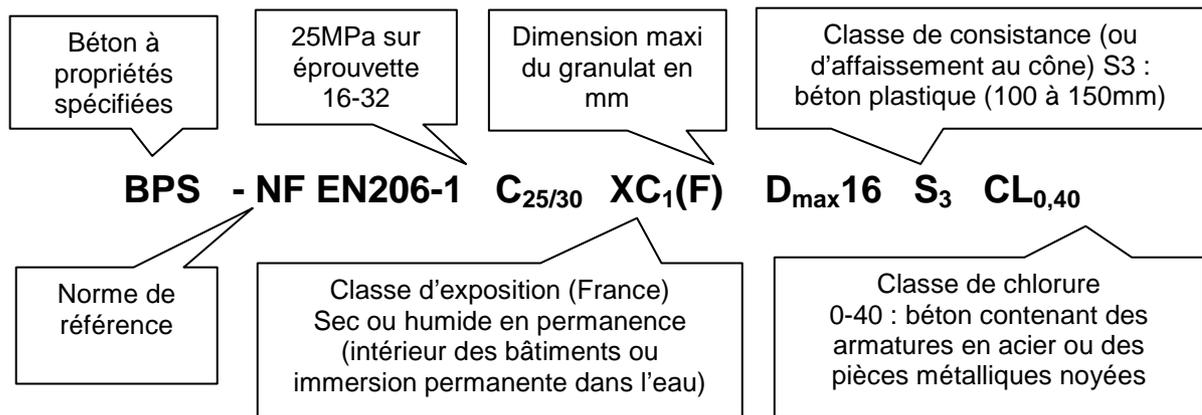
- Les BCP- Bétons à Composition Prescrite
- Les BPS- Bétons à Propriétés Spécifiées
- Les BCPN- Béton à Composition Prescrite dans une Norme

Pour les **BCP Bétons à Composition Prescrite**, la composition et les constituants à utiliser sont spécifiés au producteur par le client prescripteur. Le fournisseur n'est responsable que du respect de la formulation donnée par l'utilisateur. Ils ne doivent donc être commandés que par des prescripteurs réellement compétents dans la formulation des bétons.

Pour les **BPS Bétons à Propriétés Spécifiées**, les spécifications sont les suivantes :

- o Exigence de conformité à la norme EN 206-1
- o Classe de résistance
- o Classe d'exposition
- o Dimension maximum des granulats
- o Classe de consistance
- o Classe de teneur en chlorures
- o Exigences complémentaires (Prise retardée, résistance à l'abrasion, au gel dégel, aspect...)

Exemple :



### Critères de spécification des BPS

<b>Classes de résistance</b>	Notée par exemple <b>C<sub>25/30</sub></b> , (C comme Concrete), 25 représente la résistance en compression en MPa à 28 jours sur cylindre 16/32 et 30 celle sur cube 15/15/15. Il existe de nombreuses classes allant de <b>C<sub>8/10</sub></b> à <b>C<sub>100/115</sub></b> . Les plus courantes étant <b>C<sub>20/25</sub></b> et <b>C<sub>25/30</sub></b>
<b>Classes d'exposition</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Xo = Absence de risque de corrosion ou d'attaques</li> <li>▪ Xc = Corrosion par carbonatation</li> <li>▪ XD = Risque de corrosion par chlorures autres que sel de mer (Sels de déverglaçage, piscines ...)</li> <li>▪ Xs = Corrosion par chlorures provenant de la mer</li> <li>▪ XA = Attaques chimiques</li> <li>▪ XF = Attaques gel dégel</li> </ul>
<b>Classes de consistance</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ S<sub>1</sub> : De 10 à 40 mm (± 10 mm)</li> <li>▪ S<sub>2</sub> : De 50 à 90 mm (± 20 mm)</li> <li>▪ S<sub>3</sub> : De 100 à 150 mm (± 30 mm)</li> <li>▪ S<sub>4</sub> : De 160 à 210 mm (± 30 mm)</li> <li>▪ S<sub>5</sub> : &gt; 220 mm (± 30 mm)</li> </ul>
<b>Classes de teneur en chlorures</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ CL<sub>0,20</sub> = Pour le béton précontraint (un peu trop permissive),</li> <li>▪ CL<sub>0,40</sub> = Pour le béton armé courant,</li> <li>▪ CL<sub>0,65</sub> = Pour le béton avec ciment CEM III,</li> <li>▪ CL<sub>1,00</sub> = Pour le béton non armé.</li> </ul> <p>Où 0,20 correspond au % de chlorures autorisés par rapport au poids de ciment</p>

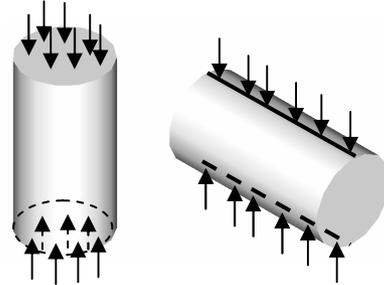
## Caractéristiques mécaniques.

Le béton est caractérisé par une bonne résistance à la compression  $f_{cj}$  et une résistance médiocre en traction  $f_{tj}$ . Un module d'Young qui prend deux valeurs selon que l'on considère des déformations instantanées  $E_{ij}$  ou des déformations à long terme, déformations différées,  $E_{vj}$ .

## Essais de laboratoire

Expérimentalement la résistance à la compression se mesure le plus souvent sur des éprouvettes cylindriques de diamètre 16cm et de hauteur 32cm.

La résistance à la traction s'obtient soit par essai de traction par fendage (dit essai Brésilien) soit par un essai de flexion sur éprouvette prismatique.



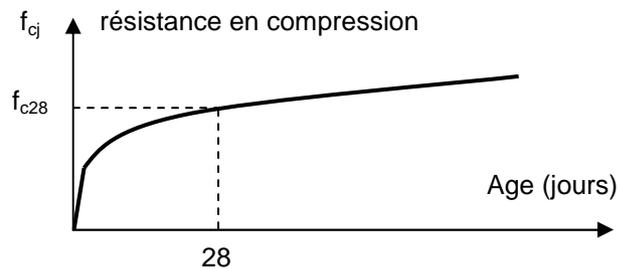
**Fig.2.1 Essais de compression et de traction sur éprouvettes 16x32**

## Résistance à la compression (A.2.1,1)

Dans les cas courants, un béton est défini par une valeur de sa résistance à la compression, à l'âge de 28 jours, dite "valeur caractéristique requise". Cette résistance se mesure par des essais de compression simple sur éprouvettes cylindriques de section  $200\text{ cm}^2$  et de hauteur double de leur diamètre (les éprouvettes sont dites "16-32").

Elle est notée  $f_{c28}$  et s'exprime en MPa et correspond dans la norme à la valeur de la résistance au dessous de laquelle peuvent se situer au plus 5% de la population de tous les résultats des essais sur éprouvette 16x32. Cette résistance caractéristique est donc bien inférieure à la valeur moyenne des résultats d'essai.

Cette résistance varie en fonction de l'âge du béton et le règlement donne des lois d'évolution de  $f_{cj}$  (résistance en compression à j jours) en fonction de l'âge "j" en jours.



**Fig.2.1.b Evolution de la résistance en compression d'un béton en fonction de son âge**

Pour des bétons non traités thermiquement, on admet (BAEL):

$J \leq 28$	$f_{c28} \leq 40\text{ MPa}$	$f_{cj} = j \cdot f_{c28} / (4,76 + 0,83j)$
	$f_{c28} > 40\text{ MPa}$	$f_{cj} = j \cdot f_{c28} / (1,40 + 0,95j)$
$J = 28$	$f_{c28} \leq 40\text{ MPa}$	$f_{cj} = f_{c28}$ pour les calcul de résistance
$28 < J < 60$		$f_{cj} = j \cdot f_{c28} / (4,76 + 0,83j)$ pour les calculs de déformation
$J > 60$		$f_{cj} = 1,1 \cdot f_{c28}$ pour les calculs de déformation

## Résistance à la traction du béton (A.2.1,12)

La résistance à la traction du béton à j jours, notée  $f_{tj}$  et exprimées en MPa est définie conventionnellement par la relation

$$f_{tj} = 0,6 + 0,06 \cdot f_{cj} \quad \text{si } f_{c28} < 60\text{MPa} \quad \text{et} \quad f_{tj} = 0,275 \cdot f_{cj}^{2/3} \quad \text{si } 60 < f_{c28} < 80\text{MPa}$$

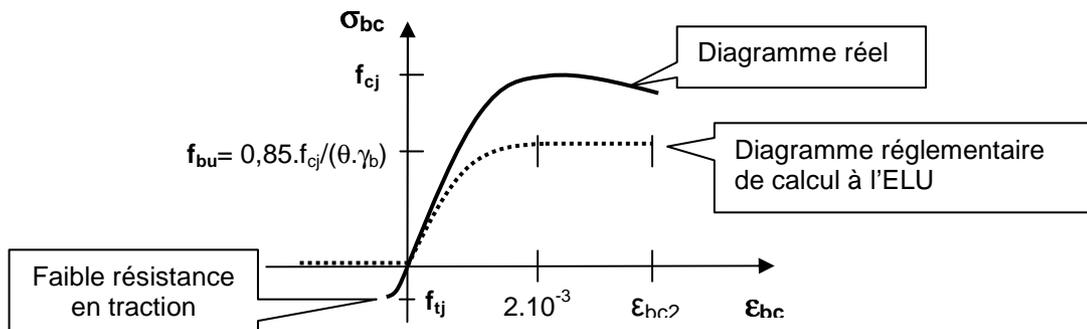
Quelques valeurs

$f_{c28}$ [MPa]	20	25	30	40	60	80
$f_{t28}$ [MPa]	1,8	2,1	2,4	3	4,2	5,1

## Déformations longitudinales du béton (A.2.1,2)

Un essai de compression simple sur éprouvette 16x32 permet d'obtenir le diagramme expérimental "contrainte - déformation" du béton ci-dessous. Réglementairement, on applique des coefficients de sécurité sur la résistance du béton et le diagramme qui sera utilisé pour les calculs à l'ELU (Etats Limites Ultimes) sera le diagramme dit "de calcul" (voir chapitre 4, § 4.1). La résistance de calcul à la traction sera négligée.

Le béton est un matériau fragile (par opposition à ductile), il se déforme peu avant rupture. La loi de comportement fait apparaître une zone élastique (quasiment linéaire) et une zone plastique.



$$\epsilon_{bc2} = 3,5 \cdot 10^{-3} \quad \text{si } f_{cj} < 40\text{MPa} \quad \text{et} \quad \epsilon_{bc2} = (4,5 - 0,025 \cdot f_{cj}) \cdot 10^{-3} \quad \text{si } f_{cj} > 40\text{MPa}$$

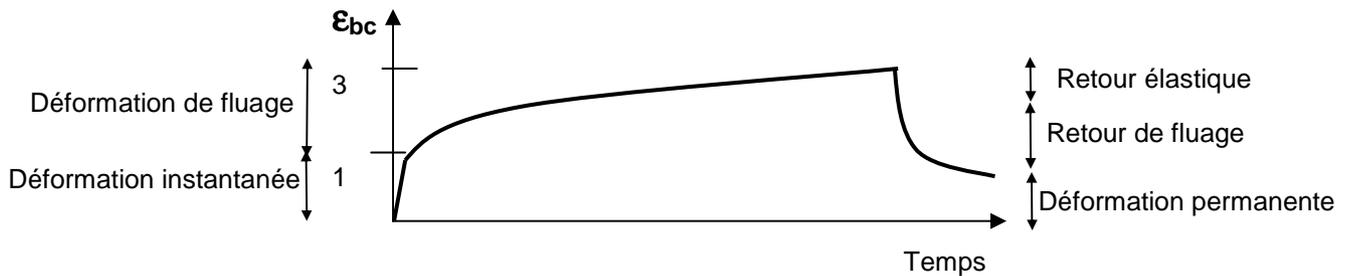
**Fig.2.2 Diagramme expérimental et diagramme de calcul du béton**

$f_{bu} = 0,85 \cdot f_{cj} / (\theta \cdot \gamma_b)$  est la résistance en compression pour le calcul à l'ELU avec :

$\theta = 1$  pour les charges appliquées plus de 24h (0,9 entre 1 et 24h et 0,85 si < 1h)

$\gamma_b = 1,5$  à l'ELU normal et 1,15 à l'ELU accidentel.

Un élément de béton comprimé admet dès l'application de la charge une déformation instantanée. Mais au cours du temps, cette déformation va continuer à croître du fait du fluage (déformation dans le temps, sous charge constante) et sera même trois fois plus importante que la déformation instantanée.



**Fig.2.3 Déformations instantanée et différée (due au fluage)**

Déformations instantanées	Déformations différées
<p>Sous des contraintes normales d'une durée d'application inférieure à 24 heures, on admet à l'âge de j jours, un module de déformation instantanée du béton de:</p> $E_{ij} = 11000.f_{cj}^{1/3}$	<p>Les déformations différées du béton comprennent le retrait et le fluage. Le module de déformation différée correspondant à des charges de longue durée d'application (réglementairement plus de 24 heures) est:</p> $E_{vj} = 3700.f_{cj}^{1/3} \quad \text{si } f_{cj} < 60\text{MPa}$ $E_{vj} = 4400.f_{cj}^{1/3} \quad \text{si } 60 < f_{c28} < 80\text{MPa, sans fumée de silice}$ $E_{vj} = 6100.f_{cj}^{1/3} \quad \text{si } 60 < f_{c28} < 80\text{MPa, avec fumée de silice}$
<p>avec <math>f_{cj}</math> en MPa et pour les bétons à haute résistance, sous réserve que la proportion volumique de granulat soit supérieure à 66%.</p>	

Quelques valeurs en MPa		
$f_{c28}$	$E_{ij}$	$E_{vj}$
25	32160	10820
30	34180	11500
40	37620	12650
60	43060	17220
80	47400	18960

## Retrait

Le raccourcissement unitaire ( $\epsilon$ ) du au retrait, dans le cas de pièces non massives à l'air libre est estimé à : (ces valeurs tiennent compte d'un pourcentage moyen d'armatures).

$1,5 \cdot 10^{-4}$	Dans les climats très humides
$2 \cdot 10^{-4}$	Dans les climats humides (France sauf quart Sud Est)
$3 \cdot 10^{-4}$	Dans les climats tempérés secs (quart Sud Est de la France)
$4 \cdot 10^{-4}$	En climat chaud et sec
$5 \cdot 10^{-4}$	En climat très sec ou désertique

**Remarque 1.** Pour limiter les effets du retrait dans les dalles de grandes dimensions la phase de bétonnage s'effectue parfois en laissant des lacunes de coulage qui seront coulé plusieurs semaines plus tard, une fois l'essentiel du retrait effectué.

**Remarque 2.** Dans les dallages des joints (parfois sciés) sont réalisés pour que les fissures de retrait se trouvent localisés en fond de joint, et donc invisibles.



## 2.2 L'Acier (A.2.2)

Au cours des premières décennies de l'histoire du béton armé, les armatures étaient constituées de barres d'acier doux, lisses, de section circulaire dont la limite d'élasticité était habituellement comprise entre 215 et 235 MPa. Ce type d'acier n'est pratiquement plus utilisé. On utilise désormais des aciers de limite d'élasticité plus élevée afin de réduire les sections d'armatures. Pour améliorer l'adhérence des armatures au béton on crée à la fabrication des aspérités en saillie ou en creux. Les aspérités en saillie inclinées par rapport à l'axe de la barre sont appelées « verrous ». Les aspérités en creux sont appelées « empreintes ». Ces aciers sont dits à Haute Adhérence (HA) et ont couramment une limite élastique de 500MPa.

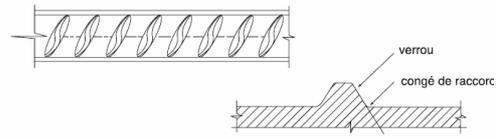


Figure n° 1 : schéma d'un acier à verrous.

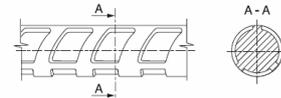


Figure n° 2 : schéma d'un acier à empreintes.

### Production des aciers pour béton

La haute limite d'élasticité peut être obtenue par différents moyens :

- en jouant sur la composition chimique, en particulier en augmentant la teneur en carbone. Ce type d'acier présente des inconvénients notamment dans les domaines de l'aptitude au façonnage et au soudage. Il est maintenant abandonné en Europe;
  - par écrouissage, par étirage et ou laminage à froid de barres ou fils d'acier doux ;
  - par traitement thermique (trempe et autorevenu) de barres ou fils d'acier doux. Les aciers se présentent sous forme de barres de grande longueur (souvent 12 m) ou de fils en couronnes.
- Les cycles de productions utilisés aujourd'hui sont en annexe.

Les diamètres commerciaux des barres indépendantes sont (en mm)

**6 8 10 12 14 16 20 25 32 40**

En barres droites, les longueurs courantes de livraison sont comprises entre 12 et 18 m. Les treillis soudés sont livrés sous forme de panneaux de dimensions 2,40x6,00 pour la plupart. (voir annexe). Pour les barres de diamètre 6, 8, 10 et 12 mm, la livraison est également possible en couronne. Dans ce cas les armatures sont redressées à l'aide d'une machine appelée "redresseuse".

### Normes et documents de définition

Les produits en acier pour béton armé sont essentiellement définis par des normes. Les nuances définies dans ces normes sont désignées par des lettres Fe E, Fe TE (acier tréfilé), TLE (acier à très haute limite élastique) suivies d'un nombre indiquant la valeur spécifiée de limite d'élasticité exprimée en MPa. Exemples : Fe E 235 ou Fe E 500.

De plus les barres et fils à haute adhérence, bénéficiant d'une homologation font l'objet d'une fiche d'identification.

### Caractéristiques mécaniques

Les caractéristiques mécaniques servant de base aux calculs des éléments de béton armé sont:

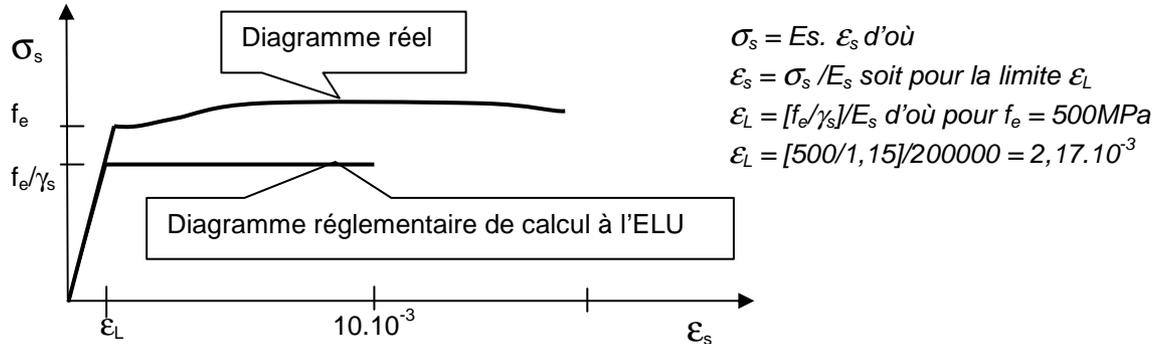
La **limite élastique** garantie notée  $f_e$ : Fe E 500 pour  **$f_e = 500$  MPa**

Suivant les types d'acier, cette limite peut être apparente (acier doux, naturellement durs) ou fixée conventionnellement à  $2 \cdot 10^{-3}$  d'allongement rémanent (fils tréfilés lisses).

Le **module d'élasticité** de l'acier est pris égal à  **$E_s = 200.000$  MPa**

Le **diagramme contrainte déformation** de l'acier.

Comme pour le béton, il faut distinguer le diagramme contrainte - déformation réel du diagramme conventionnel de calcul à l'ELU qui sera utilisé pour le dimensionnement des éléments de béton armé.

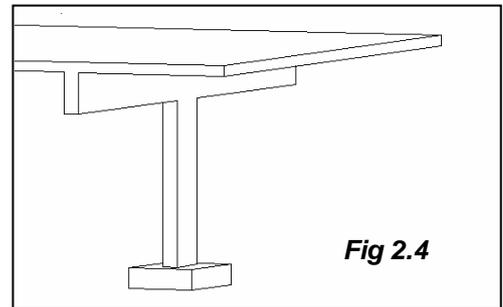


À l'ELU normal  $\gamma_s = 1,15$  et à l'ELUU accidentel  $\gamma_s = 1$

**Fig.2.5 Diagramme expérimental contraintes – déformations en traction simple et diagramme conventionnel de calcul.**

## 2.3. Application. Déformation d'un poteau en compression.

Un poteau en béton armé de section 30x40 supporte une charge verticale de 0,7 MN. Sa hauteur est de 2,50m. La résistance du béton est prise égale à  $f_{c28} = 25$  MPa. Quel sera le raccourcissement à long terme de ce poteau (situé à Grenoble et dont le béton a plus de trois mois) ?



**Solution :**

La résistance du béton à  $j > 60$  est prise, pour le calcul des déformations, égale à  $f_{cj} = 1,1 \times 25 = 27,5$  MPa

Le module d'Young à considérer est le module de déformation différée  $E_{vj} = 3700 \cdot f_{cj}^{1/3} = 3700 \times 27,5^{1/3} = 11168$  MPa

On applique la loi de Hooke (sans tenir compte de la présence des aciers)  $\sigma_{bc} = E_{vj} \cdot \epsilon_{bc}$  avec  $\sigma_{bc} = 0,7 / (0,3 \times 0,4)$  et  $\epsilon_{bc} = dh / 2,50$  d'où  $dh = 1,3 \cdot 10^{-3}$  m soit 1,3 mm de déformation due à la charge.

Pour le retrait, le raccourcissement sera  $3 \cdot 10^{-4} = dh / 2,50$  d'où  $dh = 7,5 \cdot 10^{-4}$  m = 0,75 mm

Le raccourcissement global est donc de  $1,3 + 0,75 = \boxed{2,05 \text{ mm}}$

## Annexe 1

---

**Tableau des sections des barres indépendantes**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
HA 6	0,28	0,57	0,85	1,13	1,41	1,70	1,98	2,26	2,54
HA 8	0,50	1,01	1,51	2,01	2,51	3,02	3,52	4,02	4,52
HA 10	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50	6,28	7,07
HA 12	1,13	2,26	3,39	4,52	5,65	6,79	7,92	9,05	10,18
HA 14	1,54	3,08	4,62	6,16	7,70	9,24	10,78	12,32	13,85
HA 16	2,01	4,02	6,03	8,04	10,05	12,06	14,07	16,08	18,10
HA 20	3,14	6,28	9,42	12,57	15,71	18,85	21,99	25,13	28,27
HA 25	4,91	9,82	14,73	19,63	24,54	29,45	34,36	39,27	44,18
HA 32	8,04	16,08	24,13	32,17	40,21	48,25	56,30	64,34	72,38
HA 40	12,57	25,13	37,70	50,27	62,83	75,40	87,96	100,53	113,10

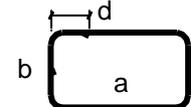
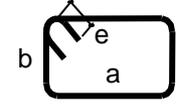
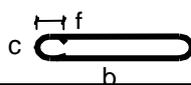
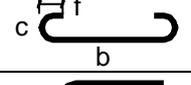
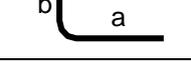
La masse volumique de l'acier est 7800kg/m<sup>3</sup>



## Annexe 3

### Longueurs développées des cadres, étriers, épingles et U

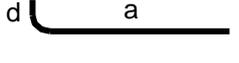
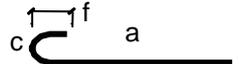
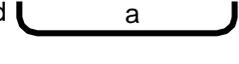
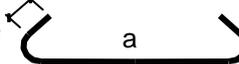
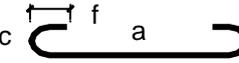
Longueurs développées pour des longueurs hors tout a, b, c, d, e, f en mm

		HA	6	8	10	12	14	16	20
		Diam. mandrin	32	40	50	63	80	80	160
<b>Cadre avec retour à 90°</b>		d =	92	108	135	164	194	216	300
		$L = 2(a+b)+$	113	124	156	187	217	249	307
<b>Cadre avec retour à 135°</b>		e =	72	78	85	104	124	136	200
		$L = 2(a+b)+$	103	102	103	125	151	164	248
<b>Etrier</b>		f =	72	78	85	104	124	136	200
		c =	44	56	70	87	108	112	200
		$L = 2b +$	191	214	243	299	367	388	648
<b>Epingle</b>		f =	72	78	85	107	124	136	200
		c =	44	56	70	87	108	112	200
		$L = b +$	175	195	218	269	327	350	565
<b>U</b>		$L = 2a + b$	28	37	46	56	68	73	117

Les crochets normalisés ont des retours droits de  $10\Phi$  pour un angle à  $90^\circ$  et de  $5\Phi$  pour un angle  $\geq 135^\circ$

### Longueurs développées des barres avec crochets

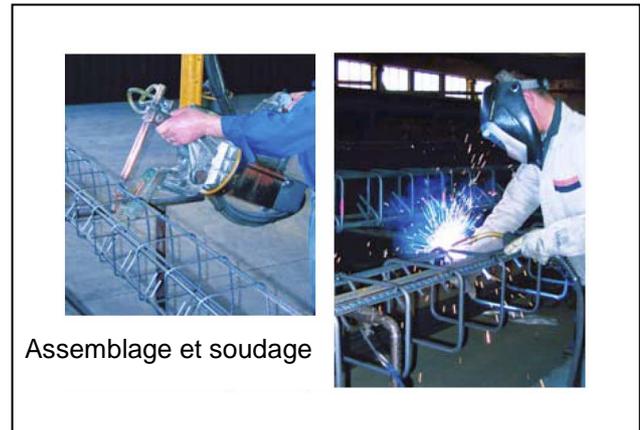
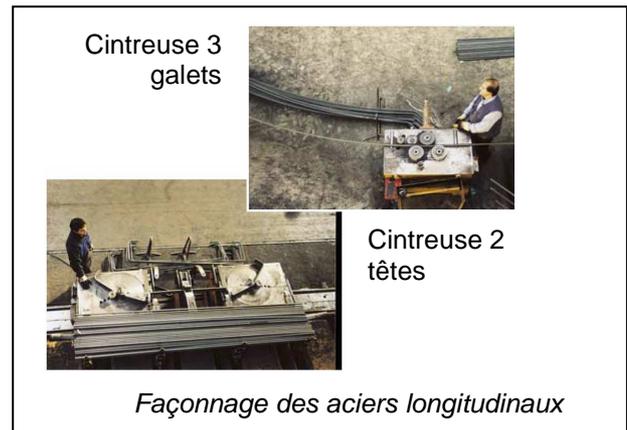
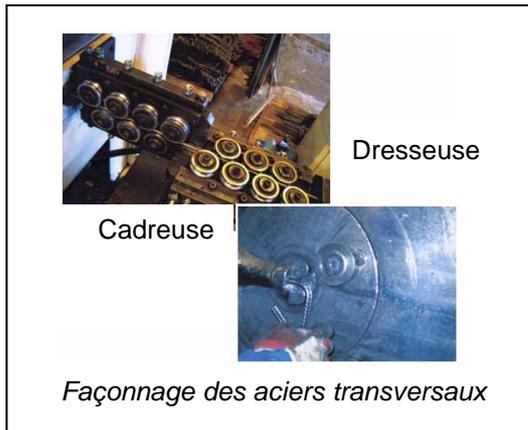
Longueurs développées L (en mm) pour un retour droit de  $5\Phi$  (minimum normalisé)

	HA	6	8	10	12	14	16	20	25	32	40
	Mandrin	63	80	100	125	160	160	200	250	320	400
	d = e = f =	65	84	105	129	157	168	210	263	336	420
	c	75	96	120	149	188	192	240	300	384	480
	$L = a +$	47	61	76	93	113	122	153	191	244	306
	$L = a +$	74	96	120	147	181	191	239	299	383	478
	$L = a +$	101	130	163	201	249	260	326	407	521	651
	$L = a +$	93	122	153	186	225	244	306	382	489	611
	$L = a +$	148	191	239	294	362	383	478	598	765	957
	$L = a +$	202	260	326	401	499	521	651	814	1042	1302

## Annexe 4

### Façonnage et assemblage des armatures

Images Cimbéton



# Annexe 5

## Armatures de béton armé

Images Cimbéton

Acier en barres



Acier en couronnes



Acier en treillis soudés



Aciers coupés et façonnés



Armatures sur plans façonnées et assemblées



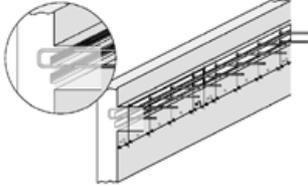
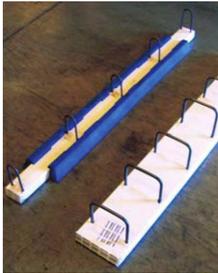
Armatures sur catalogue



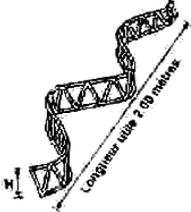
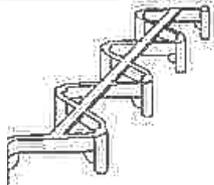
Manchons (Coupleurs)



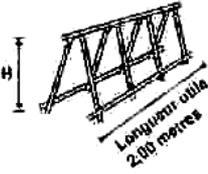
Boîte d'attente (acier à déplier)



Cales et distanciers



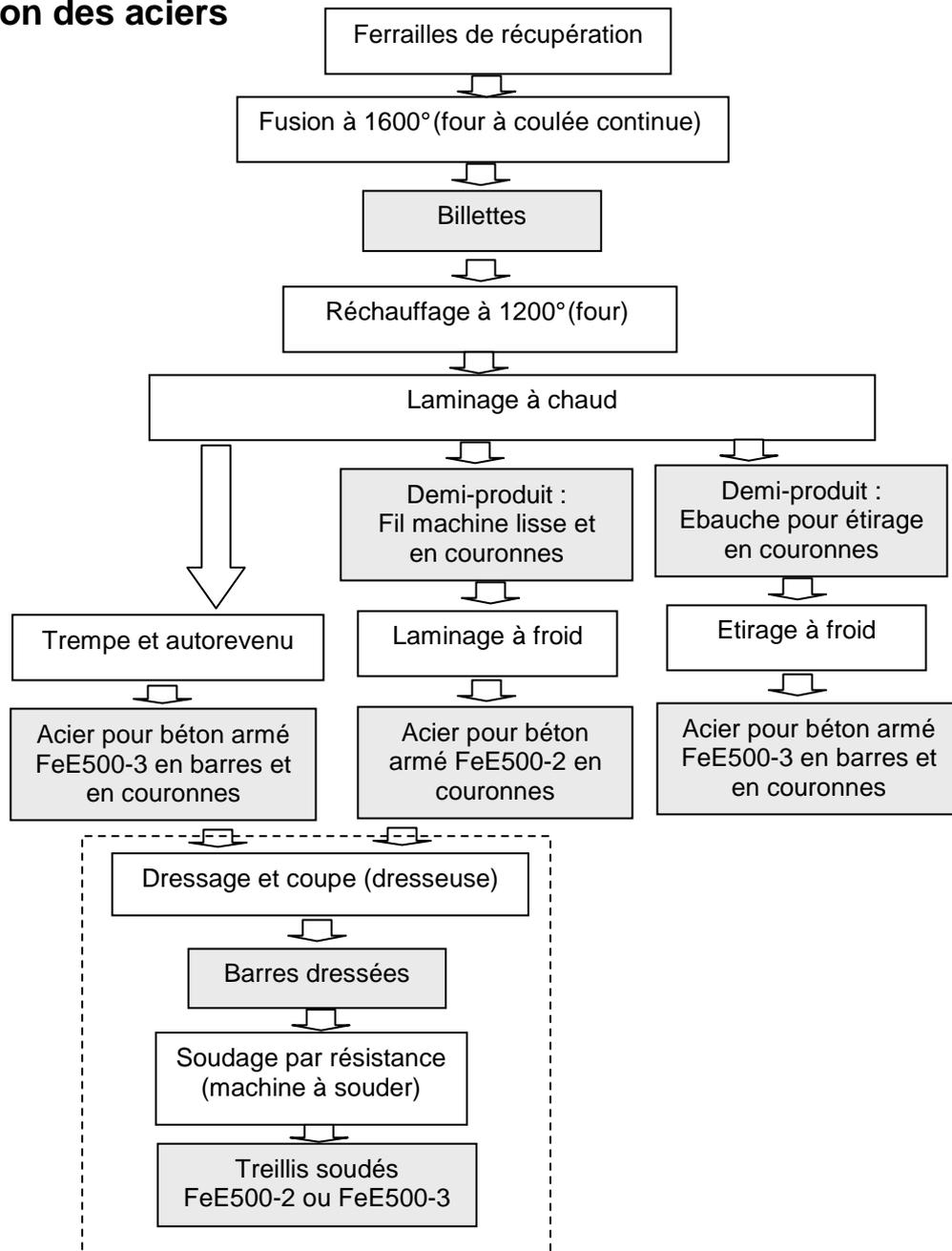
Longueur utile 2,00 mètres



Longueur utile 2,00 mètres

## Annexe 6

### Fabrication des aciers

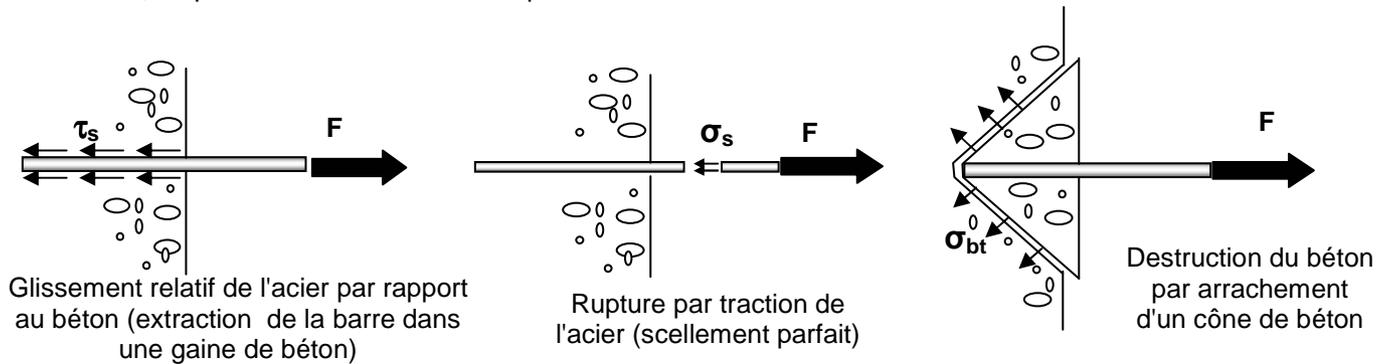


## 3. Adhérence Acier- Béton

### 3.1 Contrainte d'adhérence (A.6)

L'adhérence est un phénomène de liaison tangentielle à l'interface acier béton due au frottement et à l'arc-boutement des bielles de béton. Les règles à respecter sont relatives à l'Etat Limite Ultime.

Supposons une barre scellée dans un massif en béton. Si on exerce un effort d'arrachement suivant l'axe de la barre, on peut avoir trois modes de rupture :



**Fig.3.1 Essai d'arrachement d'une barre scellée dans un massif en béton**

Dans le premier cas l'action du béton sur l'acier peut se décomposer en :

- Un effort perpendiculaire à la barre.
- Une composante tangentielle : la contrainte d'adhérence notée  $\tau_s$ .

Dans le premier cas, si l'on suppose une répartition uniforme des contraintes tangente  $\tau_s$  le long de la barre, l'équation d'équilibre s'écrit :  $F = \tau_s \cdot \pi \cdot \Phi \cdot L$

La valeur limite ultime réglementaire de la contrainte d'adhérence est notée  $\tau_{su}$  et vaut d'après le BAEL 91 A 6.1,21

**$\tau_{su} = 0,6 \cdot \Psi_s^2 \cdot f_{tj}$**       avec  $f_{ij} = 0,6 + 0,06 \cdot f_{cj}$  et  $f_{ij}$  et  $f_{cj}$  exprimés en MPa  
 $\Psi_s$  est le coefficient de scellement relatif à l'acier, selon sa nature lisse ou HA  
 $\Psi_s = 1$  pour les aciers lisse  
 $\Psi_s = 1,5$  pour les aciers HA

*Exemple:*

Pour une barre HA dans du béton de  $f_{c28} = 25$  MPa, calculer  $\tau_{su}$ .

$f_{ij} = 0,6 + 0,06 \times 25 = 2,1$  MPa  
 $\tau_{su} = 0,6 \cdot 1,5^2 \cdot 2,1 = 2,84$  MPa

### 3.2 Longueur de scellement droit (A.6.1,221)

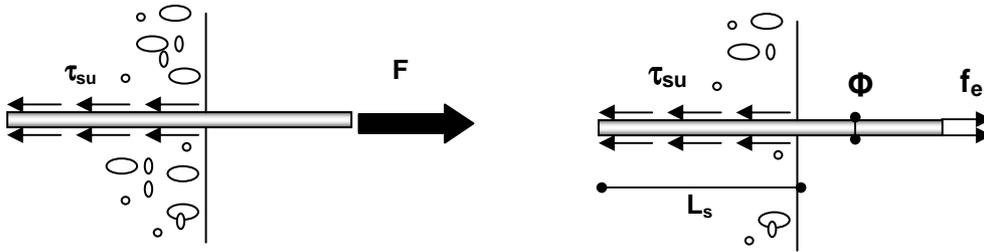


Fig.3.2 Ancrage droit et répartition des contraintes

La longueur de scellement droit, notée  $L_s$ , est la longueur sur laquelle il faut associer l'acier et le béton pour qu'à la sortie de l'ancrage, l'acier puisse travailler en traction à sa limite élastique  $f_e$ .

L'effort de traction dans la barre en traction simple est :

$$F = \text{section} \times \text{contrainte} = [\pi \cdot \Phi^2 / 4] \cdot f_e$$

Les contraintes d'adhérence supposées maximum et constantes le long de la barre ont pour résultante :

$$F = \pi \cdot \Phi \cdot L_s \cdot \tau_{su}$$

L'équilibre de la barre se traduit par

$$\pi \cdot \Phi \cdot L_s \cdot \tau_{su} = [\pi \cdot \Phi^2 / 4] \cdot f_e$$

$$\text{Soit } L_s = \Phi f_e / 4\tau_{su}$$

#### Exemple :

Calculer la longueur de scellement droit d'une barre HA de limite élastique  $f_e = 500 \text{ MPa}$  dans un béton de résistance  $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ .

Pour une barre HA dans un tel béton  $\tau_{su} = 2,84 \text{ MPa}$  d'où

$$L_s = \Phi \cdot 500 / 4 \cdot 2,84 = 44\Phi$$

Soit pour une barre HA20, un scellement de 88cm

$L_s = 50\Phi$  est une valeur forfaitaire adoptée généralement pour les aciers HA à défaut de calculs plus précis (A.6.1,221)

#### Longueur de scellement droit dans le cas de PAQUET de BARRES

Une barre doit toujours être ancrée individuellement (A 6.1.21)

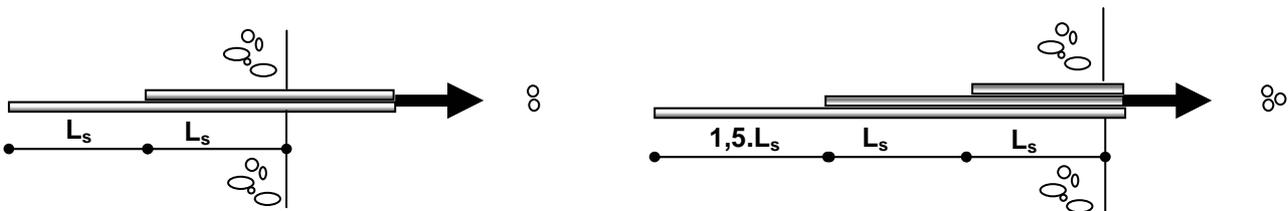


Fig.3.3 Disposition d'ancrage droit dans le cas de paquet de 2 ou 3 barres

### 3.3. Longueur de recouvrement des armatures tendues (A.6.1,223)

Dans certains cas, pour assurer la continuité de la transmission des efforts, il faut réaliser une jonction par recouvrement entre deux barres identiques sur une certaine longueur appelée "longueur de recouvrement" et notée " $L_r$ ".

Si les barres sont espacées d'une distance «  $c$  » inférieure à 5 fois leur diamètre, la longueur de recouvrement est égale à la longueur de scellement droit.

- $L_r$  longueur de recouvrement
- $L_s$  longueur de scellement droit
- Si  $c < 5\Phi$   $L_r = L_s$
- Si  $c > 5\Phi$   $L_r = L_s + c$

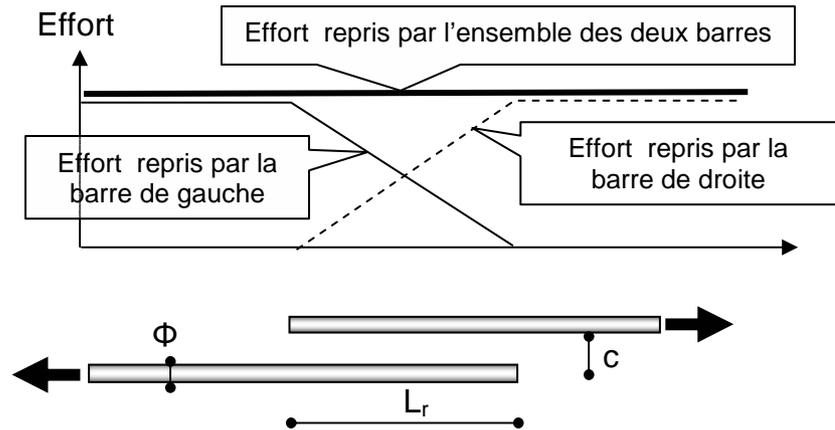


Fig 3.4 Recouvrement de barres

Si les barres sont espacées de plus de 5 fois leur diamètre, la transmission de l'effort d'une barre à l'autre se fait à travers des bielles de béton à 45° situées dans le plan des deux barres. La longueur de recouvrement est égale à la longueur de scellement droit plus la distance " $c$ " entre les deux barres :  $L_r = L_s + c$

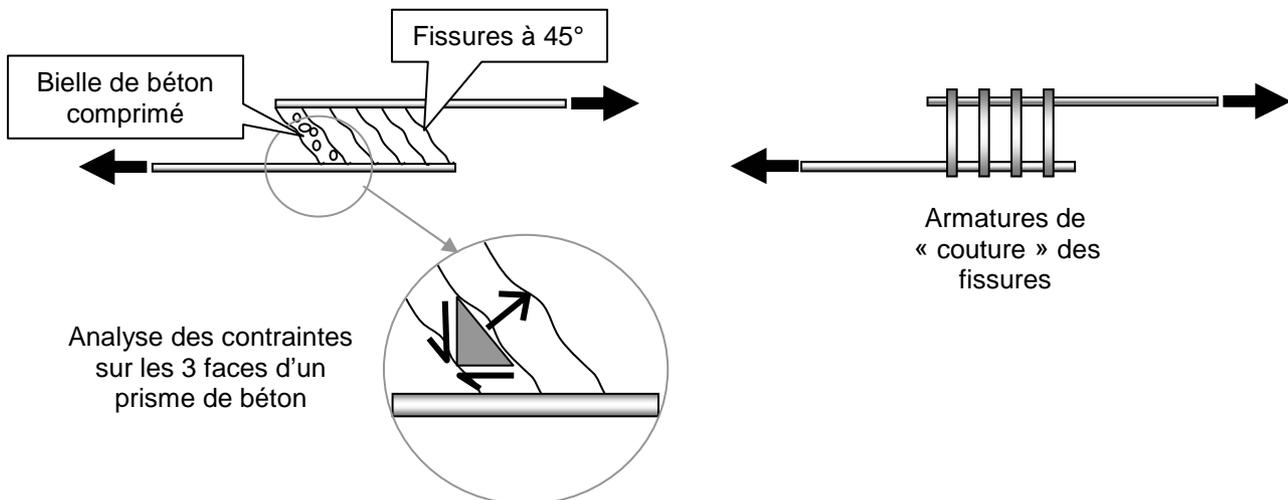


Fig.3.5 « Couture » des fissures dans le cas de barres espacées

L'équilibre d'un prisme de béton à 3 faces montre qu'il y a un effort de cisaillement longitudinalement. Que cet effort est à l'origine de traction à 45°, et donc d'une distribution de bielle de béton comprimé à 45° qu'il faut coudre entre elles par des armatures capables de résister à un effort  $F$  (A.6.1,23).

Exception : pas de couture dans les poutres si l'on recouvre moins d'un quart des aciers sur la longueur de scellement droit et si la longueur d'ancrage est égale à  $L_s$ .

## Ancrage des treillis soudés à haute adhérence

La longueur de l'ancrage rectiligne d'un treillis soudé constitué de fils ou de barres HA s'obtient soit par calcul de la longueur de scellement droit soit en considérant l'"obstacle" des fils transversaux. Chaque soudure peut équilibrer un effort égal au plus au tiers de l'effort maximal de calcul s'exerçant sur un fil porteur et à la moitié pour un fil de répartition. L'ancrage total rectiligne est donc assuré par trois soudures pour un fil porteur et deux soudures pour un fil de répartition

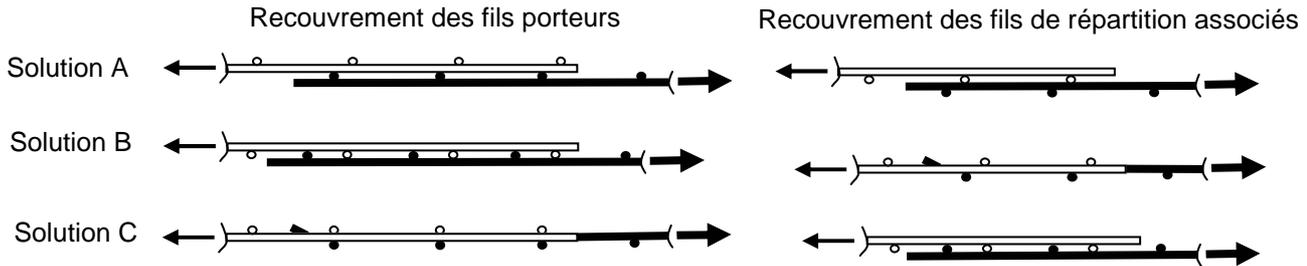
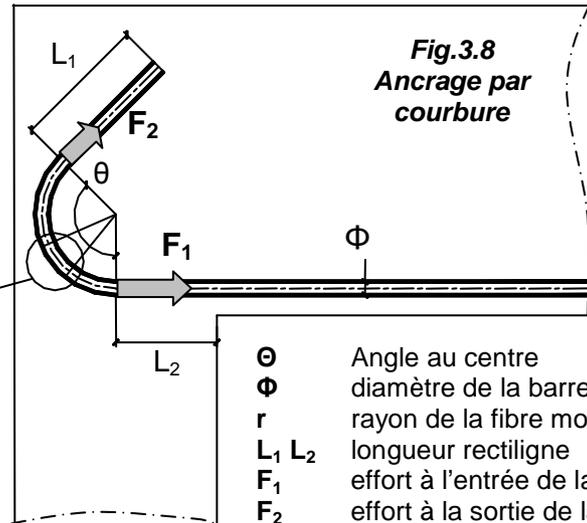
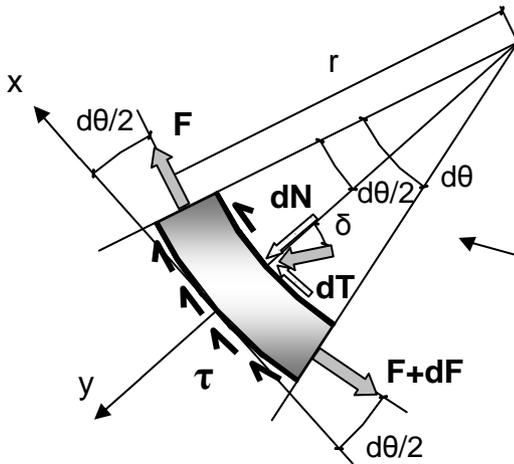


Fig. 3.6 Recouvrement des panneaux de treillis soudés

## 3.4 Ancrage par courbure (A.6.1,25)

Si on exerce un effort de traction sur un élément de barre courbe scellé dans le béton, la courbure de la barre donne naissance à un effort de frottement, fonction de la courbure de la barre et du coefficient de frottement acier sur béton, pris égal à 0,4. Cet effet est connu sous le nom "d'effet de courroie".

Fig.3.7 Equilibre d'un petit élément



$\theta$	Angle au centre
$\phi$	diamètre de la barre
$r$	rayon de la fibre moyenne
$L_1$ $L_2$	longueur rectiligne
$F_1$	effort à l'entrée de la courbure
$F_2$	effort à la sortie de la courbure
$\tau$	contrainte d'adhérence

Si l'on isole un petit élément (voir Fig.3.6 et 3.7), le bilan des actions qu'il subit est le suivant:

<b>F+dF</b>	un effort axial de traction
<b>F</b>	un effort axial de traction
<b>dN et dT</b>	les composantes normale et tangente de l'action de contact du béton sur l'acier, inclinée de $\delta$ tel que $\text{tg } \delta = 0,4 = dT/dN$
<b><math>\pi \cdot \phi \cdot r \cdot d\theta \cdot \tau_{su}</math></b>	l'effet d'adhérence acier – béton, de contrainte $\tau_{su}$ et qui s'exerce le long de l'élément sur une aire égale à $\pi \cdot \phi \cdot r \cdot d\theta$

L'équilibre du petit élément donne le système d'équation suivant:

$$\begin{aligned} \text{Equilibre sur X} & \quad \pi \cdot \phi \cdot r \cdot d\theta \cdot \tau_{su} + 0,4 \cdot dN + F \cdot \cos d\theta/2 - (F+dF) \cdot \cos d\theta/2 = 0 \\ \text{Equilibre sur Y} & \quad dN - F \cdot \sin d\theta/2 - (F+dF) \cdot \sin d\theta/2 = 0 \end{aligned}$$

$d\theta$  étant très petit, les cosinus sont approximés à 1 et les sinus à la valeur de l'angle en radian, d'où

$$\pi \cdot \Phi \cdot r \cdot d\theta \cdot \tau_{su} + 0,4 \cdot dN + F - (F+dF) = 0$$

$$dN - F \cdot d\theta/2 - (F+dF) \cdot d\theta/2 = 0$$

$dF \cdot d\theta$  est un infiniment petit du second ordre que l'on néglige devant les autres termes, d'où

$$\pi \cdot \Phi \cdot r \cdot d\theta \cdot \tau_{su} + 0,4 \cdot dN = dF$$

$$dN - F \cdot d\theta = 0$$

Soit

$$dN = F d\theta$$

$$\pi \cdot \Phi \cdot r \cdot d\theta \cdot \tau_{su} + 0,4 \cdot F d\theta = dF$$

$$dF/d\theta - 0,4F = \pi \cdot \Phi \cdot r \cdot \tau_{su}$$

Equation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre dont les conditions aux limites sont  $F=F_1$  à l'entrée de la courbure et  $F=F_2$  à la sortie de la courbure. La solution de cette équation est:

$$F_2 = F_1 \cdot e^{-0,4\theta} - \pi \cdot \Phi \cdot r \cdot \tau_{su} [1 - e^{-0,4\theta}]/0,4 \quad \text{avec}$$

- $F_2$  effort de traction à la sortie de l'ancrage courbe
- $F_1$  effort de traction à l'entrée de l'ancrage courbe
- $\theta$  angle au centre de la zone courbe de l'effort
- $r$  rayon de courbure à l'axe de la barre
- $\Phi$  diamètre de la barre
- $\tau_{su}$  contrainte d'adhérence acier-béton à l'ELU

Pour les valeurs courantes de  $\theta$  on donne les valeurs suivantes :

$\theta$	90°	120°	135°	180°
	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$\pi$
$e^{-0,4\theta}$	0,53	0,43	0,39	0,28
$(1 - e^{-0,4\theta})/0,4$	1,17	1,42	1,53	1,79

### Application: Crochet à 135°

Déterminer la longueur droite CD pour que la barre soit totalement ancrée au point A

$\theta = 135^\circ$ ;  $r = 5,5$ .  $\Phi$ , Barre HA16,  $AB = 6\text{cm}$

$f_e = 500\text{ MPa}$ ;  $f_{c28} = 25\text{ MPa}$ ;  $\tau_{su} = 2,84\text{ MPa}$

#### Solution :

Il y aura ancrage total si en A l'acier travaille en traction à  $f_e$ .

L'effort à reprendre sera donc de

$$F_A = [\pi \cdot \Phi^2/4] \cdot f_e = \pi \cdot 0,016^2 \cdot 500/4 = 0,100\text{ MN}$$

L'effort en B sera plus faible du fait de l'adhérence le long de AB

$$F_B = F_A - \pi \cdot \Phi \cdot L_{AB} \cdot \tau_{su} = 0,100 - \pi \cdot 0,016 \cdot 0,06 \cdot 2,84 = 0,092\text{ MN}$$

L'effort en C est déterminé par l'équation de l'ancrage courbe

$$F_C = F_B \cdot e^{-0,4\theta} - \pi \cdot \Phi \cdot r \cdot \tau_{su} [1 - e^{-0,4\theta}]/0,4 = 0,092 \cdot 0,39 - \pi \cdot 0,016 \cdot 5,5 \cdot 0,016 \cdot 2,84 \cdot 1,53 = 0,0166\text{ MN}$$

La longueur droite CD doit donc permettre d'ancrer cet effort

$$\pi \cdot \Phi \cdot L_{CD} \cdot \tau_{su} = \pi \cdot 0,016 \cdot L_{CD} \cdot 2,84 = 0,0166 \quad \text{soit} \quad L_{CD} = 0,12\text{ m} = 12\text{ cm}$$

La longueur développée de l'ancrage courbe est  $6 + 5,5 \cdot 1,6 \cdot 3 \cdot \pi/4 + 12 = 39\text{ cm}$

A comparer à la longueur nécessaire à un scellement droit  $44 \Phi = 44 \cdot 1,6 = 70\text{ cm}$ . Cette économie est due à l'effet de courroie.

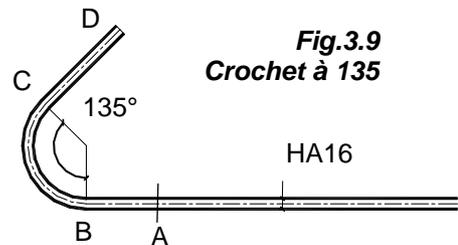


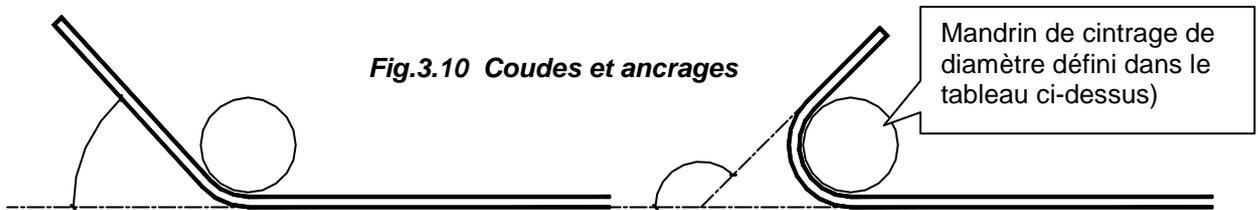
Fig.3.9  
Crochet à 135

## Rayons de courbure minimaux. (A.6.1,251)

Le rayon de courbure des ancrages courbes ne doit pas être inférieur à une valeur minimum pour deux raisons : d'une part ne pas avoir un allongement plastique trop important de la fibre la plus tendue de l'acier et d'autre part limiter la compression sur le béton dans la partie intérieure du crochet (composante dN précédente).

## Valeurs des diamètres minimaux des mandrins de façonnage

HA	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20	25	32	40
<b>Cadre, étriers, épingles</b>	20	20	30	30	30	40	40	50	70	100	150	Sans objet		
<b>Ancrages</b>	40	50	70	70	70	100	100	100	150	150	200	250	300	400
<b>Coudes</b>	Sans objet						150	200	200	250	300	400	500	500



**Fig.3.10 Coudes et ancrages**

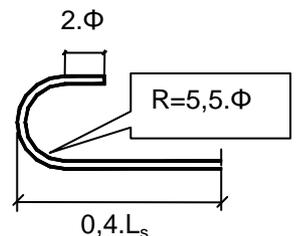
**Coudes** = Façonnage en partie courante d'un élément d'armature permettant la transmission intégrale de l'effort de traction entre les deux parties droites adjacentes

**Ancrage** : Extrémité d'un élément d'armature comportant un façonnage prolongé d'une partie droite de longueur réglementaire et dans laquelle l'effort de traction décroît progressivement

Les angles courants sont 90° (crochet dit à retour d'équerre), 120°, 135° et 180°

Il existe ce que l'on appelle le crochet normal qui par définition comporte une partie en demi-cercle suivie d'un retour rectiligne d'une longueur égale à deux fois le diamètre de la barre (voir Fig.3.9). A défaut de calculs plus précis, on peut admettre que l'ancrage d'une barre rectiligne terminée par un crochet normal est assuré lorsque la longueur de la partie ancrée, mesurée hors crochet est au moins égale à :

- 0,6.L<sub>s</sub> pour une barre lisse de classe Fe E 215 ou 235
- 0,4.L<sub>s</sub> pour une barre à haute adhérence de classe Fe E 500



**Fig.3.11 Le crochet normal**

L'encombrement d'un ancrage à 180° pour une barre HA 20 en Fe E 500 est : 0,4 . 50 . 2 = 40 cm.

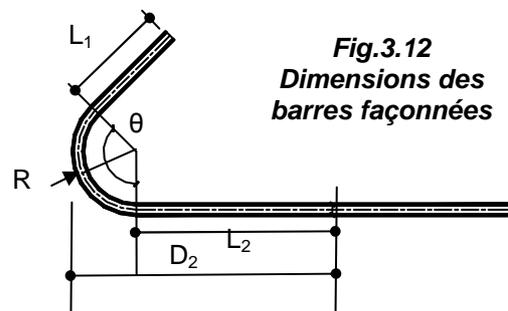
## Dimensions des barres façonnées.

Rayon de courbure à l'axe de la barre : R  
Longueur développée de l'ancrage (θ en rad)

$$L_d = L_1 + R \cdot \theta + L_2$$

Longueur d'appui

$$D_2 = L_2 + R + \Phi/2$$



**Fig.3.12 Dimensions des barres façonnées**

### Ancrage des Cadres, Etriers, Epingles (A.6.1,255)

On admet que les ancrages des extrémités de barres façonnées en cadres, étriers, épingles sont assurés par courbure suivant le rayon minimal, si les parties courbes sont prolongées par des parties rectilignes au moins égales à:

- 5.  $\Phi$  à la suite d'un arc de 180°
- 10.  $\Phi$  à la suite d'un arc de 135°
- 15.  $\Phi$  à la suite d'un arc de 90°

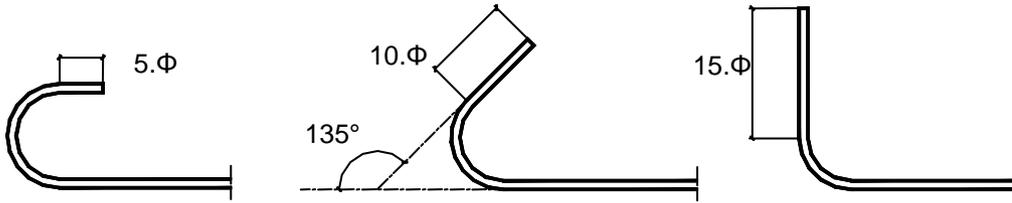


Fig.3.13 Ancrage des aciers transversaux

### 3.5. Cas des constructions en zone sismique

PS92 art.11.312

*L'emploi de coudes ou crochets dans les pièces comprimées ou les parties comprimées des pièces fléchies est interdit. Toutefois en cas de nécessité (liaison avec une semelle de fondation, voisinage d'une surface libre, etc.), les ancrages d'extrémité peuvent être assurés au moyen de coudes à 90°.*

PS92, art 11.313

*Toutes les longueurs de recouvrement ou d'ancrage sont à majorer de 30% pour la part située hors zone critique et de 50% pour la part située dans la zone critique.*

Rq : Les zones critiques sont le plus souvent les zones près des appuis (voir détails dans PS92).

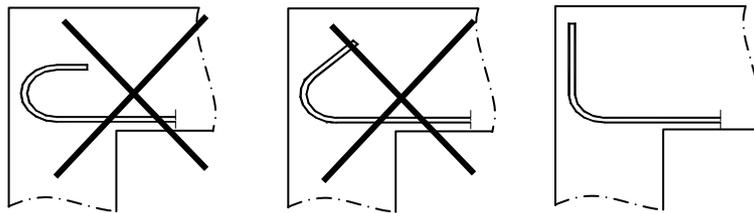


Fig 3.14 Ancrages en zone sismique

### 3.6. Problème de mise en oeuvre



Ancrage difficile...



Enrobage et adhérence très difficile...



Images Victor Davidovici

## 3.7. Applications

### 1. Ferrailage d'un tirant

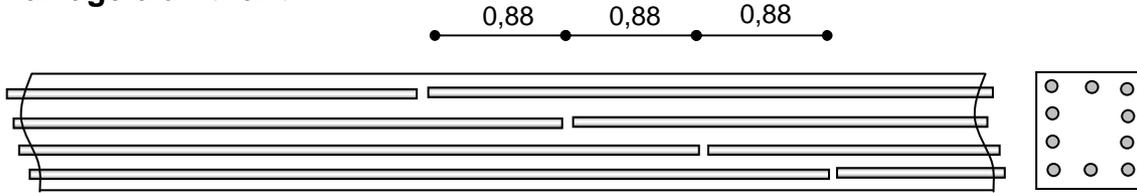


Fig 3.15 Tirant

Cette section de béton ( $f_{c28} = 25\text{MPa}$ ) est ferrillée par 10 barres HA20 disposées comme indiqué sur le schéma. Justifier qu'elle est capable de résister à un effort de traction de

$$9 \cdot [\pi \cdot \Phi^2 / 4] \cdot f_e / \gamma_s = 9 \times \pi \cdot 0,02^2 / 4 \cdot 500 / 1,15 = 1,23\text{MN}$$

#### Solution :

A la traction seul l'acier travaille. A la jonction des barres disposées bout à bout, l'effort transite d'une barre à sa voisine sur une longueur de recouvrement. Les recouvrements sont décalés, pour que dans une section donnée de l'élément il n'y ait qu'un « recouvrement ». Le recouvrement est bien de 44 fois le diamètre de la barre. Il y a donc dans chaque section de l'élément toujours l'équivalent de 9 barres qui travaillent.

### 2. Chercher la longueur minimum d'encombrement du crochet 180° équivalent à un scellement droit.

Barre HA et  $f_{c28} = 25\text{MPa}$ .

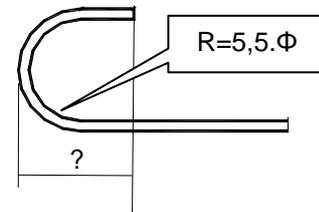


Fig 3.16 Ancrage à 180°

#### Solution :

Contrainte de scellement droit

$$\tau_{su} = 0,6 \cdot 1,5^2 \cdot (0,6 + 0,06 \times 25) = 2,84 \text{ MPa}$$

Efforts au point A, B, C et D :

$$F_D = 0 \quad (\text{extrémité libre de la barre})$$

$$F_C = \pi \cdot \Phi \cdot X \cdot \tau_{su} \quad (\text{ancrage droit entre D et C})$$

$$F_A = [\pi \cdot \Phi^2 / 4] \cdot f_e \quad (\text{effort de traction = section} \times \text{contrainte})$$

$$F_B = F_A - \pi \cdot \Phi \cdot X \cdot \tau_{su} \quad (\text{ancrage droit entre A et B})$$

Relation entre l'effort à la sortie et l'effort à l'entrée de la courbure:

$$F_C = F_B \cdot e^{-0,4\theta} - \pi \cdot \Phi \cdot r \cdot \tau_{su} [1 - e^{-0,4\theta}] / 0,4$$

$$F_C = F_B \cdot 0,28 - \pi \cdot \Phi \cdot r \cdot \tau_{su} \cdot 1,79$$

$$\pi \cdot \Phi \cdot X \cdot \tau_{su} = 0,28 \cdot (\pi \cdot \Phi^2 / 4) \cdot f_e - \pi \cdot \Phi \cdot X \cdot \tau_{su} - \pi \cdot \Phi \cdot 5,5\Phi \cdot \tau_{su} \cdot 1,79$$

$$\pi \cdot \Phi \cdot X \cdot 2,84 = 0,28 \cdot \pi \cdot \Phi^2 \cdot 500 / 4 - 0,28 \cdot \pi \cdot \Phi \cdot X \cdot 2,84 - \pi \cdot \Phi \cdot 5,5\Phi \cdot 2,84 \cdot 1,79$$

en simplifiant par  $\pi \cdot \Phi$

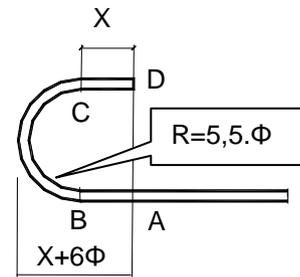
$$X \cdot 2,84 = 0,28 \cdot \Phi \cdot 500 / 4 - 0,28 \cdot X \cdot 2,84 - 5,5\Phi \cdot 2,84 \cdot 1,79$$

$$X (2,84 + 0,28 \cdot 2,84) = 0,28 \cdot \Phi \cdot 500 / 4 - 5,5\Phi \cdot 2,84 \cdot 1,79$$

$$X = 2\Phi$$

$$\text{Encombrement} = (6+2) \cdot \Phi = 8\Phi$$

$$\text{Longueur développée} = (2+2+5,5\pi) \cdot \Phi = 21\Phi < 44\Phi$$



### 3. Scellement d'une barre à la résine

On veut sceller une barre HA32 dans un massif en béton tel que  $f_{c28} = 25\text{MPa}$ . Pour cela on fore avec une caroteuse un trou de diamètre 40mm et de profondeur 30cm. La barre y est ensuite scellée avec de la résine. Le fournisseur de la résine indique qu'à l'état limite ultime la contrainte d'adhérence entre l'acier à haute adhérence et la résine est de 5MPa et entre la résine et ce béton de 3MPa.

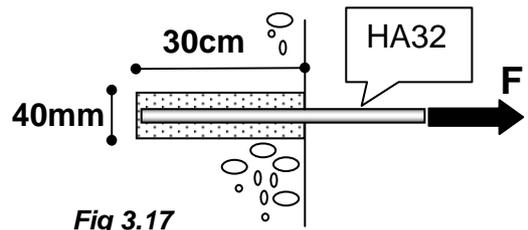


Fig 3.17

Fig.3.18 Photo d'une caroteuse



Quels sont les différents modes de rupture possible ? Déterminer la force maximum applicable à la barre.

Solution :

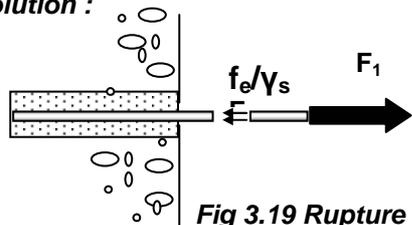


Fig 3.19 Rupture de l'acier

Rupture par traction de l'acier.

L'équilibre de la barre s'écrit :

$$F_1 = [\pi \cdot \Phi^2 / 4] \cdot f_e / \gamma_s$$

$$F_1 = [\pi \cdot 0,032^2 / 4] \cdot 500 / 1,15 = 0,350 \text{ MN}$$

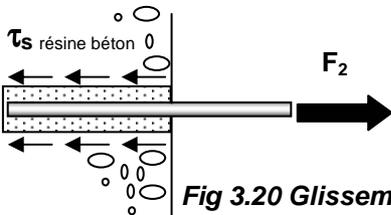


Fig 3.20 Glissement béton- résine

Glissement relatif de la résine par rapport au béton.

Equation d'équilibre

$$F_2 = \pi \cdot \Phi_{résine} \cdot L \cdot \tau_{SU \text{ résine béton}}$$

$$F_2 = \pi \cdot 0,040 \cdot 0,30 \cdot 3 = 0,113 \text{ MN}$$

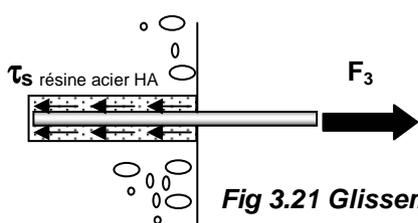


Fig 3.21 Glissement acier - résine

Glissement relatif de l'acier par rapport au béton.

Equation d'équilibre

$$F_3 = \pi \cdot \Phi_{acier} \cdot L \cdot \tau_{SU \text{ acier résine}}$$

$$F_3 = \pi \cdot 0,032 \cdot 0,30 \cdot 5 = 0,151 \text{ MN}$$

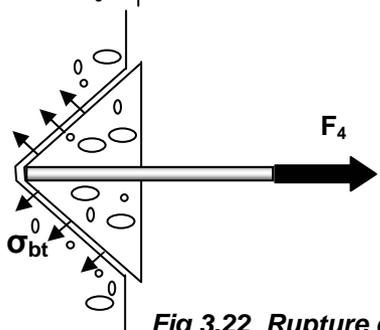


Fig 3.22 Rupture du béton

Destruction du béton par arrachement d'un cône de béton.

$F_4 = \text{surface du cône} \times \text{projection horizontale de } \sigma_{bt}$

D'après le cours la fissure est à 45°

$$F_4 = 2^{1/2} \cdot \pi \cdot 0,3^2 \cdot [2,1/1,5] \cdot [2^{1/2}/2] = 0,396 \text{ MN}$$

Remarque : Surface d'un cône à 45° de rayon  $R = 2^{1/2} \cdot \pi \cdot R^2$

#### 4. Appui d'about de poutre

Sachant que le poteau fait une largeur de 30cm, et que chaque barre HA20 arrivant sur l'appui doit y ancrer un effort de 100kN, et que le béton est tel que  $f_{c28}=30\text{MPa}$ , l'ancrage droit est-il satisfaisant ?

**Solution :**

$$f_{ij} = 0,6 + 0,06 \cdot f_{cj} = 0,6 + 0,06 \cdot 30 = 2,4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{su} = 0,6 \cdot \psi_s^2 \cdot f_{ij} = 0,6 \cdot 1,5^2 \cdot 2,4 = 3,24 \text{ MPa}$$

Soit  $L$  la longueur nécessaire pour ancrer 0,100MN

$$F = \pi \cdot \Phi \cdot L \cdot \tau_{su}$$

$$0,100 = \pi \cdot 0,02 \cdot L \cdot 3,24$$

$$L = 0,49\text{m} > 0,30 - 0,03 \text{ donc un ancrage courbe est nécessaire}$$

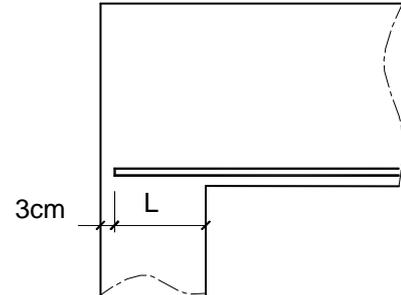


Fig 3.23 Appui d'about de poutre

#### 5. QCM

• La longueur développée d'un ancrage courbe qui assure un ancrage total est comparativement à la longueur de scellement droit:

- Supérieur  Inférieur  Egale

• Le diamètre du mandrin de façonnage est supérieur à une valeur minimum pour :

- limiter le risque de fissuration de l'acier   
 - limiter la déformation plastique de l'acier   
 - limiter la compression du béton dans la courbure de la barre

• L'ordre de grandeur de la longueur de scellement droit d'une barre de diamètre 20mm est :

- 10cm  50cm  1m  2m

• La valeur ultime de la contrainte d'adhérence réglementaire dépend de :

- La nature lisse ou HA de l'acier   
 La résistance du béton en traction   
 La limite élastique de l'acier

• Pour assurer la continuité mécanique du ferrailage ci-dessous, on peut 'recouvrir' les barres sur un longueur de :

- $L_1 < L_{\text{scellement droit}}$    
 $L_1 = L_{\text{scellement droit}}$    
 $L_1 = 2 \cdot L_{\text{scellement droit}}$

- $L_2 < L_{\text{scellement droit}}$    
 $L_2 = L_{\text{scellement droit}}$    
 $L_2 = 2 \cdot L_{\text{scellement droit}}$

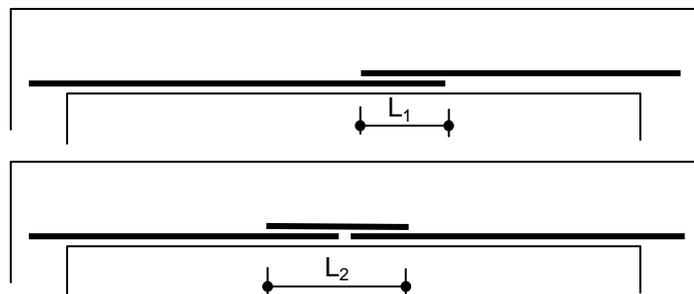


Fig 3.24 Recouvrement de barres

## 6. Abou Simbel. Egypte

Dans les années 60 le déplacement du temple d'Abou Simbel en haute Egypte nécessita le démontage et remontage d'éléments en grés. Le risque d'endommagement du parement n'a pas permis le soulèvement des blocs avec des sangles (voir fig. Solution A). Il est alors envisagé de forer le grés à un diamètre légèrement supérieur à celui d'une barre de scellement à haute adhérence (acier cranté). Puis de sceller la barre avec de la résine. Des essais sur la résine ont permis de définir les valeurs de contrainte limite d'adhérence à l'état limite ultime suivantes :

- entre l'acier à haute adhérence et la résine : 4 MPa
- entre le grés et la résine : 2,5 MPa

Autres données du problème :

- Volume du bloc : 6,5 m<sup>3</sup>
- Masse volumique du grés : 2 tonnes par m<sup>3</sup>
- Diamètre de la barre en acier : 40mm
- Diamètre du trou : 50mm
- Longueur du scellement : 50 cm
- Limite élastique de l'acier : 400 MPa (valeur courante dans les années 60)



Fig 3.24 Abou Simbel Egypte

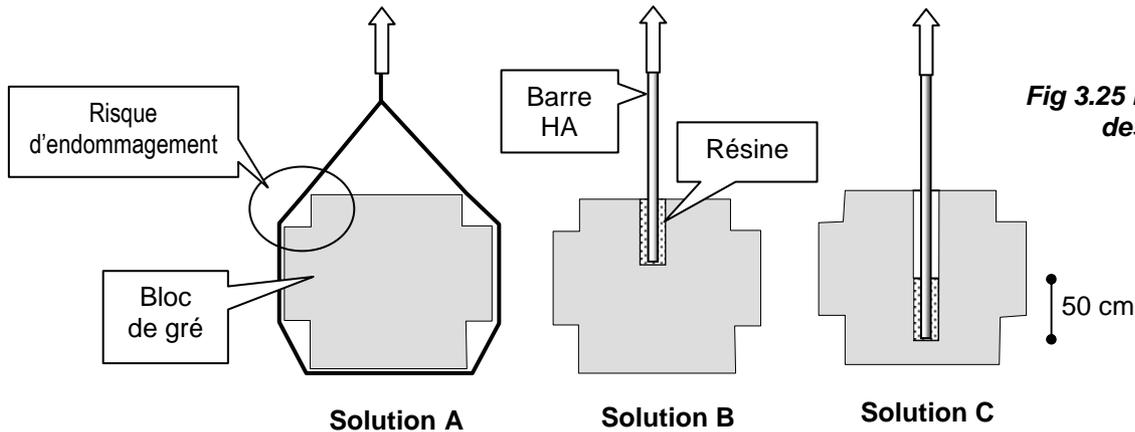


Fig 3.25 Déplacement des blocs

1. Expliquer pourquoi la faible résistance du grés en traction ne permet pas de retenir la solution B.

La solution C, finalement adoptée, consiste à forer un trou sur pratiquement toute la hauteur du bloc et de ne sceller la barre que sur les 50 premiers cm au fond du trou.

2. Vérifier que l'on peut ainsi effectivement soulever le bloc, en prenant un coefficient de sécurité de 1,5 sur la charge et 1,15 sur la limite élastique de l'acier (les coefficients de sécurité sur l'adhérence étant déjà intégrés dans les valeurs 1,5 et 5 MPa).

### Solutions :

1. Il peut y avoir arrachement d'un cône de béton (voir figure ci contre)).

### 2. Vérification

Poids du bloc de béton

$$1,5 \times \text{Poids du bloc} = 1,5 \cdot 6,5 \cdot 2000 \cdot 9,81 \cdot 10^{-6} = \mathbf{0,191 \text{ MN}}$$

Effort maximum de traction dans la barre

$$F_1 = [\pi \cdot \Phi^2 / 4] \cdot f_{e, \gamma_s} = [\pi \cdot 0,04^2 / 4] \cdot 400 / 1,15 = \mathbf{0,437 \text{ MN}}$$

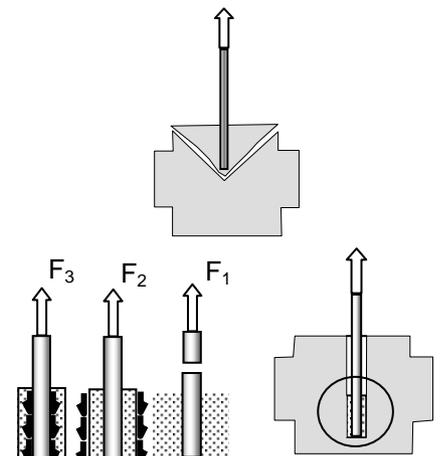
Glissement entre résine et béton

$$F_2 = \pi \cdot \Phi_{résine} \cdot L \cdot \tau_{SU \text{ résine béton}} = \pi \cdot 0,050 \cdot 0,5 \cdot 2,5 = \mathbf{0,196 \text{ MN}}$$

Glissement entre acier et béton

$$F_3 = \pi \cdot \Phi_{acier} \cdot L \cdot \tau_{SU \text{ acier béton}} = \pi \cdot 0,04 \cdot 0,50 \cdot 4 = \mathbf{0,251 \text{ MN}}$$

On vérifie que 0,191 est inférieur à la plus petite des 3 valeurs  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$



# 4. Calcul des Aciers Longitudinaux à l'ELU en Flexion Simple

## 4.1 Hypothèses de calcul (A.4.3,2)

Nous nous intéresserons à une poutre de section rectangulaire, sollicitée en flexion simple et à l'ELU. L'ELU est dans notre cas, l'état limite ultime de résistance des matériaux acier et béton.

1. Hypothèse de **Navier-Bernoulli** (les sections droites restent planes pendant la déformation)
2. **Pas de glissement relatif** entre acier et béton
3. **Résistance du béton en traction** négligée
4. **Diagramme contrainte -déformation du béton** (A.4.3,41)

La limite de la résistance des matériaux est déterminée à partir d'un critère de ruine minorée par des coefficients de sécurité  $\gamma_s$  pour l'acier et  $\gamma_b$  pour le béton.

$f_{bu} = 0,85.f_{cj}/(\theta.\gamma_b)$ . L'origine de  $\gamma_b$  vient des dispersions des résistances réelles par rapport à  $f_{cj}$ , ainsi que des défauts localisés.  $\theta$  dépend de la durée d'application des charges. Lorsque celles-ci sont appliquées plus de 24h,  $\theta$  est égal à 1.

5. **Diagramme contrainte -déformation de l'acier**  
La valeur de  $E_s$  module d'élasticité longitudinale est 200000 MPa.

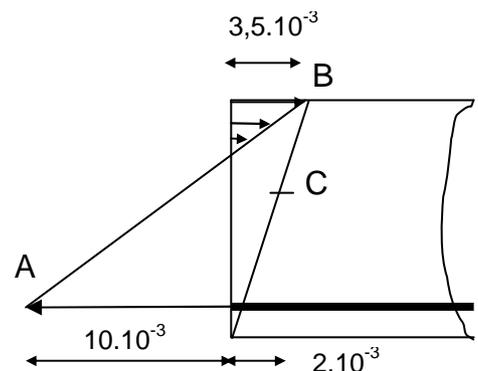
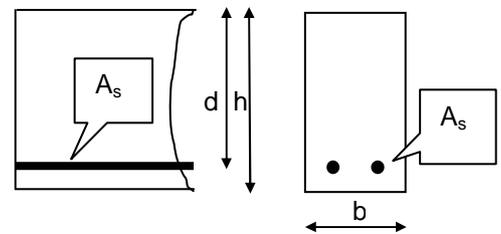
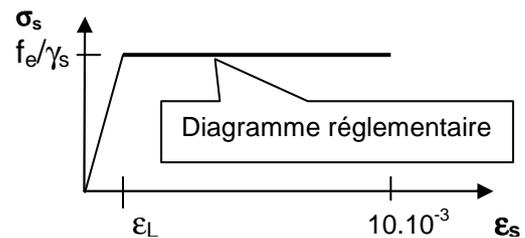
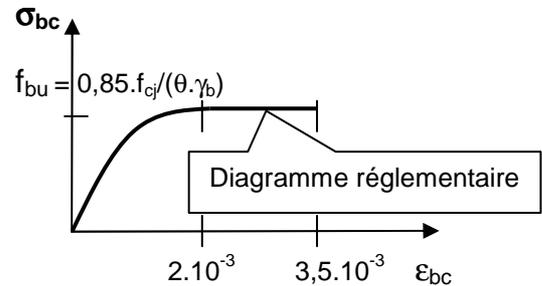
L'origine de  $\gamma_s$  est la prise en compte du mauvais positionnement des barres dans le coffrage et des dispersions possibles entre les essais de laboratoire et la réalité.

6. **Concentration de la section d'acier** au centre de gravité

7. **Diagrammes des déformations limites de la section** (A4.3,3)

Les diagrammes possibles résultent des déformations limites fixées pour le béton et l'acier, définis à partir de "3 pivots": A, B et C.

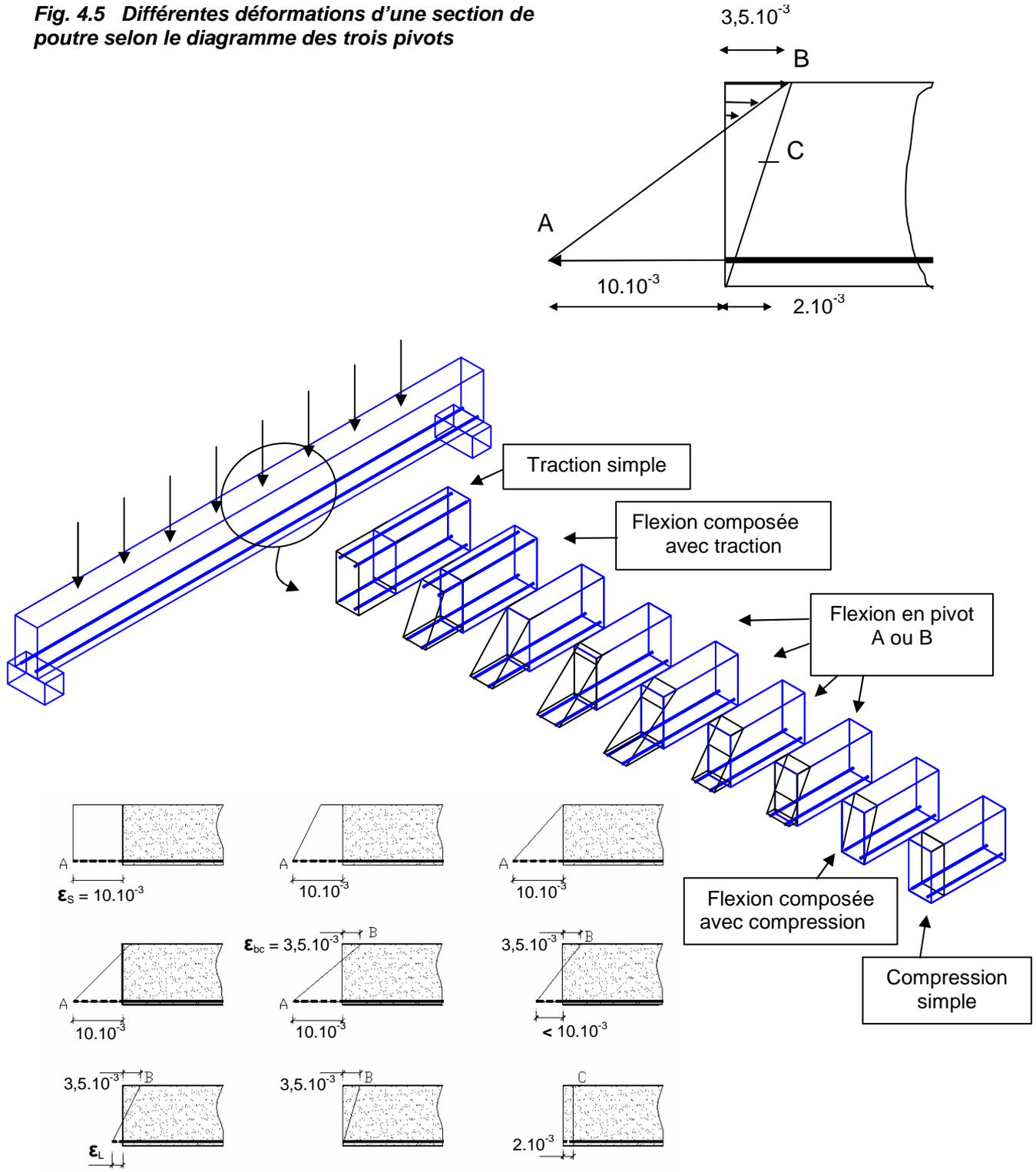
- Pivot A : Traction simple puis flexion simple ou composée
- Pivot B : Flexion simple ou composée
- Pivot C : Flexion composée avec compression puis compression simple



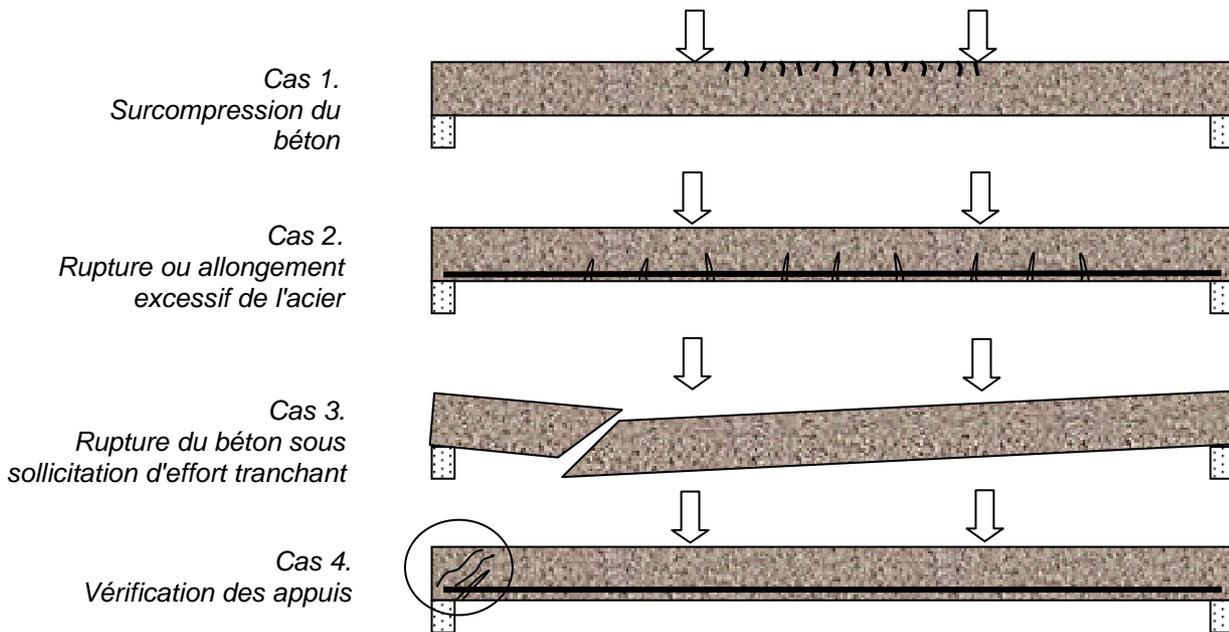
**Diagramme dit "des 3 pivots"**

**Fig 4.1 à 4.4 Hypothèses de calculs**

**Fig. 4.5** Différentes déformations d'une section de poutre selon le diagramme des trois pivots



## 4.2. Essais de poutres. Modes de rupture



**Fig.4.6 Modes de rupture d'une poutre sur 2 appuis sollicitée en flexion**

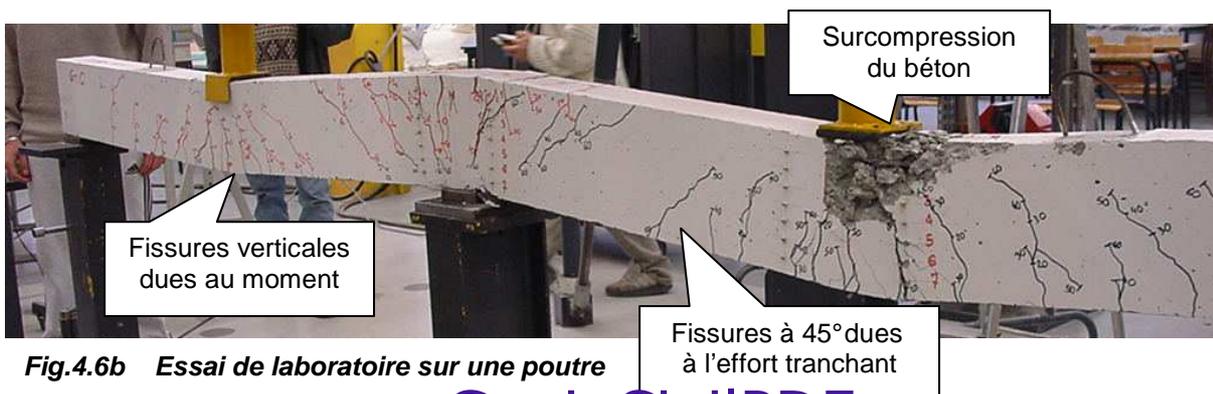
Si l'on mène des essais jusqu'à rupture de poutres armées sollicitées en flexion simple, on constate trois modes de rupture principaux. Deux sous l'effet du moment fléchissant et un sous l'effet de l'effort tranchant.

- Cas 1. C'est une rupture par excès de compression du béton sur les fibres supérieures de la poutre. C'est le cas le plus fréquent. Il y a épuisement de la résistance en compression du béton.
- Cas 2. Il s'agit d'une rupture par épuisement de la résistance de l'acier dans la partie tendue de la poutre, sur les fibres inférieures. Il y a allongement excessif de l'acier, voire rupture complète.
- Cas 3. Le 3<sup>ème</sup> mode de rupture que l'on rencontre concerne l'effet de l'effort tranchant  $V$ . C'est une rupture par cisaillement au voisinage d'un appui, avec fissure voisine de  $45^\circ$ . Ce cas sera étudié dans le chapitre 5 (Calcul des aciers transversaux)
- Cas 4. Dans le chapitre 6 seront abordés les problèmes de l'appui d'about de poutre où l'on peut avoir un ferrailage insuffisant ou insuffisamment ancré et une bielle de béton sur-comprimé

L'E.L.U est un état fictif représentatif de ces modes de rupture (critère de ruine) par rapport auxquels on prend une sécurité

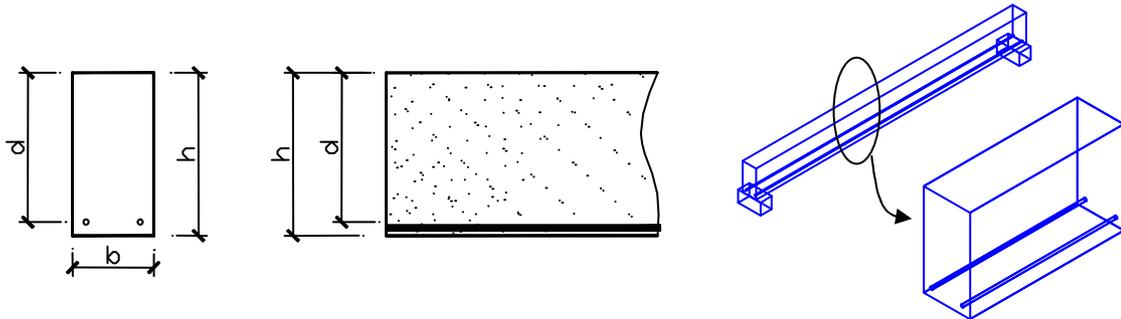
- au niveau des sollicitations par des coefficients de pondération sur les charges.
- au niveau des matériaux par les coefficients partiels de sécurité.

Si cette sécurité n'existait pas, à l'E.L.U sous l'effet des charges appliquées, la section serait théoriquement dans un état de rupture. Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons au cas de rupture 1 et 2 et nous verrons comment construire les diagrammes "Contraintes - Déformations" correspondants, pour les matériaux acier et béton.



**Fig.4.6b Essai de laboratoire sur une poutre**

## 4.3 Déformations, état de contraintes

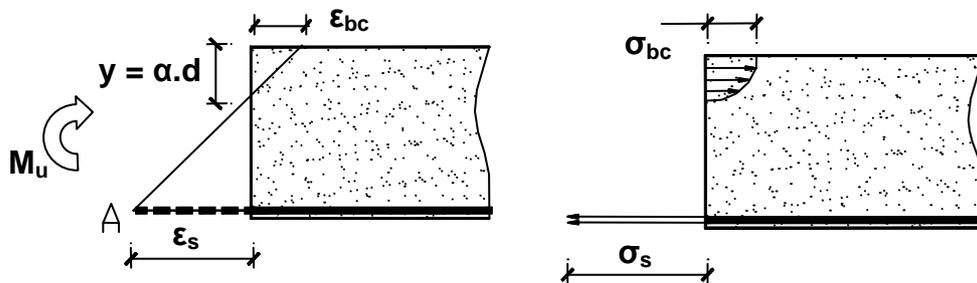


**Fig.4.7 Géométrie de la section droite**

Le long de la poutre, à l'abscisse "x", au centre de gravité d'une "coupure" plane, perpendiculaire à l'axe longitudinal de la poutre, on a évalué à partir d'une combinaison des actions (1,35.G +1,5.Q le plus souvent), un moment fléchissant ultime d'intensité  $M_u$  (exprimé en m.MN).

- b est la largeur de la section droite
- h est la hauteur de coffrage de la poutre
- d est la hauteur utile de la section droite (du CdG des aciers tendus à la fibre de béton la plus comprimé)
- $A_s$  est l'aire totale d'acier du groupe de plusieurs barres

### a. Si le moment fléchissant $M_u$ a une intensité "faible". Pivot A



**Fig.4.8 Déformée et contraintes d'une section droite**

La membrure comprimée de la poutre va subir des raccourcissements relatifs, les fibres supérieures du béton, les plus sollicitées, vont subir un raccourcissement relatif  $\epsilon_{bc}$  valant au plus  $3,5 \cdot 10^{-3}$ . La hauteur de béton comprimé vaut  $y = \alpha \cdot d$

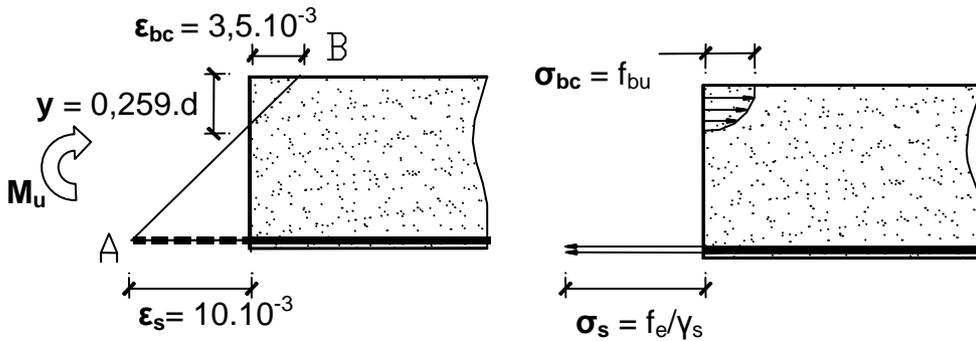
La membrure tendue de la poutre va subir des allongements relatifs. La résistance du béton à la traction étant négligée, on l'arme avec des aciers longitudinaux, de section globale  $A_s$ , qui vont donc subir un allongement relatif limité à la valeur  $10 \cdot 10^{-3}$ .

Si le béton est faiblement sollicité, il supporte des raccourcissements relatifs  $\epsilon_{bc}$  faibles et inférieurs à  $2 \cdot 10^{-3}$ . Le coefficient  $\alpha$  est donc aussi "faible". Pour déduire l'état de contrainte de la membrure comprimée du béton, il faut établir la relation déformation -contrainte. (voir "diagramme de calcul du béton").

- Au niveau de l'axe neutre, pas de déformation donc les contraintes normales sont nulles.
- Puis les raccourcissements croissent linéairement, il leur correspond donc une variation parabolique des contraintes  $\sigma_{bc}$  tant que  $\epsilon_{bc}$  est inférieur à  $2 \cdot 10^{-3}$ . Dans la membrure tendue, on souhaite disposer une section d'acier  $A_s$  minimale, il faut donc que l'acier travaille au mieux de ses possibilités. On admet qu'il subit un allongement relatif de  $10 \cdot 10^{-3}$  et que sa contrainte de traction vaut  $\sigma_s = f_e / \gamma_s$

Si l'on fait croître l'intensité de  $M_u$ , la hauteur de béton comprimé croît, le raccourcissement relatif du béton croît, le diagramme des contraintes de compression du béton devient "parabole -rectangle". La contrainte maximum plafonne à la valeur  $f_{bu}$ .

**b. Cas particulier : La droite des déformations passe par les pivots A et B**



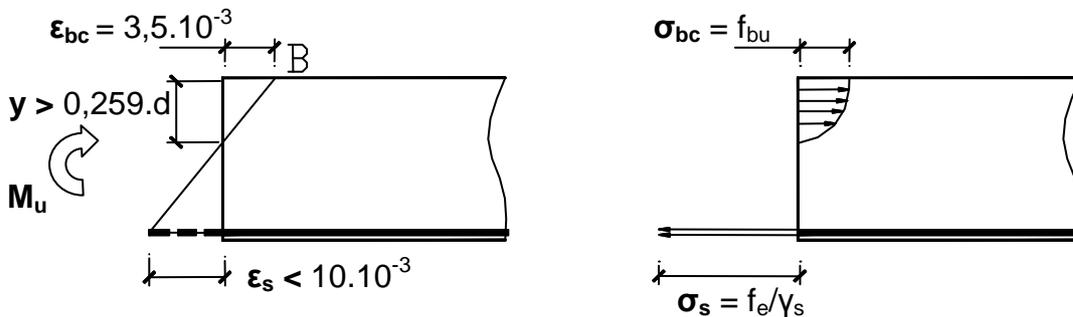
**Fig 4.9**  
Déformations et contraintes d'une section droite

Dans ce cas la membrure comprimée a une hauteur "y" telle que :

$$\frac{\epsilon_{bc}}{y} = \frac{\epsilon_s + \epsilon_{bc}}{d} \text{ soit } y = \frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_{bc} + \epsilon_s} \cdot d = \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-3}} \cdot d = 0,259d = \alpha \cdot d$$

D'où la valeur particulière  $\alpha = 0,259$

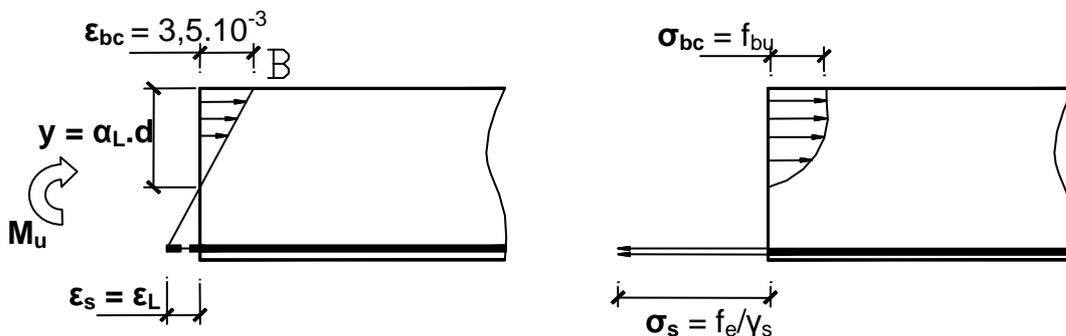
**c. Si l'on fait croître de nouveau l'intensité de  $M_u$ . Pivot B**



**Fig 4.10**  
Déformations et contraintes

La hauteur de la membrure comprimée continue à croître. L'allongement relatif de l'acier supérieur à  $\epsilon_L$  (voir diagramme de calcul des aciers) entraîne une contrainte de traction dans l'acier toujours égale à  $f_e / \gamma_s$ .

**d. Cas particulier et limite supérieure de l'intensité du moment.**



**Fig 4.11**  
Déformations et contraintes

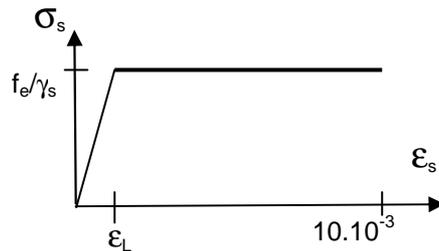
Dans ce cas la membrure comprimée a une hauteur  $y = \alpha_L \cdot d = \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-3} + \epsilon_L} d$  avec  $\epsilon_L = \frac{f_e / \gamma_s}{E_s}$

Dans le cas particulier où  $f_e = 500\text{MPa}$  on obtient

$$\epsilon_L = \frac{500/1,15}{200000} = 2,17 \cdot 10^{-3} \text{ et } \alpha_L = \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-3} + 2,17 \cdot 10^{-3}} = 0,616$$

Vouloir augmenter encore l'intensité du moment ultime  $M_u$  conduirait à une aberration économique: En effet si  $\epsilon_s < \epsilon_L$  la contrainte de traction des aciers va valoir  $\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s < f_e / \gamma_s$ , (on est alors sur la "droite de Hooke") et cela conduira à une section d'acier énorme que l'on ne pourra, raisonnablement disposer dans la poutre (Voir Fig.4.17).

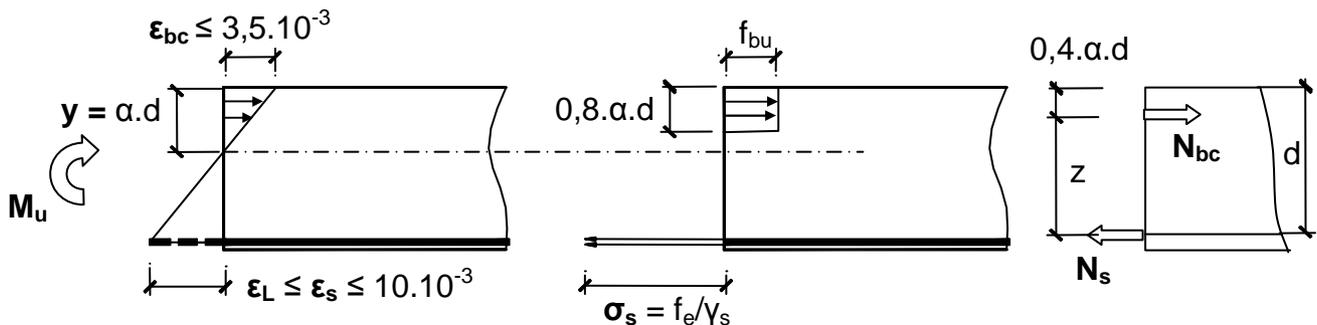
**Fig 4.12 Rappel du diagramme "Contraintes -Déformations" de l'acier**



$\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s$  d'où  
 $\epsilon_s = \sigma_s / E_s$  soit pour la limite  $\epsilon_L$   
 $\epsilon_L = [f_e / \gamma_s] / E_s$  d'où pour  $f_e = 500\text{MPa}$   
 $\epsilon_L = [500/1,15] / 200000 = 2,17 \cdot 10^{-3}$

## 4.4 Méthode de calcul simplifiée, diagramme rectangulaire des contraintes

On admet, pour justifier la section d'acier  $A_s$  nécessaire pour équilibrer un moment ultime  $M_u$ , de remplacer les diagrammes "réels" (fraction de parabole ou parabole -rectangle) par un diagramme "rectangulaire" de hauteur  $0,8 \cdot y = 0,8 \cdot \alpha \cdot d$  et d'intensité  $f_{bu}$ .



**Fig 4.13 Déformations, contraintes, résultantes**

Le vecteur effort normal résultant des compressions  $N_{bc} = 0,8 \cdot \alpha \cdot d \cdot b \cdot f_{bu}$  passe donc par le centre de gravité du volume des contraintes, soit à la distance  $0,4 \cdot \alpha \cdot d$  des fibres supérieures du béton.

Le vecteur effort normal résultant des tractions  $N_s = A_s \cdot f_e / \gamma_s$  passe lui par le centre de gravité du groupe des barres disposées dans la membrure tendue.

Le moment ultime  $M_u$  appliqué à la section équivaut donc au couple  $(N_{bc}, N_s)$  présentant un bras de levier  $z = (1 - 0,4 \cdot \alpha) \cdot d$

L'équation de moment par rapport aux aciers tendus permet d'écrire :

$$\begin{aligned} N_{bc} \cdot z &= M_u \\ (0,8 \cdot \alpha \cdot d \cdot b \cdot f_{bu}) \cdot (d - 0,4 \cdot \alpha \cdot d) &= M_u \\ 0,8 \cdot \alpha \cdot (1 - 0,4 \cdot \alpha) &= M_u / (b \cdot d^2 \cdot f_{bu}) \end{aligned}$$

$0,8. \alpha - 0,32. \alpha^2 - \mu = 0$  en posant  $\mu = M_u / (b.d^2.f_{bu})$  moment réduit  
 $0,32. \alpha^2 - 0,8. \alpha + \mu = 0$   
 $0,4.\alpha^2 - \alpha + \mu/0,8 = 0$  équation du second degré en  $\alpha$   
 $\Delta = 1 - 4 \times 0,4. \mu/0,8 = 1 - 2. \mu$   
 La racine ( $<1,25$ ) est  $\alpha = (1 - \Delta^{1/2})/0,8$  soit

$$\alpha = 1,25.[1 - (1-2 \mu)^{1/2}]$$

L'équation de moment par rapport à la fibre supérieure

$$N_{st.z} = M_u$$

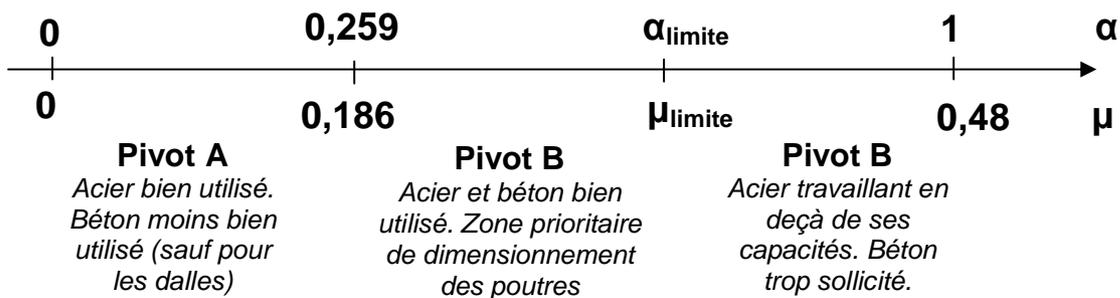
$A_s.f_e/\gamma_s.z = M_u$  en effet si  $\alpha \leq \alpha_L$  alors  $\sigma_s = f_e/\gamma_s$  d'où la valeur de  $A_s$

avec  $z = (1-0,4\alpha).d$

$$A_s = M_u / [(1-0,4\alpha)d.f_e/\gamma_s]$$

Dans la pratique du calcul, on limite la valeur de  $\alpha$  en deçà de la valeur  $\alpha_{limite}$ , pour des raisons d'utilisation optimale des caractéristiques mécaniques de l'acier.

Rappel : Si  $f_e = 500\text{MPa}$  alors  $\alpha_{limite} = 0,616$  et  $\mu_L = 0,371$



## 4.5 Condition de Non-Fragilité (A.4.2,1)

"Par définition est considérée comme non fragile, une section tendue ou fléchie telle que la sollicitation provoquant la fissuration du béton dans le plan de la section considérée entraîne dans les aciers une contrainte au plus égale à leur limite d'élasticité garantie".

"pour évaluer la sollicitation de fissuration, les calculs sont conduits dans l'hypothèse d'un diagramme des contraintes linéaire sur toute la hauteur de la section supposée non armée et non fissurée, en prenant sur la fibre la plus tendue une contrainte égale à  $f_{tj}$ "

Dans le cas d'une section rectangulaire sollicitée en flexion simple, le calcul est le suivant :

Valeur du moment qui crée la première fissure

$$f_{tj} = M_{fiss} / [bh^2/6] \text{ soit } M_{fiss} = [bh^2/6].f_{tj}$$

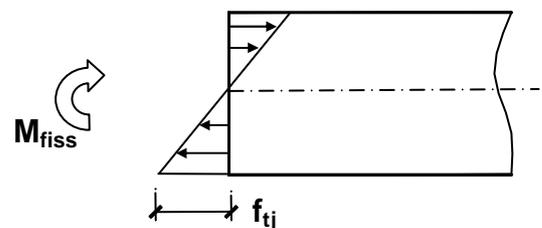


Fig.4.14 Diagramme linéaire des contraintes

Armons maintenant la section avec des aciers longitudinaux capables d'équilibrer le moment  $M_{fiss}$  tout en travaillant à une contrainte de traction égale à  $f_e$ . Admettons une hauteur utile  $d = 0,9.h$  et un "bras de levier"  $z = 0,9.d$ . D'où  $z \approx 0,81h$

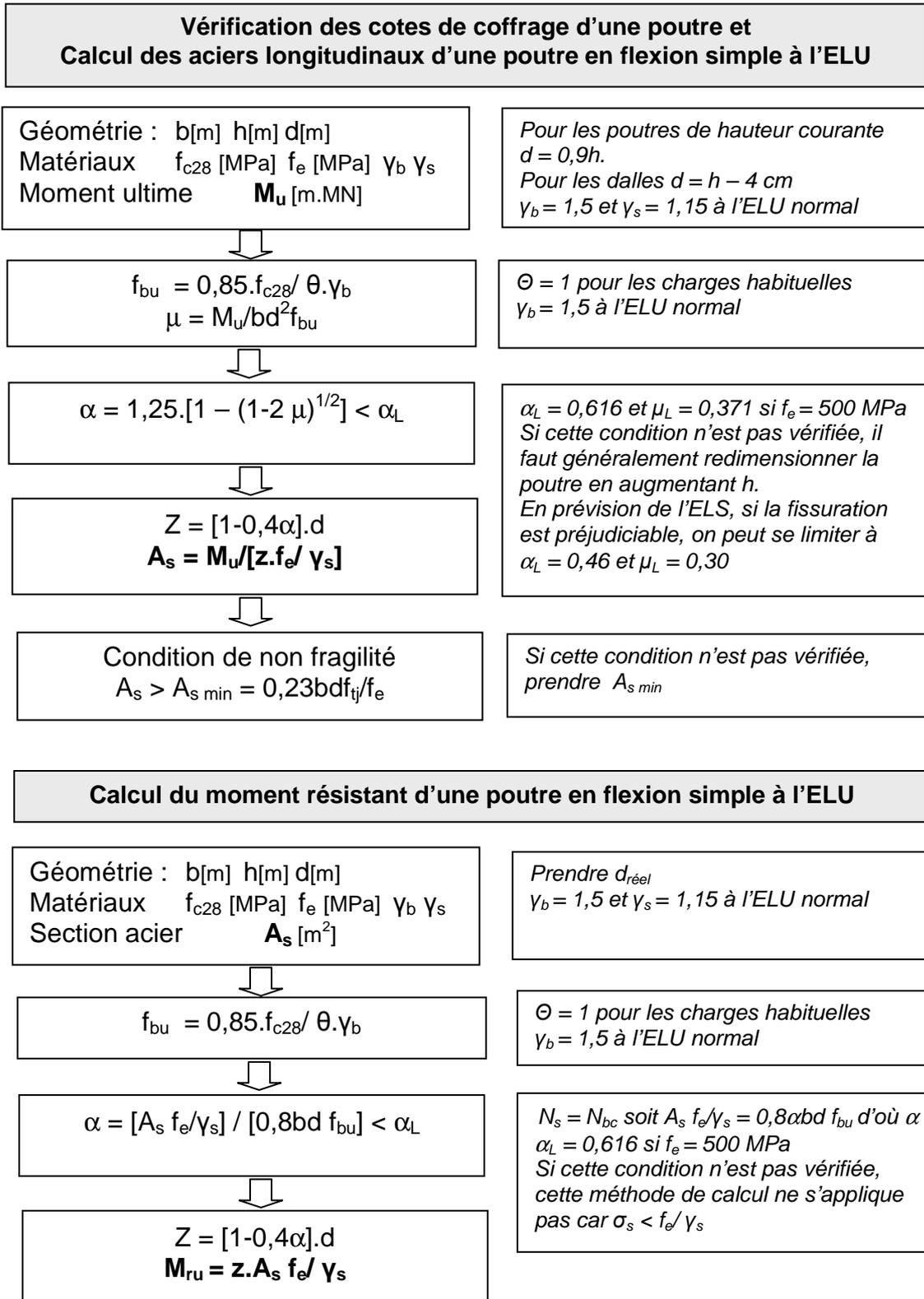
$$A_s = M_{fiss} / [z.f_e] = [bh^2/6].f_{tj} / [0,81hf_e] = bh.f_{tj} / [6 \times 0,81f_e] = b[d/0,9].f_{tj} / [6 \times 0,81f_e] = 0,23bdf_{tj}/f_e$$

$$A_s > A_{s \text{ min}} = 0,23bdf_{tj}/f_e$$

Quelle que soit la sollicitations, la section d'armatures longitudinales dans un poutre de section rectangulaire ne sera pas inférieure à cette valeur.

## 4.6. Organigrammes Poutres en flexion simple à l'ELU

On donne ci-après deux organigrammes. Le premier permet le dimensionnement des aciers connaissant le moment ultime de la poutre en flexion simple. Le second permet de calculer le moment résistant d'une section, connaissant la section d'acier mise en place.



## Programme pour Casio

### =ELU=

" B = [m] " ? → B :

" D = [m] " ? → D :

" FBU = [Mpa]" ? → F :

" MU = [m.MN]" ? → M :  $M \div B \div D^2 \div F \rightarrow N$  :

"ALPHA " :  $1.25x (1 - \sqrt{(1-2N)}) \rightarrow A$  ▲

"AS [cm<sup>2</sup>]" :  $M \div (1-0.4xA) \div D \div 500x1.15x10000$

### =ELS=

" B = [m] " ? → B :

" D = [m] " ? → D :

" AS = [cm<sup>2</sup>]" ? → A :

" MSER = [m.MN]" ? → M :  $A x 10^{-4} \rightarrow A$  :

" Y = [m] " :  $(-15xA + \sqrt{(225xA^2 + 30xAxBxD)}) \div B \rightarrow Y$  ▲

" I = [m<sup>4</sup>]" :  $BxY^3 \div 3 + 15xAx(D-Y)^2 \rightarrow I$  ▲

"SIGMA BETON [MPa]" :  $MxY \div I$  ▲

"SIGMA ACIER [MPa]" :  $15xMx(D-Y) \div I +$  ▲

## Programme pour Texas Instrument

### =ELU=

Disp " B = [m] "

Input B

Disp " D = [m] "

Input D

Disp " FBU = [Mpa]"

Input F

Disp " Mu = [M.MN] "

Input M

Clear Home

M/B/D<sup>2</sup>/F→N

$1.25x (1 - \sqrt{(1-2N)}) \rightarrow A$

Disp "Alpha"

Disp A

M/(1-0,4xA)/D/500x1,15x10000→X

Disp "AS [cm<sup>2</sup>]"

Disp X

### =ELS=

Disp " B = [m] "

Input B

Disp " D = [m] "

Input D

Disp "AS [cm<sup>2</sup>]"

Disp A

Input A

$Ax10^{-4} \rightarrow A$

Disp " Mser = [m.MN] "

Input M

Clear Home

$(-15xA + \sqrt{(225xA^2 + 30xAxBxD)})/B \rightarrow Y$

Disp "Y [m]"

Disp Y

$BxY^3/3 + 15xAx(D-Y)^2 \rightarrow I$

Disp "Y [m<sup>4</sup>]"

Disp I

Pause

$MxY/I \rightarrow X$

Disp "SIGMA BETON [MPa]"

Disp X

$15xMx(D-Y)/I \rightarrow Z$

Disp "SIGMA ACIER [MPa]"

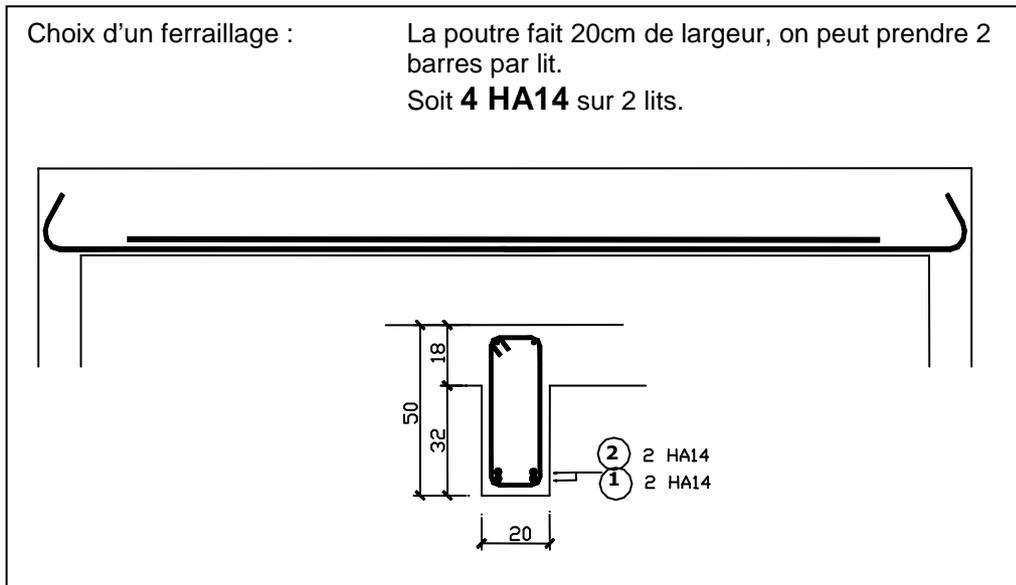
Disp Z

## 4.7 Application 1 : Suite de la poutre étudiée au chapitre 1

Largeur de poutre	<b>b = 0,20m</b>
Hauteur de poutre	<b>h = 0,50m</b>
Hauteur utile	<b>d = 0,9h = 0,45m</b>
Matériaux :   béton	<b>f<sub>c28</sub> = 25 MPa   γ<sub>b</sub> = 1,5 à l'ELU normal</b>
Acier	<b>f<sub>e</sub> = 500 MPa   γ<sub>s</sub> = 1,15</b>
Moment ultime	<b>M<sub>u</sub> = 0,0221x6<sup>2</sup>/8 = 0,0995 m.MN</b>

Contrainte de calcul du béton	<b>f<sub>bu</sub> = 0,85.f<sub>c28</sub>/ θ.γ<sub>b</sub> = 0,85x25/(1x1,5) = 14,17 MPa</b>
Moment réduit	<b>μ = M<sub>u</sub>/bd<sup>2</sup>f<sub>bu</sub> = 0,0995/(0,20x0,45<sup>2</sup>x14,17) = 0,173</b>
Position de l'axe neutre	<b>α = 1,25.[1 - (1-2 μ)<sup>1/2</sup>] = 0,239 &lt; α<sub>L</sub> = 0,616</b>
Bras de levier	<b>z = [1-0,4α].d = (1-0,4x0,239) .0,45 = 0,407m</b>

Section d'armature	<b>A<sub>s</sub> = M<sub>u</sub>/[z.f<sub>e</sub>/ γ<sub>s</sub>] = 0,0995/(0,407x500/1,15) m<sup>2</sup></b>
	<b>A<sub>s</sub> = 5,62 cm<sup>2</sup></b>
Condition de non fragilité	<b>A<sub>s min</sub> = 0,23bdf<sub>ti</sub>/f<sub>e</sub> = 0,23x0,20x0,45x2,1/500 m<sup>2</sup></b>
	<b>A<sub>s min</sub> = 0,87 cm<sup>2</sup></b>



## Application 2 : Poutre

Dans un bâtiment à usage industriel la structure est faite de poteaux en béton armé coulés en oeuvre, de poutres béton armé préfabriquées au sol, levées et clavetées en tête des poteaux. Les poutres ont une portée de 12,00 m, elles supportent en leur milieu une ferme triangulée en bois massif par l'intermédiaire d'un sabot mécano-soudé "spité" sur le flanc de la poutre.

Pour chaque ferme le charpentier bois annonce les réactions d'appui suivantes :

G = charge permanente = 60 kN

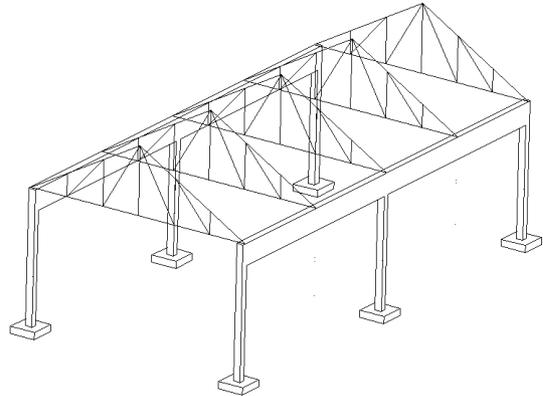
S = charge de neige = 50 kN.

Combinaison de charges à étudier à l'ELU :  $1,35G+1,5S$

Le béton utilisé est tel que  $f_{c28} = 25\text{MPa}$

Les aciers sont à haute adhérence  $f_e = 500\text{MPa}$

La poutre est de section 25cmx85cm



La note de calcul des aciers longitudinaux sera rédigée selon le plan type suivant :

- Modélisation
- Bilan des charges
- Sollicitations
- Acier longitudinaux

### Solution

- Modélisation

On suppose que chaque travée de poutre de portée 12m est indépendante de la travée suivante (non continuité de poutres) et qu'elle repose simplement sur ses appuis.

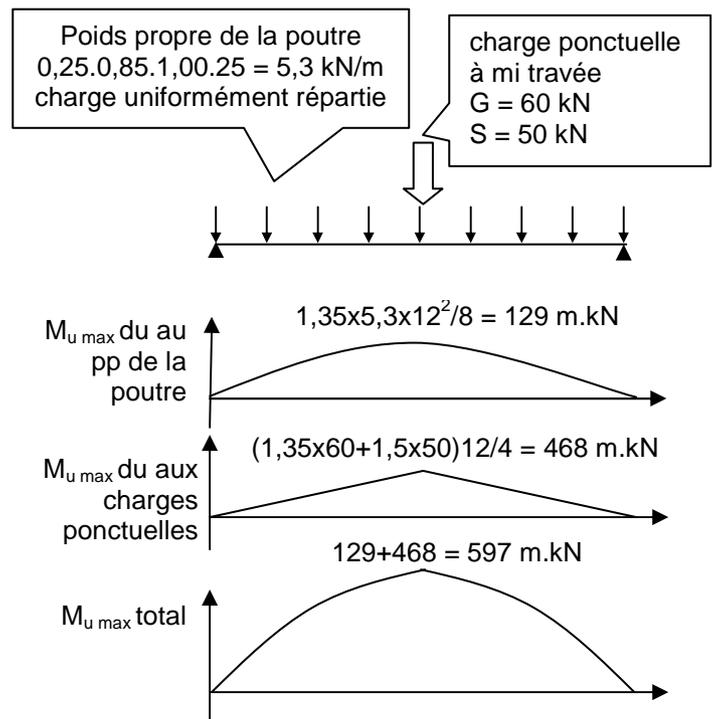
- Bilan des charges

Les seules charges qui font fléchir la poutre sont représentées sur le schéma ci-contre

- Calcul du moment

Les charges sont pondérées par 1,35 et 1,5.

Les moments sont calculés en appliquant le principe de superposition.

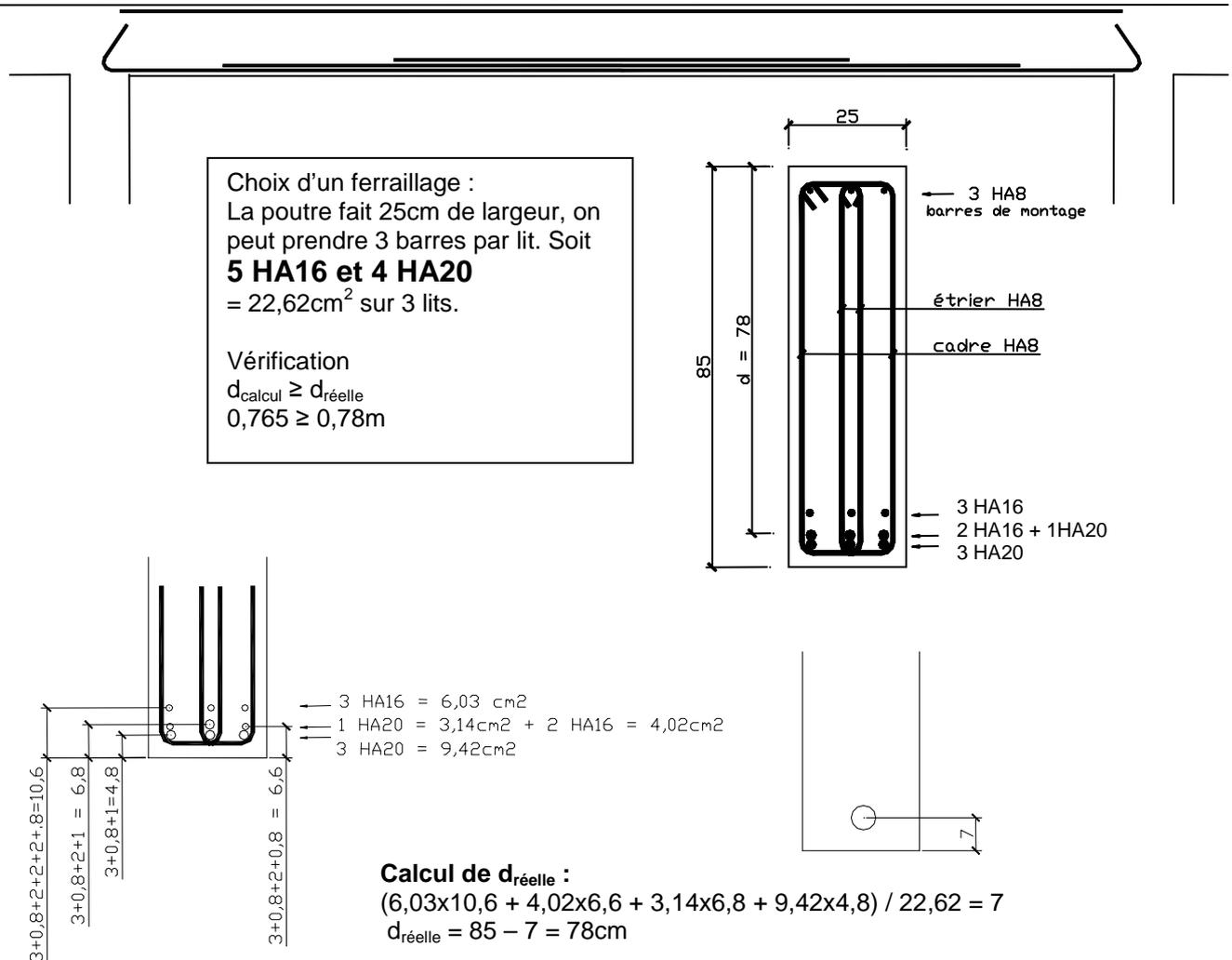


d. Calcul des aciers

Largeur de poutre	<b>b = 0,25m</b>
Hauteur de poutre	<b>h = 0,85m</b>
Hauteur utile	<b>d = 0,9h = 0,765m</b> Cette valeur est à ce stade prise approximativement et sera vérifiée.
Matériaux :	béton <b>f<sub>c28</sub> = 25 MPa</b> $\gamma_b = 1,5$ à l'ELU normal
	Acier <b>f<sub>e</sub> = 500 MPa</b> $\gamma_s = 1,15$
Moment ultime	<b>M<sub>u</sub> = 0,597 m.MN</b>

Contrainte de calcul du béton	<b>f<sub>bu</sub> = 0,85.f<sub>c28</sub>/ <math>\theta</math>.<math>\gamma_b</math> = 0,85x25/(1x1,5) = 14,17 MPa</b>
Moment réduit	<b><math>\mu = M_u/bd^2f_{bu} = 0,597/(0,25x0,765^2x14,17) = 0,288</math></b>
Position de l'axe neutre	<b><math>\alpha = 1,25.[1 - (1-2\mu)^{1/2}] = 0,436 &lt; \alpha_L = 0,616</math></b>
Bras de levier	<b>z = [1-0,4<math>\alpha</math>].d = (1-0,4x0,436) .0,765 = 0,632m</b>

Section d'armature	<b>A<sub>s</sub> = M<sub>u</sub>/[z.f<sub>e</sub>/ <math>\gamma_s</math>] = 0,597/(0,638x500/1,15) m<sup>2</sup></b> <b>A<sub>s</sub> = 21,8 cm<sup>2</sup></b>
Condition de non fragilité	<b>A<sub>s min</sub> = 0,23bdf<sub>ti</sub>/f<sub>e</sub> = 0,23x0,25x0,765x2,1/500 m<sup>2</sup></b> <b>A<sub>s min</sub> = 1,86 cm<sup>2</sup></b> <b>A<sub>s</sub> = 21,5 cm<sup>2</sup> &gt; = 1,86 cm<sup>2</sup></b>



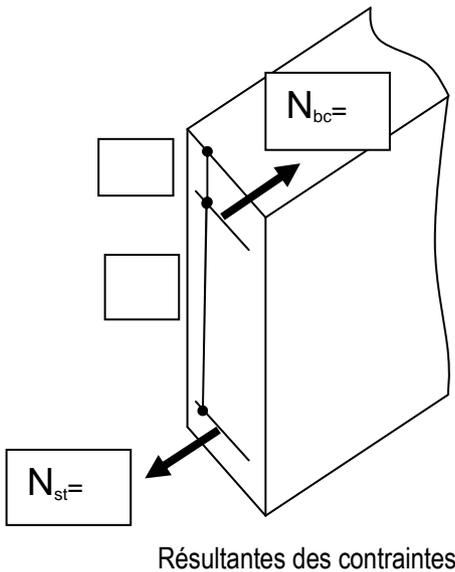
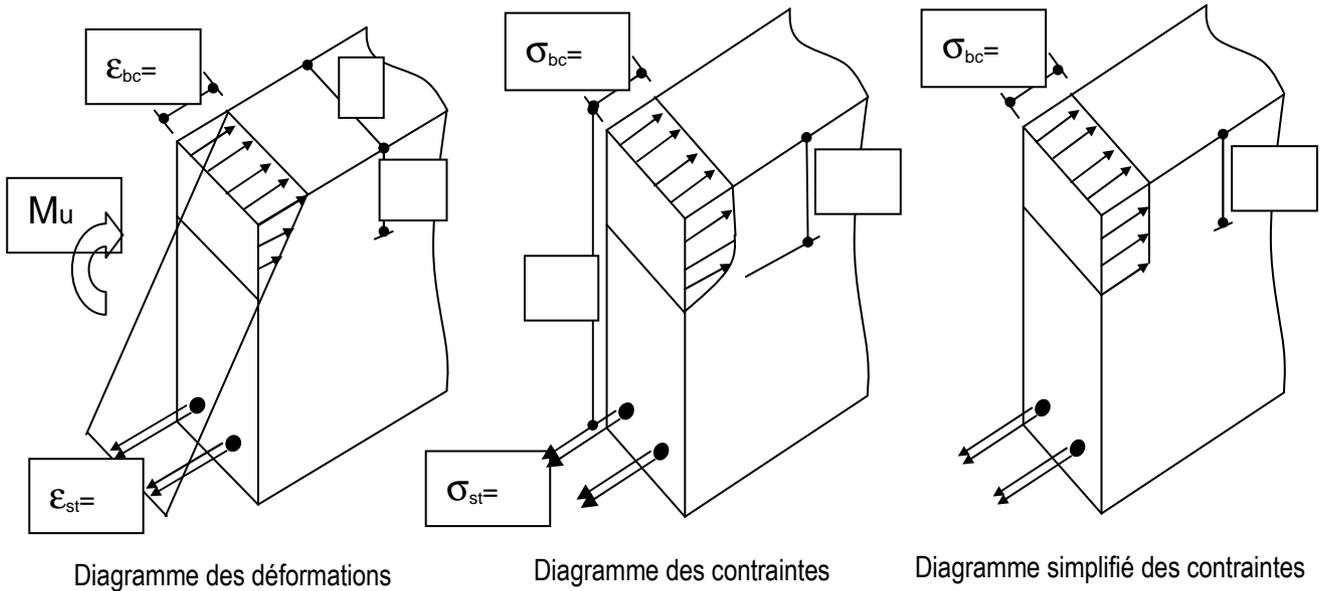
## Application 3 : Diagrammes de contraintes et déformations

Pour la section poutre étudiée dans l'application 2 précédente, on s'aperçoit que  $d_{réelle} = 0,78 > d_{calcul} = 0,9 \cdot h = 0,765$ . Ce qui est sécuritaire, on peut donc recommencer le calcul avec  $d_{réelle}$ , ce qui donnera une section d'acier plus faible, d'où une économie. Dans le cas étudié, la section d'acier réellement mise en place sera  $6HA16+3HA20 = 21,48\text{cm}^2$  (au lieu de  $5HA16$  et  $4HA20$ ).

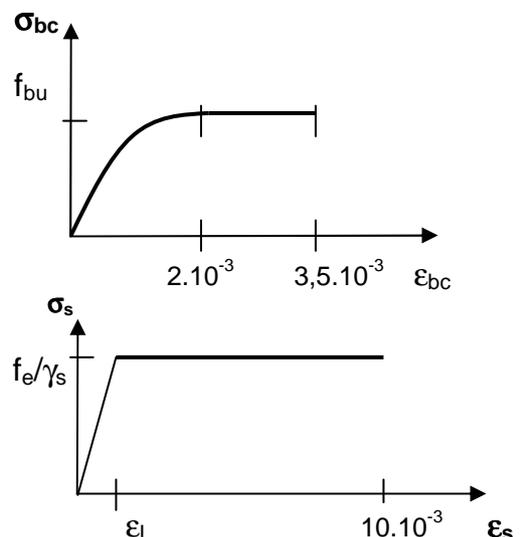
On souhaite déterminer les diagrammes de contraintes et de déformations de cette section.

Rappel des données :

$b = 0,25\text{m}$ ,  $h = 0,85\text{m}$ ,  $d = 0,78\text{m}$ ,  $A_s = 6HA16+3HA20 = 21,48\text{cm}^2$ ,  $M_u = 0,597\text{m.MN}$ ,  
 $f_{c28} = 25\text{MPa}$ ,  $\gamma_b = 1,5$ ,  $f_e = 500\text{MPa}$ ,  $\gamma_s = 1,15$



Placer sur les diagrammes contraintes- déformations les points représentatifs des états de contraintes et déformations des armatures et du béton comprimé.



## Solutions

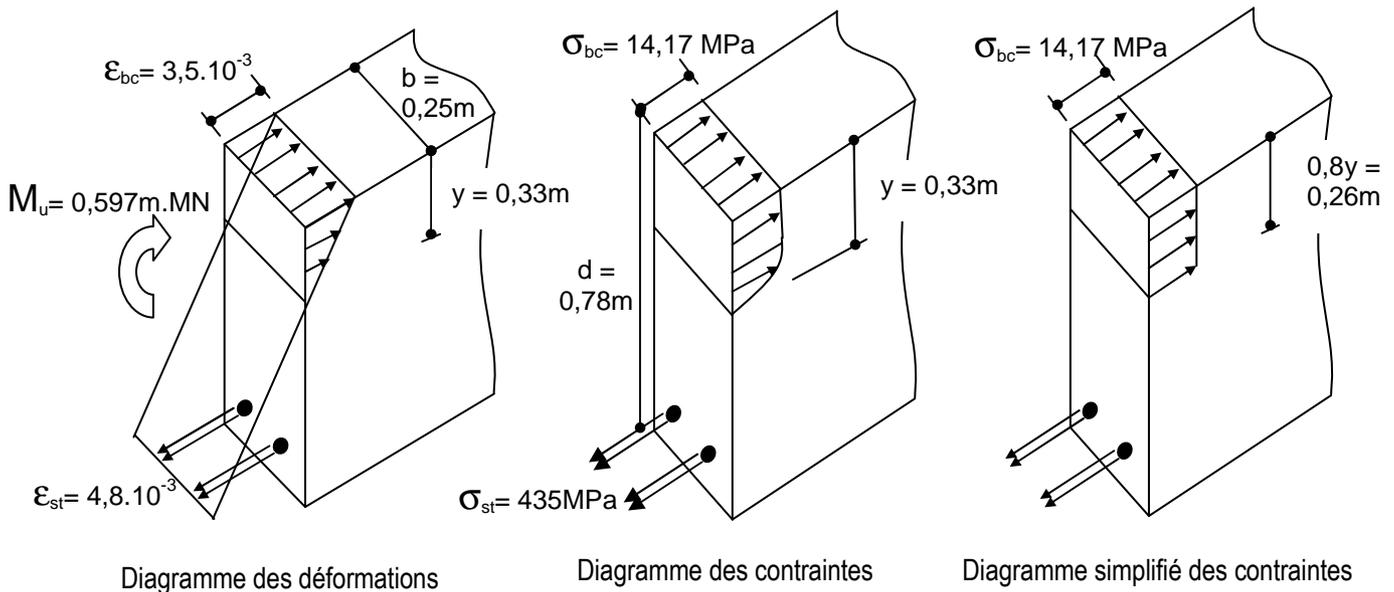
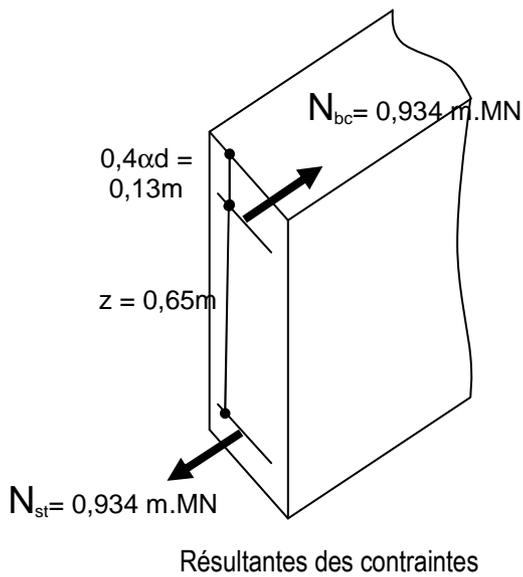


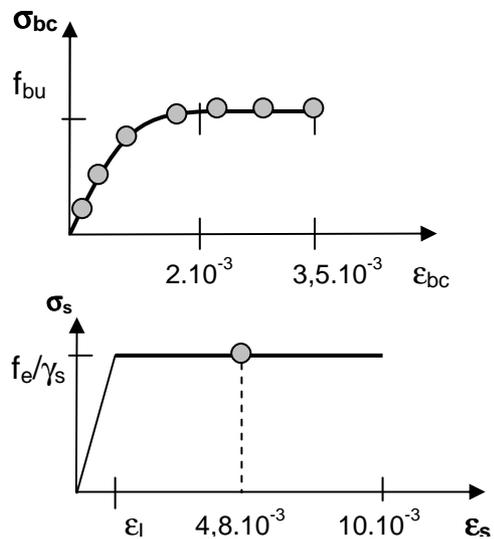
Diagramme des déformations

Diagramme des contraintes

Diagramme simplifié des contraintes



Résultantes des contraintes



### Contraintes

$$f_e / \gamma_s = 500 / 1,15 = 435 \text{ MPa}$$

$$f_{bu} = 0,85 \cdot f_{c28} / \theta \cdot \gamma_b = 0,85 \times 25 / (1 \times 1,5) = 14,17 \text{ MPa}$$

### Résultantes

$$N_s = A_s \cdot f_e / \gamma_s = 21,48 \cdot 10^{-4} \cdot 435 = 0,934 \text{ MN}$$

$$N_{bc} = 0,8 \alpha d f_{bu} = 0,8 \cdot \alpha \cdot 0,25 \cdot 0,78 \cdot 14,17$$

$$N_s = N_{bc} \text{ d'où } 0,934 = 0,8 \cdot \alpha \cdot 0,25 \cdot 0,78 \cdot 14,17 \text{ soit } \alpha = 0,423$$

### Hauteur de béton comprimé

$$y = \alpha d = 0,423 \cdot 0,78 = 0,33 \text{ m}$$

$$0,8 \alpha d = 0,26 \text{ m}$$

### Bras de levier

$$z = [1 - 0,4 \alpha] \cdot d = (1 - 0,4 \times 0,423) \cdot 0,78 = 0,65 \text{ m}$$

### Déformations

$\alpha = 0,423$  ce qui correspond à un pivot B, soit  $\epsilon_{bc} = 3,5 \cdot 10^{-3}$  et  $\epsilon_s$  tel que :

$$\alpha d / 3,5 \cdot 10^{-3} = d / (\epsilon_s + 3,5 \cdot 10^{-3}) \text{ soit } \epsilon_s = 4,8 \cdot 10^{-3}$$

## Application 4 : Hauteur économique

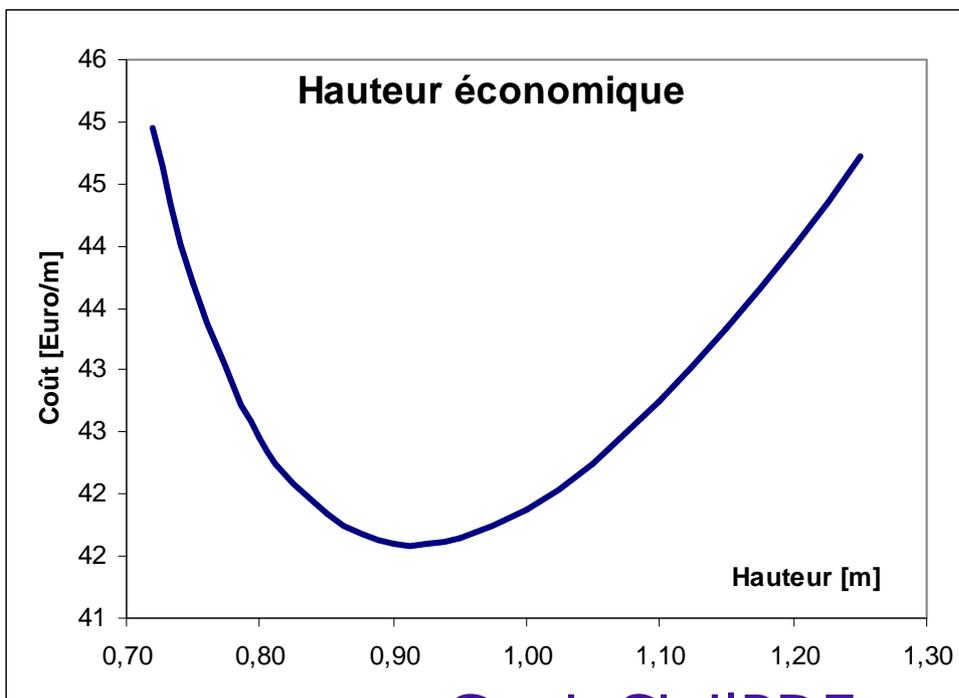
On souhaite déterminer la hauteur économique de la poutre précédente. Sachant que plus la hauteur de béton est importante, plus le bras de levier  $z$  est grand, donc plus la quantité d'acier  $A_s$  est faible. Mais à contrario le poids propre de la poutre augmente et donc le moment ultime aussi. De plus si on augmente la hauteur de béton, le volume et le coût du matériau béton augmente, alors que jusqu'à un certain point la quantité et le coût de l'acier diminue.

Il s'agit de reprendre les données de l'application 2 précédente, mais pour des valeurs de  $h$  variable de 0,70m à 1,30m.

1. Déterminer la section d'acier nécessaire pour chaque valeur de  $h$ . On prendra  $d = h - 7\text{cm}$ .
2. En déduire le coût en matériau 'un mètre de poutre armée seulement par  $A_s$ , en considérant le prix du m<sup>3</sup> de béton égal à 100.X et le prix du kg d'acier égal à 1,25.X

Solutions : Pour  $X = 1\text{euro}$

<b>h</b> <i>m</i>	<b>Coût</b> <i>Euros</i>	<b>Mu</b> <i>m.MN</i>	<b>mu</b> <i>/</i>	<b>alpha</b> <i>/</i>	<b>z</b> <i>m</i>	<b>As</b> <i>cm<sup>2</sup></i>
0,72	44,96	0,577	0,386	0,653	0,48	27,6
0,75	43,71	0,582	0,355	0,578	0,52	25,6
0,80	42,46	0,590	0,312	0,484	0,59	23,0
0,85	41,84	0,597	0,277	0,415	0,65	21,1
0,90	41,61	0,605	0,248	0,362	0,71	19,6
0,95	41,64	0,612	0,223	0,320	0,77	18,4
1,00	41,87	0,620	0,202	0,286	0,82	17,3
1,05	42,25	0,627	0,184	0,257	0,88	16,4
1,10	42,75	0,635	0,169	0,233	0,93	15,6
1,15	43,33	0,643	0,156	0,213	0,99	15,0
1,20	44,00	0,650	0,144	0,195	1,04	14,4
1,25	44,72	0,658	0,133	0,180	1,10	13,8

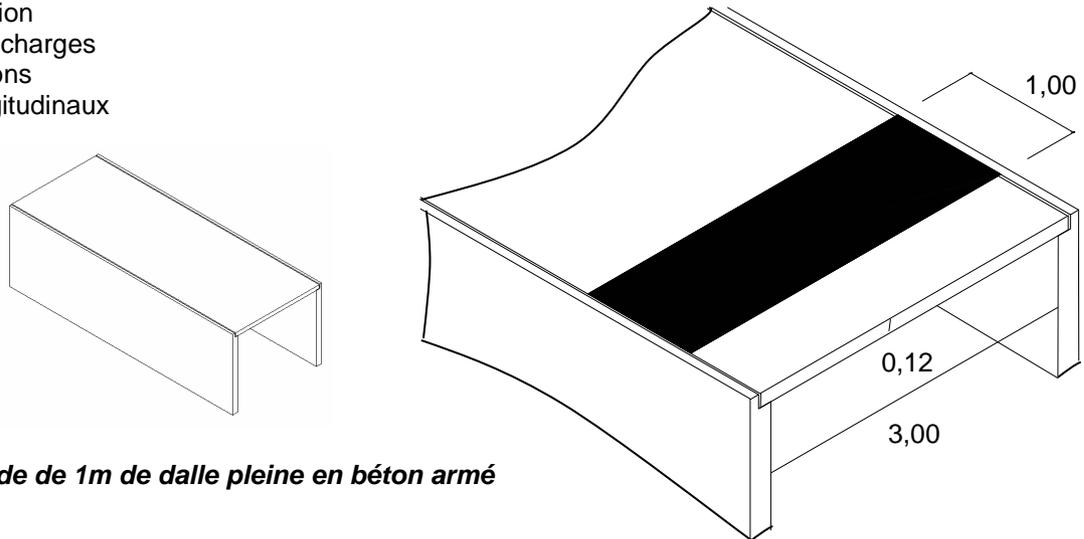


## Application 5 : Dalle sur deux appuis

Une dalle pleine en béton armé, d'épaisseur 12cm, couvre une galerie enterrée de 3,00m de largeur. Elle supporte une charge d'exploitation de 5kN/m<sup>2</sup> et repose dans des feuillures que l'on assimile à des appuis simples. On prendra un enrobage des armatures de 2cm.

Déterminer le ferrailage longitudinal en treillis soudé de la dalle. Le béton choisi est tel que  $f_{c28} = 25\text{MPa}$ . La note de calcul des aciers longitudinaux sera rédigée selon le plan type suivant :

- Modélisation
- Bilan des charges
- Sollicitations
- Acier longitudinal

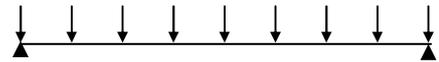


### Etude d'une bande de 1m de dalle pleine en béton armé

#### Solution :

- Modélisation

On étudie la flexion d'une "bande" courante de 1,00 m de largeur et de 3,00 m de portée et reposant simplement sur deux appuis



- Bilan des charges

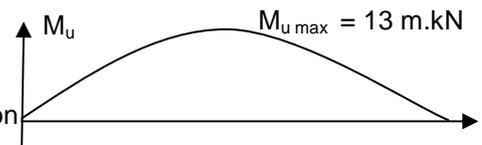
Charges permanentes: Poids propre de la dalle  $(1,00 \times 1,00 \times 0,12) \times 25 = G = 3 \text{ kN/m}$   
 Charge d'exploitation :  $1 \times 5 = Q = 5 \text{ kN/m}$   
 Combinaison des actions à l'ELU:  $1,35.G + 1,5.Q = 1,35 \times 3 + 1,5 \times 5 = 11,55 \text{ kN/ml}$

- Moment fléchissant

La valeur maximum, à mi-travée, vaut à l'ELU :

$$M_u = pL^2/8 = 11,55 \times 3^2 = 13 \text{ m.kN}$$

Ce moment sollicite la membrure inférieure en traction



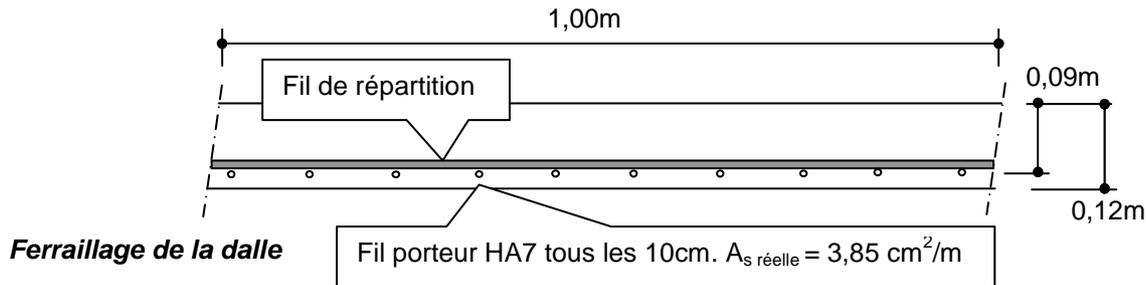
- Aciers longitudinaux

Largeur de poutre	<b>b = 1,00m</b>
Hauteur de poutre	<b>h = 0,12m</b>
Hauteur utile	<b>d = On choisit d'armer cette zone avec un panneau de treillis soudé on adopte une hauteur utile de 9 cm (enrobage 2cm), soit d = 0,09 m.</b>
.Matériaux :	béton $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ $\gamma_b = 1,5$ à l'ELU normal Acier $f_e = 500 \text{ MPa}$ $\gamma_s = 1,15$
Moment ultime	<b><math>M_u = 0,013 \text{ m.MN}</math></b>

Contrainte de calcul du béton	$f_{bu} = 0,85.f_{c28}/\theta.\gamma_b = 0,85 \times 25 / (1 \times 1,5) = 14,17 \text{ MPa}$
Moment réduit	$\mu = M_u / b d^2 f_{bu} = 0,013 / (1 \times 0,09^2 \times 14,17) = 0,113$
Position de l'axe neutre	$\alpha = 1,25.[1 - (1 - 2\mu)^{1/2}] = 0,150 < \alpha_L = 0,616$
Bras de levier	$z = [1 - 0,4\alpha].d = (1 - 0,4 \times 0,15) \cdot 0,09 = 0,084 \text{ m}$

Section d'armature nécessaire pour armer, à l'ELU de résistance, la bande de 1,00 m de poutre dalle, est  $A_s = M_y/[z.f_e/\gamma_s] = 0,013/(0,084 \times 500/1,15) \text{ m}^2$   
 $A_s = 3,53 \text{ cm}^2$

On choisit un panneau de treillis soudé **ST 35** (Voir doc. ADETS) qui présente une section résistante de  $3,85 \text{ cm}^2$  par mètre.



- Pour maintenir en position le panneau de treillis soudé pendant le coulage du béton on peut utiliser:
- Des cales en béton dont l'épaisseur « e » correspond à l'enrobage souhaité du panneau de treillis soudé.
  - Des distanciers en matière plastique dont l'épaisseur e correspond à l'enrobage souhaité. Certains estiment que ce produit serait à l'origine de l'éclatement du béton (gel, variation de température,...)

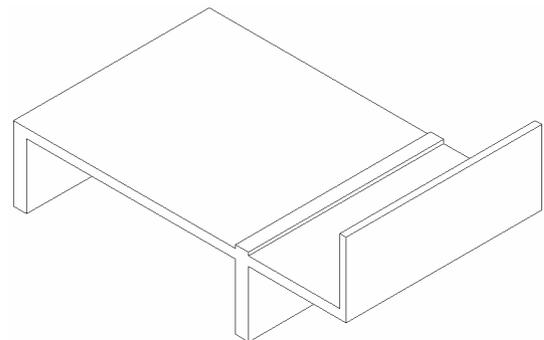
Remarque.

Si l'enrobage  $e = 2,5 \text{ cm}$ , la hauteur utile réelle de la section droite vaut  $d = 120 - 25 - 7/2 = 91,5 \text{ mm} = 9 \text{ cm}$  cette valeur serait alors cohérente avec  $d = 9 \text{ cm}$  initialement choisie.

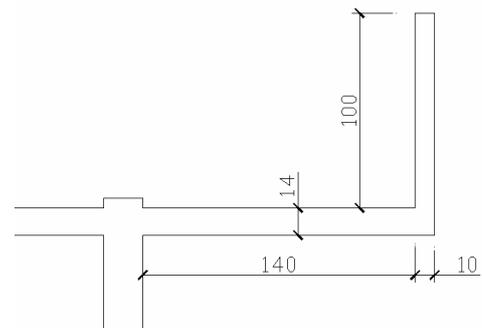
Si l'on avait souhaité un enrobage plus important il eut fallu calculer  $A_s$  à partir d'une valeur de  $d$  plus faible.

## Application 6 : Balcon

Le balcon "filant" représenté ci-contre se justifie comme une poutre en porte à faux par rapport à la façade de l'immeuble. Il est ici dans le prolongement du plancher de l'étage considéré. On admet de n'étudier qu'une "bande" de 1,00 mètre linéaire de balcon. Déterminer le ferrailage du balcon armé avec des barres indépendantes à haute adhérence de limite élastique  $f_e = 500 \text{ MPa}$ .



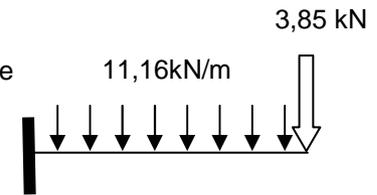
Le béton a une résistance à 28 jours de  $30 \text{ MPa}$   
 La charge d'exploitation sur le balcon est de  $3,5 \text{ kN/m}^2$   
 Le revêtement de sol de  $4 \text{ cm}$  d'épaisseur a un poids volumique de  $22 \text{ kN/m}^3$ . A l'ELU la combinaison à étudier est  $1,35G+1,5Q$



## Solution.

### a. Modélisation

Poutre en console encastrée à une extrémité et libre de l'autre



### b. Bilan des charges pour une bande de 1m

Charge uniformément répartie sur 1,4m de long :

Poids propre de la dalle  $0,14 \times 1 \times 25 = 3,5 \text{ kN/m}$

Poids propre du revêtement de sol  $0,04 \times 1 \times 22 = 0,88 \text{ kN/m}$

Charge d'exploitation  $1 \times 3,5 = 3,5 \text{ kN/m}$

Total pondéré  $1,35g + 1,5q$   $1,35 \cdot (0,88 + 3,5) + 1,5 \times 3,5 = 11,16 \text{ kN/m}$

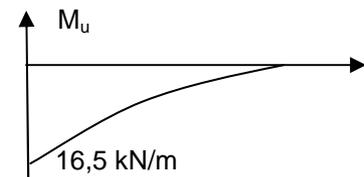
Charge concentrée à l'extrémité

Poids propre pondéré du garde corps  $1,35 \times 1,14 \times 0,10 \times 25 = 3,85 \text{ kN/m}$

### c. Sollicitations maximums

$V_u = 11,16 \times 1,40 + 3,85 = 19,5 \text{ kN}$

$M_u = 11,16 \times 1,40^2 / 2 + 3,85 \times 1,45 = 16,5 \text{ m.kN}$



### d. Aciers longitudinaux

Le sens du moment entraîne une mise en traction de la membrure supérieure de la dalle du balcon, les aciers longitudinaux porteurs seront donc à disposer en partie haute de la dalle, on dira "**en chapeaux**". La section droite à armer est donc une section rectangulaire dans laquelle les aciers tendus occupent la partie supérieure: Il n'est pas ici conseillé de surestimer la hauteur utile  $d$ , en cours de chantier, les aciers "supérieurs" ont une fâcheuse tendance à se retrouver plus bas que prévu.

Largeur de poutre	$b = 1,00 \text{ m}$
Hauteur de poutre	$h = 0,14 \text{ m}$
Hauteur utile	$d = 0,10 \text{ m}$
.Matériaux :	béton $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$ $\gamma_b = 1,5$ à l'ELU normal
	Acier $f_e = 500 \text{ MPa}$ $\gamma_s = 1,15$
Moment ultime	$M_u = 0,0165 \text{ m.MN}$

Contrainte de calcul du béton	$f_{bu} = 0,85 \cdot f_{c28} / \theta \cdot \gamma_b = 0,85 \times 30 / (1 \times 1,5) = 17 \text{ MPa}$
Moment réduit	$\mu = M_u / b d^2 f_{bu} = 0,0165 / (1 \times 0,09 \times 17) = 0,116$
Position de l'axe neutre	$\alpha = 1,25 \cdot [1 - (1 - 2 \mu)^{1/2}] = 0,154 < \alpha_L = 0,616$
Bras de levier	$z = [1 - 0,4 \alpha] \cdot d = (1 - 0,4 \times 0,154) \cdot 0,10 = 0,094 \text{ m}$

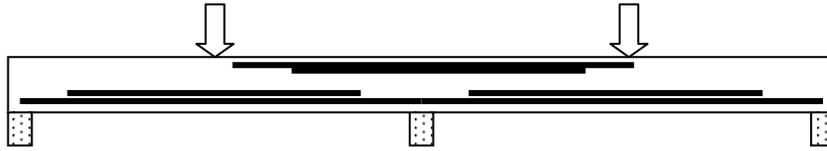
Section d'armature nécessaire pour armer, à l'ELU de résistance, la bande de 1,00 m de poutre dalle, est  $A_s = M_u / [z \cdot f_e / \gamma_s] = 0,0165 / (0,094 \times 500 / 1,15) \text{ m}^2$   
 **$A_s = 4,04 \text{ cm}^2$**

Cela correspond à 5,15 HA 10 par mètre, soit une barre HA10 tous les 19 cm.

On évitera le contact d'un éventuel retour de l'armature avec la sous-face du balcon. (risque d'oxydation et d'éclatement du béton)

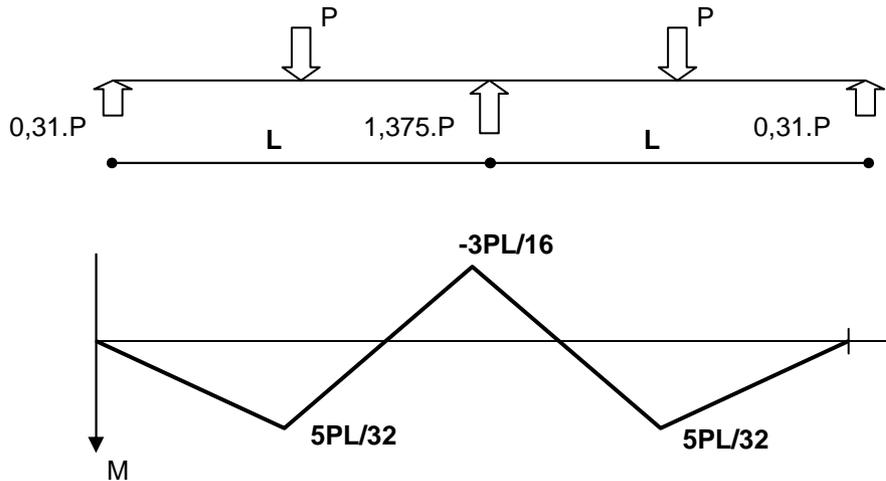
Le balcon n'est pas encastré dans la façade mais prolonge le plancher. Aussi équilibre-t-on le balcon en prolongeant les aciers porteurs sur une distance équivalente à celle du porte à faux. Au stade de la mise en oeuvre il faut adopter les dispositifs conduisant à maintenir en position supérieure les aciers porteurs (distanciers, cage d'armature carrée ou triangulaire...). L'usage de panneaux de treillis soudé comme aciers porteurs de balcon a conduit à des accidents mortels. Constitués de fils relativement fins, ils sont plus "écrasables" sous les pieds des ouvriers...

## Application 7 : Poutre sur 3 appuis



Une poutre de section 10x20 et de 3,50m de longueur est posée sur trois appuis de 10cm de largeur. Cette poutre franchit donc deux travées de longueur 1,60m de nu à nu et est chargée par deux charges ponctuelles P appliquées au milieu de chaque travée. En négligeant le poids propre et pour une valeur pondérée de  $1,5 \times 30 = 45$  kN pour chaque force ponctuelle, déterminer le ferrailage longitudinal.

On donne les réactions d'appui et la courbe de moment fléchissant



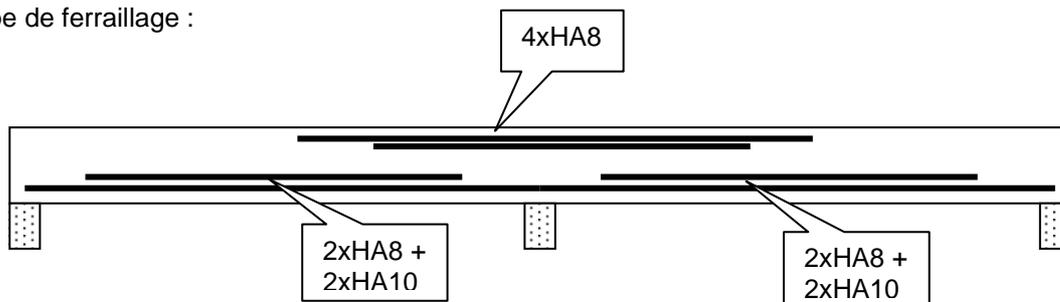
Les barres sont à haute adhérence  $f_e = 500$  MPa.

Le béton a une résistance à 28 jours de 30MPa.

### Solution :

	En travée	Sur appui
Géométrie	$b = 0,10$ m $h = 0,20$ m $d = 0,17$ m	
Matériaux	$f_{c28} = 25$ MPa $\gamma_b = 1,5$ $f_{bu} = 14,17$ MPa $f_e = 500$ Mpa $\gamma_s = 1,15$	
Moment	$M_u = (5/32) \cdot (1,5 \times 30) \cdot 1,60$ $M_u = 11,25$ m.kN $M_u = 0,01125$ m.MN	$M_u = (3/16) \cdot (1,5 \times 30) \cdot 1,60$ $M_u = 13,5$ m.kN $M_u = 0,0135$ m.MN
Fraction de hauteur comprimée	$\alpha = 0,411 < \alpha_L$	$\alpha = 0,520 < \alpha_L$
Aciers longitudinaux	$A_s = 1,82$ cm <sup>2</sup>	$A_s = 2,31$ cm <sup>2</sup>
Choix d'armatures	4xHA8 = 2,01 cm <sup>2</sup>	2xHA8 + 2xHA10 = 2,58 cm <sup>2</sup>

Principe de ferrailage :



# 5. Calcul des Aciers Transversaux

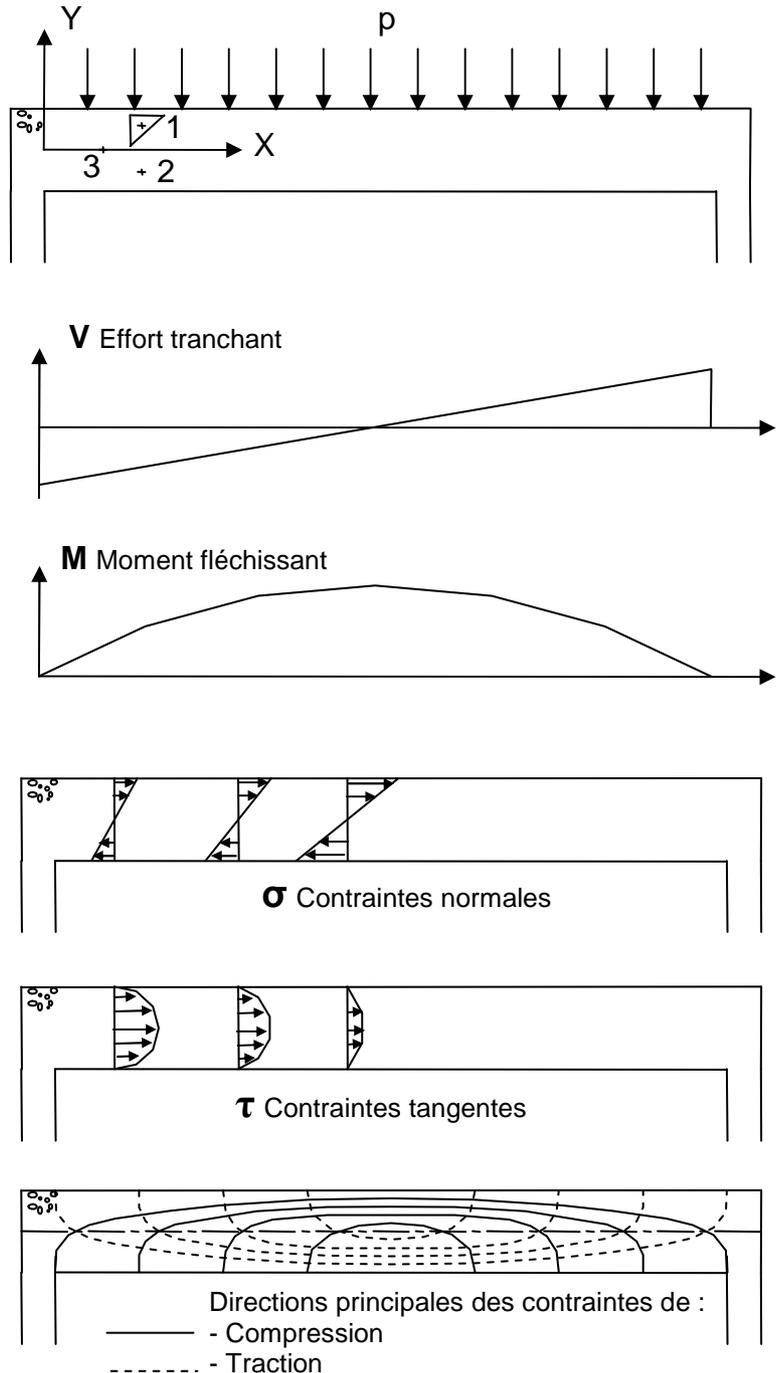
## 5.1 Etat des contraintes dans une poutre en flexion simple

Rappels de RdM :

Etudions une poutre en flexion simple, soumise à une charge uniformément répartie. Pour un point donné de la poutre, et pour une facette en ce point, l'état de contrainte est représenté par un couple  $(\sigma, \tau)$  de contraintes normale  $\sigma$  et de cisaillement  $\tau$  (ou contrainte tangente).

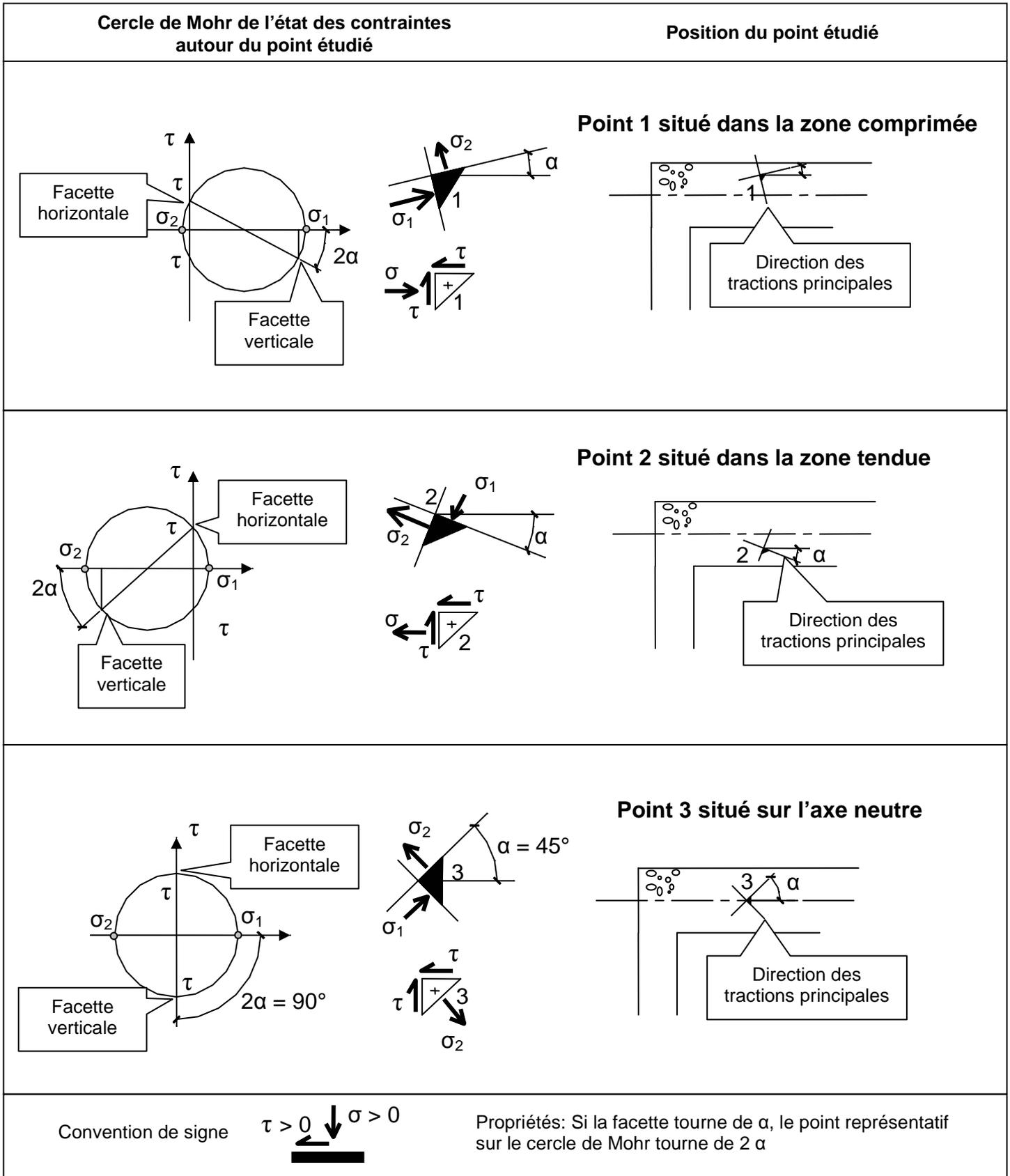
Cet état de contraintes admet des directions particulières de contraintes qu'on appelle contraintes principales. Les directions des contraintes principales de traction et de compression permettent de tracer les trajectoires des contraintes ou isostatiques. Ce sont les lignes suivant lesquelles s'exercent les plus fortes contraintes de traction et de compression.

On comprend ainsi qu'il est nécessaire d'armer le béton suivant les directions des contraintes principales de traction. Dans la pratique la poutre est armée par un réseau d'armatures longitudinales qui reprend les contraintes normales et un réseau d'armatures transversales qui reprend la traction induite par les contraintes de cisaillement.

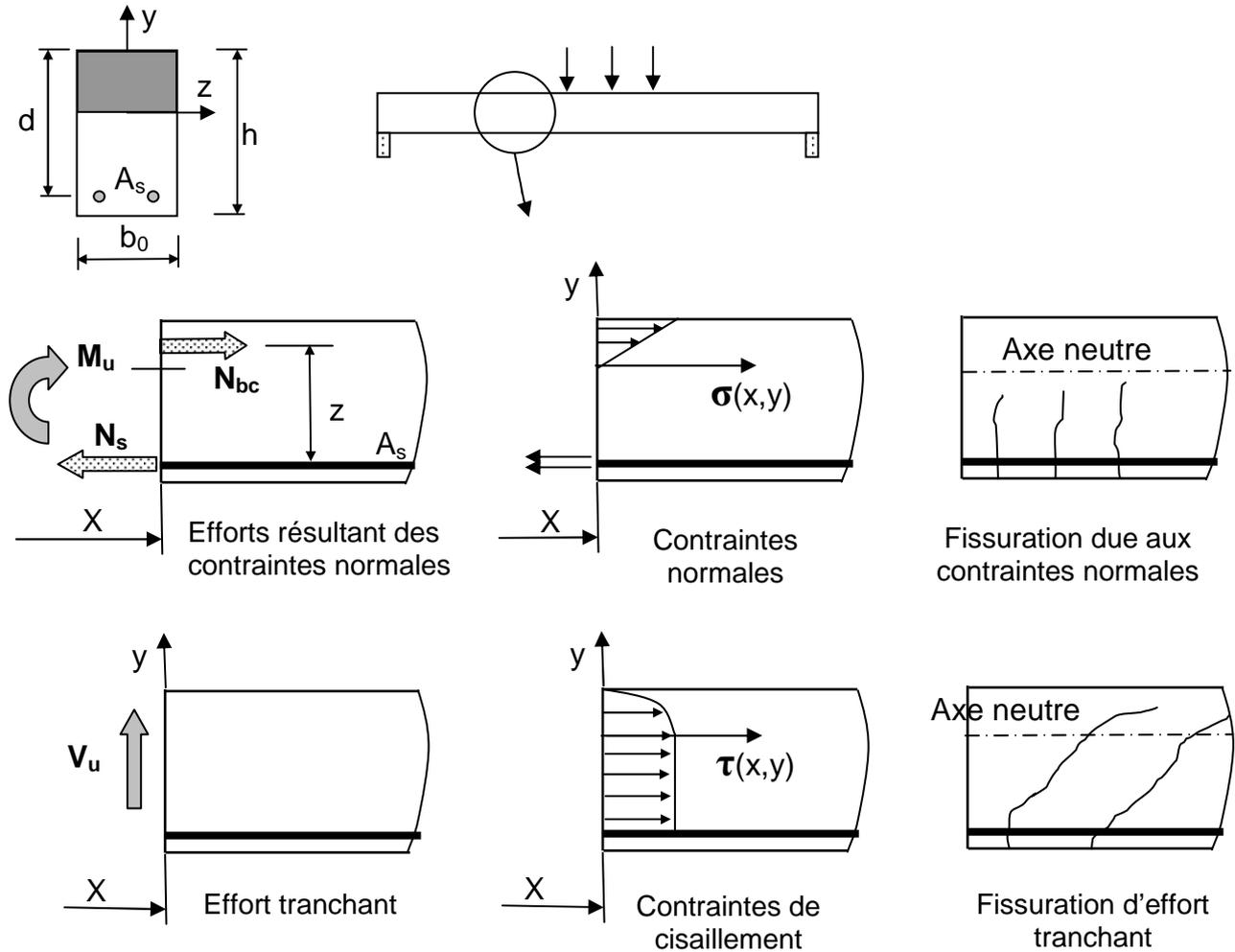


**Fig.5.1 Charges, sollicitations et contraintes**

**Fig.5.2. Rappels de RdM. Analyse des contraintes autour de 3 points de la poutre**



Les diagrammes de contraintes normales et tangentés des figures précédentes sont modifiés dans le cas d'une poutre en béton armé. On néglige en effet la résistance en traction du béton.



**Fig.5.3 Sollicitations, contraintes, fissurations**

Cette fissure est l'amorce d'une rupture qui séparerait la poutre en deux parties. Il est donc nécessaire de couder la fissure par plusieurs cours d'armatures.

## 5.2 Calcul des contraintes tangentés

D'après le cours de RdM :  $\tau(x,y) = V_u(x) \cdot S(y) / [b(y) \cdot I_{gz}]$

avec  $\tau(x,y)$  La contrainte tangente régnant à l'abscisse x de la poutre et à l'ordonnée y de la section  
 $V_u(x)$  L'effort tranchant à l'ELU à l'abscisse x de la poutre  
 $S(y)$  Le moment statique de la section au dessus de y et par rapport à Gz  
 $b(y)$  La largeur à l'ordonnée y de la section d'abscisse x  
 $I_{gz}$  Le moment quadratique (dit d'inertie) de la section homogène réduite

Remarque.

Dans une section d'abscisse x,  $\tau(x,y)$  varie comme S(y):

Dans un premier temps S(y) varie de 0 à  $\tau_{max}$ , puis S(y) est constant puisque le béton tendu est négligé enfin S(y) est nul puisque le moment statique du béton comprimé est égal et opposé à celui des aciers tendus.

Calcul de la contrainte tangente maxi.

$$\tau_{u \max}(x) = V_u(x) \cdot S_G / [b \cdot I_{gz}]$$

$$S_G = b \cdot y_g^2 / 2 = nA(d - y_g)$$

$$\sigma_S = n \cdot M(d - y_g) / I_{gz} \text{ avec } n \text{ coefficient d'équivalence acier béton (voir chapitre sur l'ELS)}$$

$$M = z \cdot N_s = z \cdot A \cdot \sigma_S$$

$$\text{D'où } z = M / A \cdot \sigma_S = M / [A \cdot n \cdot M(d - y_g) / I_{gz}] = I_{gz} / S_G$$

$$\text{Soit } \tau_{u \max}(x) = V_u(x) / [b \cdot z]$$

Par ailleurs le règlement définit une **contrainte tangente conventionnelle**.

$$\tau_u(x) = V_u(x) / [b \cdot d] \text{ avec } d = 0,9h \text{ en général}$$

Le règlement donne une valeur limite à  $\tau_u$ . Il faut donc vérifier que :  $\tau_{u \max} = V_{u \max} / [b \cdot d] < \tau_{u \text{ limite}}$

Avec  $\tau_{u \text{ limite}}$  défini dans le tableau ci-joint :

$\tau_{u \text{ limite}}$ [MPa]	Fissuration peu préjudiciable	Fissuration préjudiciable ou très préjudiciable
Cadre droit	Min [0,2.f <sub>ct</sub> /γ <sub>b</sub> ; 5]	Min [0,15.f <sub>ct</sub> /γ <sub>b</sub> ; 4]
Cadre à 45°	Min [0,27.f <sub>ct</sub> /γ <sub>b</sub> ; 7]	Min [0,27.f <sub>ct</sub> /γ <sub>b</sub> ; 7]
Cadre à 22,5°	Min [0,235.f <sub>ct</sub> /γ <sub>b</sub> ; 6]	Min [0,21.f <sub>ct</sub> /γ <sub>b</sub> ; 5,5]

On remarque que les cadres inclinés sont plus efficaces (Voir le paragraphe 1).

Exemple : Valeur de $\tau_{u \text{ limite}}$ à l'ELU normal si f <sub>c28</sub> = 30 MPa		
	Fissuration peu préjudiciable	Fiss. préjudiciable ou très préjudiciable
Cadre droit	4 MPa	3 MPa

## 5.3 Calcul des armatures transversales

Nous venons de voir la nécessité de couder les fissures par des armatures.

Ce que précise l'Article A 5.1,22. du BAEL 91 :

*"Toute âme de poutre comporte une armature transversale composée d'aciers parallèles au plan moyen de l'âme et ancrés efficacement dans les deux membrures. Ces aciers font avec l'axe longitudinal de la poutre un angle α compris entre 45 et 90°, leur inclinaison étant de même sens que celle de la contrainte principale de traction au niveau du centre de gravité de la section de la poutre supposée non fissurée."*

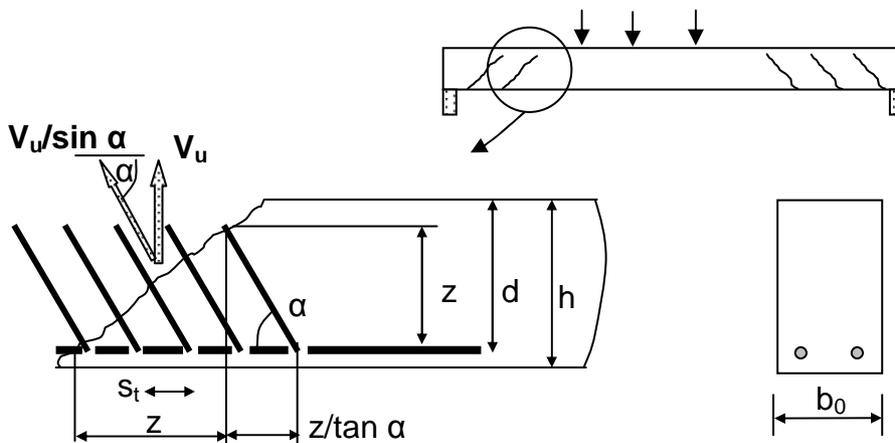


Fig.5.5 Couture d'une fissure d'effort tranchant

Soit  $m$  le nombre de cours de section  $A_t$  travaillant à ost pour équilibrer un effort global  $V_u(x)/\sin \alpha$

$$m = z \cdot (1 + 1/\tan \alpha) / s_t \quad \text{et} \quad m \cdot A_t \cdot \sigma_{st} = V_u(x) / \sin \alpha \quad \text{d'où} \quad A_t = \frac{s_t V_u(x)}{z \cdot \sigma_{st} \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)} \quad [1]$$

D'autre part pour que la couture soit efficace, il faut limiter supérieurement l'espacement  $s_t$  des armatures. Voyons les dispositions réglementaires et la forme de l'équation [1] dans l'article A 5.1,23.

Reprenons l'expression [1] en considérant que:

$$\sigma_{st} = \frac{f_e}{\gamma_s} \quad \text{et} \quad \tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} \quad \text{d'où} \quad A_t = \frac{s_t \cdot \tau_u \cdot b_0 \cdot d}{z \cdot \frac{f_e}{\gamma_s} \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)} \quad \text{soit} \quad \frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} = \frac{\gamma_s \cdot \tau_u}{z \cdot f_e \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)}$$

Le règlement considère à juste titre que  $z = 0,9 \cdot d$ . D'autre part le béton équilibre une partie de l'effort tranchant du fait que sa résistance à la traction n'est pas nulle un terme  $0,3 \cdot f_{tj} \cdot k$  est introduit dans la formule réglementaire. Cette portion d'effort tranchant équilibrée par le matériau béton est d'autant plus grande que celui-ci est comprimé. Elle n'est effective que s'il n'y a pas de reprise de bétonnage non traitée. La formule réglementaire est en fait:

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} = \frac{\gamma_s \cdot [\tau_u - 0,3 \cdot f_{tj} \cdot k]}{0,9 \cdot f_e \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)} \quad \text{avec } f_{tj} \leq 3,3 \text{ MPa et } k = 0 \text{ ou } 1 \text{ en flexion simple}$$

$A_t$	$m^2$	Section globale d'un cours d'armatures transversales
$b_0$	m	Largeur de la poutre
$\tau_u$	MPa	Contrainte tangente conventionnelle
$f_{tj}$	MPa	Contrainte de rupture en traction du béton
$f_e$	MPa	Limite élastique de l'acier
$\gamma_s$	/	Coefficient de sécurité partiel sur l'acier (1,15 à l'ELU normal)
$k$	/	- $k = 1$ s'il n'y pas de reprise de bétonnage ou si celle-ci est traitée - $k = 0$ s'il y a une reprise de bétonnage non traitée - $k$ peut être $> 1$ ou $< 0$ dans les cas de flexion composée (voir A 5.1,23)

La valeur de  $s_t$  est limitée réglementairement:

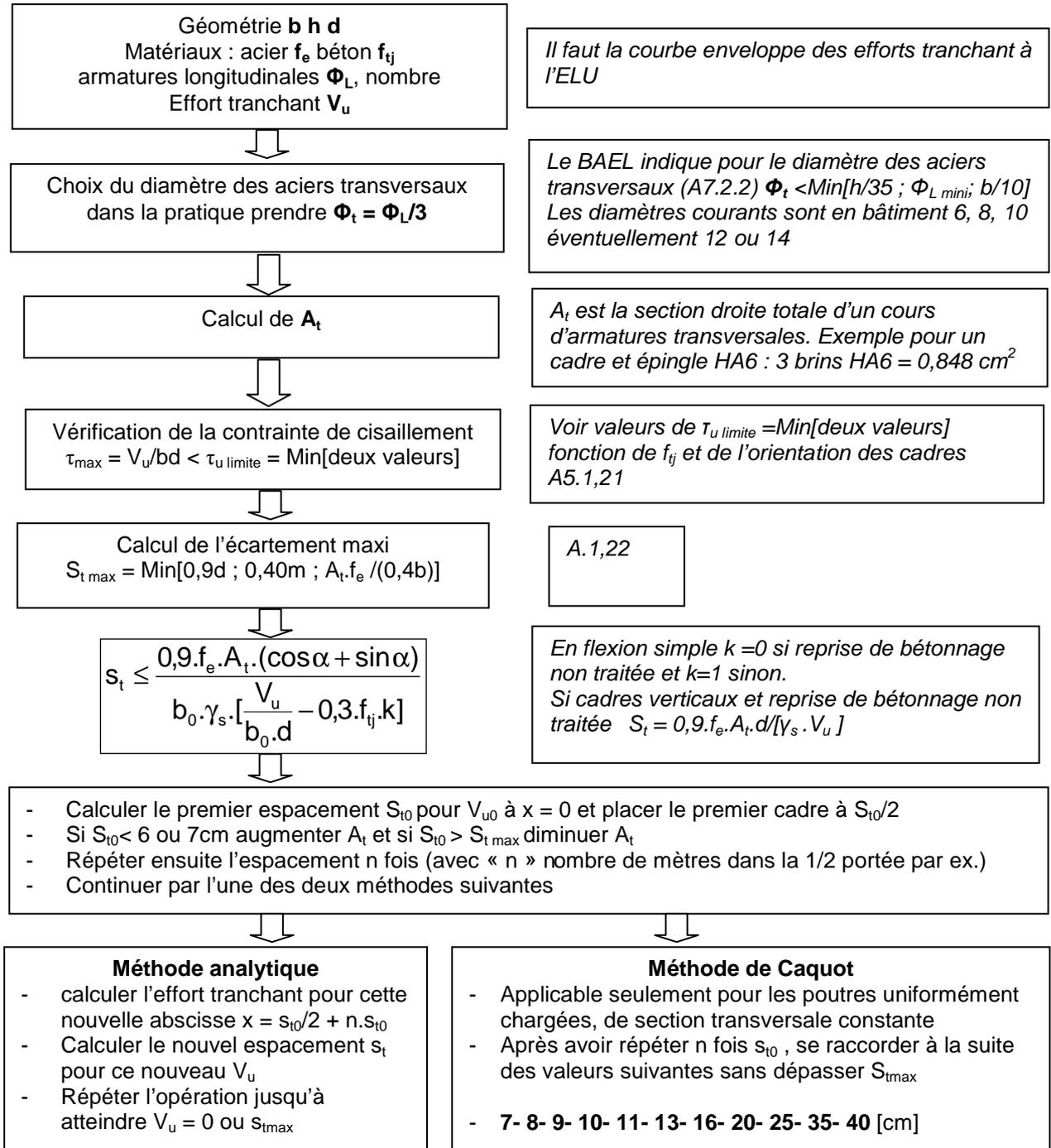
$$s_t \leq \text{Min} [0,9 \cdot d ; 40\text{cm}] \quad (\text{A 5.1,23})$$

Un pourcentage minimum est exigé pour les poutres : la section d'acier par unité de longueur  $A_t/s_t$  doit être telle que :

$$A_t/s_t \geq 0,4 \cdot b_0 / f_e \quad \text{avec } A_t \text{ en } m^2, s_t \text{ en m, } b_0 \text{ en m et } f_e \text{ en MPa}$$

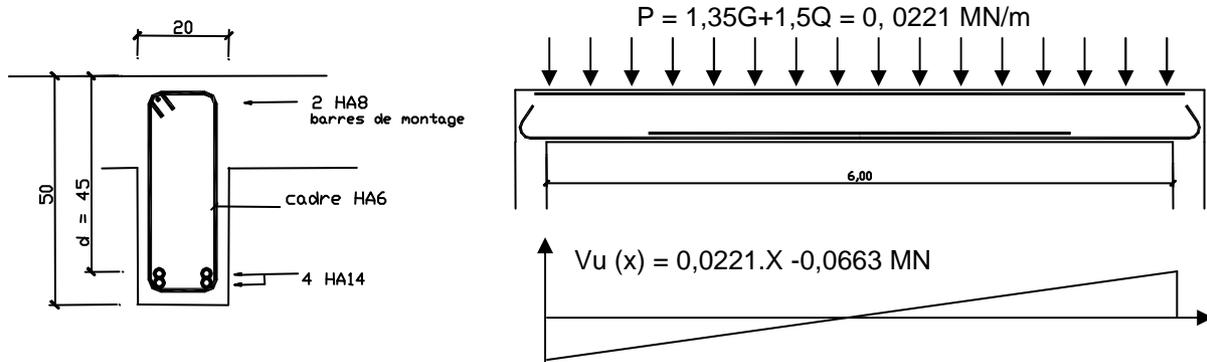
Cette condition de pourcentage minimal ne concerne pas les dalles. Voir pour cela le chapitre traitant des dalles. Il existe des dérogations aussi pour les poutres secondaires de planchers. Voir le paragraphe B.6.7,1.

## 5.4 Détermination pratique des armatures transversales :



## 5.5 Application : Suite de la poutre étudiée aux chapitres 1 et 4

Déterminer le ferrailage transversal de la poutre étudiée aux chapitres 1 et 4.



**Solution.**

Géométrie :  $b = 0,20\text{m}$   $h = 0,50\text{m}$   $d = 0,9h = 0,45\text{m}$   
 Matériaux :  $f_e = 500\text{MPa}$   $f_{c28} = 25\text{MPa}$   $f_{t28} = 0,6 + 0,06 \times 25 = 2,1\text{MPa}$   
 armatures longitudinales 4HA14  
 Fissuration peu préjudiciable

**Choix du diamètre** des aciers transversaux  $\Phi_t = \Phi_L/3 = 14/3$   
 on choisit un cadre vertical HA6

Pour un cadre il y a 2 brins pour couvrir la fissure d'effort tranchant  
 $A_t = 2HA6 = 0,57\text{ cm}^2$

**Vérification de la contrainte de cisaillement.**  
 Cadre verticaux, fissuration peu préjudiciable  
 $\tau_{\max} = V_u/bd \leq \tau_{\text{limite}} = \text{Min}[0,2f_{c28}/\gamma_b ; 5\text{MPa}]$   
 $0,663/(0,20 \times 0,45) \leq \text{Min}[0,2 \times 25/1,5 ; 5\text{MPa}]$   
 $0,731\text{ MPa} \leq 3,33\text{MPa}$  OK

Calcul de l'écartement maxi  $S_{t\max} = \text{Min}[0,9d ; 0,40\text{m} ; A_t \cdot f_e / (0,4b)]$   
 $S_{t\max} = \text{Min}[0,9 \times 0,45 ; 0,40 ; 0,57 \cdot 10^{-4} \times 500 / (0,4 \times 0,2)] = 0,35\text{m}$

$$S_t \leq \frac{0,9 \cdot f_e \cdot A_t \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha)}{b_0 \cdot \gamma_s \cdot \left[ \frac{V_u}{b_0 \cdot d} - 0,3 \cdot f_{tj} \cdot k \right]}$$

$k = 0$  car on considère une reprise de bétonnage entre retombée de poutre et dalle. Cadre verticaux, d'où  $S_t = 0,9 \cdot f_e \cdot A_t \cdot d / [\gamma_s \cdot V_u]$   
 $S_t \leq 0,9 \times 500 \times 0,57 \cdot 10^{-4} \times 0,45 / (1,15 \cdot V_u) = 0,0100/V_u$

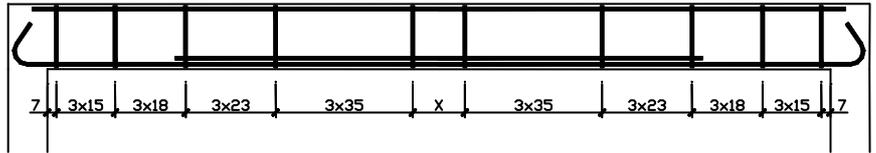
X [m]	Vu [MN]	$S_t \leq 0,0100/V_u$	$S_{t\text{ retenu}}$ [m]	nombre
0	0,0663	0,151	<b>0,15</b>	
$0,15/2 + 3 \times 0,15 = 0,52$	0,0548	0,183	<b>0,18</b>	3
$0,52 + 3 \times 0,18 = 1,06$	0,0429	0,234	<b>0,23</b>	3
$1,06 + 3 \times 0,23 = 1,75$	0,0276	$0,36 > S_{t\max}$	<b>0,35</b>	/

Le premier cadre est placé à  $s_{10}/2$  pour couvrir la première fissure.  
 Pour simplifier le calcul et la mise en œuvre, on garde 'n' fois le même espacement (en général 3 ou 4 fois).  
 Mais pour la méthode de Caquot 'n' est le nombre entier de mètres dans la demi portée.

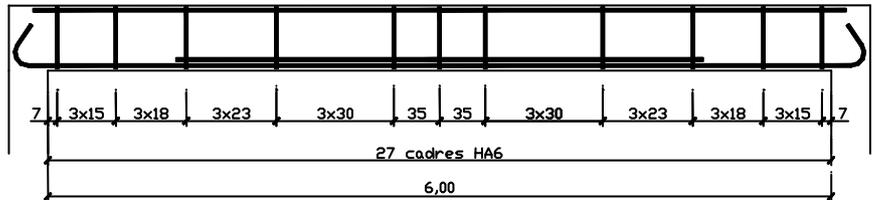
### Répartition des armatures transversales :

Les calculs conduisent à la répartition théorique suivante des cours successifs d'armatures transversales.

L'intervalle "x", auquel on parvient ici, vaut 40 cm. On peut le partager en 2 x 20 cm et laisser la répartition ainsi.



Cependant, il est plus judicieux de revoir l'ensemble de la répartition et de partager l'intervalle x de chaque côté de manière à l'intégrer à la suite des espacements.



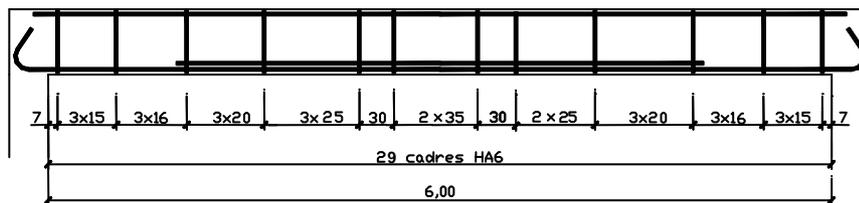
## 5.6 Méthode de Caquot

Reprendre l'exercice précédent, mais déterminer les espacements de cadre par la méthode de Caquot.

### Solution.

Cette méthode ne permet que d'obtenir rapidement la répartition des espacements le long de la poutre après avoir calculé  $s_{10}$ . Dans notre cas la méthode de Caquot s'applique car la poutre est uniformément chargée et de section constante. On a calculé  $s_{10} = 15\text{cm}$ . Les autres espacements sont d'après la série de Caquot 16, 20, 25 et 35 (car  $s_{\text{max}} = 35\text{cm}$ ). Ces espacements seront répétés n fois, avec n nombre de mètre dans la demi portée. Ici  $n = 3$ .

D'où le plan de ferrailage suivant. Dans la partie centrale, on ne peut mettre 'n'x 35cm, donc on répartit par exemple les cadres comme indiqué. On remarque que cette méthode simplifiée consomme dans notre cas deux cadres de plus que la méthode analytique.



## 5.7 Si aucune reprise de bétonnage

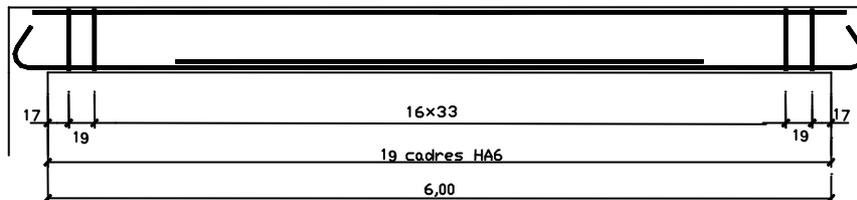
Reprendre l'exercice précédent, mais en considérant qu'il n'a pas de reprise de bétonnage

**Solution.**

Dans ce cas  $k = 1$ .

$$\text{D'où } s_t \leq \frac{0,9 \cdot f_e \cdot A_t \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)}{b_0 \cdot \gamma_s \cdot \left[ \frac{V_u}{b_0 \cdot d} - 0,3 \cdot f_{tj} \cdot k \right]} \quad \text{soit } s_t \leq \frac{0,9 \times 500 \times 0,57 \cdot 10^{-4}}{0,20 \cdot 1,15 \cdot \left[ \frac{0,0663}{0,20 \times 0,45} - 0,3 \times 2,1 \times 1 \right]} = 1,04 \text{ m} > 0,35 \text{ m}$$

L'espacement calculé est important du fait de la capacité du béton à résister à la traction. Les cadres seront donc espacés de 35cm au maximum avec des premiers cadres à  $35/2 = 17\text{cm}$  du nu de l'appui. Soit le schéma de ferrillage suivant compte tenu des dimensions de la poutre.



## 6. Epure d'Arrêt de barre et Vérification des appuis

### 6.1 Treillis de Ritter Mörsch

Afin de mieux comprendre le fonctionnement d'une poutre en béton armé, commençons par étudier la nature et l'intensité des efforts sollicitant les barres d'une poutre en treillis dont les diagonales sont à 45°. Soit à analyser le cas de figure ci-dessous, en négligeant le poids propre:

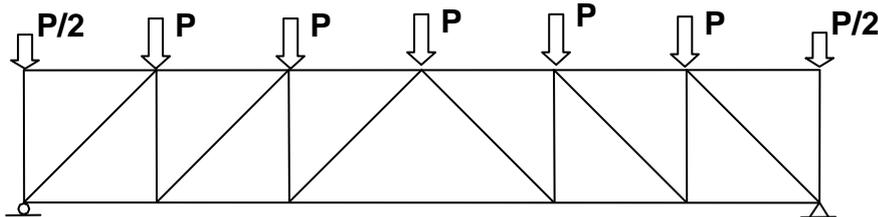


Fig.6.1 Poutre treillis

La mise en équilibre des noeuds conduit à la détermination des efforts axiaux sollicitant chacune des différentes barres avec la convention suivante : + compression et - traction.

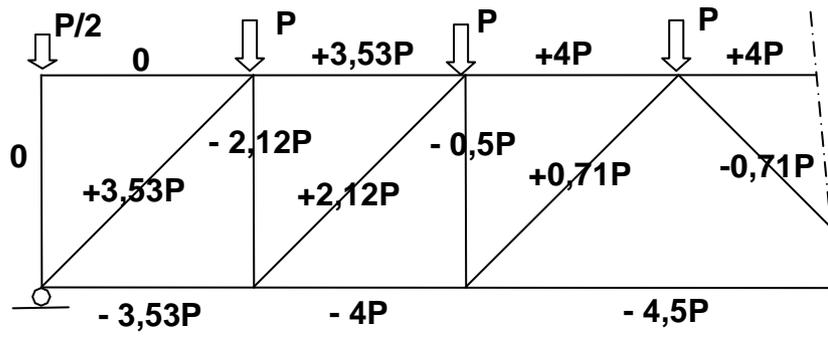


Fig.6.2 Analyse des efforts dans les barres

Les graphes des efforts tranchants et des moments fléchissant le long de la poutre sont les suivants :

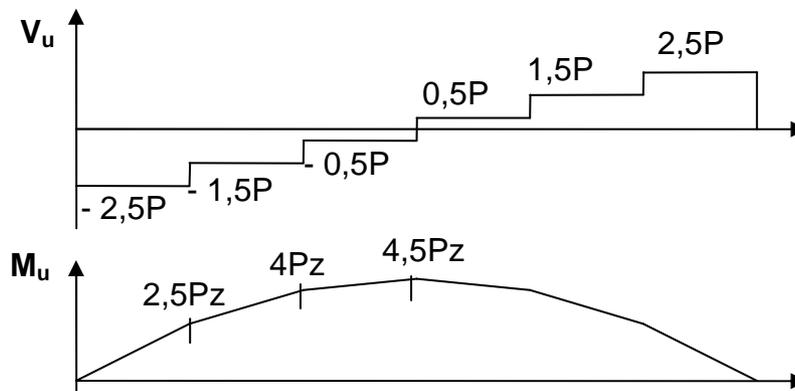


Fig.6.3 Sollicitations  $V$  (effort tranchant) et  $M$  (moment fléchissant) dans la poutre

Dans le cas d'une poutre en béton armé, il est possible de faire l'analogie avec la poutre en treillis précédente. Après fissuration d'effort tranchant la poutre peut être représentée comme ci-après :

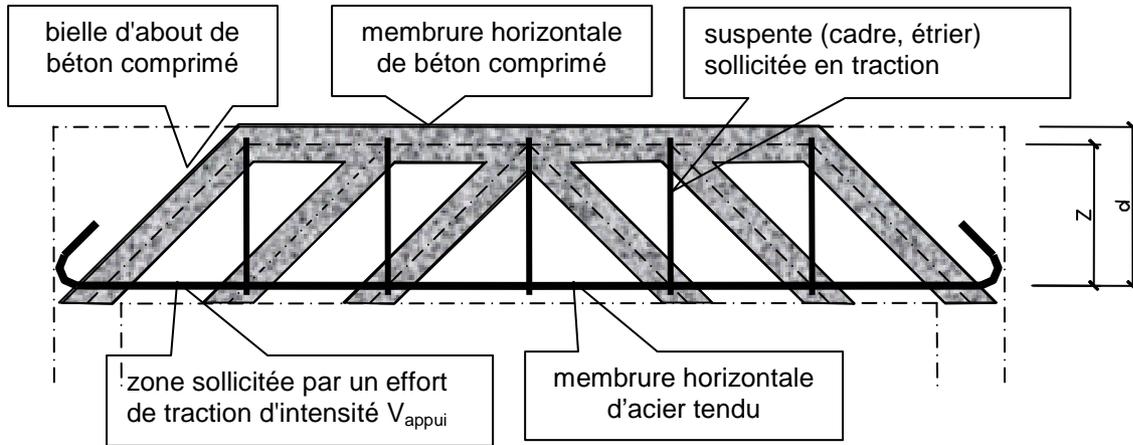
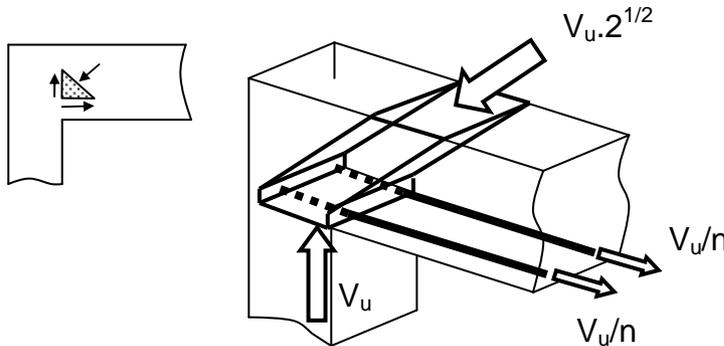


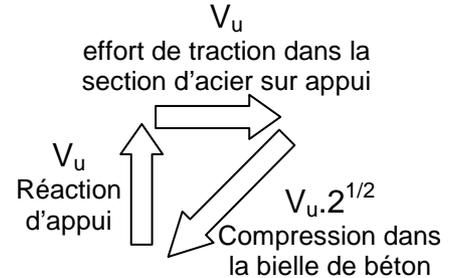
Fig.6.4 Treillis équivalent de Ritter-Mörsch

## 6.2 Vérification pour un appui simple d'about (A.5.1,31)



'n' nombre de barres (supposées identiques) à l'appui  
 $V_u$  effort tranchant à l'appui

Fig.6.5 Equilibre de la bielle d'about soumise à trois forces



L'analyse précédente montre que la bielle d'appui d'about de poutre inclinée à 45°, est soumise à l'action de trois forces : la réaction d'appui  $V_{u \text{ appui}}$ , l'effort de la section d'acier ancrée à l'appui et la circulation des efforts à 45°. L'équation d'équilibre de la bielle (somme de ces trois forces = 0) montre que :

- Le béton de la bielle doit résister à un effort de compression  $V_u \cdot 2^{1/2}$
- L'acier doit résister à un effort de traction  $V_u$ . La section d'acier sur appui doit être suffisante.
- Les aciers doivent être ancrés pour résister à cet effort. L'ancrage droit ne suffit pas toujours.

article A.5.1,31, "on doit prolonger au-delà du bord de l'appui y ancrer une section d'armatures longitudinales inférieure suffisante pour équilibrer l'effort tranchant  $V_u$ ".

### a. Compression dans la bielle

L'effort est  $V_u \cdot 2^{1/2}$ . La section de bielle perpendiculaire à l'effort incliné de 45° est  $b \cdot a / 2^{1/2}$ . La vérification réglementaire exige :

Contrainte dans le béton = Effort / Section <  $0,8 \cdot f_{cj} / \gamma_b$ . Soit

$$\sigma_{bc} = \frac{V_{u \text{ appui}} \cdot \sqrt{2}}{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b} = \frac{2 \cdot V_{u \text{ appui}}}{a \cdot b} \text{ d'où } \boxed{\frac{2 \cdot V_{u \text{ appui}}}{a \cdot b} \leq 0,8 \cdot \frac{f_{cj}}{\gamma_b}} \text{ avec } a \leq 0,9 \cdot d$$

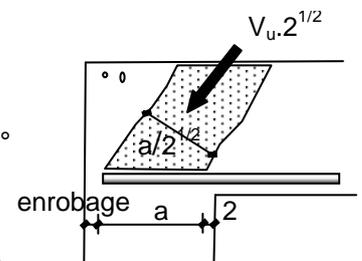
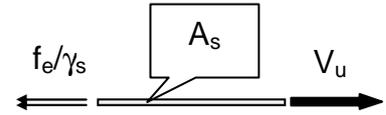


Fig.6.5b Bielle comprimée

Dans la pratique, cette condition est généralement vérifiée, excepté lorsque l'appui est peu long : appui d'une poutre sur un mur de refend par exemple.

**b. Effort  $V_u$  dans la section  $A_s$  sur appui**

La section d'acier  $A_s$  doit résister à l'effort  $V_u$ . Soit  $A_s > V_u / (f_e / \gamma_s)$   
 En pratique, la moitié des aciers nécessaires en travée est prolongée jusqu'aux appuis (on prolonge en général le premier lit inférieur).



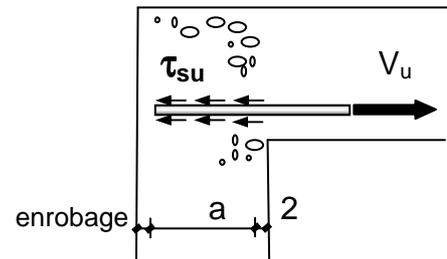
**Fig.6.6 Vérification de la section d'acier**

**c. Ancrage**

L'ancrage droit suffit il pour que  $n$  barres ( $n$  le nombre de barres à l'appui) puissent ancrer l'effort  $V_{u\text{appui}}$ .  
 La contrainte de scellement droit vaut à l'ELU :  
 $\tau_{su} = 0,6 \cdot \psi_s^2 \cdot f_{tj}$

$$V_u / n < \Pi \cdot \Phi \cdot L \cdot \tau_{su} \text{ d'où } L = V_u / [n \cdot \Pi \cdot \Phi \cdot \tau_{su}] < a$$

Si cette condition n'est pas respectée, il est nécessaire de faire un ancrage courbe.



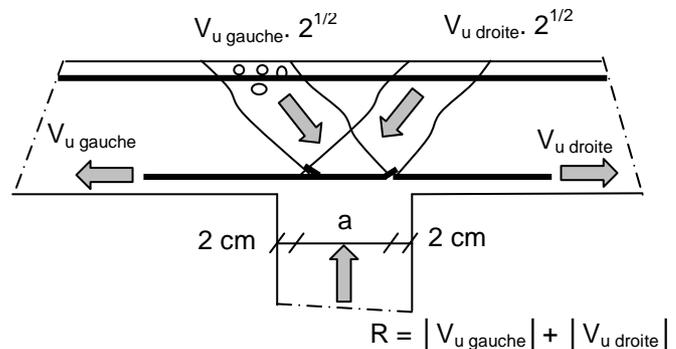
**Fig.6.7 Ancrage**

**6.3 Vérification d'appui intermédiaire (art 5.1,31)**

De même dans le cas d'un appui de continuité entre deux travées de poutres, il convient de vérifier la compression dans la bielle, la section d'armature et son ancrage de chaque coté de l'appui.

**a. Vérification de la compression dans le béton**

$$R_u / (ab) \leq 1,3 \cdot f_{cj} / \gamma_b \text{ avec } a \leq 0,9d$$



**Fig.6.7bis Appui intermédiaire**

**b. Vérification de la section d'acier à gauche et à droite de l'appui.**

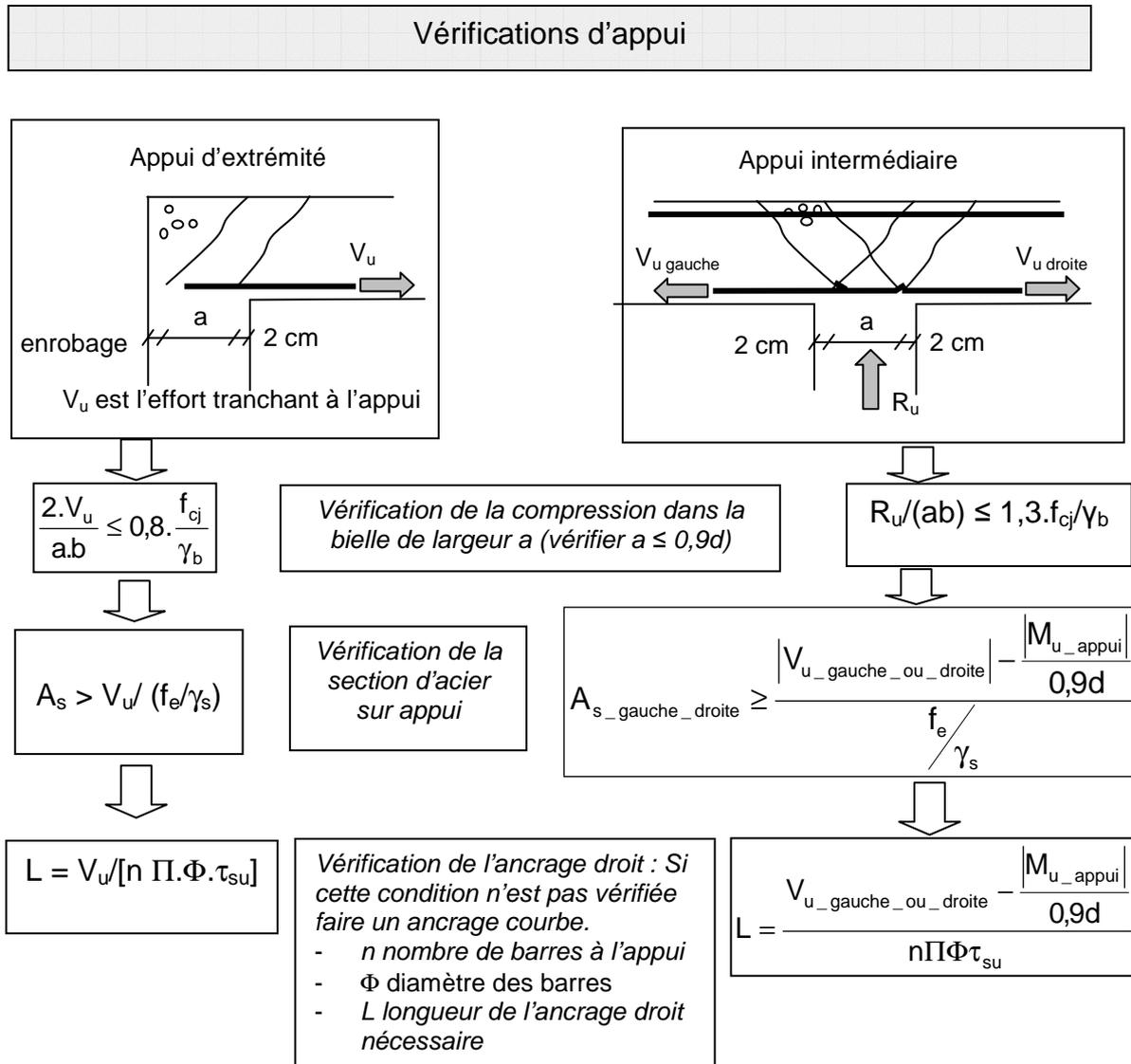
Le moment sur appui crée généralement une traction en partie haute de la poutre d'où les aciers en chapeau et une compression dans le béton en partie inférieure. L'effort de compression  $N_{bc}$  vaut, de chaque coté de l'appui,  $M_u / z$  et s'oppose aux efforts de traction  $V_{u\text{ gauche}}$  ou  $V_{u\text{ droite}}$  dans l'acier. Si  $V_{u\text{ gauche}}$  ou  $V_{u\text{ droite}} < M_u / z$  (avec  $z = 0,9d$ ), il n'est théoriquement pas nécessaire de prolonger les aciers sur appui, mais il est de bonne construction de le faire.

$$A_{s\_gauche\_droite} \geq \frac{|V_{u\_gauche\_ou\_droite}| - \frac{|M_{u\_appui}|}{0,9d}}{f_e / \gamma_s}$$

**c. Vérification de l'ancrage**

La vérification se fait se fait comme pour l'appui d'about de poutre mais avec l'effort  $V_{u\text{ gauche ou droite}} - |M_u| / 0,9d$

## 6.4 Organigramme résumé



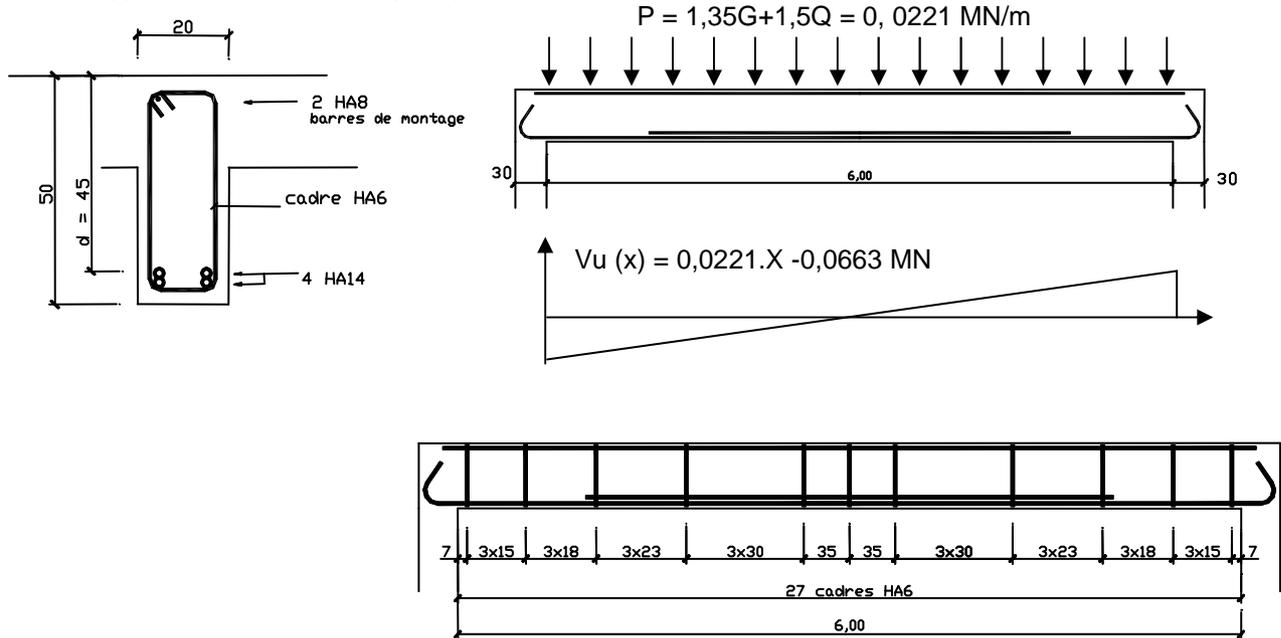


Pour obtenir l'épure d'arrêt de barres ci-dessus l'ordre des opérations est le suivant :

1. Déterminer la courbe enveloppe des moments fléchissant
2. Décaler de  $0,8h$  cette courbe des moments
3. Calculer les moments résistant de chaque lit d'armature
4. Tracer la courbe des moments résistant en tenant compte de la longueur de scellement droit des lits d'armatures et en ayant toujours des moments résistant supérieur aux moments 'décalés'.
5. En déduire la longueur du ou des lits d'armatures qui ne vont pas jusqu'aux appuis.

## 6.6 Application : Suite de la poutre étudiée aux chapitres 1, 4 et 5

Suite de l'application traitée au chapitre précédent.



### Vérifications des appuis

La poutre reposant sur deux appuis en béton de largeur 30cm. L'article A 5.1,313 conduit, avec un enrobage de 3 cm en bout du premier lit, à une longueur d'appui de la bielle d'about :  $a = 25$  cm.

a. Vérification de la contrainte de compression du béton dans la bielle:

$$\frac{2.V_{u\_appui}}{a.b} = \frac{2 \times 0,0663}{0,25 \times 0,20} = 2,65 \leq 0,8 \cdot \frac{f_{cj}}{\gamma_b} = 0,8 \cdot \frac{25}{1,5} = 13,3 \text{ MPa}$$

b. Vérification de la section d'acier sur appui.

$$A_s \geq V_u / (f_e / \gamma_s) \text{ soit } 2 \text{ HA14} = 3,08 \text{ cm}^2 \geq 0,0663 / (500 / 1,15) \text{ m}^2 = 1,53 \text{ cm}^2$$

c. L'ancrage droit suffit il ?

Pour un barre HA avec et  $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$   $\tau_{su} = 2,84 \text{ MPa}$  (voir chapitre 3)

Chaque barre HA14 reprend un effort  $V_u / n = 0,0663 / 2 \text{ MN}$

L'ancrage droit nécessaire à pour longueur L telle que :

$$V_u / n = 0,0663 / 2 < \Pi \cdot \Phi \cdot L \cdot \tau_{su} = \Pi \cdot 0,014 \cdot L \cdot 2,84 \text{ soit } L > 0,265 \text{ m}$$

Ce qui est légèrement supérieur au 25 cm disponible. Il est donc nécessaire de faire un ancrage courbe.

## Epure d'arrêts de barres.

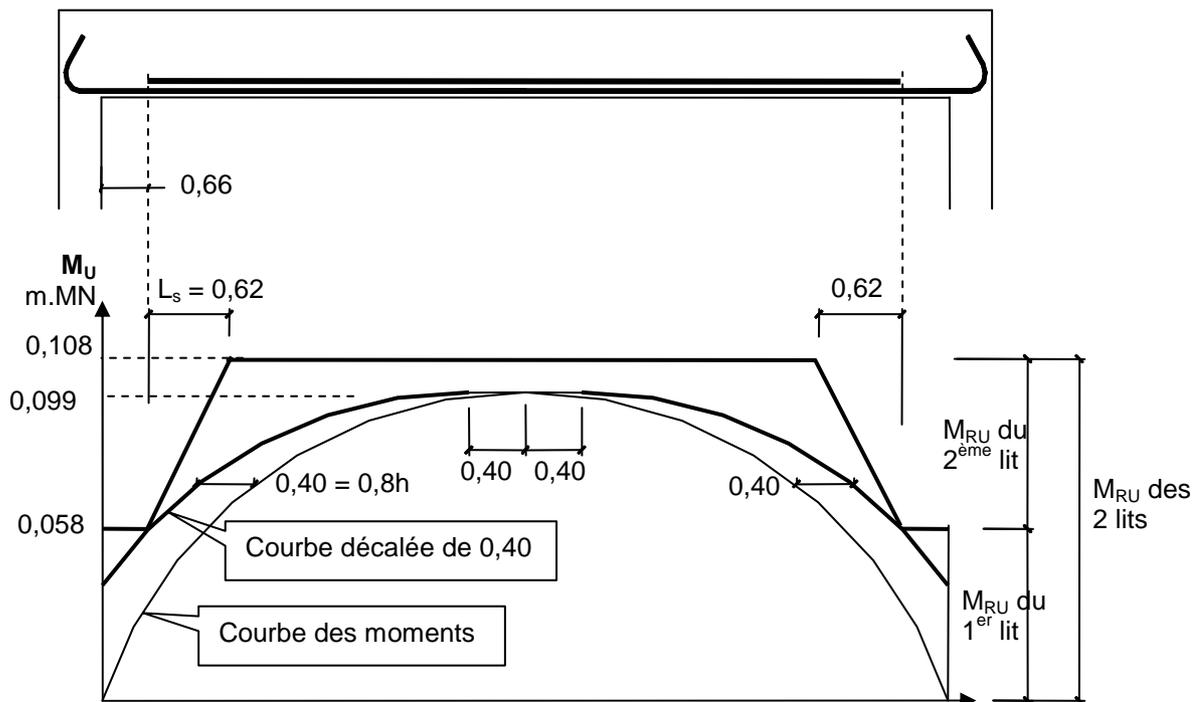
- La courbe des moments fléchissant est donnée par l'équation  $M_u(x) = 0,0663.X - 0,0221X^2/2$
- Cette courbe des moments est décalée de  $0,8h = 0,8 \times 50 = 40\text{cm}$
- Calcul des moments résistant de chaque lit d'armature (voir détails chap 4)
  - Pour le 1<sup>er</sup> lit (jusqu'aux appuis)
 
$$\alpha = [A_s f_e / \gamma_s] / [0,8bd f_{bu}] = 3,08 \cdot 10^{-4} \times (500/1,15) / [0,8 \times 0,2 \times 0,457 \times 14,17] = 0,129 < \alpha_L = 0,616$$

$$z = [1 - 0,4\alpha] \cdot d = 0,433\text{m}$$

$$M_{ru} = z \cdot A_s f_e / \gamma_s = 0,058 \text{ m.MN}$$
  - Pour les 2 lits
 
$$\alpha = [A_s f_e / \gamma_s] / [0,8bd f_{bu}] = 6,16 \cdot 10^{-4} \times (500/1,15) / [0,8 \times 0,2 \times 0,45 \times 14,17] = 0,263 < \alpha_L = 0,616$$

$$z = [1 - 0,4\alpha] \cdot d = 0,402\text{m}$$

$$M_{ru} = z \cdot A_s f_e / \gamma_s = 0,108 \text{ m.MN}$$
- Tracer la courbe des moments résistant
  - La longueur de scellement droit des HA14 est  $44 \times 1,4 = 62\text{cm}$
- On en déduit graphiquement ou analytiquement la longueur du lit d'armatures qui s'arrête



**Epure d'arrêt de barres**

Analytiquement le calcul est le suivant :

- On exprime l'équation de la courbe des moments décalée de  $0,8 \cdot h$  valable dans la zone à droite de l'appui de rive gauche:
 
$$M_u(x) = 0,0663 \cdot (x+0,40) - 0,0221 \cdot (x+0,40)^2/2 = -0,01105 \cdot x^2 + 0,0575 \cdot x + 0,0247$$
- Le point d'intersection entre les deux courbes de moments décalés et résistants s'obtient en égalant :
 
$$0,0580 = -0,01105 \cdot x^2 + 0,0575 \cdot x + 0,0247$$
 soit
 
$$x = 0,66\text{m}$$
 abscisse à partir de laquelle doit débuter le 2<sup>ème</sup> lit de 2 HA 14.

On remarque la montée linéaire en résistance du second lit d'armatures: le moment résistant de  $0,108$  m.MN est atteint lorsque le second lit est ancré par scellement droit sur  $L_s = 0,62\text{m}$

La zone entre les deux courbes est un surplus de résistance.

D'où, **enfin** le plan de ferrailage de la poutre.

