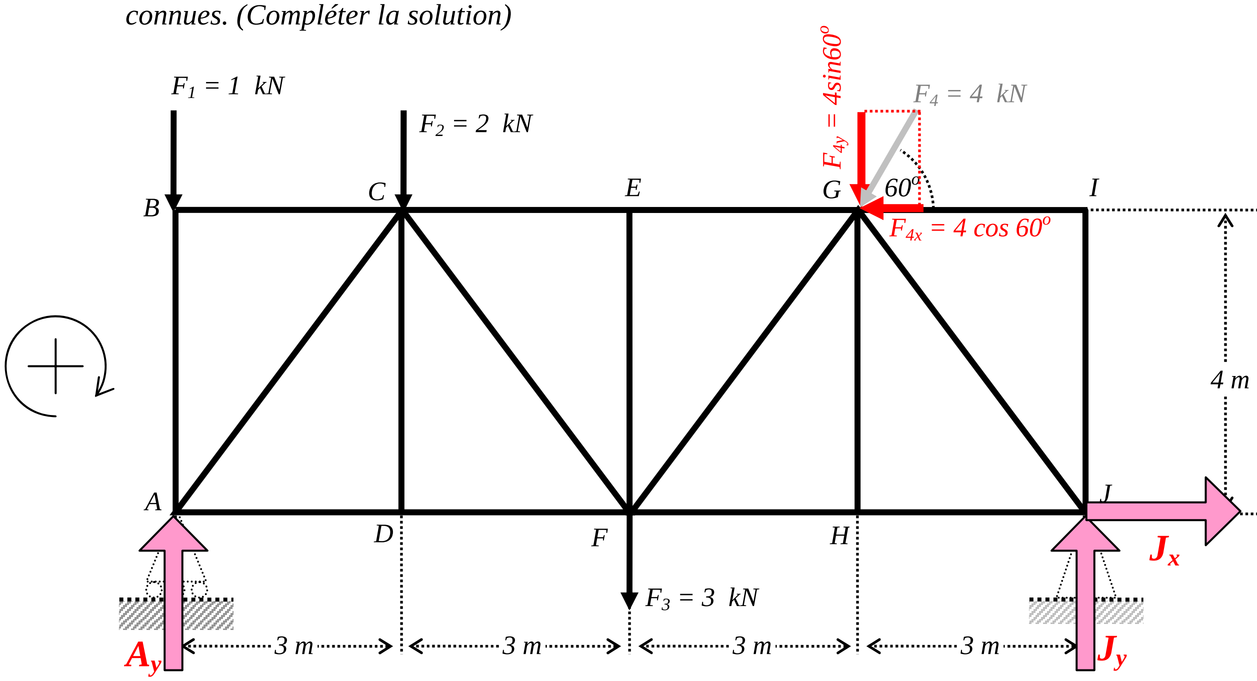
3E4s *Résoudre par la méthode des nœuds, la structure triangulée schématisée. Donner aussi la grandeur et la direction des réactions aux appuis. Vous devez faire le diagramme des forces sur chacun des nœuds en y indiquant clairement le symbole de chacune des forces et en y inscrivant la valeur des forces connues. (Compléter la solution)*



Détermination des réactions aux appuis :

$\Sigma M_A = 0 = A_y \times \mathbf{0} + 1 \times \mathbf{0} + 2 \times \mathbf{3} + 3 \times \mathbf{6} - 4\cos 60^o \times \mathbf{4} + 4\sin 60^o \times \mathbf{9} + J_x \times \mathbf{0} - J_y \times \mathbf{12} = 0$

$\Rightarrow J_y = (6 + 18 - 8 + 31{,}1769) \div 12 = 3{,}93141 \text{ kN} \Rightarrow \underline{\underline{J_y = 3{,}93141 \text{ kN}}}$

$\Sigma M_J = 0 = + A_y \times \mathbf{12} - 1 \times \mathbf{12} - 2 \times \mathbf{9} - 3 \times \mathbf{6} - 4\cos 60^o \times \mathbf{4} - 4\sin 60^o \times \mathbf{3} + J_x \times \mathbf{0} - J_y \times \mathbf{0} = 0$. . . . .

$\Rightarrow A_y = (12 + 18 + 18 + 8 + 10{,}3923) \div 12 = 5{,}53269 \text{ kN} \Rightarrow \underline{\underline{A_y = 5{,}53269 \text{ kN}}}$

$\Sigma F_x = 0 = -4\cos 60^o + J_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{J_x = 2{,}00 \text{ kN}}}$

Vérification : $\Sigma F_y = ?\ 0 = +5{,}53269 - 1 - 2 - 3 - 4\sin 60^o + 3{,}93141 = 0 \Rightarrow$ *OK!*

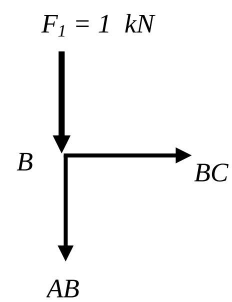
$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = (2^2 + 3{,}93141^2)^{1/2} = 4{,}410989 \text{ kN}$

$\theta_J = \tan^{-1}(J_y / J_x) = \tan^{-1}(3{,}93141 / 2) = 63{,}0365^o$

$A = 5.5327$ kN : $\theta_A = 90^o$: $J = 4.4109$ kN : $\theta_J = 63.04^o$

Nœud B

	OX	OY
F_1	**0**	**– 1**
AB	**0**	**– AB**
BC	**+ BC**	**0**

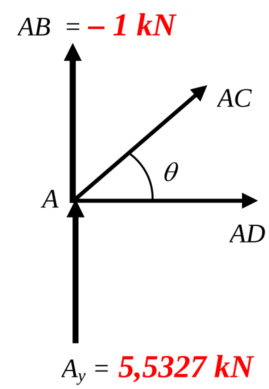


$\Sigma F_x = 0 + 0 + BC = 0 \Rightarrow \underline{\underline{BC = 0}}$

$\Sigma F_y = -1 - AB + 0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{AB = -1\ kN}}$

Nœud A

	OX	OY
A_y	**0**	**+ 5,5327**
AB	**0**	**+ AB = – 1**
AC	**+ AC cos θ**	**+ AC sin θ**
AD	**AD**	**0**



Calcule de θ : $\theta = \tan^{-1}(4 \div 3) = 53,1301^0$

$\Sigma F_y = +5,5327 - 1 + AC \sin 53,13^o = 0$

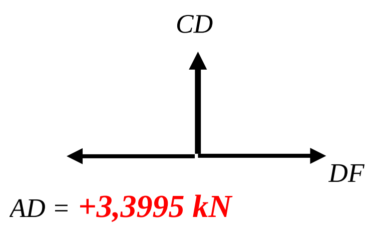
$\Rightarrow AC = (-5,5327 + 1) \div \sin 53,13^o \Rightarrow \underline{\underline{AC = -5,6659\ kN}}$

$\Sigma F_x = 0 + 0 + AC \cos 53,13^o + AD = -5,6659 \cos 53,13^o + AD = 0$

$\Rightarrow AD = +5,56659 \cos 53,13^o \Rightarrow \underline{\underline{AD = +3,3995\ kN}}$

Nœud D

	OX	OY
AD	**– AD = – 3,3995**	**0**
CD	**0**	**+ CD**
DF	**+ DF**	**0**

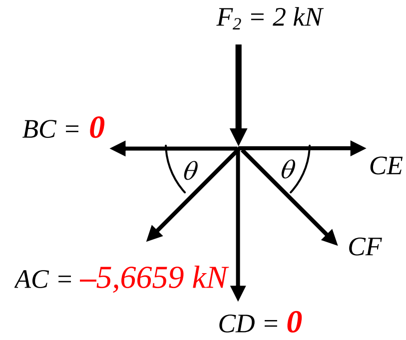


$\Sigma F_x = -3,3995 + 0 + DF = 0 \Rightarrow \underline{\underline{DF = +3,3995\ kN}}$

$\Sigma F_y = 0 + CD + 0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{CD = 0}}$

Nœud C

	OX	OY
F_2	**0**	**– 2**
CE	**+ CE**	**0**
CF	**+ CF cos 53,13°**	**– CF sin 53,13°**
CD	**0**	**– CD = 0**
AC	**– AC cos θ** **= + 5,6659 cos 53,13°**	**– AC sin θ** **= + 5,6659 sin 53,13°**
BC	**– BC = 0**	**0**



$\Sigma F_y = -2 + 0 - CF \sin 53{,}13^o - 0 + 5{,}6659 \sin 53{,}13^o = 0$

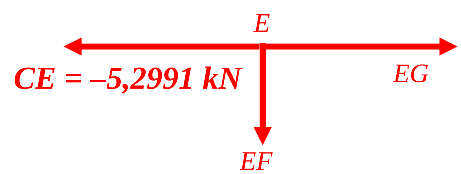
$\Rightarrow CF = (-2 + 5{,}6659 \sin 53{,}13^o) \div \sin 53{,}13^o \Rightarrow$ **CF = + 3,1659 kN**

$\Sigma F_x = 0 + CE + (+3{,}1659) \cos 53{,}13^o + 5{,}6659 \cos 53{,}13^o + 0 = 0$

$\Rightarrow CE = (-3{,}1659 \cos 53{,}13^o - 5{,}6659 \cos 53{,}13^o) = 0 \Rightarrow$ **CE = – 5,2991 kN**

Nœud E

	OX	OY
CE	**– CE = + 5,2991**	**0**
EG	**+ EG**	**0**
EF	**0**	**– EF**

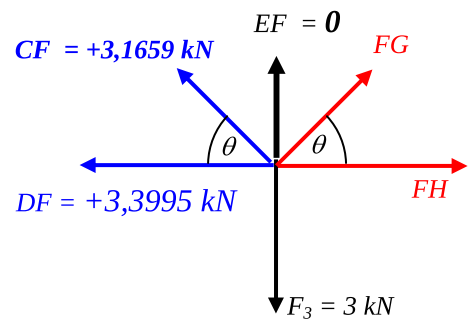


$\Sigma F_x = + 5{,}2991 + EG = 0 \Rightarrow$ **EG = – 5,2991 kN**

$\Sigma F_y = 0 + 0 - EF = 0 \Rightarrow$ **EF = 0**

Nœud F

	OX	OY
EF	0	0
DF	**– DF = – 3,3995**	**0**
CF	**– CF cos θ** **= –3,1659 cos 53,13°**	**+ CF sin θ** **= + 3,1659 sin 53,13°**
F_3	0	– 3
FG	+ FG cos 53,13°	+ FG sin 53,13°
FH	+ FH	0

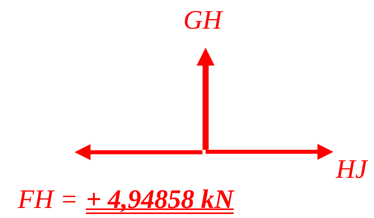


$\Sigma F_y = 0 + 0 + 3{,}1659 \sin 53{,}13^o - 3 + FG \sin 53{,}13^o + 0 = 0 \Rightarrow$ **FG = + 0,58411 kN**

$\Sigma F_x = 3{,}3995 - 3{,}1659 \cos 53{,}13^o + 0 + (+ 0{,}58411) \sin 53{,}13^o + FH = 0 \Rightarrow$ **FH = + 4,94858 kN**

Nœud H

	OX	OY
FH	– FH = – 4,94858	0
HG	0	+ GH
HJ	+ HJ	0

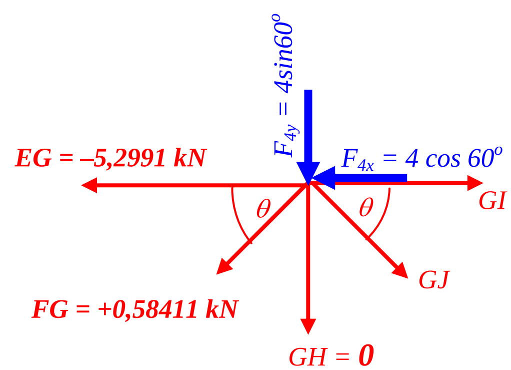


$\Sigma F_y = 0 + GH + 0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{GH = 0}}$

$\Sigma F_x = -4{,}94858 + 0 + HJ = 0 \Rightarrow \underline{\underline{HJ = +4{,}94858 \text{ kN}}}$

Nœud G

	OX	OY
EG	– EG = 5,2991	0
FG	– FG cos θ = – 0,58411 cos 53,13°	–FG sin θ = – 0,58411 sin 53,13°
F_4	– 4 cos 60°	– 4 sin 60°
GH	0	0
GI	+ GI	0
GJ	+ GJ cos 53,13°	– GJ sin 53,13°



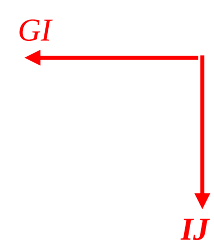
$\Sigma F_y = 0 - 0{,}58411 \sin 53{,}13^o - 4 \sin 60^o + 0 + 0 - GJ \sin 53{,}13^o = 0 \Rightarrow \underline{\underline{GJ = -4{,}9142 \text{ kN}}}$

$\Sigma F_x = +5{,}2991 - 0{,}58411 \cos 53{,}13^o - 4 \cos 60^o + 0 + GI + (-4{,}9142) \cos 53{,}13^o = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{GI = +0 \text{ kN}}}$

Nœud I

	OX	OY
GI	– GI	0
IJ	0	– IJ



$\Sigma F_x = -GI + 0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{GI = 0}}$

$\Sigma F_y = 0 - IJ = 0 \Rightarrow \underline{\underline{IJ = 0}}$

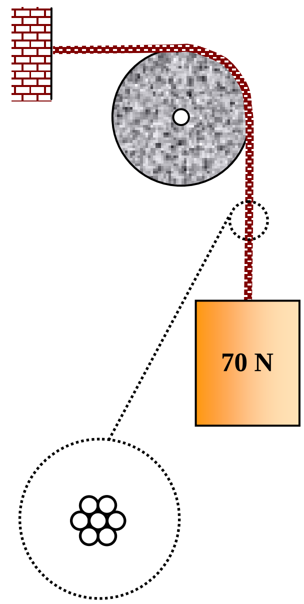
NOM : ……………………………………………………..

À compléter avant : ……………………………………………………………………………

Exercice 7A

La figure ci-contre montre un câble d'acier de 1 mm de diamètre constitué de 7 fils de 360 μm de diamètre enroulés autour d'une poulie de 30 cm de diamètre et supportant une charge de 70 N. Déterminer la contrainte normale de tension maximale à laquelle ce câble est soumis. Préciser aussi quelle fibre sur le câble subit cette contrainte.

(Rép. : $\sigma_{max} = (F/A) + (E\ y/r) = 98{,}2$ MPa + 239,7 MPa = 337,9 MPa, sur la fibre à la surface du fil qui touche à la poulie là où celui-ci la contourne.)



Données :

Matériau du câble = acier $\Rightarrow E = 200\times10^{9}$ Pa

D_f = diamètre d'un fil = 360μm $=360\times10^{-6}$ m

D_p = diamètre de la poulie = 30 cm = 0,30 m

F = force supportée par le câble = 70 N

La contrainte normale σ est maximale lorsque la contrainte σ_F due à la force de traction de 70 N s'ajoute à la contrainte $\sigma_{flexion}$ due à courbure du câble autour de la poulie.

Calcul de $\sigma_F = F / A_n$

A_n = section de 7 fils ayant chacun un diamètre de 360×10^{-6} m

$$= 7\times\pi\times(360\times10^{-6})^2 \div 4 = 712{,}513\times10^{-9}\ m^2.$$

$$\sigma_F = F / A_n = 70 \div 712{,}513\times10^{-9} = 98{,}244\times10^{6}\ Pa$$

Calcul de la valeur maximale de $\sigma_{flexion}$.

Puisque $\sigma_{flexion} = Ey / r$, elle atteint sa valeur maximale pour
$y = y_{max}$ = le rayon d'un fil $= 360\times10^{-6} \div 2 = 180\times10^{-6}$ m
et
$r = r_{min}$ = rayon de la poulie + rayon d'un fil = 0,15m + 0,00018m = 0,150180 m

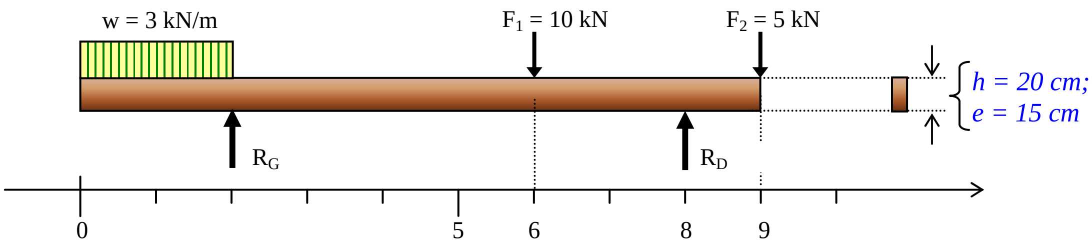
$$\Rightarrow \sigma_{flexion\ maximal} = Ey_{max} / r_{min} = 200\times10^{9} \times180\times10^{-6} \div 0{,}150180 = 239{,}712\times10^{6}\ Pa$$

$$\sigma_{max} = \sigma_F + \sigma_{flexion\ maximal} = 98{,}244\times10^{6} + 239{,}712\times10^{6} = 337{,}96\times10^{6}\ Pa = \underline{\mathbf{338\ MPa}}$$

Ce sera sur la fibre ayant la plus petite valeur de « r » soit sur la fibre à la surface du fil qui touche à la poulie là où celui-ci la contourne.

Exercice 7B

Soit la poutre chargée ci-dessous laquelle est en bois de construction. Elle a une section droite rectangulaire pleine de 20 cm × 15 cm. Calculer les contraintes normale et de cisaillement maximales ainsi que son facteur de sécurité. On néglige le poids propre de la poutre.



(Rép. : V_{max} = 6,5 kN pour 6 < x < 8 ; M_{max} = 8 kN.m à x = 6 m ; σ_{max} = 8,00 MPa; τ_{max} = 0,325 MPa et F.S. = 6,9)

Solution :

La formule donnant la contrainte normale maximale est : $\sigma_{max} = M_{max} / S$

Le module de flexion « S » de la poutre doit être calculé avec la formule $S_x = h^2 e/6$

*Avec h = dimension verticale = ………**0,20 m**…… et e = dimension horizontale = ……**0,15 m**………*

$\Rightarrow S_x = \mathbf{h^2 b / 6 = 0{,}20^2 \times 0{,}15 \div 6 = 1{,}0000 \times 10^{-3}\ m^3}$

Pour obtenir la contrainte normale maximale pour toute la poutre, il suffit donc de calculer M_{max}, la valeur du moment fléchissant maximal pour toute la poutre.

La formule donnant la contrainte de cisaillement maximale est : $\tau_{max} = 1{,}5\dfrac{V_{max}}{he}$ *dans laquelle*

V = effort tranchant maximal pour toute la poutre.

*h = hauteur du profilé = ………**0,20** ……. m et e = épaisseur du profilé = ……**0,15**………. m*

Pour déterminer les contraintes normale et de cisaillement maximales pour toute la poutre, il suffit de calculer respectivement « M_{max} » et « V_{max} », le moment fléchissant et l'effort tranchant maximaux pour toute la poutre. Pour cela, il faut commencer par déterminer les réactions aux appuis « R_G» et « R_D». Nous devrons ensuite tracer le diagramme de l'effort tranchant. Nous pourrons facilement y lire la valeur de V_{max}. Pour obtenir la valeur de M_{max}, il faudra commencer par déterminer les endroits où V = 0 et y calculer la valeur de M. La valeur maximale obtenue pour M est M_{max}. Dans chaque cas on ne tiendra pas compte du signe.

1° Déterminons d'abord $\mathbf{R}_G$ et $\mathbf{R}_D$, les réactions aux appuis :

$\Sigma M_{x=2} = -(3\ kN/m \times 2\ m) \times 1\ m + R_G \times 0 + 10kN \times 4m - R_D \times 6m + 5kN \times 7m = 0$

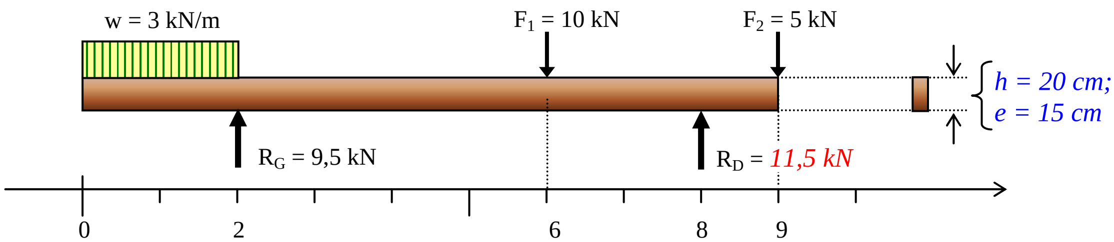
$\Rightarrow\ R_D = (-6 + 40 + 35) \div 6 = 11{,}5\ kN$

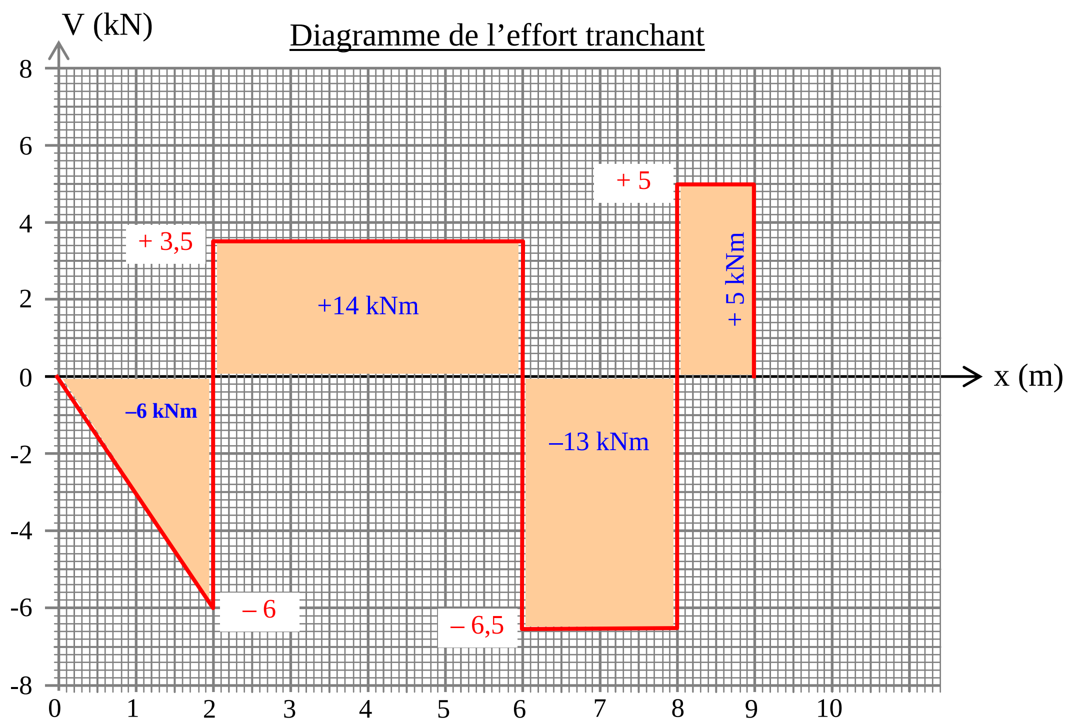
$\Sigma M_{x=8}$ = ... = 0

$\Rightarrow\ R_G$ = ... = 9,500 kN

Vérification : ΣF_y = ... = 0 $\Rightarrow$ OK!

2° On peut maintenant tracer le diagramme de l'effort tranchant





On peut lire sur le diagramme de V(x) que V_{max} = 6 500 kN et se situe de x = 6 m à x = 8m

$\Rightarrow$ τ_{max} = 1,5 Vmax / he = 1,5× 6500 / (0,20×0,15) Pa = 0,325 × 10^6 Pa = <u>0,325 MPa</u>

On peut lire sur le diagramme que M_{max} est soit la valeur de M pour x = 2 m, soit la valeur de M pour x = 6 m , soit la valeur de M pour x = 8 m, car ce sont les 3 seuls endroits, ailleurs qu'aux extrémités où V = 0.

On calcule donc M(x) pour chacune de ces 3 valeurs de x.

x (m)	Calcul de M(x)			M(x) (kN-m)
	Méthode des équations		méthode des surfaces sous V(x)	
2	– 3×2×1	ou bien	– 6×2÷ 2	– 6
6	– 3×2×(6 – 1) + 9,5×(6 – 2)	ou bien	– 6×2÷ 2 + 3,5×(6 – 2)	+ 8
8	– 3×2×(8 – 1) + 9,5×(8 – 2) –10×(8 –6)	ou bien	– 6×2÷ 2 + 3,5×(6 – 2) – 6,5×2	– 5

La valeur maximale du moment fléchissant est donc <u>M_{max} = 8,0 kN.m pour x = 6 m</u> de l'extrémité gauche de la poutre.

$\Rightarrow$ $\sigma_{max} = M_{max} / S_x$ = 8 000 ÷ 1,0000 ×10^{-3} = 8,0000×10^{6} Pa = 8 MPa *(d) Pour obtenir le facteur de sécurité global pour toute la poutre il suffit de le calculer à l'endroit où il est minimale. Dans le cas d'un profilé en bois de construction, ça peut être aussi bien le facteur de sécurité relié à la contrainte normale maximale pour toute la poutre que celui relié à la contrainte de cisaillement maximale pour toute la poutre. Il faut prendre le plus petit des deux.*

F.S. pour la contrainte normale = $\sigma_u \ / \ \sigma_{max}$ *avec* σ_u = 55 MPa *(Tableau G en compression car plus faible)*

F.S. pour la contrainte normale = $\sigma_u \ / \ \sigma_{max}$ = 55 MPa ÷ 8 MPa = 6,875

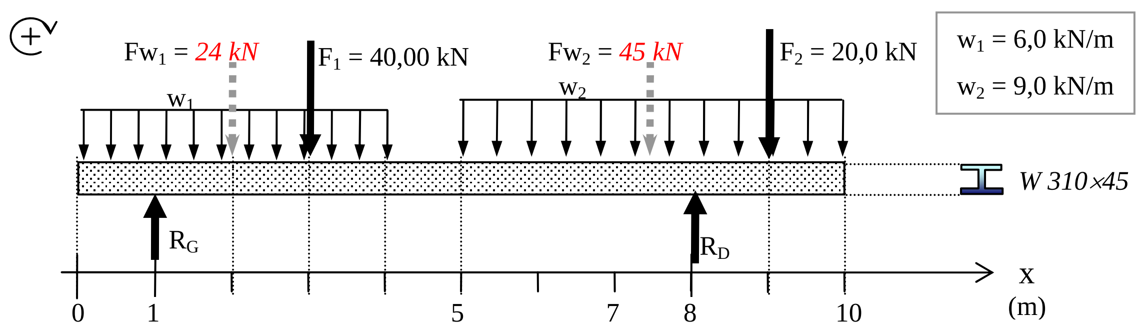
F.S. pour la contrainte de cisaillement = $\tau_u \ / \ \tau_{max}$ *avec* τ_u = 3,5 MPa *(Tableau G)*

F.S. pour la contrainte de cisaillement = $\tau_u \ / \ \tau_{max}$ = 3,5 MPa ÷ 0,325 MPa = 10,77

⇒ *Le F.S. global pour toute la poutre = 6,875* *(On prend le plus petit des F.S.)*

Exercice 7C

Soit la poutre chargée de la figure ci-dessous. Il s'agit du profilé d'acier en « H » W 310×45. Déterminer les contraintes normale et de cisaillement maximales (a) pour x = 2 m; (b) pour x = 7 m; (c) pour toute la poutre. (d) De plus, déterminer le facteur de sécurité global pour toute la poutre. On néglige le poids propre de la poutre.



1° Déterminons d'abord $\mathbf{R}_G$ *et* $\mathbf{R}_D$*, les réactions aux appuis :*

$\Sigma M_{x=1} = 6\times4\times(2-1) + 40\times(3-1) + 9\times5\times(7{,}5-1) + 20\times(9-1) - (8-1)\times R_D = 0$

$\Rightarrow \quad R_D = (24 + 80 + 292{,}5 + 160) \div 7 = 79{,}5 \text{ kN}$

$\Sigma M_{x=8} = +(8-1)\times R_G - 6\times4\times(8-2) - 40\times(8-3) - 9\times5\times(8-7{,}5) + 20\times(9-8) = 0$

$\Rightarrow \quad R_G = (144 + 200 + 22{,}5 - 20) \div 7 = 49{,}5 \text{ kN}$

Vérification : $\Sigma F_y = 49{,}5 - 6\times4 - 40 - 9\times5 + 79{,}5 - 20 = 0 \quad \Rightarrow$ *OK!*

(a) et (b) Déterminons les contraintes normale et de cisaillement maximales pour x = 2 m et pour x = 7m

La formule donnant la contrainte normale maximale est : $\sigma_> = M / S$

Le module de flexion « S » de la poutre peut être lu directement dans le tableau F1:

$S_x = 634 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 634 \times 10^3 (10^{-3} \text{ m})^3 = 634 \times 10^3 \times 10^{-9} \text{ m}^3 = 634 \times 10^{-6} \text{ m}^3$

Pour obtenir la contrainte normale maximale pour une valeur donnée de x, il suffit donc d'y calculer $M_{(x)}$*, la valeur du moment fléchissant.*

La formule donnant la contrainte de cisaillement maximale est : $\tau_> = 1{,}5\dfrac{V}{he}$ *dans laquelle*

V = effort tranchant pour la section considérée.

h = hauteur du profilé = 313 mm = 0,313 m

e = épaisseur de l'âme du profilé = 6,6 mm = 0,0066 m (tableau F1)

On a donc $\tau_{>} = 1{,}5\dfrac{V}{he} = 1{,}5\dfrac{V}{(0{,}313)\times(0{,}0066)} = 726{,}11\ V$ *(en unités SI)*

Pour obtenir la valeur de $\tau_{>}$ *pour une valeur donnée de « x », il suffit donc d'y calculer l'effort tranchant.*

(a) Il suffit donc de calculer $M_{(x=2)}$, *et* $V_{(x=2)}$ *pour x = 2 m.*

$M_{(x=2\,m)}, = R_G \times (2-1) - w_1 \times 2 \times 1 = 49\,500 \times 1 - 6\,000 \times 2 = 37\,500$ N.m

$\Rightarrow \sigma_{>\,(x=2)} = M_{(x=2\,m)}, / S_x = 37\,500 \div (634 \times 10^{-6}) = \underline{\underline{59{,}15\ MPa}}$

$V_{(x=2\,m)} = R_G - w_1 \times 2 = 49\,500 - 6\,000 \times 2 = 49\,500 - 12\,000 = 37\,500$ N

$\Rightarrow \tau_{>\,(x=2\,m)} = 726{,}11 \times 37\,500 = 27{,}229 \times 10^6\ Pa = \underline{\underline{27{,}23\ MPa}}$

(b) Il suffit de calculer $M_{(x=7)}$, *et* $V_{(x=7)}$ *pour x = 7 m.*

$M_{(x=7\,m)}, = 49{,}5\times 6 - 24\times 5 - 9\times 2\times 1 - 40\times 4 = -1\ kNm = -1\,000$ N.m

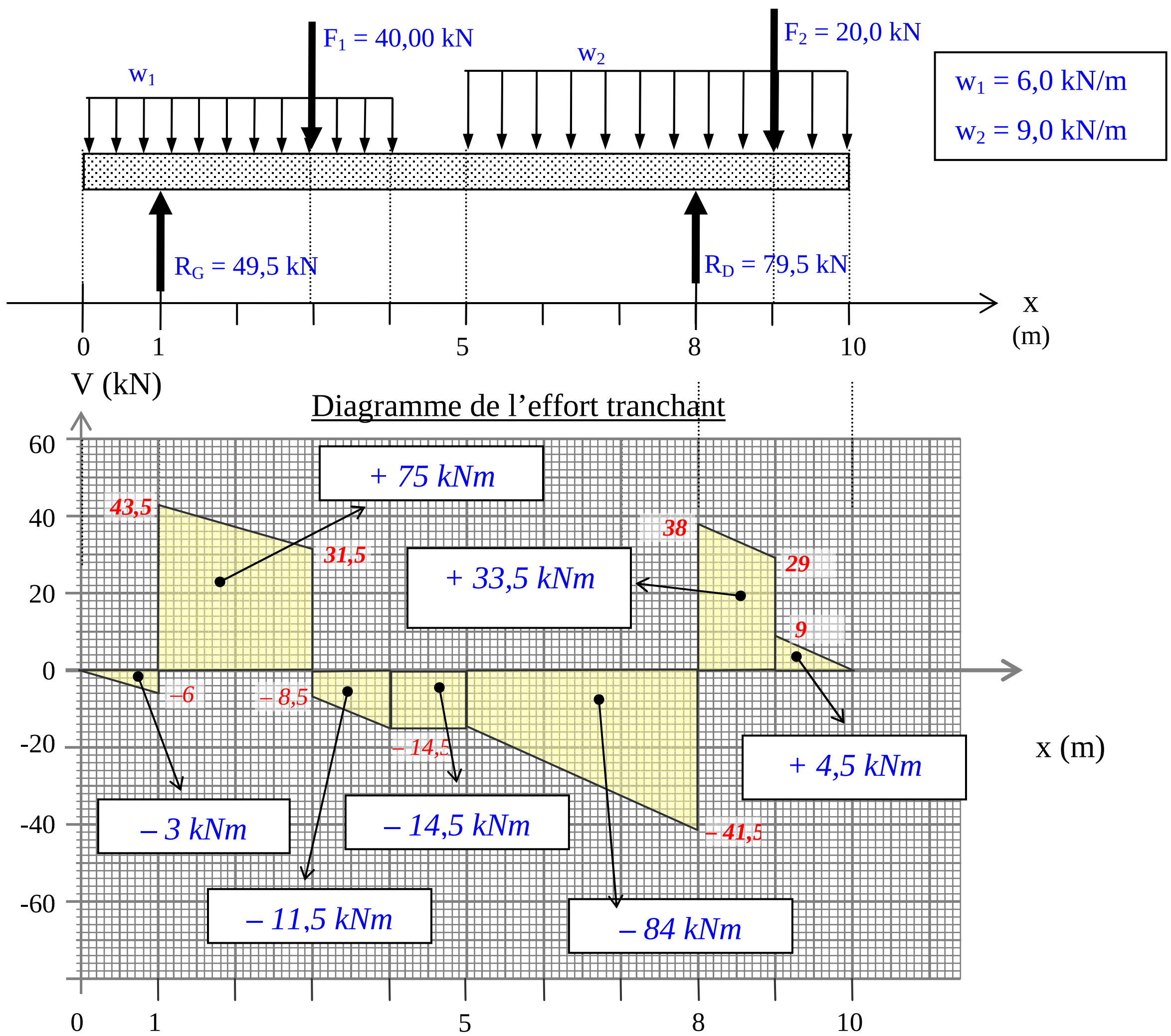
$\Rightarrow \sigma_{>\,(x=7)} = M_{(x=7m)}, / S_x =$ ……………………………………….. ……………….. = $-1{,}58$ MPa

$V_{(x=7\,m)} =$ …………………………………………………………………………………………….= $-32\,500$ N

$\Rightarrow \tau_{>\,(x=7\,m)} =$ ………………..….. × ……………..……….. = ……..…..…….. $\times 10^6$ Pa = $\underline{\underline{23{,}60\ MPa}}$

(c) Pour déterminer les contraintes normale et de cisaillement maximales pour toute la poutre, il suffit de calculer respectivement « M_{max} *» et «* V_{max} *», le moment fléchissant et l'effort tranchant maximaux pour toute la poutre. Pour cela nous devons commencer par tracer le diagramme de l'effort tranchant. Nous pourrons facilement y lire la valeur de* V_{max}. *Pour obtenir la valeur de* M_{max}, *il faudra commencer par déterminer les endroits où V = 0 et y calculer la valeur de M. La valeur maximale obtenue pour M est* M_{max}. *Dans chaque cas on ne tient pas compte du signe.*

N.B. : Le diagramme de V(x) est déjà tracé. Cependant vous devez calculer les surfaces sous la courbe permettant d'obtenir la valeur de M(x) aux endroits désirés. Donc remplir chacune des cases blanches en y inscrivant la valeur de la surface correspondante.



*On peut lire sur le diagramme de V(x) que V_{max} = **43,5 kN** et se situe à x = 1^+ m*

⇒ τ_{max} = ……………………..….. × …………….……….…. = ………..……….. × 10^6 Pa = 31,59 MPa

On peut lire sur le diagramme que M_{max} est soit la valeur de M pour x = 1 m , soit la valeur de M pour x = 3 m soit la valeur de M pour x = 8 m , car ce sont les 3 seuls endroits, ailleurs qu'aux extrémités où V = 0.

On calcule donc M(x) pour chacune de ces 3 valeurs de x.

***x* (m)**	***Calcul de M(x)***	***M(x)* (kN-m)**
1		– 3
3		+ 72
8		–38

La valeur maximale du moment fléchissant est donc M_{max} = 72,0 kN.m pour x = 3 m de l'extrémité gauche de la poutre.

⇒ $\sigma_{max} = M_{max} / S_x$ = ………………………………… ……………………..…….. = 113,56 MPa

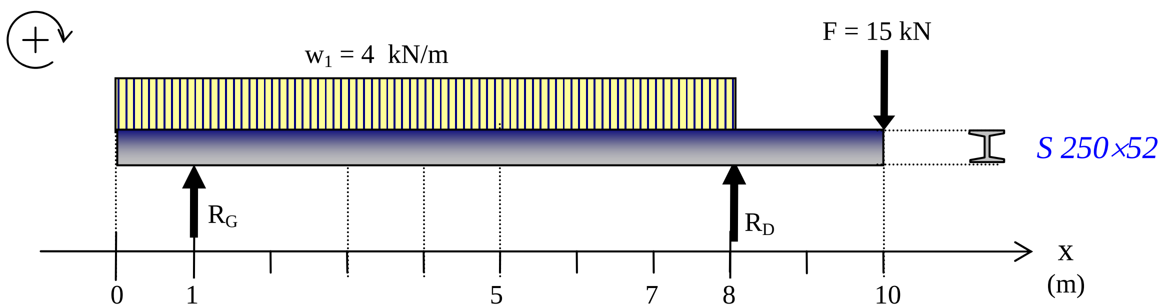
(d) Pour obtenir le facteur de sécurité global pour toute la poutre il suffit de le calculer à l'endroit où il est minimale. Dans le cas d'un profilé d'acier, c'est le facteur de sécurité relié à la contrainte normale maximale pour toute la poutre.

F.S. = σ_u / σ_{max} *avec* σ_u = …………………………. *(Tableau G)*

F.S. = σ_u / σ_{max} = ………………………………………………………………. = 3,96

Exercice 7D

La poutre ci-dessous est le profilé d'acier S250×52. Déterminer les contraintes normales et de cisaillement maximales (a) pour x = 5 m; (b) pour x = 9 m; (c) ainsi que pour toute la poutre. On tient compte du poids propre de la poutre.



Solution :

Il faut commencer par déterminer le poids propre de la poutre en lisant simplement sa valeur dans le tableau F3.

Pour le profilé S250×52 w_{poutre} = 0,513 kN/m = 513 N/m

1º Déterminons ensuite $\boldsymbol{R_G}$ *et* $\boldsymbol{R_D}$*, les réactions aux appuis :*

$\Sigma M_{x=1}$ = 0,513×10×(5 – 1) + 4×8×(……………) + 15×(……………) – (8 – …..)×R_D = 0

⇒ R_D = ...= 35,931 kN

$\Sigma M_{x=8}$ = – 0,513×………×(………….) – 4×. . . . . ×(……………) .. . . . 15×(………….) . . . (8 – …..)×R_G = 0

⇒ R_G = ...= 16,199 kN

Vérification : ΣF_y = –0,513×. . . . . . – 4×. . . . . . - . . . . + ... + 35,9314 = 0 ⇒ OK!

(a) et (b) Déterminons les contraintes normale et de cisaillement maximales pour x = 2 m et pour x = 7m

La formule donnant la contrainte normale maximale est : $\sigma_>$ = M / S

Le module de flexion « S » de la poutre peut être lu directement dans le tableau F3:

S_x = 485 ×10^3 mm^3 = 485×10^3 (10^{-3} m)^3 = 485×10^3 ×10^{-9} m^3 = 485×10^{-6} m^3

Pour obtenir la contrainte normale maximale pour une valeur donnée de x, il suffit donc d'y calculer $M_{(x)}$*, la valeur du moment fléchissant.*

La formule donnant la contrainte de cisaillement maximale est : $\tau_> = 1{,}5\dfrac{V}{he}$ *dans laquelle*

V = effort tranchant pour la section considérée.

h = hauteur du profilé = ………………..mm = …………….. m

e = épaisseur de l'âme du profilé = …………….. mm = ………………. m (tableau F3)

On a donc $\tau_> = 1{,}5\dfrac{V}{he} = 1{,}5\dfrac{V}{(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\times(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)} = 391{,}0935\ V$ *(en unités SI)*

Pour obtenir la valeur de $\tau_>$ *pour une valeur donnée de « x », il suffit donc d'y calculer l'effort tranchant.*

(a) Il suffit donc de calculer $M_{(x=5)}$*, et* $V_{(x=5)}$ *pour x = 5 m.*

$M_{(x=5)} = R_G \times \ldots\ldots - (w_1 + w_{poutre}) \times 5 \times \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 8{,}3835\ kN.m$

$\Rightarrow\ \sigma_{>\,(x=5)} = M_{(x=5)}\ /\ S_x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \underline{\underline{17{,}286\ MPa}}$

$V_{(x=5)} = R_G - (w_1 + w_{poutre}) \times \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ N$

$\Rightarrow\ \tau_{>\,(x=5)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times 10^6\ Pa = \underline{\underline{2{,}49\ MPa}}$

(b) Il suffit donc de calculer $M_{(x=9)}$*, et* $V_{(x=9)}$ *pour x = 9 m.*

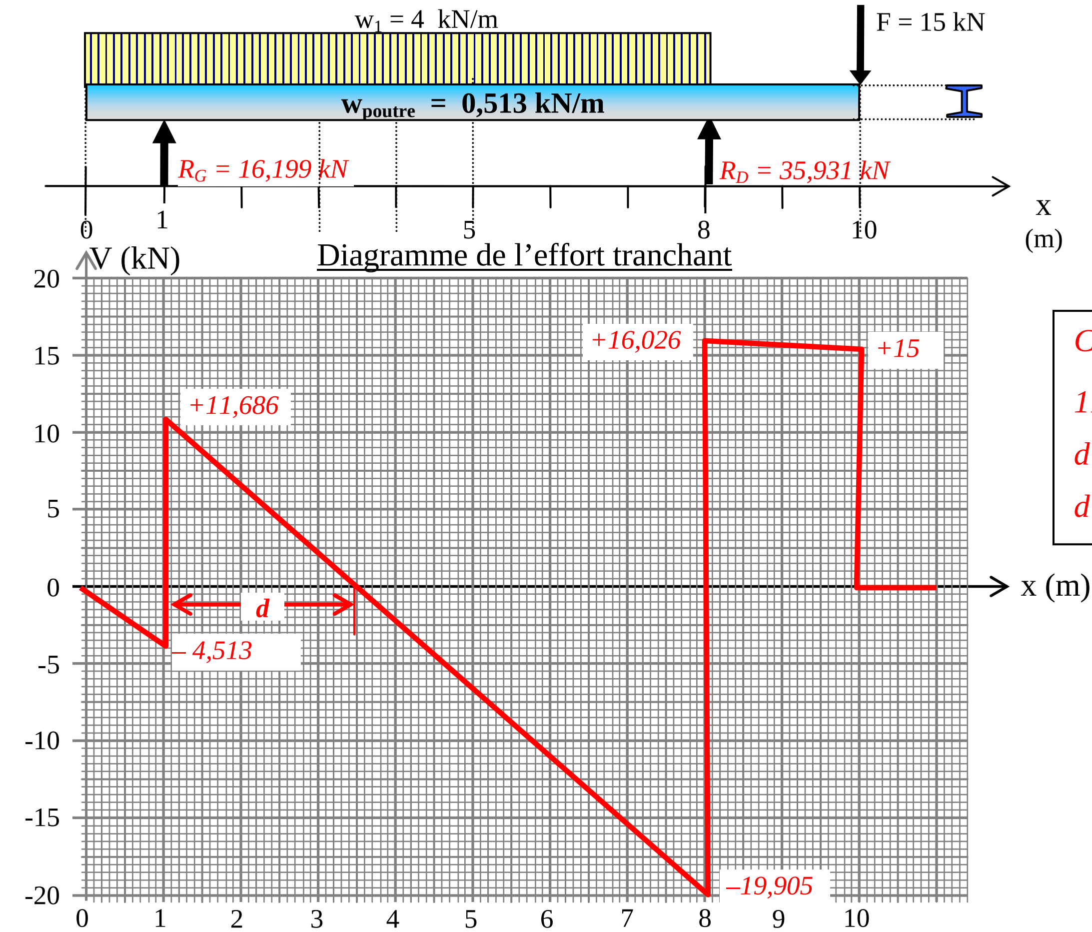
$M_{(x=9)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \mathbf{-15{,}2535\ kNm}$

$\Rightarrow\ \sigma_{>\,(x=9)} = M_{(x=9)}\ /\ S_x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \underline{\underline{31{,}45\ MPa}}$

$V_{(x=9)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \mathbf{-15{,}2535\ kN}$

$\Rightarrow\ \tau_{>\,(x=9)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times 10^6\ Pa = \underline{\underline{6{,}067\ MPa}}$

(c) Pour déterminer les contraintes normale et de cisaillement maximales pour toute la poutre, il suffit de calculer respectivement « M_{max} *» et «* V_{max} *», le moment fléchissant et l'effort tranchant maximaux pour toute la poutre. Pour cela, nous devons commencer par tracer le diagramme de l'effort tranchant. Nous pourrons facilement y lire la valeur de* V_{max}*. Pour obtenir la valeur de* M_{max}*, il faudra commencer par déterminer les endroits où V = 0 et y calculer la valeur de M. La valeur maximale obtenue pour M est* M_{max}*. Dans chaque cas on ne tient pas compte du signe.*



Calcul de « d »

11,686 – 4,513 d = 0

d = 11,686 ÷ 4,513

d = 2,5893 m

On peut lire sur le diagramme de V(x) que V_{max} = ... et se situe à x = 8^- m

$\Rightarrow$ τ_{max} = ………………………….. × ………………………. = ……………….. × 10^6 Pa = 7,785 MPa

On peut lire sur le diagramme V(x) que M_{max} est soit la valeur de M pour x = ……., soit la valeur de M pour une valeur de x à déterminée comprise entre x = 1 m et x = 8 m, soit la valeur de M pour x = ……., c.-à-d. à un des endroits, ailleurs qu'aux extrémités où V = 0.

Commençons par déterminer la valeur précise de x', comprise entre x = 1m et x = 8 m, où V = 0. Dans la région 1m < x < 8m on a

$V(x) = R_G – (w_1 + w_{poutre})\, x' = 0 \quad \Rightarrow \; x' = R_G \div (4{,}513) = 3{,}5893$ m

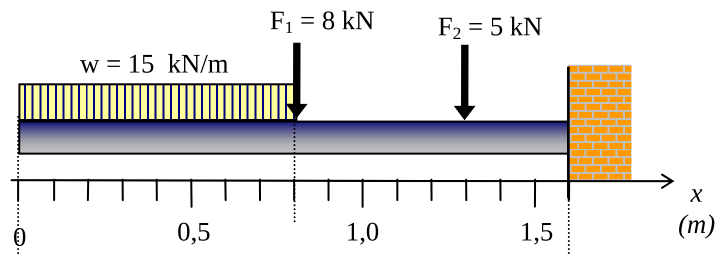
On calcule donc M(x) pour chacune de ces 3 valeurs de x.

x (m)	**Calcul de M(x)**	**M(x)** (kN-m)
1		– 2,2565
3,5893		**12,873**
8		**– 31,026**

La valeur maximale du moment fléchissant est donc M_{max} = 31,026 kN.m pour x = 8 m de l'extrémité gauche de la poutre.

$\Rightarrow$ $\sigma_{max} = M_{max} / S_x$ = ……………………………… …………………………. = 63,97 MPa

Exercice 7E



Soit la poutre encastrée ci-contre. On demande de calculer la valeur maximale des contraintes normale et de cisaillement pour différents profilés en acier ou en bois de construction. Calculer aussi dans chaque cas le facteur de sécurité. On néglige dans chaque cas le poids propre de la poutre. Calculer les contraintes maximales et le F.S. si la poutre est

(a) *un profilé d'acier W200×52 placé de sorte que sa dimension la plus longue soit verticale;*
(b) *un profilé rectangulaire plein en acier de 206 mm de hauteur par 25 mm de largeur;*
(c) *un 6''×14'' en bois de construction placé de sorte que sa dimension 14'' soit verticale;*
(d) *un 6''×14'' en bois de construction placé de sorte que sa dimension 14'' soit horizontale;*

Solution :

Pour n'importe quel profilé, la formule donnant la contrainte normale maximale est : $\sigma_{max} = M_{max} / S$

La formule donnant la contrainte de cisaillement maximale varie dépendamment du profilé, mais pour tous les profilés de cet exercice la formule est : $\tau_{max} = 1{,}5\ V_{max} / he$ *. Commençons donc par déterminer les valeurs maximales* V_{max} *de l'effort tranchant et* M_{max} *du moment fléchissant. Ce sont les valeurs de V(x) et M(x) juste avant l'encastrement à* $x = 1{,}6^-$*. Puisqu'on néglige dans chaque cas le poids propre de la poutre, les valeurs de* V_{max} *et* M_{max} *seront les mêmes pour tous les profilés.*

$V_{max} = V_{(x = 1,6^-)}$ = ... = 25 kN

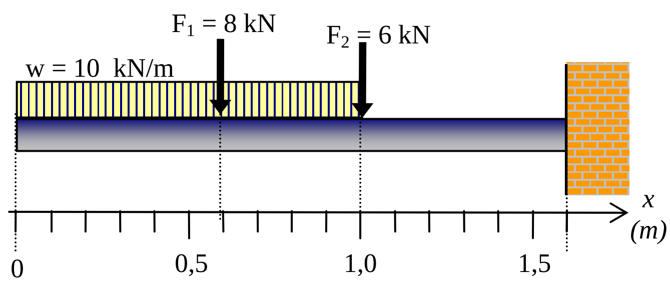
$M_{max} = M_{(x = 1,6^-)}$ = ... = 22,3 kN-m

Pour calculer les valeurs de σ_{max} *et* τ_{max} *il suffit donc de déterminer « h », « e » et « S » pour chaque profilé.*
Le F.S. est la plus petite des deux valeurs suivantes : F.S. = σ_u / σ_{max} *ou bien F.S. =* τ_u / τ_{max}*.. Dans le cas des poutres en acier standard, on peut prédire que la valeur obtenue par F.S. =* σ_u / σ_{max} *sera la valeur retenue.*
Pour déterminer le F.S. , il faut de plus déterminer pour chaque profilé σ_u *et* τ_u*.*
Le tableau ci-dessous donne la valeur de chacun des paramètres mentionnés.

	(a) W200×52 en acier	(b)h =206 mm et e = 25 mm en acier	(c) 6''×14'' en bois de construction avec 14'' vertical	(d) 6''×14'' en bois de construction avec 6'' vertical
V_{max}	25 000 N			
M_{max}	22 300 N.m			
h (m)	0,206	0,206	0,337	0,140
e (m)	0,0079	0,025	0,140	0,337
S (m^3)	$512\times10^3\times10^{-9}$ $= 512\times10^{-6}$	$0{,}206^2 \times 0{,}025 \div 6$ $= 178{,}817\times10^{-6}$	$0{,}337^2 \times 0{,}14 \div 6$ $= 2\,649{,}94\times10^{-6}$	$0{,}14^2 \times 0{,}337 \div 6$ $= 1\,100{,}87\times10^{-6}$
σ_u	450 MPa	450 MPa	55 MPa	55 MPa
τ_u	350 MPa	350 MPa	3,5 MPa	3,5 MPa
$\sigma_{max} = M_{max}/S$	**43,55 MPa**	**126,12 MPa**	**8,415 MPa**	**20,257 MPa**
$\tau_{max} = 1{,}5\ V_{max} / he$	**23,04 MPa**	**7,282 MPa**	**0,7948 MPa**	**0,7948 MPa**
σ_u / σ_{max}	10,33	3,57	6,54	2,72
τ_u / τ_{max}	15,19	48,06	4,40	4,40
F.S.	**10,33**	**3,57**	**4,40**	**2,72**

Exercice 7F

Soit la poutre encastrée ci-contre. On demande de calculer la valeur maximale des contraintes normale et de cisaillement pour différents profilés en acier ou en bois de construction. Calculer aussi dans chaque cas le facteur de sécurité. Dans chaque cas on tient compte du poids propre de la poutre. Calculer les contraintes maximales et le F.S. si la poutre est



(a) un profilé d'acier W310×39 placé de sorte que sa dimension la plus longue soit verticale;
(b) un profilé rectangulaire plein en acier de 310 mm de hauteur par 5,8 mm de largeur;
(c) un 8''×12'' en bois de construction placé de sorte que sa dimension 12'' soit verticale;
(d) un 8''×12'' en bois de construction placé de sorte que sa dimension 12'' soit horizontale;

Solution :

Pour n'importe quel profilé, la formule donnant la contrainte normale maximale est : $\sigma_{max} = M_{max} / S$

La formule donnant la contrainte de cisaillement maximale varie dépendamment du profilé, mais pour tous les profilés de cet exercice la formule est : $\tau_{max} = 1{,}5\ V_{max} / he$ *. Commençons donc par déterminer les valeurs maximales* V_{max} *de l'effort tranchant et* M_{max} *du moment fléchissant. Ce sont les valeurs de V(x) et M(x) juste avant l'encastrement à* $x = 1{,}6^-$ *m. Puisqu'on tient compte du poids, les valeurs de* V_{max} *et* M_{max} *ne seront pas les mêmes pour tous les profilés, il faudra les calculer dans chaque cas. On peut cependant commencer par calculer les valeurs de* V_{max} *et* M_{max} *en ne tenant pas compte de* w_p*, le poids propre de la poutre.*

En négligeant w_p
$V_{max} = V_{(x = 1,6^-)}$ = ... = -24 kN
$M_{max} = M_{(x = 1,6^-)}$ = ... = $-22{,}6$ kN-m

Pour obtenir les valeurs correctes de V_{max} *et* M_{max}*, il suffit ensuite d'ajouter la contribution due à* w_p*. Pour ce faire on utilisera la formule* $w_p = \rho g A$ *ou bien on lira directement la valeur de* w_p *dans le tableau dans le cas du profilé W310×39. :*

La formule permettant d'obtenir la contribution à $V_{(x=1,6^-)}$ *due à* w_p *est :*
$-\ w_p \times 1{,}6$

La formule permettant d'obtenir la contribution à $M_{(x=1,6^-)}$ *due à* w_p *est :*
$-\ w_p \times 1{,}6^2 \div 2$

Pour calculer les valeurs de $\boldsymbol{\sigma}_{max}$ *et* τ_{max} *il faudra aussi déterminer pour chaque profilé : « S », « h » et « e ».*
Le F.S. est la plus petite des deux valeurs suivantes : F.S. = $\boldsymbol{\sigma}_u / \boldsymbol{\sigma}_{max}$ *ou bien F.S. =* $\boldsymbol{\tau}_u / \boldsymbol{\tau}_{max}$*. Dans le cas des poutres en acier standard, on peut prédire que la valeur obtenue par F.S. =* $\boldsymbol{\sigma}_u / \boldsymbol{\sigma}_{max}$ *sera la valeur retenue. Pour déterminer le F.S. , il faut de plus déterminer pour chaque profilé* $\boldsymbol{\sigma}_u$ *et* $\boldsymbol{\tau}_u$*.*

Le tableau ci-dessous donne la valeur de chacun des paramètres mentionnés.

	(a) W310×39 en acier	(b) h =310 mm et e = 5,8 mm en acier	(c) 8''×12'' en bois de construction avec 12'' vertical	(d) 8''×12'' en bois de construction avec 8'' vertical
h (m)	0,310	0,310	0,286	0,184
e (m)	0,0058	0,0058	0,184	0,286
ρ (kg/m^3)		7900	640	640
A (m^2)		$1{,}798\times10^{-3}$	$52{,}624\times10^{-3}$	$52{,}624\times10^{-3}$
g		9,81 N/kg	9,81 N/kg	9,81 N/kg
w_p (N / m)	380	139,343	330,395	330,395
V_{max} sans w_p (N)	24 000			
M_{max} sans w_p (N.m)	22 600			
$V_{(x=1,6^-)}$ dû à w_p (N)	$380\times1{,}6$ = 608	$139{,}343\times1{,}6$ = 222,9488	528,631	528,631
$M_{(x=1,6^-)}$ dû à w_p (N.m)	$380\times1{,}6^2\div2$ = 486,40	$139{,}343\times1{,}6^2\div2$ = 178,359	422,905	422,905
V_{max} avec w_p	24 608	24 222,9488	24 528,631	24 528,631
M_{max} avec w_p	23 086,4	22 778,36	23 022,905	23 022,905
S (m^3)	$549\times10^3\times10^{-9}$ $= 549\times10^{-6}$	$0{,}310^2\times0{,}0058\div6$ $= 92{,}8966\times10^{-6}$	$0{,}286^2\times0{,}184\div6$ $= 2{,}5084\times10^{-3}$	$0{,}184^2\times0{,}286\div6$ $= 1{,}6138\times10^{-3}$
$\sigma_{max} = M_{max}/S$	42,05 MPa	245,2 MPa	9,18 MPa	14,27 MPa
$\tau_{max} = 1{,}5\ V_{max} / he$	20,53 MPa	20,21 MPa	0,699 MPa	0,699 MPa
σ_u	450 MPa	450 MPa	55 MPa	55 MPa
τ_u	350 MPa	350 MPa	3,5 MPa	3,5 MPa
σ_u / σ_{max}	10,7	1,84	5,99	3,85
τ_u / τ_{max}	17,05	17,32	5,01	5,01
F.S.	10,7	1,8	5,0	3,9

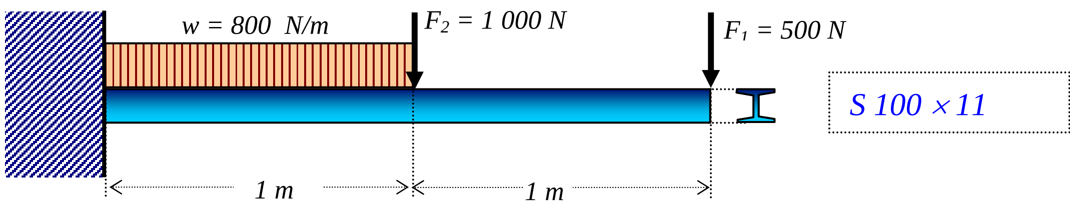
NOM : ………………………………………………………..

À compléter avant : ………………………………………………………………………….

Devoir 8 : DÉFLEXION ET CALCUL DES POUTRES

Exercice 8A

La poutre ci-dessous est le profilé d'acier en I S 100× 11. Déterminer la valeur de la flèche maximale qu'elle subit en tenant compte de son poids propre.



Solution (à compléter)

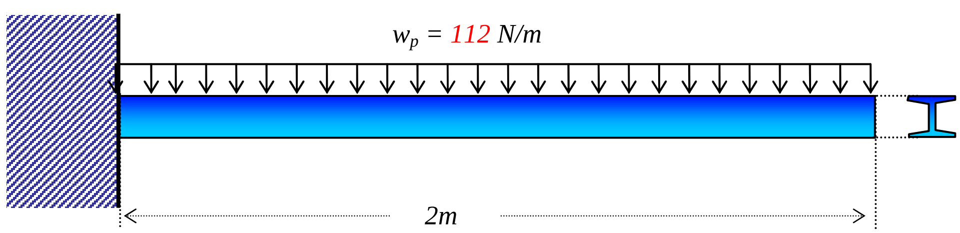
Acier ⇒ Module d'élasticité E = 200×10^{9} *Pa* *(Tableau G)*

Déterminons la flèche maximale « Δ_1 » due au poids propre de la poutre, lequel constitue une charge uniformément répartie tout le long de la poutre. Pour cela on commence par obtenir, à partir du tableau F3 les données pertinentes:

le moment d'inertie « I » du profilé S 100× 11 : $I_x = 2{,}55\times10^{6}\ mm^4 = 2{,}55\times10^{6}\times(10^{-3}\ m)^4 = 2{,}55\times10^{-6}\ m^4$;

le poids par unité de longueur de ce profilé : $w_{poutre} = w_p = 112\ N/m$;

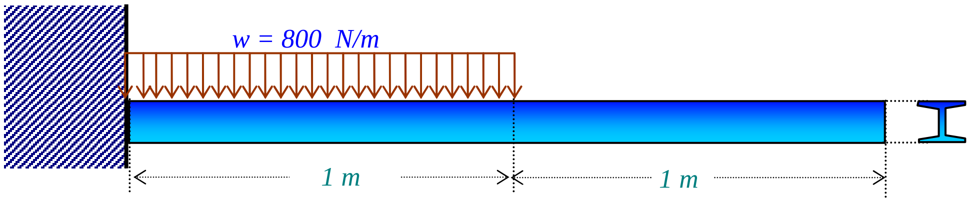
Déterminons la flèche maximale « Δ_p » due au poids propre de la poutre lequel constitue une charge uniformément répartie tout le long de la poutre :



À partir du tableau E7 on obtient :

$$\Delta_p = \frac{wL^4}{8EI} = \frac{112\times2^4}{8\times200\times10^9\times2{,}55\times10^6} = 439{,}22\times10^{-6}\ m = 439{,}2\ \mu m$$

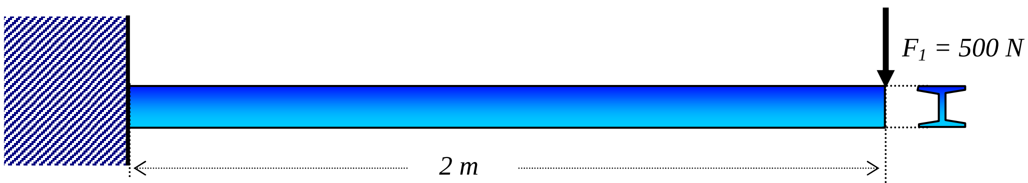
Déterminons la flèche maximale « Δ_w » due à la charge uniforme w = 800 N/m :



À partir du tableau E9 on obtient :

$$\Delta_w = \frac{wb^3}{24EI}(4L-b) = \frac{800\times 1^3}{24\times 200\times 10^9\times 2{,}55\times 10^{-6}}(4\times 2-1) = 457{,}52\times 10^{-6}\,m = 457{,}5\,\mu m$$

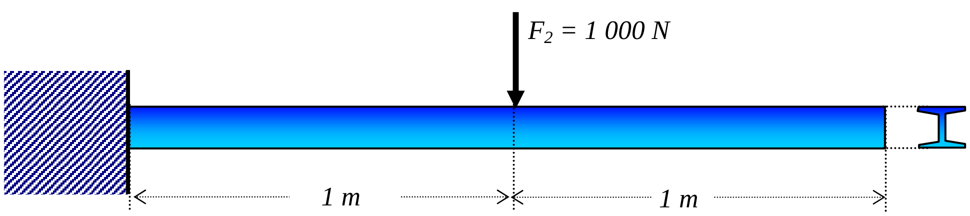
Déterminons la flèche maximale « Δ_1 » due à la charge concentrée F_1 = 500 N :



À partir du tableau E11 on obtient :

$$\Delta_1 = \frac{FL^3}{3EI} = \frac{500\times 2^3}{3\times 200\times 10^9\times 2{,}55\times 10^{-6}} = 2\,614{,}38\times 10^{-6}\ m = 2\,614{,}4\ \mu m$$

Déterminons la flèche maximale « Δ_2 » due à la charge concentrée F_2 = 1 000 N :



À partir du tableau E10 on obtient :

$$\Delta_2 = \frac{Fb^2}{6EI}(3L-b) = \frac{1000\times 1^2}{6\times 200\times 10^9\times 2{,}55\times 10^{-6}}(3\times 2-1) = 1\,633{,}99\times 10^{-6}\ m = 1\,634{,}0\,\mu m$$

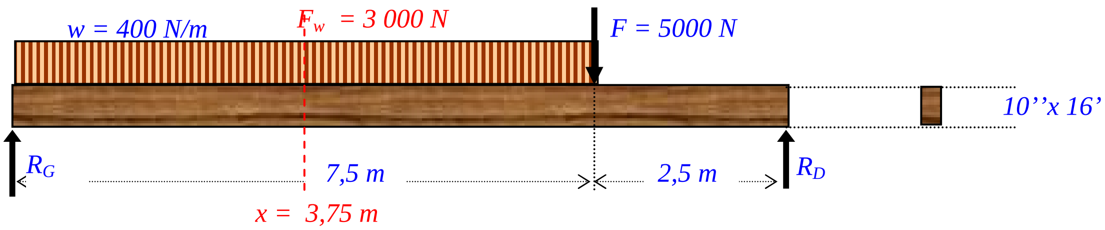
Le principe de superposition nous dit que la flèche totale, Δ_{Totale}, est la simple somme algébrique de chacune des flèches qu'aurait produite séparément chacune de ces charges :

$$\Delta_{Totale} = \Delta_p + \Delta_w + \Delta_1 + \Delta_2 = 439{,}2\ \mu m + 457{,}5\,\mu m + 2\,614{,}4\ \mu m + 1\,634{,}0\,\mu m = 5\,145{,}1\ \mu m$$

= ***5,145 mm*** *vers le bas. On remarque que pour chaque charge prise séparément la flèche était maximale à l'extrémité libre de l'encastrement. Il s'agit donc d'un calcul exact et la flèche résultante est maximale à l'extrémité libre de la poutre (à x = 2 m).*

Exercice 8B

La poutre ci-dessous est un *10''×16''* en bois de construction, le 16'' étant disposé suivant la verticale. Calculer les contraintes normales et de cisaillement maximales auxquelles elle est soumise. Vous devez tenir compte du poids propre de la poutre.



Solution :

Il faut d'abord déterminer le poids propre de la poutre. $w_{poutre} = \rho\, g\, A$

Avec $\rho = 640\ (kg/m^3)$; $g = 9{,}81\ (N/kg)$ *et* $A = 0{,}235\ m \times 0{,}387\ m$ *(Tableaux G et H)*

$\Rightarrow\ w_{poutre} = w_p = \rho\, g\, A = 640 \times 9{,}81 \times 0{,}235 \times 0{,}387 = 571{,}0\ N/m$

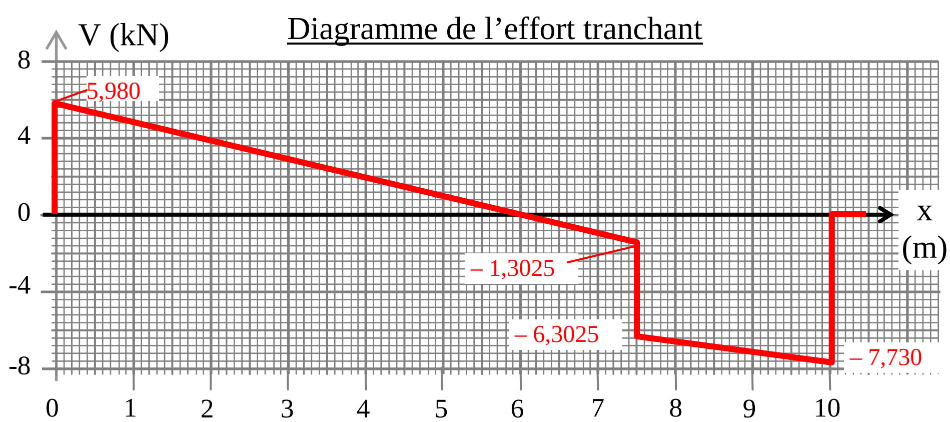
1° déterminer les réactions aux appuis, 2° tracer le diagramme du moment fléchissant et3° déterminer « V_{max} » et « M_{max} », la valeur maximale de l'effort tranchant et du moment fléchissant pour toute la poutre.

$\Sigma M_{(x=0)} = R_G \times 0 + (571{,}0 \times 10 \times 5) + (400 \times 7{,}5 \times 3{,}75) + 5000 \times 7{,}5 - 10 \times R_D = 0$

$\Rightarrow\ R_D = (28\,550 + 11\,250 + 37500) \div 10 = 7\,730\ N$

$\Sigma M_{(x=10)} = R_G \times 10 - (571{,}0 \times 10 \times 5) - (400 \times 7{,}5 \times (10 - 3{,}75)) - 5000 \times 2{,}5 + 0 \times R_D = 0$

$\Rightarrow R_G = (28\,550 + 18\,750 + 12\,500) \div 10 = 5\,980\ N$



V_{max} = 7730 N

Pour x = 10 m

M_{max} = 18 414,2 N.m

à x = 6,1586 m

Pour calculer M_{max}, il faut d'abord déterminer x_{max}, la position où M(x) aura sa valeur maximale. Ce sera pour un endroit sur la poutre où V(x) = 0. Il est donc utile de commencer par déterminer les équations de V(x) et de M(x) dans la région où V(x) passe par zéro.

		Contribution des forces à V(x) et M(x)			Simplification des équations
Région		R_G (= 5980 N)	w_p (= 571 N/m)	w (= 400 N/m)	
0 < x < 7,5	V(x) =	5 980	–571 (x – 0)	– 400 (x – 0)	= 5980 – 971x
	M(x) =	5 980 (x – 0)	– 571 $(x – 0)^2$ ÷ 2	– 400 $(x – 0)^2$ ÷ 2	= 5980x – 485,5 x^2

Calcul de x_{max} : $5980 - 971\, x_{max} = 0 \Rightarrow x_{max} = 6{,}1586\ m$

Calcul de M_{max} : $M_{max} = M_{(x=6{,}1586)} = 5\,980 \times 6{,}1586 - 485{,}5 \times 6{,}1586^2 = 18414{,}2\ N.m$

Pour déterminer la contrainte normale maximale σ_{max} , il faut maintenant déterminer le module de flexion « S » de ce profilé. (Puisque $\sigma_{max} = M_{max} / S$)

$S = h^2 e/6 = 0{,}387^2 \times 0{,}235 \div 6 = 5{,}866 \times 10^{-3}\ m^3$.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S} = \frac{18414{,}2}{5{,}866 \times 10^{-3}} = 3{,}1392 \times 10^6\ Pa.$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{max} = 3{,}14\ MPa}$

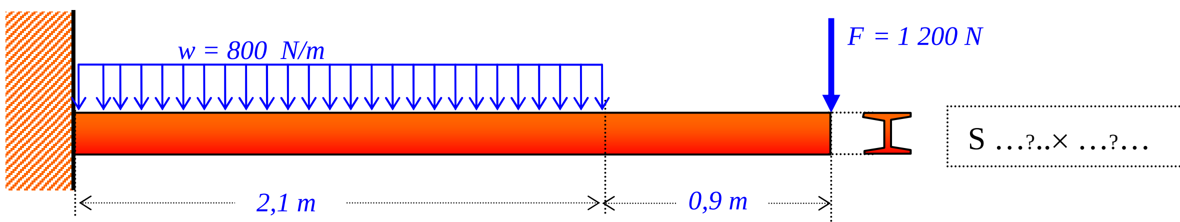
Il reste à déterminer la contrainte de cisaillement maximale :

$\tau_{max} = 1{,}5\ V_{max} \div h\ e = 1{,}5 \times 7\ 730 \div (0{,}387 \times 0{,}235) = 127{,}49 \times 10^3\ Pa.$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tau_{max} = 0{,}127\ MPa}$

Exercice 8C

Pour la poutre ci-dessous, calculer le profilé d'acier en I le plus économique capable de supporter les charges indiquées. Si on se limite à respecter une norme relative à la flèche maximale de 1% de la longueur de la poutre. Vous devez tenir compte du poids de la poutre.

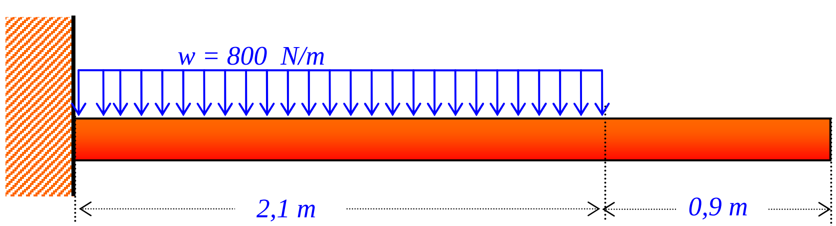


Solution :

Données : $E = E_{acier} = 200 \times 10^9\ Pa$; $\Delta_{max} \leq 3\ m \times 1\% = 0{,}03\ m$

Comme on ignore pour le moment le poids propre de la poutre, dans une première étape nous allons calculer le profilé d'acier en I le plus économique capable de respecter la norme relative à la flèche en négligeant son poids.

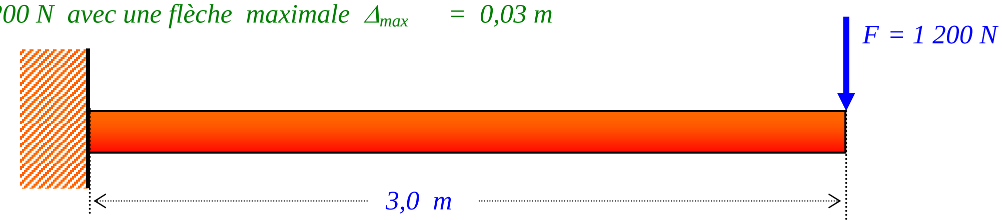
Déterminons « I_w », la valeur du moment d'inertie de surface nécessaire pour supporter la charge uniforme w = 800 N/m avec une flèche maximale $\Delta_{max} = 0{,}03\ m$



À partir du tableau E9 on obtient :

$$I_w = \frac{wb^3}{24E\Delta_{max}}(4L - b) = \frac{800 \times 2{,}1^3}{24 \times 200 \times 10^9 \times 0{,}03}(4 \times 3 - 2{,}1) = 5{,}0936 \times 10^{-7}\ m^4$$

Déterminons « I_F », la valeur du moment d'inertie de surface nécessaire pour supporter la charge concentrée $F = 1200$ N avec une flèche maximale $\Delta_{max} = 0{,}03$ m



À partir du tableau E11 on obtient : $I_F = \dfrac{FL^3}{3E\Delta_{max}} = \dfrac{1200 \times 3^3}{3 \times 200 \times 10^9 \times 0{,}03} = 18{,}00 \times 10^{-7}\ m^4$

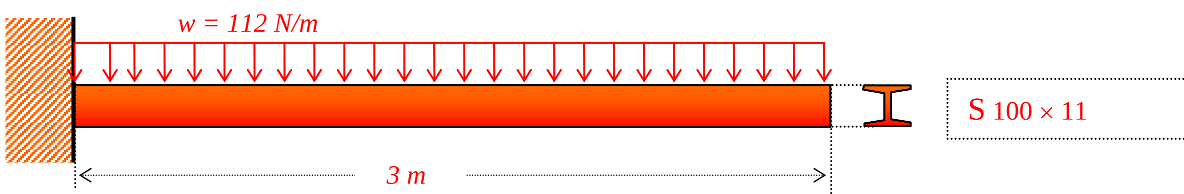
Appliquons le principe de superposition pour déterminer la valeur minimale du moment d'inertie de surface nécessaire pour supporter les charges indiquées en négligeant le poids propre de la poutre :

$$I \geq I_w + I_F = 5{,}0936 \times 10^{-7}\ m^4 + 18{,}00 \times 10^{-7}\ m^4 = 23{,}094 \times 10^{-7}\ m^4$$

Choisissons maintenant dans le tableau F3, le profilé en I le plus économique (c.-à-d. ayant la plus petite masse par théorique) ayant $I \geq 23{,}094 \times 10^{-7}\ m^4 = 23{,}094 \times 10^{-7}\ (10^3 mm)^4 = 23{,}094 \times 10^{-7} \times 10^{12}\ mm^4 = 2{,}3094 \times 10^6\ mm^4$

Profilé S 100×11 avec $I_{xx} = 2{,}55 \times 10^6\ mm^4$ *(En négligeant le poids propre de la poutre)*

Maintenant que l'on connaît le poids propre de la poutre S 100×11, il faut tenir compte de son influence sur la flèche totale. Pour cela il suffit de calculer la valeur I_{poids} nécessaire pour supporter séparément le poids propre de la poutre avec une flèche maximale $\Delta_{max} = 0{,}03$ m



À partir du tableau E7 on obtient : $I_{poids} = \dfrac{wL^4}{8E\Delta_{max}} = \dfrac{112 \times 3^4}{8 \times 200 \times 10^9 \times 0{,}03}$

$$= 1{,}8902 \times 10^{-7}\ m^4 = 1{,}8902 \times 10^{-7} \times 10^{12}\ mm^4 = 0{,}18902 \times 10^6\ mm^4$$

Soit I_{poids} = *valeur du moment d'inertie faisant en sorte qu'une charge égale au poids propre de la poutre, provoque une flèche maximale égale à la norme exigée.*

$I_{profilé}$ = *valeur du moment d'inertie du profilé choisi.*

$I_{sans\ poids}$ = *valeur du moment d'inertie faisant en sorte que l'ensemble des autres charges (excluant le poids propre de la poutre), provoque une flèche maximale égale à la norme exigée.*

On doit avoir $I_{profilé} \geq I_{sans\ poids} + I_{poids}$

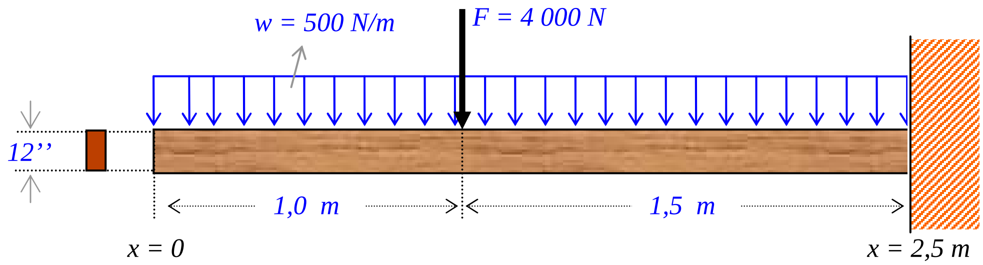
Dans cet exercice on a : $I_{profilé} = 2{,}55 \times 10^6\ mm^4$; $I_{sans\ poids} = 2{,}3094 \times 10^6\ mm^4$ et $I_{poids} = 0{,}18902 \times 10^6\ mm^4$

$$2{,}55 \geq ?\ 2{,}3094 + 0{,}18902 = 2{,}50 \Rightarrow \text{Ok!}$$

∴ *Le profilé d'acier S 100 × 11 est donc le profilé en « I » le plus léger qui donnera un flèche inférieure à 3 cm (1% de la travée). Cela tient compte du poids propre de ce profilé.*

Exercice 8D

Pour la poutre ci-dessous, calculer la largeur de la poutre de section rectangulaire de 12'' de hauteur nominale, capable de supporter les charges indiquées en respectant les normes relatives aux contraintes ainsi qu'aux flèches.



Solution :

1º (a) Le schéma de la poutre est déjà dessiné.

(b) Matériau : bois de construction — forme de la section droite : profilé rectangulaire

Module d'élasticité : 8,3 GPa = $8,3 \times 10^9$ Pa

(c) Normes de sécurité : $\sigma_a = 8,3 \times 10^6$ Pa et $\tau_a = 0,7 \times 10^6$ Pa (Tableau G)

(d) La flèche maximale permise = Δ_{max} = Portée / 100 = 2,5 m / 100 = 0,025 m

I) Détermination de la poutre la plus économique sécuritaire à la contrainte normale en négligeant le poids de la poutre.

2º Il n'est pas nécessaire de déterminer les réactions aux appuis dans le cas d'un encastrement

3º Il n'est pas nécessaire de tracer le diagramme de l'effort tranchant dans le cas d'un encastrement car on sait que la valeur maximale de l'effort tranchant ainsi que du moment fléchissant est près de l'encastrement.

Déterminons $V_{max} = V_{(x=2,5-m)} = -500 \times 2,5 - 4\,000 = -5\,250$ N

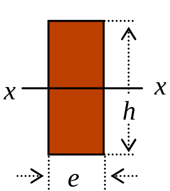
4º Déterminons M_{max}, c'est la valeur du moment fléchissant près de l'encastrement à x = 2,5 m.

$M_{max} = M_{(x=2,5-m)} = -500 \times (2,5^2 \div 2) - 4\,000 \times 1,5 = -7\,562,5$ N-m

5º Calculons la valeur minimale du module de section S nécessaire pour respecter les normes de sécurité en ce qui concerne la contrainte normale (voir 1º (c)).

$$S = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = 7\,562,5 \div (8,3 \times 10^6) = 9,1114 \times 10^{-4}\ m^3$$

6º Maintenant que nous connaissons la valeur de S, on peut calculer la largeur « b » du profilé rectangulaire de hauteur h = 12'' le plus économique. Ici, il faut utiliser les formules pour le calcul de S.



$S_x = h^2 e/6 \Rightarrow e = 6\,S_x / h^2$ avec h = 0,286 m (tableau H)

$e = 6 \times 9,1114 \times 10^{-4} \div 0,286^2 = 0,06684\ m \Rightarrow$ e = 4'' nominale (e = 0,089 m)

Donc, si on néglige le poids propre de la poutre et si l'on ne considère que la norme de sécurité en ce qui concerne la contrainte normale (ici $\sigma_a < 8,3$ MPa), le profilé rectangulaire de 12'' de hauteur nominale le plus économique pour supporter les charges indiquées, a une largeur nominale de 4''.

I) Détermination de la poutre la plus économique respectant les normes de flèche maximale.

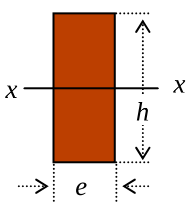
7^o *Utilisons la méthode de superposition et les formules du tableau E pour calculer le moment d'inertie de surface (I) en fonction des paramètres F, L, w, E et Δ_{max}.*

$$I_w = \frac{wL^4}{8E\Delta_{\max}} = \frac{500\times 2{,}5^4}{8\times 8{,}3\times 10^9\times 0{,}025} = 1{,}1766\times 10^{-5}\ m^4$$

$$I_F = \frac{Fb^2}{6E\Delta_{\max}}(3L-b) = \frac{4000\times 1{,}5^2}{6\times 8{,}3\times 10^9\times 0{,}025}(3\times 2{,}5-1{,}5) = 4{,}3373\times 10^{-5}\ m^4$$

$$S_{sans\ poids} = I_w + I_F = 5{,}5139\times 10^{-5}\ m^4$$

8^o *Maintenant que nous connaissons la valeur minimale de I, on peut calculer la largeur du profilé rectangulaire de 12'' de hauteur nominale*



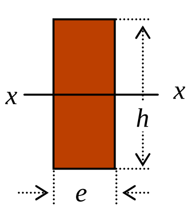
$I_x = h^3e / 12 \Rightarrow e = 12\ I_x / h^3$ *avec* $h = 0{,}286\ m$ *(tableau H)*

$e = 12\times 5{,}5139\times 10^{-5} \div 0{,}286^3 = 0{,}02828\ m \Rightarrow e = 2''$ *nominale* $(e = 0{,}038\ m)$

Donc, si on néglige le poids propre de la poutre et si l'on ne considère que la norme en ce qui concerne la valeur maximale de la flèche (ici $|\Delta_{max}| < 0{,}025$ m), le profilé rectangulaire de 12'' de hauteur nominale, le plus économique pour supporter les charges indiquées, a une largeur nominale de 2''.

III) Choix final de la poutre en négligeant son poids propre.

Le profilé rectangulaire de 12'' de hauteur nominale le plus économique respectant à la fois les normes de contraintes normales et les normes de flèches maximales est celui trouvé à l'étape 6^o, soit le profilé rectangulaire 4''×12''. En effet, le profilé trouvé à l'étape 8^o est trop petit pour respecter les normes de contraintes normales. Comme on a affaire à un profilé en bois, il est cependant nécessaire de vérifier si un 4''×12'' sera sécuritaire au cisaillement longitudinal (τ_{max}<………. MPa)



$\tau_{max} = 1{,}5\ V_{max}\ /\ he$ *avec* $V_{max} = 5\ 250\ N$

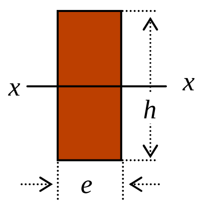
et $A = 0{,}286 \times 0{,}089 = 2{,}5454\times 10^{-2}\ m^2$

$\tau_{max} = 0{,}3094 \times 10^6 Pa < 0{,}7\ MPa \Rightarrow$ *Ok! C'est sécuritaire au cisaillement.*

Donc, si on néglige le poids propre de la poutre et si l'on considère les normes en ce qui concerne les contraintes normale et de cisaillement, ainsi que la norme de flèche maximale, la poutre en bois de construction de 12'' de hauteur nominale doit avoir une largeur nominale d'au moins 4'' pour supporter les charges indiquées.

IV) Choix final de la poutre en tenant compte de son poids propre.

Il faut d'abord déterminer le poids propre d'un 4''×12'' en bois de construction. On peut trouver dans le tableau G la masse volumique « ρ » du bois de construction. Elle est de 640 kg/m^3. Le poids par unité de longueur est donné par $w_g = \rho A g \Rightarrow w_g = 640\ \frac{kg}{m^3}\times 2{,}5454\times 10^{-2}\ m^2\times 9{,}81\ \frac{N}{kg} = 159{,}81\ \frac{N}{m}$



$h = 0{,}286$ m (12'' tableau H); $e = 0{,}089$ m (4'' tableau H);

$A = e \times h = 2{,}5454 \times 10^{-2}\ m^2$; $S_x = h^2 e/6 = 1{,}2133 \times 10^{-3}\ m^3$;

$I_x = h^3 e/12 = 1{,}7350 \times 10^{-4}\ m^4$; $\tau_{max} = 1{,}5 \dfrac{V_{max}}{A}$;

$w_g = \rho \times A \times g = 640\ (kg/m^3) \times (2{,}5454 \times 10^{-2}\ m^2) \times (9{,}81\ N/kg) = 159{,}81\ N/m$.

Il faut maintenant recalculer les paramètres suivants : V_{max}, M_{max}, σ_{max}, Δ_{max} et τ_{Lmax} en tenant compte du poids propre de la poutre. Il suffira ensuite de vérifier si la poutre 4''×12'' respecte toutes les normes. Si ce n'est pas le cas, on reprendra ces calculs avec la poutre suivante disponible soit la poutre 6''×12''.

4b° *Déterminons la nouvelle valeur de M_{max} :*

$$M_{max} = -[(500 + 159{,}81) \times 2{,}5] \times 1{,}25 - 4\,000 \times 1{,}5 = 8\,061{,}91\ N\text{-}m$$

Vérifions si un 4''×12'' ayant module de section $S_x = 1{,}2133 \times 10^{-3}\ m^3$, respecte la normes de sécurité en ce qui concerne la contrainte normale (à savoir $\sigma_a < 8{,}3 \times 10^6$ Pa)

$$\sigma_{max} = M_{max} / S_x = 8\,061{,}91 / 1{,}2133 \times 10^{-3} = 6{,}645 \times 10^6\ Pa$$

⇒ *Ok. Un 4''×12'' respecte la norme de sécurité relative à la contrainte normale.*

Vérifions maintenant si un 4''×12'' respecte la norme relative à la flèche maximale ($|\Delta max| < 0{,}025$ m)

Commençons par calculer I_p, la valeur du moment d'inertie de surface nécessaire pour supporter seulement le poids propre w_p de la poutre :

$$w_p = 159{,}8\ N/m \Rightarrow I_p = w_p L^4 / 8 E \Delta_{max} = 159{,}81 \times 2{,}5^4 / (8 \times 8{,}3 \times 10^9 \times 0{,}025) = 0{,}3761 \times 10^{-5}\ m^4$$

Nous avons déjà calculé $I_{sans\ poids} = 5{,}51 \times 10^{-5}\ m^4$

Le profilé doit avoir un moment d'inertie de surface $I_{profilé} \geq I_{sans\ poids} + I_p$, vérifions cela :

$$\mathbf{I_{profilé} = 17{,}35 \times 10^{-5} \geq I_{sans\ poids} + I_p = (5{,}51 + 0{,}3761) \times 10^{-5}\ m^4 = 5{,}886 \times 10^{-5}\ m^4}$$

⇒ *Ok! Un 4''×12'' respecte largement la norme relative à la flèche maximale.*

Vérifions maintenant si un 4''×12'' respecte la norme relative à la contrainte de cisaillement longitudinale ($\tau_{Lmax} < 0{,}7$ MPa)

$$V_{max} = 5\,220 + 159{,}81 \times 2{,}5 = 5\,649{,}525\ N$$

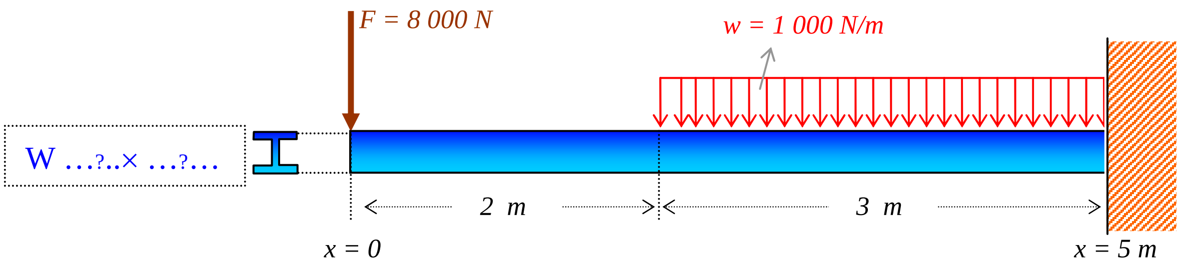
$$\tau_{Lmax} = 1{,}5 \times 5\,649{,}525 / 2{,}5454 \times 10^{-2} = 0{,}3329 \times 10^6\ Pa < 0{,}7\ MPa$$

⇒ *Ok! Un 4'' ×12'' est donc sécuritaire en ce qui concerne la contrainte de cisaillement longitudinal.*

Donc, si on tient compte du poids propre de la poutre et si l'on considère les normes en ce qui concerne les contraintes normale et de cisaillement, ainsi que la norme de flèche maximale, une poutre en bois de construction de 12'' de hauteur nominale doit avoir une largeur nominale d'au moins 4'' pour supporter les charges indiquées.

Exercice 8E

Pour la poutre ci-dessous, calculer le profilé d'acier en H le plus économique capable de supporter les charges indiquées en respectant un facteur de sécurité de 5 relativement aux contraintes. On ne considère pas de normes relativement aux flèches et on tient compte du poids propre de la poutre.



Solution :

1^o (a) Le schéma de la poutre est déjà dessiné.

(b) Matériau : acier. forme de la section droite : en H

Module d'élasticité : 200 GPa = 200×10^9 Pa

(c) Normes de sécurité : F.S. = 5 $\Rightarrow$ $\sigma_a = \sigma_u/F.S. = 450 \times 10^6$ Pa / 5 = 90×10^6 Pa

et $\tau_a = \tau_u/F.S. = 350 \times 10^6$ Pa / 5 = 70×10^6 Pa

I) Détermination de la poutre la plus économique sécuritaire à la contrainte normale en négligeant le poids de la poutre.

2^o Il n'est pas nécessaire de déterminer les réactions aux appuis dans le cas d'un encastrement

3^o Il n'est pas nécessaire de tracer le diagramme de l'effort tranchant dans le cas d'un encastrement car on sait que la valeur maximale de l'effort tranchant ainsi que du moment fléchissant est près de l'encastrement.

Déterminons $V_{max} = V_{(x=5^-\,m)} = -8\,000 - 1\,000 \times 3 = -11\,000$ N

4^o Déterminons M_{max}, c'est la valeur du moment fléchissant près de l'encastrement à $x = 5^-$ m.

$$M_{max} = M_{(x=5^-\,m)} = -8\,000 \times 5 - 3\,000 \times 1{,}5 = -44\,500 \text{ N-m}$$

5^o Calculons la valeur minimale du module de section S nécessaire pour respecter les normes de sécurité en ce qui concerne la contrainte normale (voir 1^o (c)).

$$S = M_{max} / 90 \times 10^6 = 44\,500 / 90 \times 10^6 = 4{,}9444 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

6^o Maintenant que nous connaissons la valeur de S, on peut choisir le profilé en H le plus économique en consultant le tableau F1. Cependant, dans ce tableau les valeurs de S sont en $\times 10^3$ mm^3. Il faut donc convertir S en cet unité :

$S = 4{,}9444 \times 10^{-4}$ m^3 = $4{,}9444 \times 10^{-4} \times (10^3 \text{ mm})^3 = 4{,}9444 \times 10^{-4} \times 10^9 \text{ .mm}^3 = 494{,}4 \times 10^3 \text{ mm}^3$.

Dans le tableau F1, on remarque que le profilé en H le plus économique (c.-à-d. celui ayant la plus petite masse par unité de longueur) ayant un $S > 495 \times 10^3$ mm^3 est le profilé W 310 × 39 avec $S_x = 549 \times 10^3$ mm^3

Comme il s'agit d'un profilé d'acier, on n'a pas à considérer les contraintes de cisaillement. Donc, si on néglige le poids propre de la poutre et si l'on ne considère qu'un facteur de sécurité de 5 en ce qui concerne le contraintes, le profilé en « H » le plus économique pour supporter les charges indiquées, est le profilé <u>W 310× 39</u> avec $S_{xx} = 549 \times 10^3$ mm^3.

IV) Choix final de la poutre en tenant compte de son poids propre.

Il faut d'abord déterminer le poids propre du profilé déterminé en I. On peut le trouver dans le tableau F1, Le poids par unité de longueur est w_g = 380 N/m.

Il faut maintenant recalculer les paramètres suivants : M_{max} et σ_{max}, en tenant compte du poids propre de la poutre. Il suffira ensuite de vérifier si le profilé $W\,310 \times 39$ respecte la norme relative à la contrainte normale. Si ce n'est pas le cas, on reprend ces calculs avec la poutre suivante disponible selon le tableau F1.

$W\,310 \times 39$

$$S_{xx} = 549\times10^{3}\ mm^{3} = 549\times10^{3}\times10^{-9}\ m^{3} = 549\times10^{-6}\ m^{3}$$

$$I_{xx} = 85{,}1\times10^{6}\ mm^{4} = 85{,}1\times10^{6}\times10^{-12}\ m^{4} = 85{,}1\times10^{-6}\ m^{4}$$

Poids par mètre = 380 N/m

Calcul de la nouvelle valeur de M_{max}, en tenant compte du poids du profilé.

$$M_{max} = -\,8\,000\times5\ -3\,000\times1{,}5\ -380\times5\times(5/2) = 49\,250\ N\text{-}m$$

Calcul de σ_{max} en tenant compte du poids du profilé :

$$\sigma_{max} = M_{max}/S = 49\,250\ /\ 549\times10^{-6} = 89{,}71\times10^{6}\ Pa = 89{,}7\ MPa$$

On doit finalement vérifier si la valeur de σ_{max} respecte la norme.

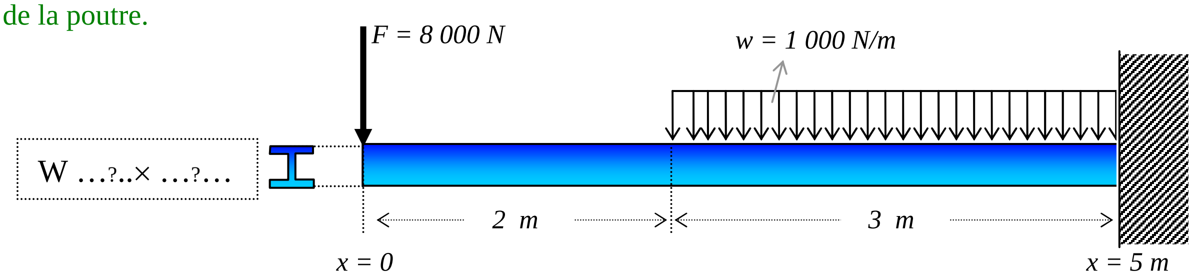
$$\sigma_{max} = 89{,}7\ MPa \quad et \quad \sigma_a = 90\ MPa$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{max} < \sigma_a \qquad \Rightarrow \text{Sécuritaire.}$$

Donc, si on tient compte du poids propre de la poutre et si l'on ne considère que la norme en ce qui concerne les contraintes (F.S. = 5) le profilé en « H » le plus économique pour supporter les charges indiquées, est le profilé $\underline{W\,310 \times 39}$.

Exercice 8F

Pour la poutre ci-dessous, calculer le profilé d'acier en H le plus économique capable de supporter les charges indiquées si l'on doit respecter une norme imposant que la flèche maximale doit être inférieure à 1,50 cm. On ne pas considère de normes relativement aux contraintes et on tient compte du poids propre de la poutre.



Solution :

1^o *(a) Le schéma de la poutre est déjà dessiné.*

(b) Matériau : acier *forme de la section droite : en H*

Module d'élasticité : 200 GPa = 200×10^9 Pa

(d) La flèche maximale permise = Δ_{max} = 1,50 cm = 0,015 m

II) Détermination de la poutre la plus économique respectant les normes de flèche maximale.

7^o *Utilisons la méthode de superposition et les formules du tableau E pour calculer le moment d'inertie de surface (I) en fonction des paramètres F, L, w, E et Δ_{max}.*

$$I_F = F\,L^3\ /\ 3\,E\,\Delta_{max} = 8\,000\times5^3 \div (24\times200\times10^9\times0{,}015) = 111{,}111\times10^{-6}\ m^4$$

$$I_w = w\,b^3\ (4L - b) \div (24\,E\,\Delta_{max}) = 1\,000\times3^3\ (4\times5 - 3) \div (24\times 200\times10^9\times0{,}015) = 6{,}375\times10^{-6}\,m^4$$

$$I_{sans\ poids} = I_w + I_F = 117{,}48\times10^{-6}\ m^4$$

8^o *Maintenant que nous connaissons la valeur de $I_{sans\ poids}$, on peut choisir le profilé en I le plus économique en consultant le tableau F1. Cependant, dans ce tableau les valeurs de I sont en $\times 10^6$ mm^4. Il faut donc travailler en cet unité : $I_{sans\ poids} = 117{,}48\times10^{-6}\ m^4 = 117{,}48\times10^{-6}\ (10^3\ mm)^4 = 117{,}48\times10^{-6}\times10^{12}\ mm^4 = 117{,}48\times10^6\ mm^4$*

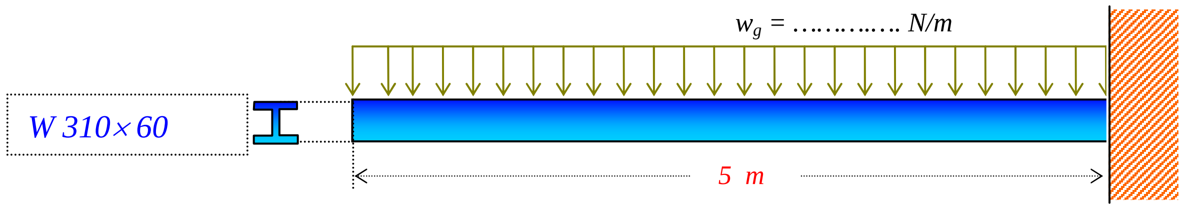
Dans le tableau F1, on remarque que le profilé en « H » le plus économique (c.-à-d. celui ayant la plus petite masse théorique) ayant un $I > 117{,}48\times10^6$ mm^4 est le profilé W 310× 52 avec $I_x = 118\times10^6$ mm^4

Donc, si on néglige le poids propre de la poutre et si l'on ne considère que la norme en ce qui concerne la valeur maximale de la flèche (ici $\Delta_{max} < 1{,}5$ cm), le profilé en I le plus économique pour supporter les charges indiquées, est le profilé W 310 × 52 avec $I_x = 118\times10^6$ mm^4

IV) Choix final de la poutre en tenant compte de son poids propre.

D'abord, il est clair que s'il faut ajouter le poids propre de la poutre, le profilé W 310×52 avec $I_x = 118\times10^6$ mm^4 ne suffira pas car la marge pour tenir compte du poids est trop faible (= 118 – 117,48). Nous allons au préalable prendre le profilé le moins massif suivant disponible, soit le W310×60 avec $I_x = 129\times10^6$ mm^4. Celui-ci laisse un marge de 129×10^6 mm^4 - $117{,}48\times10^6$ mm^4 = $11{,}52\times10^6$ mm^4 pour tenir compte de la flèche due seulement au poids de la poutre.
Il faut ensuite déterminer le poids propre de ce profilé. On peut le trouver dans le tableau F1, Le poids par unité de longueur est w_g = 585 N/m.

Maintenant que l'on connaît le poids propre de la poutre W310×60, il faut tenir compte de son influence sur la flèche totale. Pour cela il suffit de calculer la valeur I_{poids} nécessaire pour supporter séparément le poids propre de la poutre avec une flèche maximale Δ_{max} = 0,015 m



À partir du tableau E7 on obtient : $I_{poids} = \dfrac{wL^4}{8E\Delta_{max}} = \dfrac{585 \times 5^4}{8 \times 200 \times 10^9 \times 0{,}015} = 15{,}23 \times 10^{-6} m^4$

$= 15{,}23 \times 10^{-6} \times 10^{12}\ mm^4 = 15{,}23 \times 10^{6}\ mm^4$

Soit I_{poids}	=	valeur du moment d'inertie faisant en sorte qu'une charge égale au poids propre de la poutre, provoque une flèche maximale égale à la norme exigée.
$I_{profilé}$	=	valeur du mo ment d'inertie du profilé choisi.
$I_{sans\ poids}$	=	valeur du moment d'inertie faisant en sorte que l'ensemble des autres charges (excluant le poids propre de la poutre), provoque une flèche maximale égale à la norme exigée.

On doit avoir $\boldsymbol{I_{profilé} \geq I_{sans\ poids} + I_{poids}}$

Dans cet exercice on a : $I_{profilé} = 129 \times 10^6\ mm^4$; $I_{sans\ poids} = 117{,}8 \times 10^6\ mm^4$ et $I_{poids} = 15{,}23 \times 10^6\ mm^4$

$129 \times 10^6 \geq ?\ 117{,}5 \times 10^6 + 15{,}23 \times 10^6 = 132{,}73\ mm^4$ $\Rightarrow$ **Non!**

Le profilé W310×60 ne respecte pas la norme relative à la flèche. Il faut donc prendre le profilé suivant disponible soit le profilé W310×67 avec $I_x = 145 \times 10^6\ mm^4$. Celui-ci laisse une marge plus grande pour la flèche due au poids. Cette marge est $145 \times 10^6\ mm^4 - 117{,}48 \times 10^6\ mm^4 = 27{,}52 \times 10^6\ mm^4$

Vérifions si elle est suffisante. Le poids par unité de longueur du profilé W310×67 est $w_g = 655$ N/m.

Calculons la valeur I_{poids} nécessaire pour supporter séparément le poids propre de la poutre avec une flèche maximale $\Delta_{max} = 0{,}015$ m

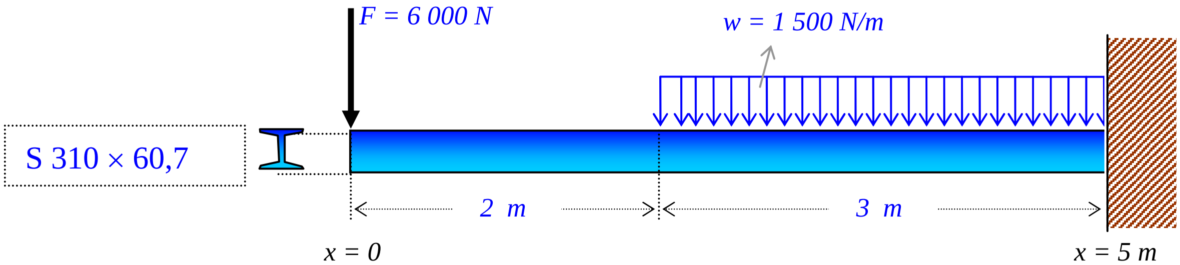
$$I_{poids} = \frac{wL^4}{8E\Delta_{max}} = \frac{655 \times 5^4}{8 \times 200 \times 10^9 \times 0{,}015} = 17{,}06 \times 10^{-6}\ m^4$$

Donc, la valeur de I_{poids} ($17{,}06 \times 10^{-6}\ m^4$) est inférieure à la marge disponible ($27{,}52 \times 10^{-6}\ m^4$)

∴ Le profilé d'acier en H le plus économique respectant une norme de 1,5 cm sur la valeur de la flèche maximale est donc le profilé W310×67.

Exercice 8G

Un profilé d'acier en « I » S 310 × 60,7 supporte les charges indiquées. Déterminer la contrainte de cisaillement maximale à laquelle il est soumis. Vous devez tenir compte du poids de la poutre.
(Rép. : 5,66 MPa)



Solution :

Poids propre de la poutre = w_p = 595 N/m (Tableau F3)

Valeur maximale de l'effort tranchant = $V_{max} = V_{(x=5^-)}$

$V_{max} = V_{(x=5^-)} = -595\times5 - 6\,000 - 10500\times3 = 13\,475$ N

h = hauteur du profilé = 0,305
e = épaisseur de l'âme du profilé = 0,0117 m (Tableau F3)

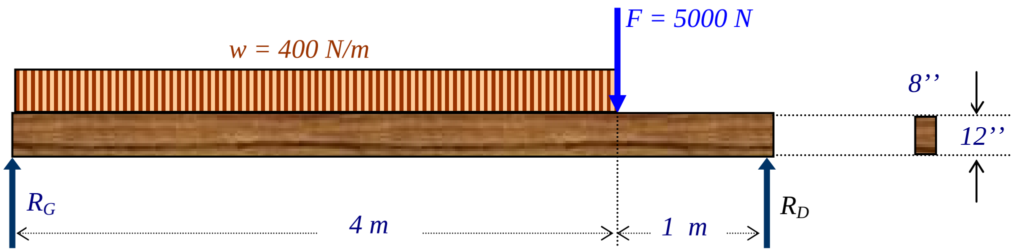
La contrainte de cisaillement atteint sa valeur maximale « τ_{max} » sur l'axe neutre, dans l'âme du profilé là où l'effort tranchant atteint sa valeur maximale soit juste avant l'encastrement :

$\tau_{max} = 1,5\ V_{max} / he = 1,5\times13\,475 \div (0,305\times0,0117) = \underline{\mathbf{5,664\times10^6\ Pa.}}$

Exercice 8 H

La poutre ci-dessous est un 8’’×12’’ en bois de construction, le 12’’ étant placé à la verticale. Calculer les contraintes normale et de cisaillement maximales ainsi que la flèche au centre de la poutre (à x = 2,5 m). Vous devez tenir compte du poids propre de la poutre.

(Rép. σ_{max} = 2,12 MPa; τ_{max} = 0,156 MPa et $\Delta_{(x=2,5)}$ = 4,38 mm)



Aire réelle du profilé = A = 0,184 × 0,286 = 52,624 × 10^{-3} m².

Module de section du profilé = S_x = 0,286² × 0,184 ÷6 = 2,5084× 10^{-3} m³.

Moment d’inertie de surface du profilé = I_x = 0,286³ × 0,184 ÷12 = 358,7× 10^{-6} m⁴.

Poids propre de la poutre = w_p = ρ g A = (640 kg/m³) × (9,81 N/kg) × (52,624×10^{-3} m²) = 330,39 N/m

Module d’élasticité du matériau = E = 8,3 GPa = 8,3 × 10^9 Pa

Calculez les réactions aux appuis : (R_G = 2 785,975 N et R_D = 5 465,975 N)

$\Sigma M_{(x=0)} = R_G\times 0 + 400\times 4\times 2 + 5\,000\times 4 + 330{,}39\times 5\times 5/2 - 5\times R_D = 0$

$\Rightarrow R_D = (3\,200 + 20\,000 + 4\,129{,}875) \div 5$

$\Rightarrow R_D = \underline{\mathbf{5\,465{,}975\ N}}$

$\Sigma M_{(x=5)} = 5\times R_G - 1\,600\times 3 - 5\,000\times 1 - 330{,}39\times 5\times 5/2 = 0$

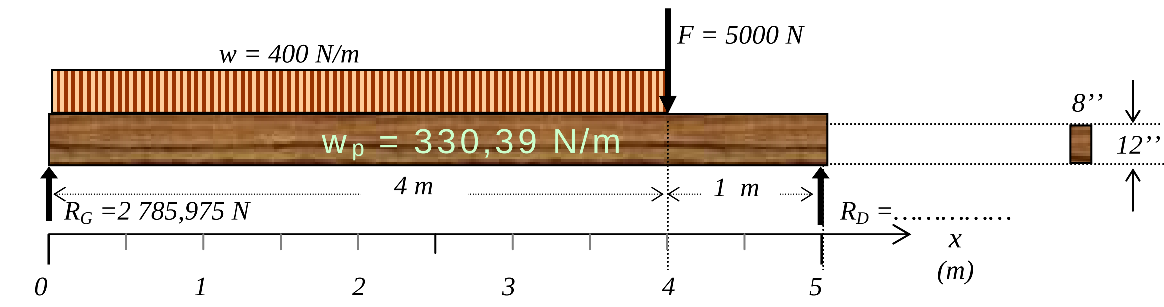
$\Rightarrow R_G = (4\,800 + 5\,000 + 4\,129{,}875) \div 5$

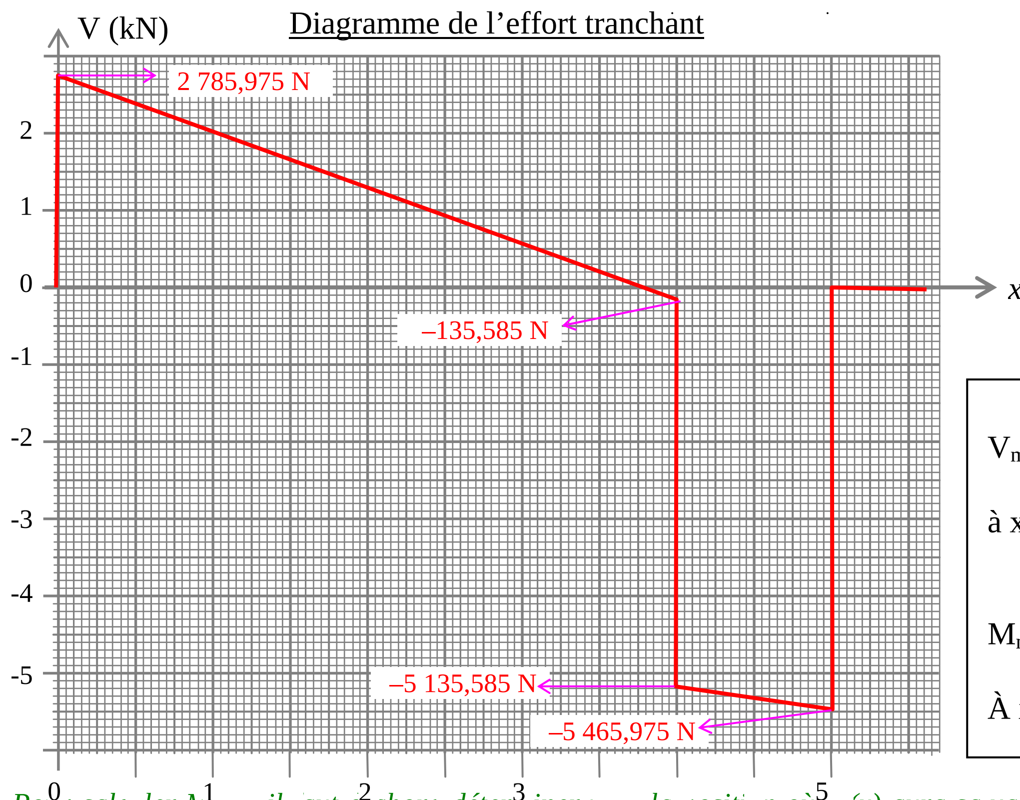
$\Rightarrow R_G = \underline{\mathbf{2\,785{,}975\ N}}$

Vérification : $\Sigma F_y = 2\,785{,}975 + 5\,465{,}975 - 1\,600 - 5\,000 - 330{,}39\times 5$

$= 0 \quad \Rightarrow$ OK !

Tracez le diagramme de l’effort tranchant :





V_{max} = ***5 465,975 N***

à x = *5^- m*

M_{max} = ***5 313,4 N-m***

À x = *3,8144 m*

Pour calculer M_{max}, il faut d'abord déterminer x_{max}, la position où M(x) aura sa valeur maximale. Ce sera pour un endroit sur la poutre où V(x) = 0. Il est donc utile de commencer par déterminer les équations de V(x) et de M(x) dans la région où V(x) passe par zéro.

		Contribution des forces à V(x) et M(x)			Simplification des équations
Région		R_G (= 2785,975 N)	w_p (= 330,39 N/m)	w (= 400 N/m)	
0 < x < 4	V(x) =	+ 2785,975	– 330,39 (x – 0)	– 400 (x – 0)	= 2785,975 – 730,39 x
	M(x) =	+2785,975(x –0)	–330,39 $(x – 0)^2/2$	– 400 $(x – 0)^2/2$	= 2785,975x – 365,195 x^2

Calculez x_{max}

$$2785{,}975 - 730{,}39\, x_{max} = 0 \;\Rightarrow\; x_{max} = 2785{,}975 \div 730{,}39 = 3{,}8144 \text{ m}$$

Calculez M_{max}

À partir de l'équation de M(x) : $M_{max} = 2785{,}975 \times 3{,}8144 - 365{,}195 \times 3{,}8144^2 = 5313{,}4$ N-m

À partir de la surface sous la courbe entre x = 0 et x = 3,8144 m :

$$M_{max} = 2\,785{,}975 \times 3{,}8144 \div 2 = 5\,313{,}4 \text{ N-m}$$

Calculez σ_{max} : $\sigma_{max} = M_{max} / S = 5313{,}4 \div 2{,}5084 \times 10^{-3} = 2{,}118 \times 10^6$ Pa = **2,12 MPa**

Calculez τ_{max} : $\tau_{max} = 1{,}5\, V_{max} / he = 1{,}5 \times 5465{,}975 \div (0{,}184 \times 0{,}286) = 155{,}8 \times 10^3$ Pa = **0,156 MPa**

Calculez la flèche pour x = 2,5 m.

Flèche due au poids propre de la poutre :

$$\Delta w_{p\ (x\,=\,2,5)} = \frac{5wL^4}{384EI} = \frac{5\times 330{,}39\times 5^4}{384\times 8{,}3\times 10^9\times 358{,}7\times 10^{-6}} = 903{,}1\times 10^{-6}\ m.$$

Flèche due à la charge uniforme w = 400 N/m :

$$\Delta w_{\ (x\,=\,2,5)} = \frac{wx}{24EIL}\left[a^2(2L-a)^2 - 2\,a\,x^2(2L-a) + L\,x^3\right]$$

$$= \frac{400\times 2{,}5}{24\times 8{,}3\times 10^9\times 358{,}7\times 10^{-6}\times 5}\left[4^2\times(2\times 5-4)^2 - 2\times 4\times 2{,}5^2\times(2\times 5-4) + 5\times 2{,}5^3\right)$$

$$= 991{,}20\times 10^{-6}\ m$$

Flèche due à la charge concentrée F = 5 000 N :

$$\Delta F_{\ (x\,=\,2,5)} = \frac{Fbx}{6EIL}(L^2 - x^2 - b^2) = \frac{5000\times 1\times 2{,}5}{6\times 8{,}3\times 10^9\times 358{,}7\times 10^{-6}\times 5}(5^2 - 2{,}5^2 - 1^2)$$

$$= 2\,484{,}15\times 10^{-6}\ m$$

*Flèche totale = $(903{,}1 + 991{,}2 + 2\,484{,}15)\times 10^{-6} = 4\,378\times 10^{-6}\ m \approx$ __**4,38 mm**__*

2E2 (b) Une potence supporte un feu de circulation pesant 800 N. Le mât AB pèse 3 000N et son centre de gravité est situé à 3m au-dessus du sol. La tige BC pèse 600 N et est homogène. L'attache en A avec le sol correspond à un pivot. Déterminer la tension dans le câble ainsi que les réactions horizontale et verticale exercées par le sol sur le mât AB si le câble est fixé à la mi-hauteur du mât AB.
(Rép. : T=1598 N, A_x=715 N ,→ ; A_y=5829 N, ↑)

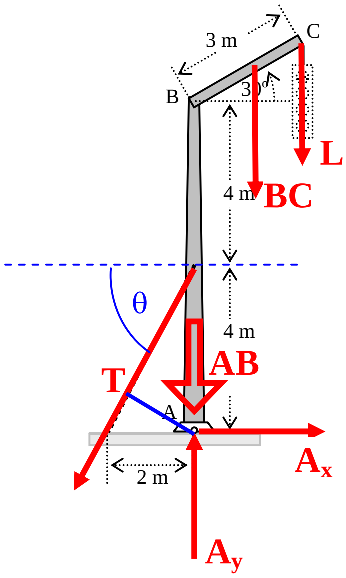
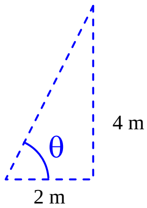
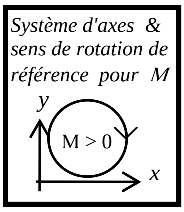


Diagramme des forces appliquées à la potence:

$\theta = \tan^{-1}(4/\,2\,) = 63{,}435^o$





		Calcul de ΣM par rapport à l'axe passant par le point …A….			Calcul des composantes des forces.		
Symbole des forces	Grandeur des forces F (N)	sens de rotation (+ / -)	bras de levier d (m)	Moment de force $M_{...}(F) = (+/-)\ F\ d$ (N-m)	θ_{ox} (°)	suivant OX $F_x = F \cos\theta_{ox}$ (N)	suivant OY $F_y = F \sin\theta_{ox}$ (N)
AB	*3 000*		*0*	*0*		*0*	*– 3 000*
BC	*600*	+	*1,5 cos 30°*	*+ 779,42*		*0*	*– 600*
L	*800*	+	*3 cos 30°*	*+ 2 078,46*		*0*	*– 800*
T	***T***	–	*2 sin 63,435°*	*– 1,78885 T*		*– T cos θ*	*– T sin θ*
A_x	A_x		*0*	*0*		$+A_x$	*0*
A_y	A_y		*0*	*0*		*0*	$+A_y$
				$\Sigma M_A = 0$		$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma F_y = 0$

Solution algébrique:

$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; 0 + 779{,}42 + 2\,078{,}46 - 1{,}78885\,T = 0$

$\Rightarrow\; T = (779{,}42 + 2\,078{,}46) \div 1{,}78885 = \underline{1\,597{,}9\ N}$

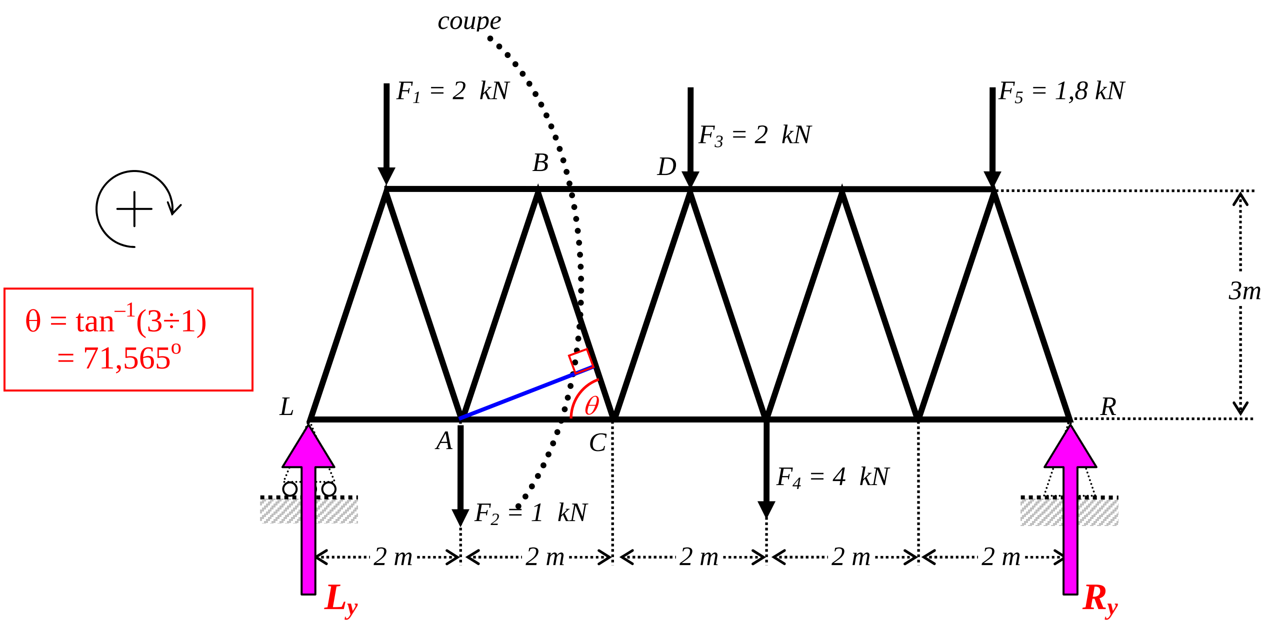
$\Rightarrow$

$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; 0 - T\cos\theta + A_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x = T\cos\theta = 1\,597{,}9 \cos 63{,}435^o = \underline{714{,}6\ N}$

$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -3000 - 600 - 800 - T\sin\theta + A_y = 0$

$\Rightarrow\; A_y = 4\,400 + 1\,597{,}9\ \sin 63{,}465^o = = \underline{5\,829{,}6\ N}$

3E6s *Pour la structure triangulée schématisée, résoudre par la méthode des moments les barres AC, BD et BC. Vous devez indiquer clairement sur quel corps vous appliquez le principe d'équilibre $\Sigma M = 0$. (Compléter la solution)*



Détermination de la réaction « L_y » à l'appui gauche (en L). Pour cela on applique $\Sigma M = 0$ à toute la structure.

$\Sigma M_R = 0 = + L_y \times 10 - 2 \times 9 - 1 \times 8 - 2 \times 5 - 4 \times 4 - 1,8 \times 1 + R_y \times 0 = 0$

$\Rightarrow L_y = (18 + 8 + 10 + 16 + 1,8) \div 10 = 5,38$ kN

Pour la suite de la solution on applique $\Sigma M = 0$ sur la partie de la structure située à gauche de la coupe.

Détermination de AC :

$\Sigma M_B = 0 = +5,38 \times 3 - 2 \times 2 - 1 \times 1 - AC \times 3 + BC \times 0 + BD \times 0 = 0$

$\Rightarrow AC = (16,14 - 4 - 1) \div 3 \Rightarrow$ **AC = + 3,7133 kN**

Détermination de BD :

$\Sigma M_C = 0 = +5,38 \times 4 - 2 \times 3 - 1 \times 2 - AC \times 0 + BC \times 0 + BD \times 3 = 0$

$\Rightarrow BD = (-21,52 + 6 + 2) \div 3 \Rightarrow$ **BD = – 4,5067 kN**

Détermination de BC :

$\Sigma M_A = 0 = +5,38 \times 2 - 2 \times 1 - 1 \times 0 - AC \times 0 + BC \times 2 \sin 71,565^o + BD \times 3 = 0$

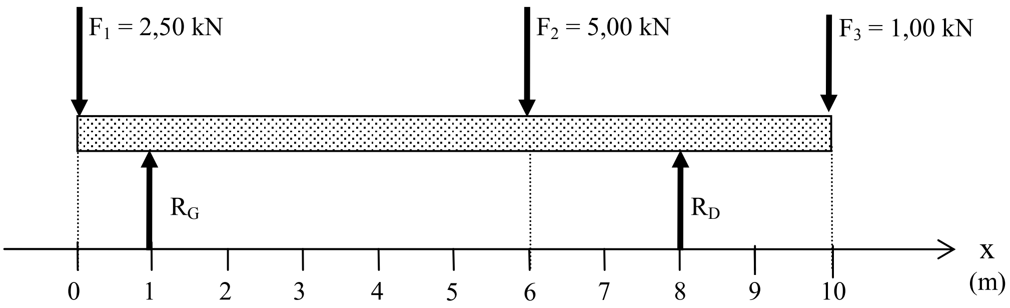
$\Rightarrow BC = (-10,76 + 2 - (-4,5067) \times 3) \div 2 \sin 71,565^o \Rightarrow$ **BC = + 2,5088 kN**

NOM : ……………………………………………………………………..

À compléter avant : ………………………………………………………………………

Poutre 5A

Pour la poutre suivante, tracer V(x) et M(x) et calculer le moment fléchissant maximum ainsi que les positions d'inflexion.



1° Calcul des réactions aux appuis:

$$\Sigma M_{(x=1)} = -2{,}5\times(1-0) + 5\times(6-1) - R_D\times(8-1) - 1\times(10-1) = 0$$

$$\Rightarrow R_D = (-2{,}5 + 25 + 9) \div 7 = 4{,}5 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R_D = 4{,}5 \text{ kN}}}$$

$$\Sigma M_{(x=8)} = -2{,}5\times(8-0) + R_G\times(8-1) - 5\times(8-6) + 1\times(10-8) = 0$$

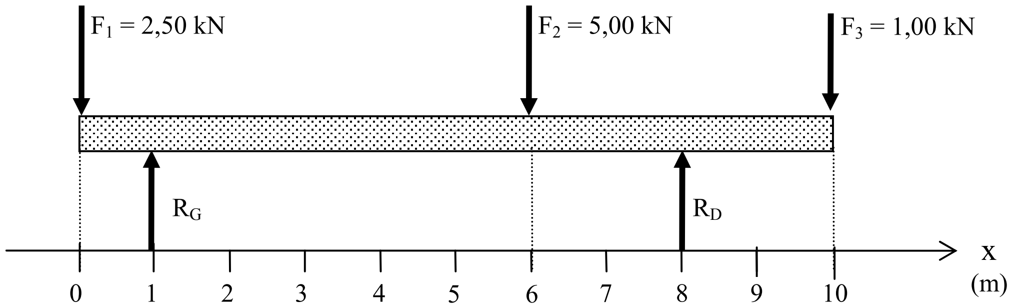
$$\Rightarrow R_G = (20 + 10 - 2) \div 7$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R_G = 4{,}0 \text{ kN}}}$$

Vérification :

$$\Sigma F_y = -2{,}5 + 4 - 5 + 4{,}5 - 1 = 0 \Rightarrow \text{Ok!}$$

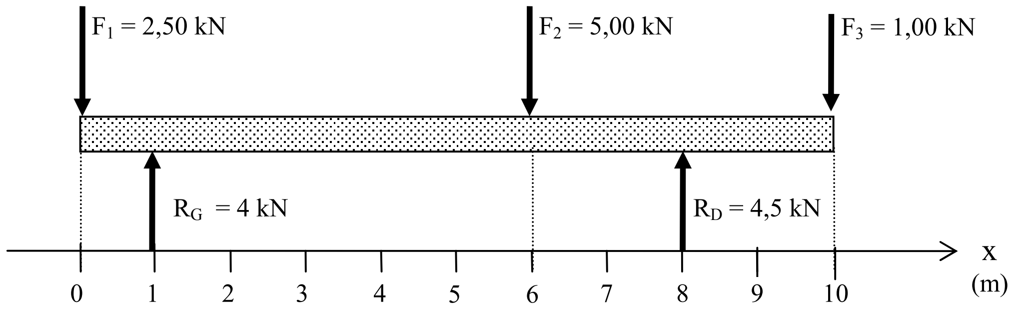
Poutre 5A (suite)



Équations de V(x)						
Région		**F_1**	**R_G**	**F_2**	**R_D**	**F_3**
0 < x < 1	V(x) =	**– 2,5**	**0**	**0**	**0**	**0**
1 < x < 6	V(x) =	**– 2,5**	**+ 4**	**0**	**0**	**0**
6 < x < 8	V(x) =	**– 2,5**	**+ 4**	**– 5**	**0**	**0**
8 < x < 10	V(x) =	**– 2,5**	**+ 4**	**– 5**	**+ 4,5**	**0**
10 < x	V(x) =	**– 2,5**	**+ 4**	**– 5**	**+ 4,5**	– 1

Calcul de V(x)							
x (m)		**F_1**	**R_G**	**F_2**	**R_D**	**F_3**	*(en kN)*
0^-	V(x) =	*– 2,5*	*0*	*0*	*0*	*0*	**= 0**
0^+	V(x) =	*– 2,5*	*0*	*0*	*0*	*0*	**= – 2,5**
1^-	V(x) =	*– 2,5*	*0*	*0*	*0*	*0*	**= – 2,5**
1^+	V(x) =	*– 2,5*	*+ 4*	*0*	*0*	*0*	**= + 1,5**
6^-	V(x) =	*– 2,5*	*+ 4*	*0*	*0*	*0*	**= + 1,5**
6^+	V(x) =	*– 2,5*	*+ 4*	*– 5*	*0*	*0*	**= – 3,5**
8^-	V(x) =	*– 2,5*	*+ 4*	*– 5*	*0*	*0*	**= – 3,5**
8^+	V(x) =	*– 2,5*	*+ 4*	*– 5*	*+ 4,5*	*0*	**= + 1**
10^-	V(x) =	*– 2,5*	*+ 4*	*– 5*	*+ 4,5*	*0*	**= + 1**
10^+	V(x) =	*– 2,5*	*+ 4*	*– 5*	*+ 4,5*	*– 1*	**= 0**

Poutre 5A (suite)



Équations de M(x)						
Région		**F_1**	**R_G**	**F_2**	**R_D**	**F_3**
$0 \le x \le 1$	M(x) =	**– 2,5x**	**0**	**0**	**0**	**0**
$1 \le x \le 6$	M(x) =	**– 2,5x**	**+ 4(x–1)**	**0**	**0**	**0**
$6 \le x \le 8$	M(x) =	**– 2,5x**	**+ 4(x–1)**	**– 5(x–6)**	**0**	**0**
$8 \le x \le 10$	M(x) =	**– 2,5x**	**+ 4(x–1)**	**– 5(x–6)**	**+ 4,5(x–8)**	**0**
$10 \le x$	M(x) =	**– 2,5x**	**+ 4(x–1)**	**– 5(x–6)**	**+ 4,5(x–8)**	**– 1(x–10)**

Calcul de M(x)							
x (m)		**F_1**	**R_G**	**F_2**	**R_D**	**F_3**	*(en kN.m)*
0	M(x) =	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	= **0**
1	M(x) =	*– 2,5*	*0*	*0*	*0*	*0*	= **– 2,5**
6	M(x) =	*– 15*	*+ 20*	*0*	*0*	*0*	= **+ 5**
8	M(x) =	*– 20*	*+ 28*	*– 10*	*0*	*0*	= **– 2**
10	M(x) =	*– 25*	*+ 36*	*– 20*	*+ 9*	*0*	= **0**

Poutre 5A (suite)

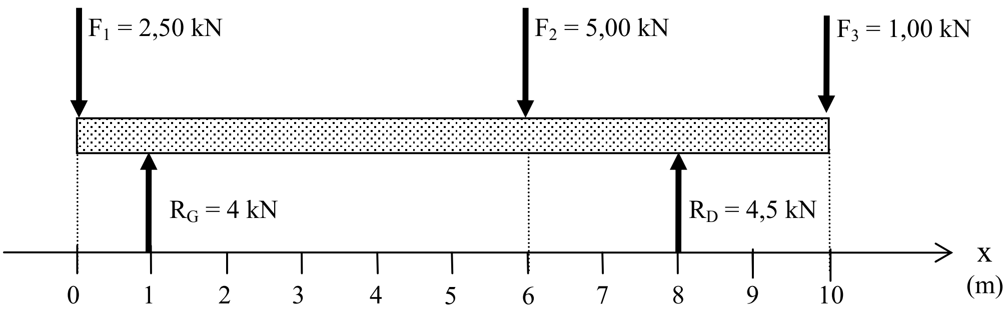


Diagramme de l'effort tranchant

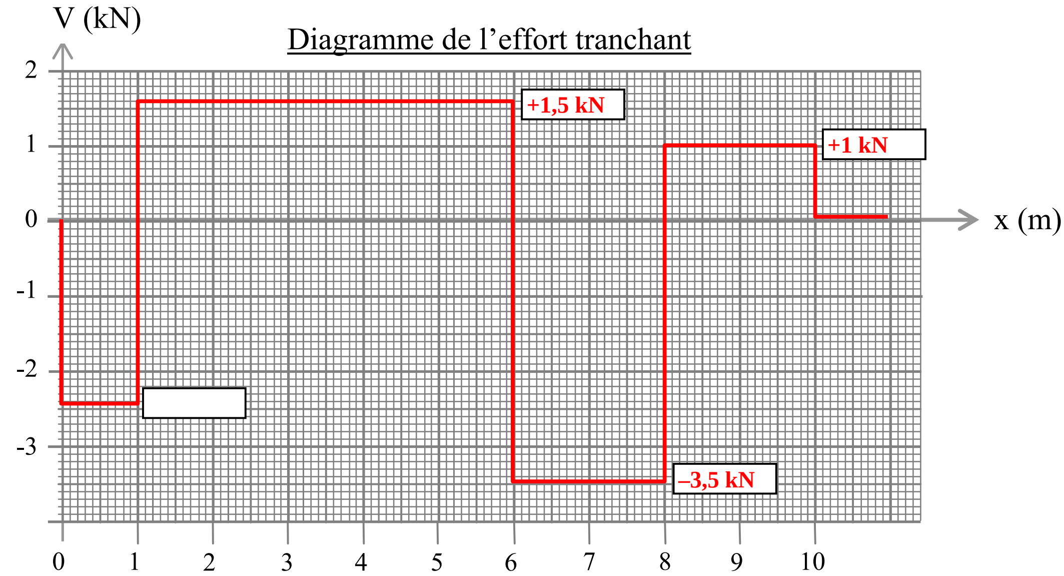
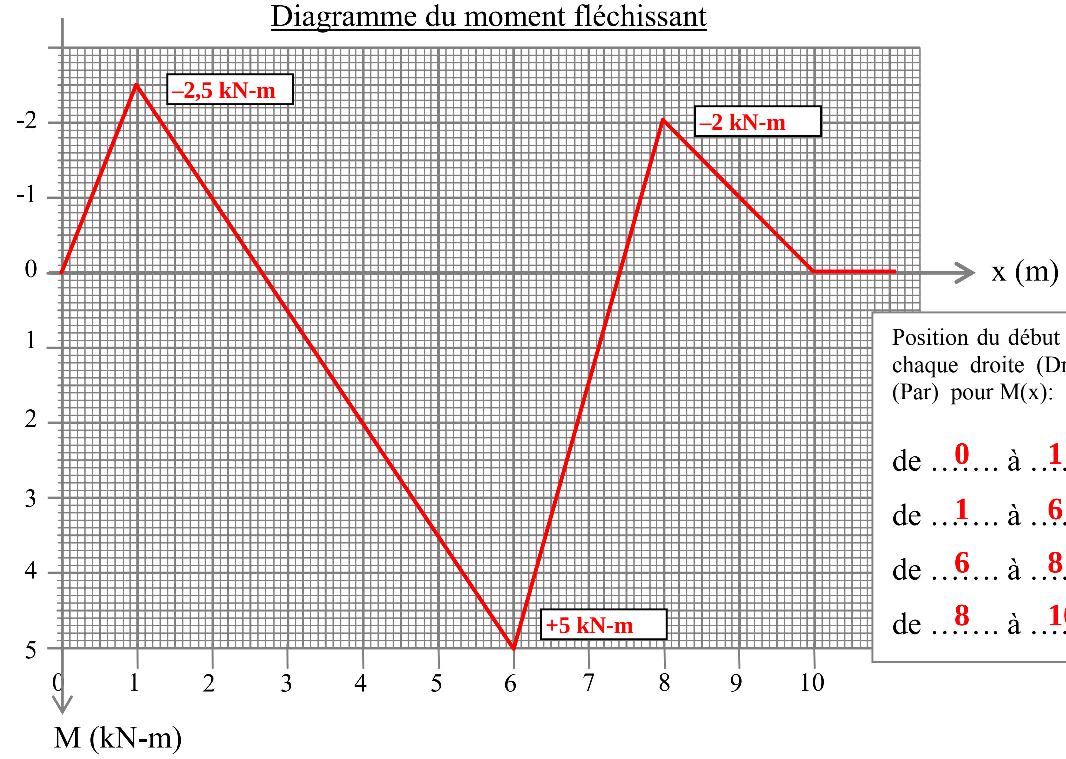


Diagramme du moment fléchissant



Position du début et de la fin de chaque droite (Dr) ou parabole (Par) pour M(x):

de ...0... à ...1... : Dr

de ...1... à ...6... : Dr

de ...6... à ...8... : Dr

de ...8... à ...10... : Dr

Poutre 5A (suite)

Calcul précis de M_{max}

Le moment fléchissant atteint sa valeur maximale pour une des valeurs de x où V(x) = 0.
M_{max} est donc la valeur de M(x) soit pour x = 0,1, 6, 8 ou 10 m.
On a déjà calculé M(x) pour ces valeurs de x dans le tableau précédent.

M(x = 0) = 0
M(x = 1) = –2,5 kN.m
M(x = 6) = +5 kN.m
M(x = 1) = –2 kN.m
M(x = 10) = 0

$\Rightarrow$ **M_{max} = 5 kN.m à x = 6 m.**

Calcul précis des positions d'inflexion

Région 1 < x < 6 : $M(x) = -2{,}5x + 4(x-1)$

$$\Rightarrow -2{,}5I_1 + 4(I_1 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow -2{,}5I_1 + 4I_1 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 1{,}5I_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I_1 = 2{,}6666\ldots\ m}$$

Région 6 < x < 8 : $M(x) = -2{,}5x + 4(x-1) - 5(x-6)$

$$\Rightarrow -2{,}5I_2 + 4(I_2 - 1) - 5(I_2 - 6) = 0$$

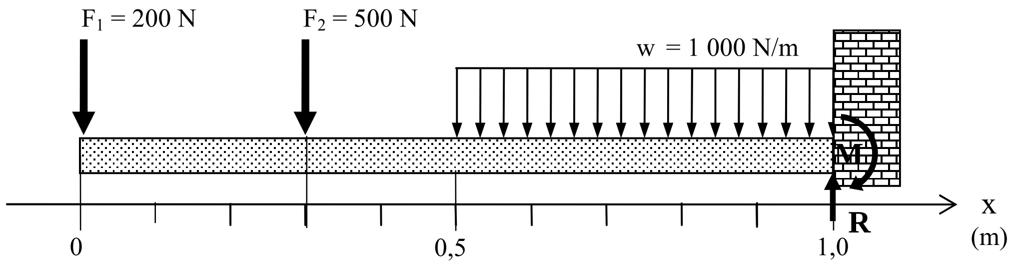
$$\Rightarrow -2{,}5I_2 + 4I_2 - 4 - 5I_2 + 30 = 0$$

$$\Rightarrow -3{,}5I_2 = -26 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I_2 = 7{,}4286\ m}$$

Réponses poutre 5A : M_{max} = 5,0000 kN à X = 6,000 m; I_1 = 2,6667 m et I_2 = 7,4286 m.

Poutre 5B

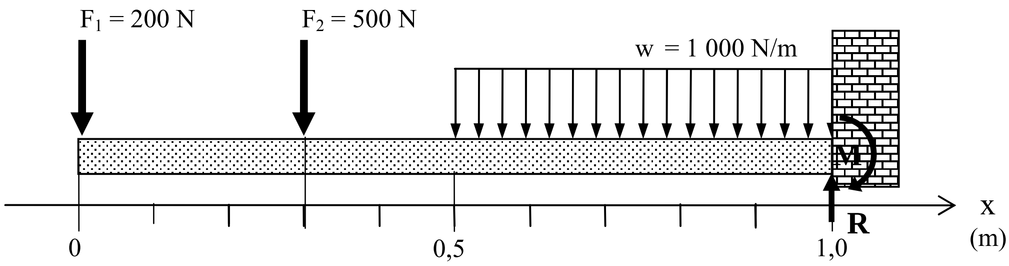
Pour la poutre suivante, tracer V(x) et M(x) et calculer le moment fléchissant maximum ainsi que les positions d'inflexion.



Équations de V(x)						
Région		**F_1**	**F_2**	**w**	**R**	
0 < x < 0,3	V(x) =	**– 200**	**0**	**0**	**0**	
0,3 < x < 0,5	V(x) =	**– 200**	**– 500**	**0**	**0**	
0,5 < x < 1	V(x) =	**– 200**	**– 500**	**–1000(x –0,5)**	**0**	
1 < x	V(x) =	**– 200**	**– 500**	**– 500**	**+ 1200**	**= 0**

Calcul de V(x)						
x (m)		**F_1**	**F_2**	**w**	**R**	
0^-	V(x) =	*0*	*0*	*0*	*0*	**= 0**
0^+	V(x) =	*– 200*	*0*	*0*	*0*	**= – 200**
$0,3^-$	V(x) =	*– 200*	*0*	*0*	*0*	**= – 200**
$0,3^+$	V(x) =	*– 200*	*– 500*	*0*	*0*	**= – 700**
0,5	V(x) =	*– 200*	*– 500*	*0*	*0*	**= – 700**
1^-	V(x) =	*– 200*	*– 500*	*– 500*	*0*	**= – 1 200**
x > 1	V(x) =	*– 200*	*– 500*	*– 500*	*+ 1200*	**= 0**

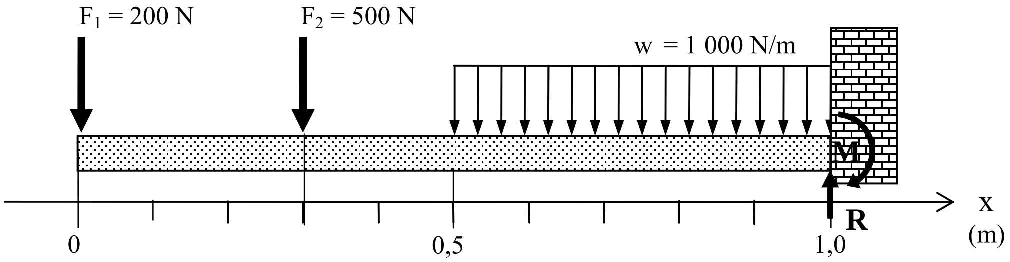
Poutre 5B (suite)

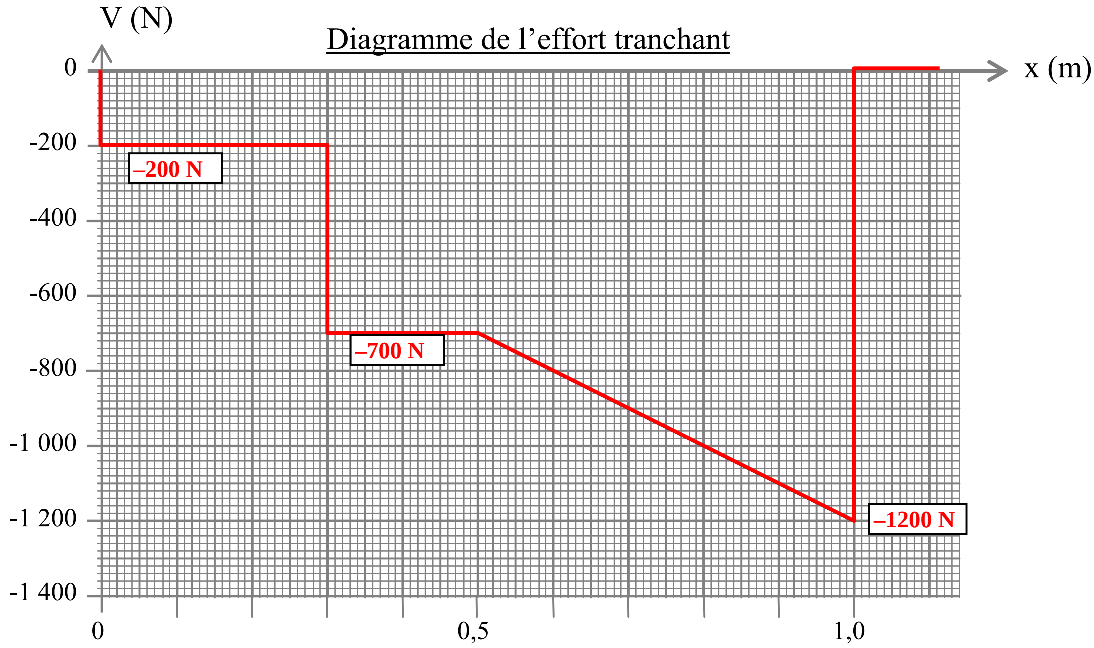


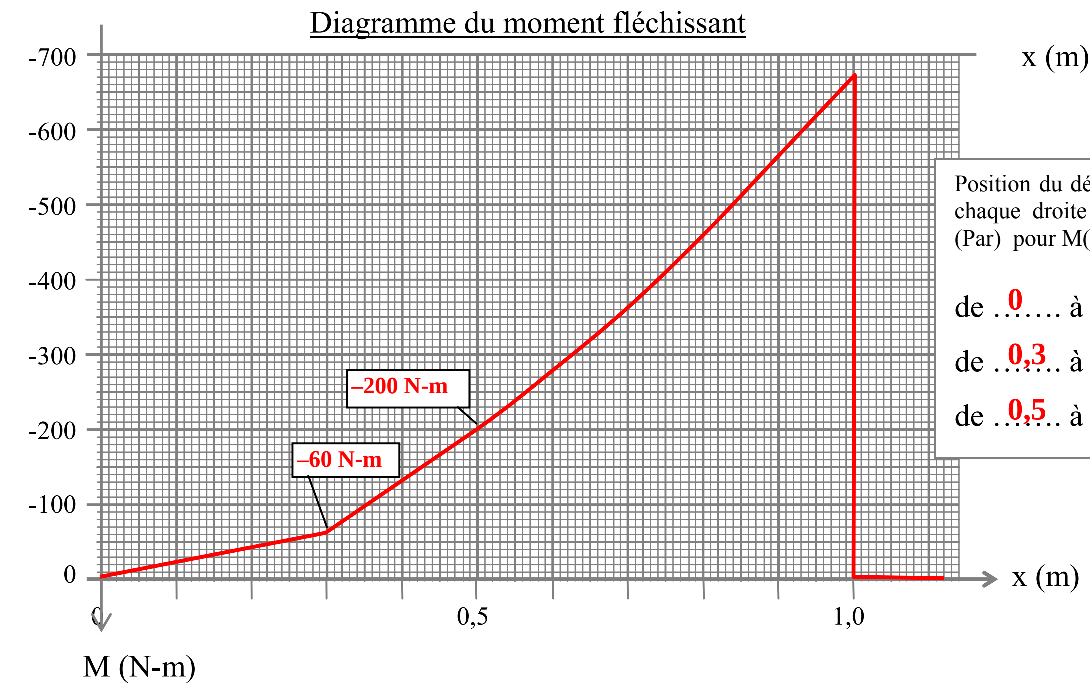
Équations donnant M(x)							
Région		F_1	F_2	w	R	M	
$0 \leq x \leq 0,3$	M(x) =	– 200x	0	0	0	0	
$0,3 \leq x \leq 0,5$	M(x) =	– 200x	–500(x–0,3)	0	0	0	
$0,5 \leq x \leq 1$	M(x) =	– 200x	–500(x–0,3)	$-500(x-0,5)^2$	0	0	
$1 \leq x$	M(x) =	– 200x	–500(x–0,3)	–500(x–0,75)	+1200(x–1)	+675	**= 0**

Calcul de M(x) *(en N-m)*							
x (m)		F_1	F_2	w	R	M	
0	M(x) =	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	**= 0**
0,3	M(x) =	*–60*	*0*	*0*	*0*	*0*	**= –60**
0,5	M(x) =	*–100*	*–100*	*0*	*0*	*0*	**= –200**
0,6	M(x) =	*–120*	*–150*	*–5*	*0*	*0*	**= –275**
0,7	M(x) =	*–140*	*–200*	*–20*	*0*	*0*	**= –360**
0,8	M(x) =	*–160*	*–250*	*–45*	*0*	*0*	**= –455**
0,9	M(x) =	*–180*	*–300*	*–80*	*0*	*0*	**= –560**
1^-	M(x) =	*–200*	*–350*	*–125*	*0*	*0*	**= –675**
1^+	M(x) =	*–200*	*–350*	*–125*	*0*	*+675*	**= 0**
$> 1^+$	M(x) =	*–200x*	*–500(x–0,3)*	*–500(x–0,75)*	*+1200(x–1)*	*+675*	**= 0**

Poutre 5B (suite)







Position du début et de la fin de chaque droite (Dr) ou parabole (Par) pour M(x):

de ..0.... à ..0,3.. : Dr

de ..0,3.. à ..0,5.. : Dr

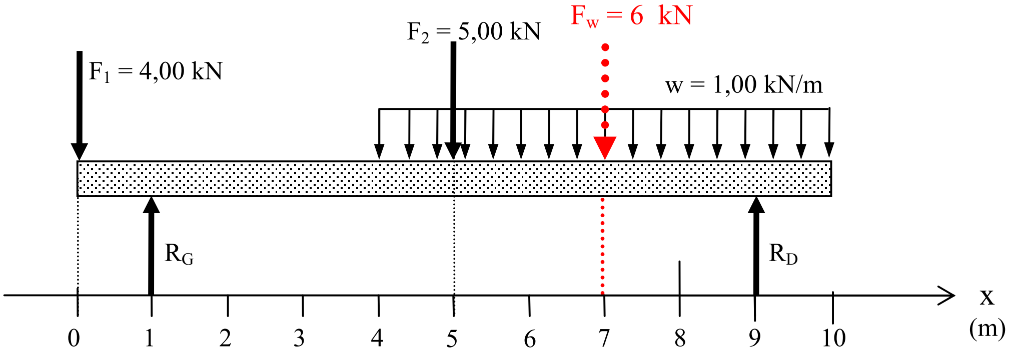
de ..0,5.. à ..1.... : Par

Valeur maximale (en valeur absolue) de l'effort tranchant = V_{max} = /- 1 200 N /

Valeur maximale (en valeur absolue) du moment fléchissant = M_{max} = /- 675 N.m /

Poutre 5C

Pour la poutre suivante, tracer V(x) et M(x) et calculer le moment fléchissant maximum ainsi que les positions d'inflexion.



1° Calcul des réactions aux appuis:

$$\Sigma M_{(x=1)} = -4\times(1-0) + 5\times(5-1) + 6\times(7-1) - R_D\times(9-1) = 0$$

$$\Rightarrow R_D = (-4 + 20 + 36) \div 8$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R_D = 6{,}5 \text{ kN}}}$$

$$\Sigma M_{(x=9)} = -4\times(9-0) + R_G\times(9-1) - 5\times(9-5) - 6\times(9-7) = 0$$

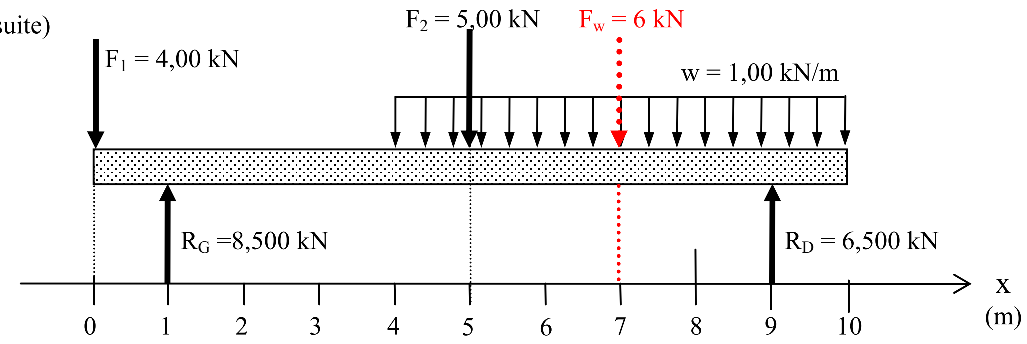
$$\Rightarrow R_G = (36 + 20 - 12) \div 8$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R_G = 8{,}5 \text{ kN}}}$$

Vérification :

$$\Sigma F_y = -4 + 8{,}5 - 5 - 6 + 6{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \text{Ok!}$$

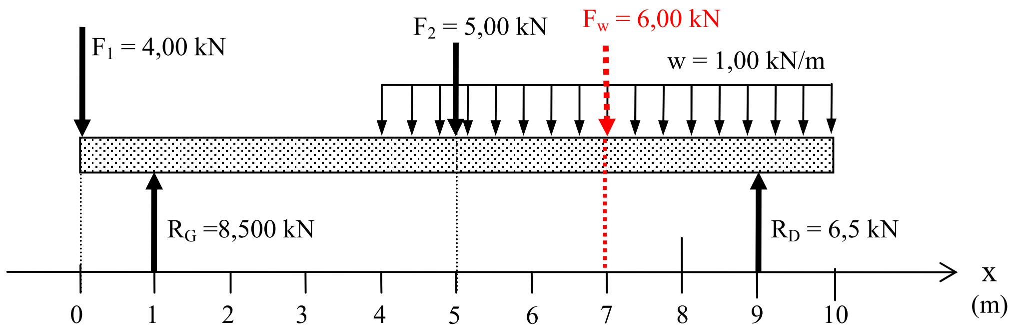
Poutre 5C (suite)



Équations de V(x)						
Région		**F_1**	**R_G**	**w**	**F_2**	**R_D**
0 < x < 1	V(x) =	**– 4**	**0**	**0**	**0**	**0**
1 < x < 4	V(x) =	**– 4**	**+ 8,5**	**0**	**0**	**0**
4 < x < 5	V(x) =	**– 4**	**+ 8,5**	**– 1(x-4)**	**0**	**0**
5 < x < 9	V(x) =	**– 4**	**+ 8,5**	**– 1(x–4)**	**0**	**0**
9 < x < 10	V(x) =	**– 4**	**+ 8,5,**	**– 1(x-4)**	**– 5**	**+ 6,5**
10 < x	V(x) =	**– 4**	**+ 8,5**	**– 6**	**– 5**	**+ 6,5**

Calcul de V(x)							
x (m)		**F_1**	**R_G**	**w**	**F_2**	**R_D**	*(en kN)*
0^-	V(x) =	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	**= 0**
0^+	V(x) =	*– 4*	*0*	*0*	*0*	*0*	**= – 4**
1^-	V(x) =	*– 4*	*0*	*0*	*0*	*0*	**= – 4**
1^+	V(x) =	*– 4*	*+ 8,5*	*0*	*0*	*0*	**= + 4,5**
4	V(x) =	*– 4*	*+ 8,5*	*0*	*0*	*0*	**= + 4,5**
5^-	V(x) =	*– 4*	*+ 8,5*	*0*	*0*	*0*	**= + 3,5**
5^+	V(x) =	*– 4*	*+ 8,5*	*– 1*	*– 5*	*0*	**= – 1,5**
9^-	V(x) =	*– 4*	*+ 8,5*	*– 1*	*– 5*	*0*	**= – 5,5**
9^+	V(x) =	*– 4*	*+ 8,5*	*– 5*	*– 5*	*+ 6,5*	**= + 1**
10	V(x) =	*– 4*	*+ 8,5*	*– 6*	*– 5*	*+ 6,5*	**= 0**

Poutre 5C (suite)



Équations de M(x)						
Région		**F_1**	**R_G**	**w**	**F_2**	**R_D**
$0 \le x \le 1$	M(x) =	*– 4x*	*0*	*0*	*0*	*0*
$1 \le x \le 4$	M(x) =	*– 4x*	*+ 8,5(x –1)*	*0*	*0*	*0*
$4 \le x \le 5$	M(x) =	*– 4x*	*+ 8,5(x –1)*	*– 0,5(x – 4)²*	*0*	*0*
$5 \le x \le 9$	M(x) =	*– 4x*	*+ 8,5(x –1)*	*– 0,5(x – 4)²*	*– 5(x – 5)*	*0*
$9 \le x \le 10$	M(x) =	*– 4x*	*+ 8,5(x –1)*	*– 0,5(x – 4)²*	*– 5(x – 5)*	*+ 6,5(x – 9)*
$10 \le x$	M(x) =	*– 4x*	*+ 8,5(x –1)*	*– 6(x – 7)*	*– 5(x – 5)*	*+ 6,5(x – 9)*

Calcul de M(x)							
x (m)		**F_1**	**R_G**	**w**	**F_2**	**R_D**	*(en kN.m)*
0	M(x) =	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*= 0*
1	M(x) =	*– 4*	*0*	*0*	*0*	*0*	*= – 4*
4	M(x) =	*– 16*	*+ 25,5*	*0*	*0*	*0*	*= 9,5*
4,5	M(x) =	*– 18*	*+ 29,75*	*– 0,125*	*0*	*0*	*= 11,625*
5	M(x) =	*– 20*	*+ 34*	*– 0,5*	*0*	*0*	*= 13,5*
6	M(x) =	*– 24*	*+ 42,5*	*– 2*	*– 5*	*0*	*= 11,5*
7	M(x) =	*– 28*	*+ 51*	*– 4,5*	*– 10*	*0*	*= 8,5*
8	M(x) =	*– 32*	*+ 59,5*	*– 8*	*– 15*	*0*	*= 4,5*
9	M(x) =	*– 36*	*+ 68*	*–12,5*	*– 20*	*0*	*= -0,5*
9,5	M(x) =	*–38*	*+ 72,25*	*–15,125*	*–22,5*	*+3,25*	*= – 0,125*
10	M(x) =	*– 40*	*+ 76,5*	*– 18*	*– 25*	*+ 6,5*	*= 0*

Poutre 5C (suite)

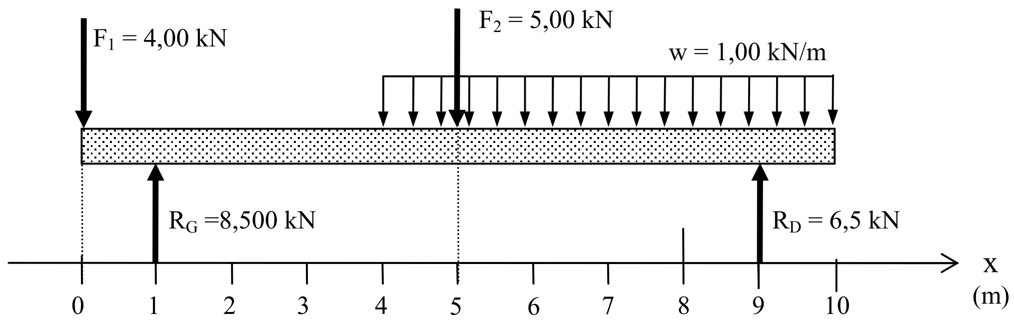


Diagramme de l'effort tranchant

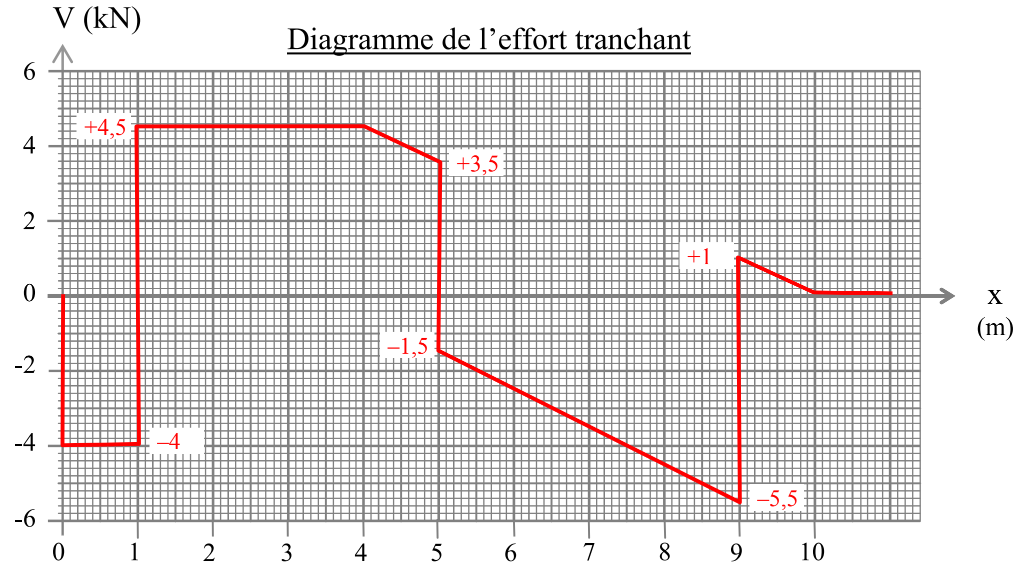
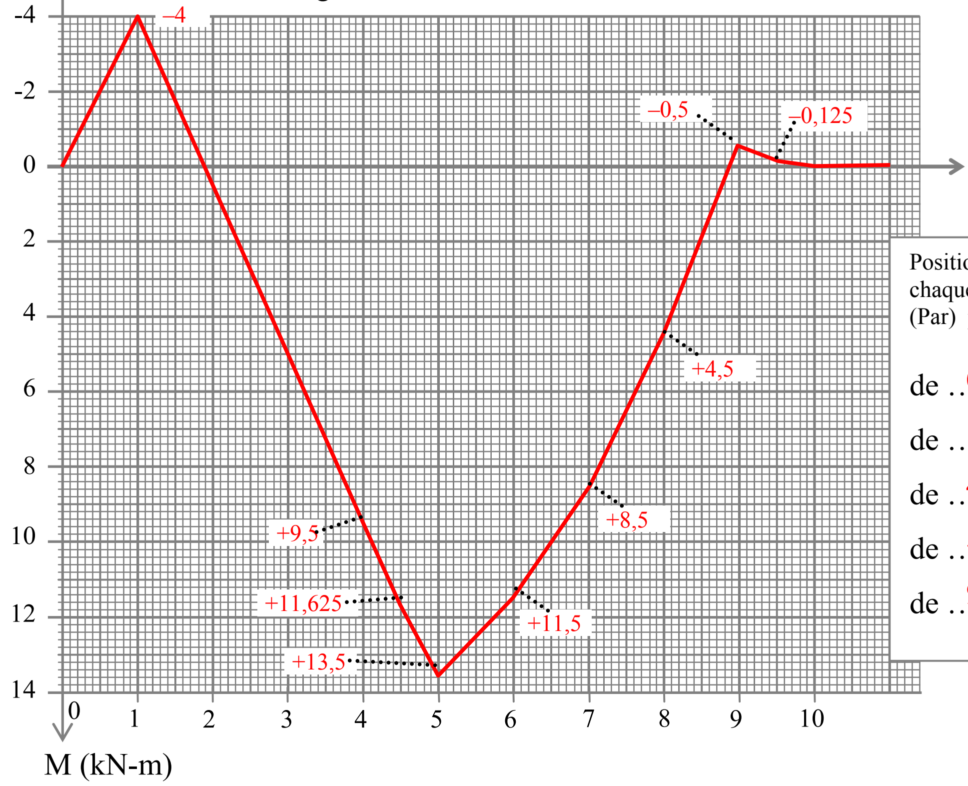


Diagramme du moment fléchissant



Position du début et de la fin de chaque droite (Dr) ou parabole (Par) pour M(x):

de ..0.... à ...1... : Dr

de ..1.... à ...4... : Dr

de ..4.... à ...5... : Par

de ..5.... à ...9... : Par

de ..9.... à ...10.. : Par

Poutre 5C (suite)

Calcul précis de M_{max}

Il faut calculer M(x) pour les positions où V(x) = 0, car c'est pour une de ces positions que M(x) atteindra sa valeur maximale (en valeur absolue)

$V = 0$ pour $x = 0;\ 1;\ 5\ ;\ 9$ et 10

x	0	1	5	9	10
$M(x)$	0	– 4	+ 13,5	+ 0,5	0

$$\Rightarrow M_{max} = 13{,}5\ kN.m \ \text{ à }\ x = 5\ m$$

Calcul précis des positions d'inflexion

Région $1 < x < 4$: $\quad M(x) = -4x + 8{,}5(x-1)$

$$\Rightarrow -4I_1 + 8{,}5I_1 - 8{,}5 = 0$$

$$\Rightarrow 4{,}5I_1 = 8{,}5 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{I_1 = 1{,}8888...\ m}}$$

Région $5 < x < 9$: $\quad M(x) = -4x + 8{,}5(x-1) - 0{,}5(x-4)^2 - 5(x-5)$

$$\Rightarrow -4I_2 + 8{,}5(I_2 - 1) - 0{,}5(I_2^2 - 8I_2 + 16) - 5(I_2 - 5) = 0$$

$$\Rightarrow -4I_2 + 8{,}5I_2 - 8{,}5 - 0{,}5I_2^2 + 4I_2 - 8 - 5I_2 + 25 = 0$$

$$\Rightarrow -0{,}5I_2^2 + (-4 + 8{,}5 + 4 - 5)I_2 - 8{,}5 - 8 + 25 = 0$$

$$\Rightarrow -0{,}5I_2^2 + 3{,}5I_2 + 8{,}5 = 0$$

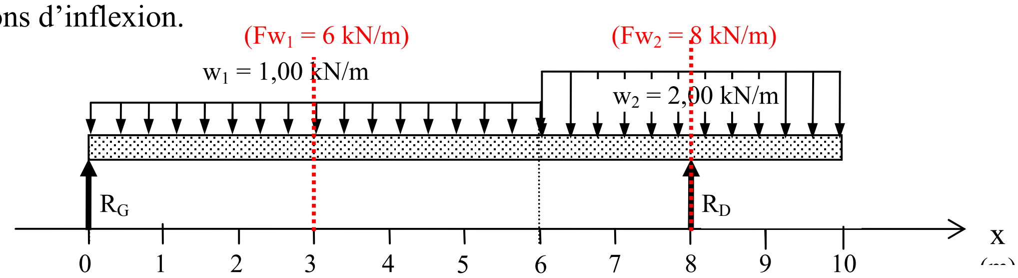
$$\Rightarrow I_2 = \frac{-3{,}5 \pm \sqrt{3{,}5^2 - 4(-0{,}5)8{,}5}}{2 \times (-0{,}5)} = 3{,}5 \pm 5{,}40833$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{I_2 = 8{,}90833\ m}} \qquad (I_2 = -1{,}90833\ m \ \text{ doit être rejeté car région } 5 < x < 9)$$

Réponses poutre 5C : M_{max} = 13,50 kN.m à X = 5,000 m; I_1 = 1,888 m et I_2 = 8,9083 m.

Poutre 5D

Pour la poutre suivante, tracer V(x) et M(x) et calculer le moment fléchissant maximum ainsi que les positions d'inflexion.



1° Calcul des réactions aux appuis:

$$\Sigma M_{(x=1)} = 6\times(3-0) + 8\times(8-0) - R_D\times(8-0) = 0$$

$$\Rightarrow R_D = (18 + 64) \div 8 \qquad \Rightarrow \underline{R_D = 10{,}25\ \text{kN}}$$

$$\Sigma M_{(x=8)} = R_G\times(8-0) - 6\times(8-3) + 8\times(8-8) + R_D\times(8-8) = 0$$

$$\Rightarrow R_G = (30) \div 8 \qquad \Rightarrow \underline{R_G = 3{,}75\ \text{kN}}$$

Vérification :

$$\Sigma F_y = 3{,}75 - 6 - 8 + 10{,}25 = 0 \quad \Rightarrow \text{Ok!}$$

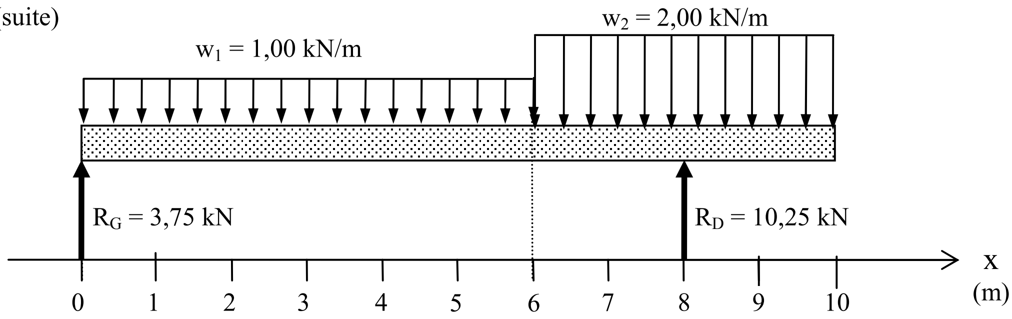
Équations de V(x)

Région		R_G	w_1	w_2	R_D
$0 < x < 6$	V(x) =	*3,75*	*–1(x – 0)*	*0*	*0*
$6 < x < 8$	V(x) =	*3,75*	*– 6*	*– 2(x – 6)*	*0*
$8 < x < 10$	V(x) =	*3,75*	*– 6*	*– 2(x – 6)*	*+ 10,25*

Calcul de V(x)

x (m)		R_G	w_1	w_2	R_D	*(en kN)*
0^-	V(x) =	*0*	*0*	*0*	*0*	= ***0***
0^+	V(x) =	*3,75*	*0*	*0*	*0*	= ***+ 3,75***
6	V(x) =	*3,75*	*– 6*	*0*	*0*	= ***– 2,25***
8^-	V(x) =	*3,75*	*– 6*	*– 4*	*0*	= ***– 6,25***
8^+	V(x) =	*3,75*	*– 6*	*– 4*	*+ 10,25*	= ***+ 4***
10	V(x) =	*3,75*	*– 6*	*– 8*	*+ 10,25*	= ***0***

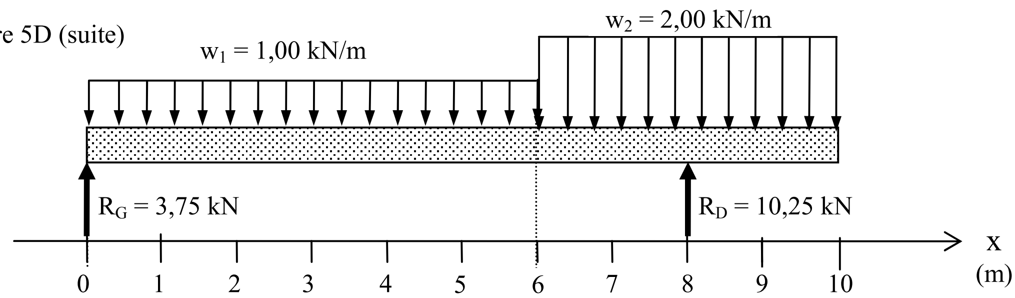
Poutre 5D (suite)

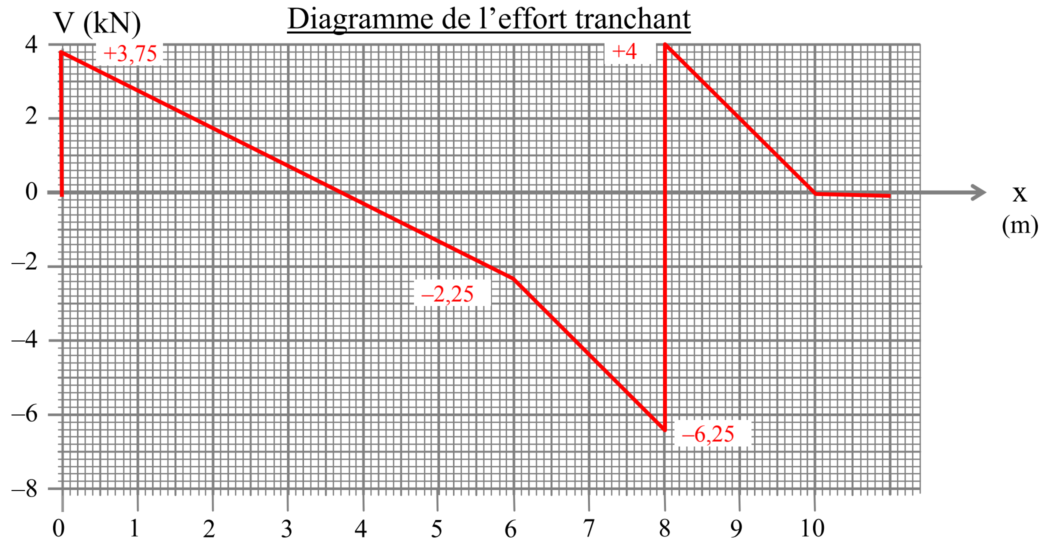


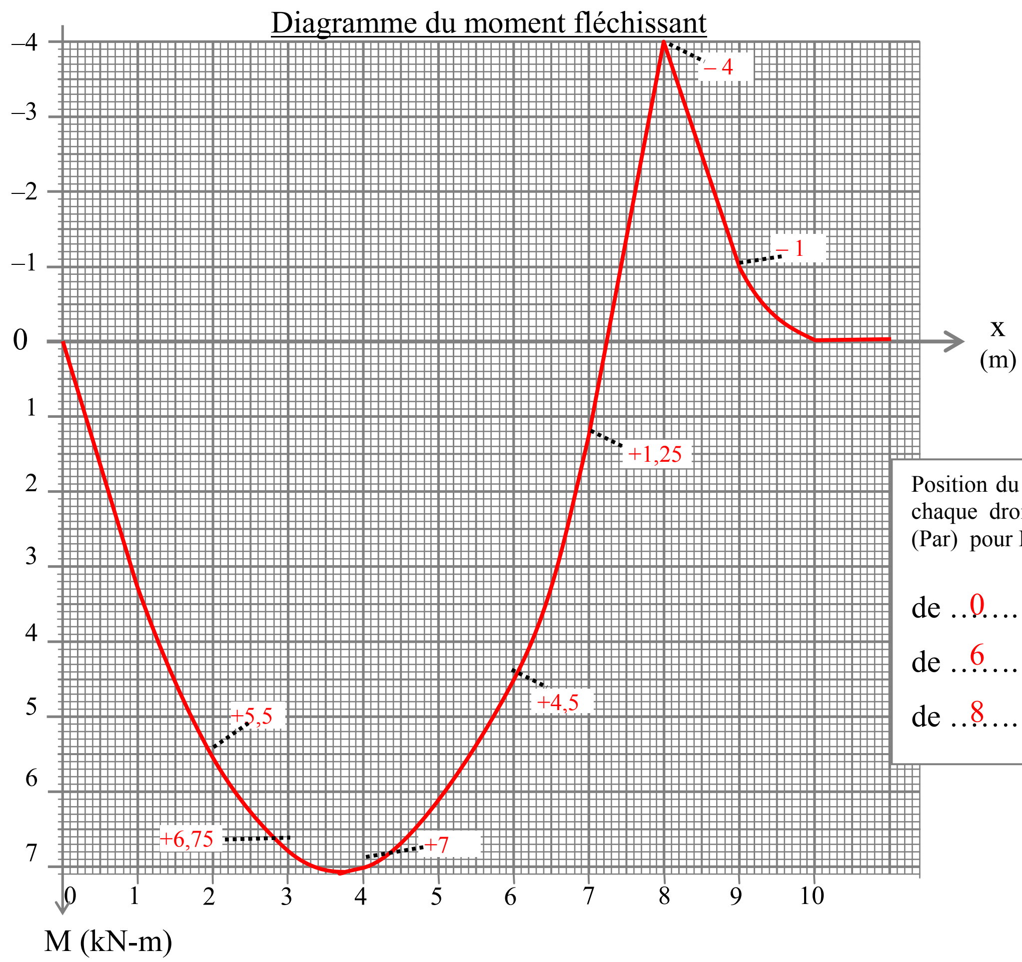
Équations de M(x)					
Région		R_G	w_1	w_2	R_D
$0 \le x \le 6$	M(x) =	$+3,75(x-0)$	$-0,5(x-0)^2$	0	0
$6 \le x \le 8$	M(x) =	$+3,75x$	$-6(x-3)$	$-1(x-6)^2$	0
$8 \le x \le 10$	M(x) =	$+3,75x$	$-6(x-3)$	$-1(x-6)^2$	$+10,25(x-8)$

Calcul de M(x)						
x (m)		R_G	w_1	w_2	R_D	*(en kN.m)*
0	M(x) =	*0*	*0*	*0*	*0*	*= 0*
1	M(x) =	*+ 3,75*	*– 0,5*	*0*	*0*	*= 3,25*
2	M(x) =	*+ 7,5*	*– 2*	*0*	*0*	*= 5,5*
3	M(x) =	*+ 11,25*	*– 4,5*	*0*	*0*	*= 6,75*
4	M(x) =	*+ 15*	*– 8*	*0*	*0*	*= 7*
6	M(x) =	*+ 22,5*	*– 18*	*0*	*0*	*= 4,5*
7	M(x) =	*+ 26,25*	*– 24*	*– 1*	*0*	*= 1,25*
8	M(x) =	*+ 30*	*– 30*	*– 4*	*0*	*= – 4*
9	M(x) =	*+ 33,75*	*– 36*	*– 9*	*+ 10,25*	*= – 1*
10	M(x) =	*+ 37,5*	*– 42*	*– 16*	*+ 20,5*	*= 0*

Poutre 5D (suite)







Position du début et de la fin de chaque droite (Dr) ou parabole (Par) pour M(x):

de …0…. à …6.. : Par

de …6…. à …8.. : Par

de …8…. à …10.. : Par

Poutre 5D (suite)

Calcul précis de M_{max}

Il faut calculer M(x) pour les positions où V(x) = 0, car c'est pour une de ces positions que M(x) atteindra sa valeur maximale (en valeur absolue)

$V(x) = 0$ *dans la région* $0 < x < 6$ *, ainsi que pour* $x = 8$.

Région $0 < x < 6 \quad : \quad V(x) = 3,75 - x$

$\Rightarrow V(x) = 0$ *lorsque* $3,75 - x = 0 \Rightarrow x = 3,75$

$\Rightarrow M_{(x=3,75)} = 3,75 \times 3,75 - (1 \times 3,75^2 / 2) = 7,03125$

Pour $x = 8 \quad M_{(x=8)} = -4$ *(voir tableau)*

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{M_{max} = 7,03125\ kN.m \quad à \quad x = 3,75\ m}}}$

Calcul précis des positions d'inflexion

Région $6 < x < 8 : \quad M(x) = +3,75x - 6(x-3) - 1(x-6)^2$

$\Rightarrow +3,75I_1 - 6(I_1 - 3) - (I_1 - 6)^2 = 0$

$\Rightarrow +3,75I_1 - 6(I_1 - 3) - (I_1^2 - 12I_1 + 36) = 0$

$\Rightarrow +3,75I_1 - 6I_1 + 18 - I_1^2 + 12I_1 - 36 = 0$

$\Rightarrow -I_1^2 + (3,75 - 6 + 12)I_1 + 18 - 36 = 0$

$\Rightarrow -I_1^2 + 9,75I_1 - 18 = 0$

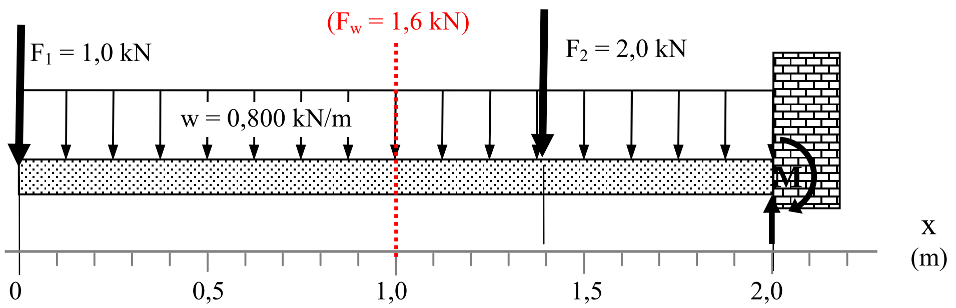
$$\Rightarrow I_1 = \frac{-9,75 \pm \sqrt{9,75^2 - 4(-1)(-18)}}{2 \times (-1)} = 4,875 \pm 2,40117$$

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{I_1 = 7,27617\ m}}}$

$\Rightarrow$ *(*$I_1 = 2,47383$ *m doit être rejeté car on est dans la région* $6 < x < 8$ *)*

Réponses poutre 5D : M_{max} = 7,031 kN.m à X = 3,75 m; I_1 = 7,2762 m

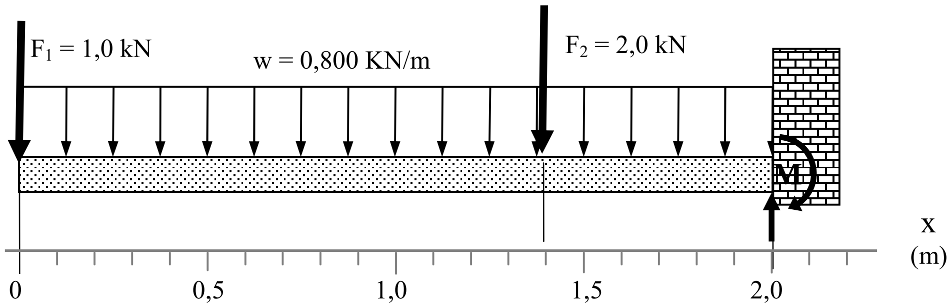
Poutre 5E



Équations de V(x)					
Région		$\mathbf{F_1}$	**w**	$\mathbf{F_2}$	**R**
0 < x < 1,4	V(x) =	*– 1*	*– 0,8x*	*0*	*0*
1,4 < x < 2⁻	V(x) =	*– 1*	*– 0,8x*	*– 2*	*0*
2^+ < x	V(x) =	*– 1*	*– 1,6*	*– 2*	*+ 4,6*

Calcul de V(x)						
x (m)		$\mathbf{F_1}$	**w**	$\mathbf{F_2}$	**R**	*kN*
0^-	V(x) =	*0*	*0*	*0*	*0*	*= 0*
0^+	V(x) =	*–1*	*0*	*0*	*0*	*= – 1*
$1,4^-$	V(x) =	*– 1*	*– 1,12*	*0*	*0*	*= – 2,12*
$1,4^+$	V(x) =	*– 1*	*– 1,12*	*– 2*	*0*	*= – 4,12*
2^-	V(x) =	*– 1*	*– 1,6*	*– 2*	*0*	*= – 4,6*
x > 2^+	V(x) =	*– 1*	*– 1,6*	*– 2*	*+ 4,6*	*= 0*

Poutre 5E (suite)



Équations donnant M(x)						
Région		**F_1**	**w**	**F_2**	**R**	**M**
$0 \leq x \leq 1{,}4$	M(x) =	$-x$	$-0{,}4(x-0)^2$	0	0	0
$1{,}4 \leq x < 2^-$	M(x) =	$-x$	$-0{,}4(x-0)^2$	$-2(x-1{,}4)$	0	0
$2^+ < x$	M(x) =	$-x$	$-1{,}6\,(x-1)$	$-2(x-1{,}4)$	$+4{,}6(x-2)$	$+M$

Calcul de M(x)							
x (m)		**F_1**	**w**	**F_2**	**R**	**M**	*kN-m*
0	M(x) =	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	= *0*
0,2	M(x) =	*– 0,2*	*– 0,016*	*0*	*0*	*0*	= *– 0,216*
0,5	M(x) =	*– 0,5*	*– 0,1*	*0*	*0*	*0*	= *– 0,6*
1,0	M(x) =	*– 1,0*	*– 0,4*	*0*	*0*	*0*	= *– 1,4*
1,4	M(x) =	*– 1,4*	*– 0,784*	*0*	*0*	*0*	= *– 2,184*
1,6	M(x) =	*– 1,6*	*– 1,024*	*– 0,4*	*0*	*0*	= *– 3,024*
1,8	M(x) =	*– 1,8*	*– 1,296*	*– 0,8*	*0*	*0*	= *– 3,896*
2^-	M(x) =	*– 2*	*– 1,6*	*– 1,2*	*0*	*0*	= *– 4,8*
2^+	M(x) =	*– 2*	*– 1,6*	*– 1,2*	*0*	*+ 4,8*	= *0*
$> 2^+$	M(x) =	$-x$	$-1{,}6\,(x-1)$	$-2(x-1{,}4)$	$+4{,}6(x-2)$	*+ 4,8*	= *0*
	M(x) =						=

Poutre 5E (suite)

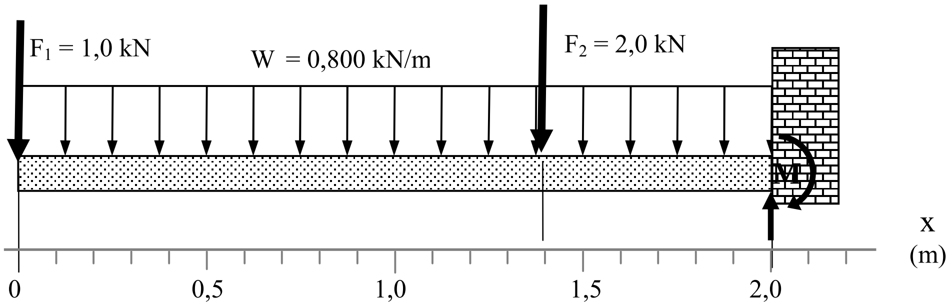


Diagramme de l'effort tranchant

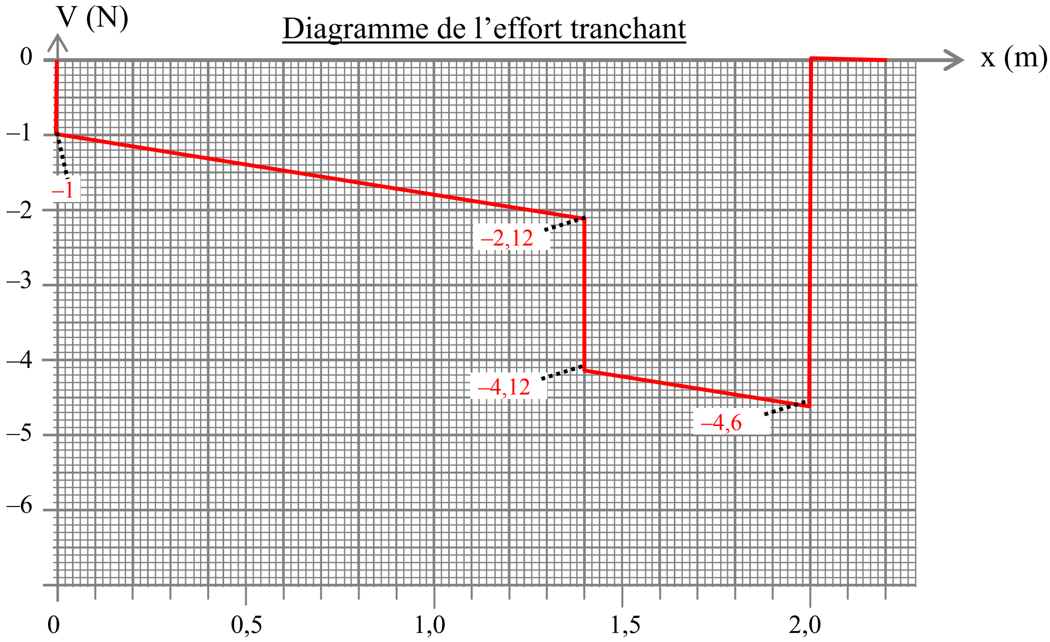
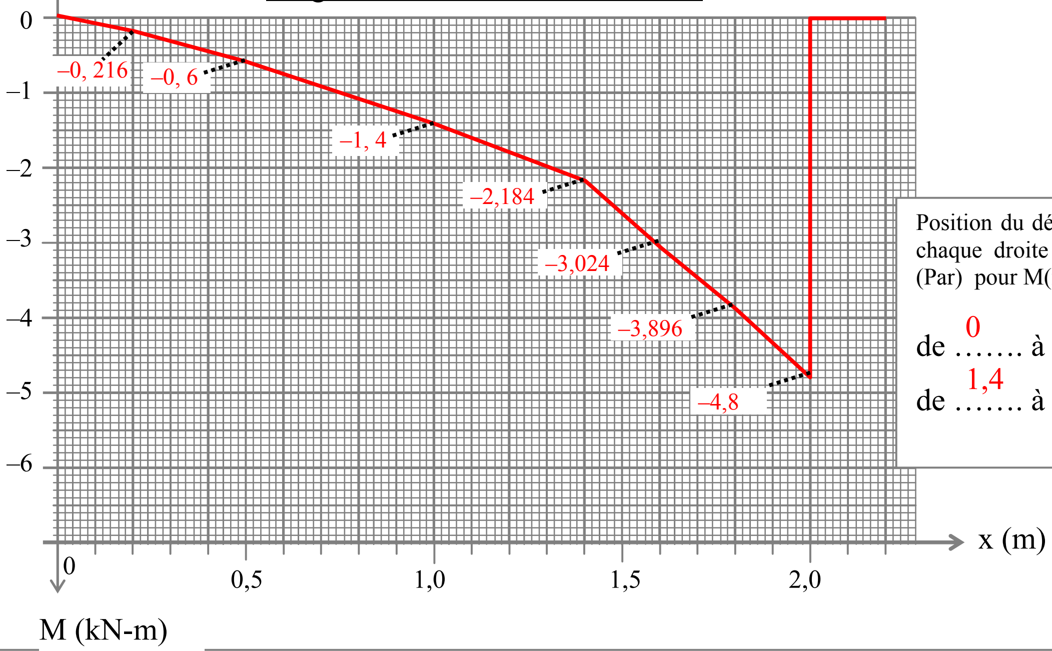


Diagramme du moment fléchissant



Position du début et de la fin de chaque droite (Dr) ou parabole (Par) pour M(x):

de 0 à 1,4 : Par

de 1,4 à 2^- : Par

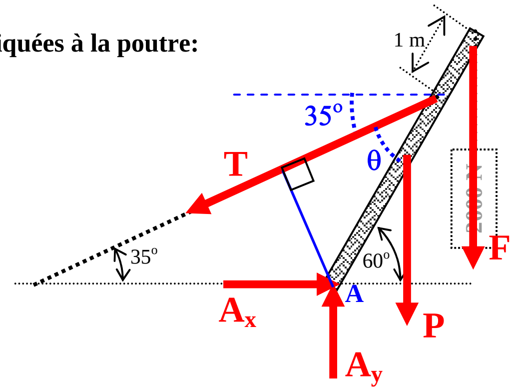
Valeur maximale (en valeur absolue) de l'effort tranchant $= V_{max} =$ *4,6 kN à x = 2,0 m*

Valeur maximale (en valeur absolue) du moment fléchissant $= M_{max} =$ *4,8 kN.m à x = 2,0 m*

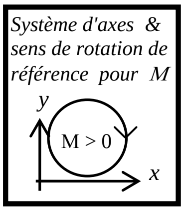
M.L.

2E3 (b) Une poutre de 4 m de longueur et pesant 400 N supporte une charge de 2 000 N. La poutre fait un angle de 60° au-dessus de l'horizontale et est fixée au sol en A par un pivot. Déterminer la tension dans le câble ainsi que les réactions horizontale et verticale sur la poutre en A si le câble fait un angle de 35° au-dessus du sol et est fixé à 1 m de l'extrémité libre de la poutre.
(Rép. : T=3470 N, A_x=2843 N, →; A_y=4391 N, ↑)

Diagramme des forces appliquées à la poutre:



$\theta = 60° - 35° = 25°$



Symbole des forces	Grandeur des forces F (kN)	sens de rotation (+ / -)	bras de levier d (m)	Moment de force $M_{...}(F) = (+/-)\ F\ d$ (kN-m)	θ_{ox} (°)	suivant OX $F_x = F \cos \theta_{ox}$ (kN)	suivant OY $F_y = F \sin \theta_{ox}$ (kN)
		Calcul de ΣM par rapport à l'axe passant par le point …A….			*Calcul des composantes des forces.*		
F	2	+	4 cos 60°	4		0	– 2
P	0,4	+	2 cos 60°	0,4		0	– 0,4
T	T	–	3 sin 25°	– 1,26785 T		– T cos 35°	– T sin 35°
A_x	A_x		0	0		+ A_x	0
A_y	A_y		0	0		0	+ A_y
				$\Sigma M_A = 0$		$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma F_y = 0$

Solution algébrique:

$\sum M_A = 0 \Rightarrow 4 + 0{,}4 - 1{,}26785\ T = 0 \Rightarrow T = 4{,}4 \div 1{,}26785 = \underline{3{,}4704\ kN}$

$\Rightarrow$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow 0 + 0 - T \cos 35° + A_x + 0 = 0 \Rightarrow A_x = T \cos 35° = \underline{2{,}8428\ kN}$

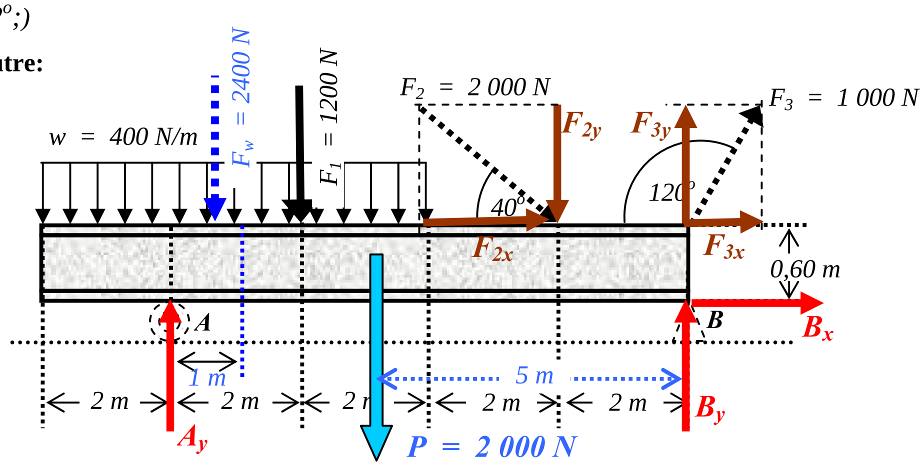
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -2 - 0{,}4 - T \sin 35° + 0 + A_y = 0 \Rightarrow A_y = 2{,}4 + T \sin 35° = \underline{4{,}3905\ kN}$

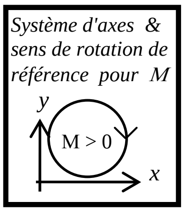
2E5 (c) La poutre ci-dessous est homogène et a un poids linéaire de 200 N/m. Déterminer, en appliquant au besoin le théorème de Varignon, la grandeur et la direction des réactions aux appuis en A et en B.
(Rép. : A=4419 N, 90°; B=2587 N, 142°;)

Diagramme des forces appliquées à la poutre:

F_w = 400 N/m × 6 m = 2 400 N;
P = 200 N/m × 10 m = 2 000 N

Varignon sur F_2 et F_3 :
F_{2x} = 2 000 cos 40° = 1532,09 N;
F_{2y} = – 2 000 sin 40° = –1285,58 N;
F_{3x} = 1000 cos 60° = 500 N;
F_{3y} = 1000 sin 60° = 866,03 N;





Symbole des forces	Grandeur des forces F (kN)	sens de rotation (+ / -)	bras de levier d (m)	Moment de force $M_{...}(F) = (+/-)\ F\ d$ (kN-m)	θ_{ox} (°)	suivant OX $F_x = F \cos \theta_{ox}$ (kN)	suivant OY $F_y = F \sin \theta_{ox}$ (kN)
		Calcul de ΣM par rapport à l'axe passant par le point ...B....			Calcul des composantes des forces.		
P	**2**	**–**	**5**	**– 10**		**0**	**– 2**
F_1	**1,2**	**–**	**6**	**– 7,2**		**0**	**– 1,2**
F_w	**2,4**	**–**	**7**	**– 16,8**		**0**	**– 2,4**
F_{2x}	**1,53209**	**+**	**0,6**	**+ 0,91925**		**+ 1,53209**	**0**
F_{2y}	**1,28558**	**–**	**2**	**– 2,57115**		**0**	**– 1,28558**
F_{3x}	**0,5**	**+**	**0,6**	**+ 0,3**		**+ 500**	**0**
F_{3y}	**0,86603**		**0**	**0**		**0**	**+ 0,86603**
A_y	**A_x**	**+**	**8**	**+ 8 A_y**		**0**	**+ A_y**
B_x	**B_x**		**0**	**0**		**+ B_x**	**0**
B_y	**B_y**		**0**	**0**		**0**	**+ B_y**
				$\Sigma M_B = 0$		$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma F_y = 0$

Solution algébrique:

$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y = (10 + 7{,}2 + 16{,}8 - 0{,}91925 + 2{,}57115 - 0{,}3) \div 8 = 4{,}41899\ kN = \underline{4\ 418{,}99\ N, \uparrow}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = -1{,}53209 - 500 = -\ 2{,}03209\ kN \Rightarrow B_x = \underline{2\ 032{,}09\ N, \leftarrow}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = 2 + 1{,}2 + 2{,}4 + 1{,}28558 - 0{,}86603 - 4{,}41899 = +1{,}60056\ kN \Rightarrow B_y = \underline{1\ 600{,}56\ N, \uparrow}$

$\vec{B} = (-\ 2\ 032{,}09;\ +1\ 600{,}56)N = \underline{2\ 586{,}7\ N\ à\ 141{,}77^o}$

203-001 D2

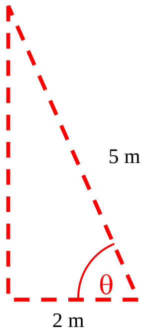
Nom : ……………………………………………………..

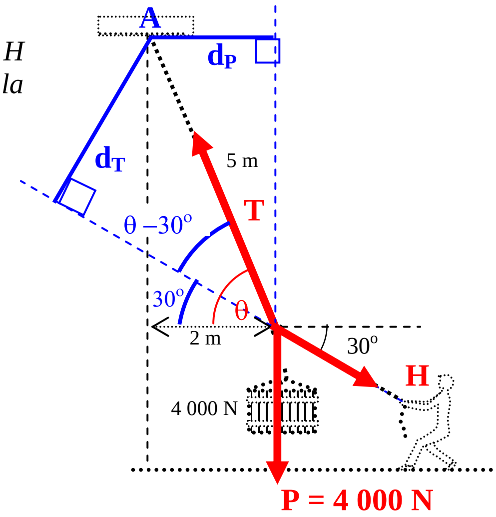
à compléter avant ………………………………………

2E1 (b) *Déterminer la tension T dans la corde ainsi que la force H avec laquelle l'homme doit tirer sur la corde pour maintenir la charge de 4 000 N dans la position indiquée.*
(Rép. : T = 5835 N et H = 2695 N)

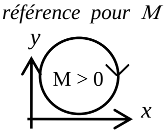
Diagramme des forces appliquées au nœud:

$\theta = \cos^{-1}(2 / 5) = 66{,}42^{o}$





Système d'axes & sens de rotation de référence pour M



		Calcul de ΣM par rapport à l'axe passant par le point …A….			*Calcul des composantes des forces.*		
Symbole des forces	*Grandeur des forces* F *(kN)*	*sens de rotation (+ / -)*	*bras de levier* d *(m)*	*Moment de force* $M_B(F) = (+/-)\ F\ d$ *(kN-m)*	θ_{ox} (°)	*suivant OX* $F_x = F \cos\theta_{ox}$ *(kN)*	*suivant OY* $F_y = F \sin\theta_{ox}$ *(kN)*
P	***4***	+	***2***	***+ 8***		***0***	***– 4***
T	***T***		***0***	***0***		$-T\cos 66{,}42^{o}$	$+T\sin 66{,}42^{o}$
H	***H***	–	$5\sin 36{,}42^{o}$	***– 2,9685 H***		$+2{,}695\cos 30^{o}$	$-2{,}695\sin 30^{o}$
				$\Sigma M_A = 0$		$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma F_y = 0$

Solution algébrique:

$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; 8 + 0 - 2{,}9685\,H = 0 \Rightarrow H = 8 \div 2{,}9685 = 2{,}695\ kN = \underline{2\ 695\ N}$

$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; 0 - T\cos 66{,}42^{o} + 2{,}695\cos 30^{o} = 0 \Rightarrow T = 2{,}695\cos 30^{o} \div \cos 66{,}42^{o} = 5{,}8344\ kN = \underline{5\ 835\ N}$

Vérification :

$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -4 + T\sin 66{,}42^{o} - 2{,}695\sin 30^{o} = 0 \Rightarrow T = (4 + 2{,}965\sin 30^{o}) \div \sin 66{,}42^{o} = 5{,}834\ kN \;\Rightarrow OK!$

Remarque : vu qu'il s'agit d'un problème de forces concourantes, il est aussi possible de résoudre avec $\sum F_x = 0$ ***et*** $\sum F_y = 0$ ***. Mais c'est plus facile avec*** $\sum M_A = 0.$